

2007年度 修士論文

2次元量子ウォーク模型

Two-dimensional quantum walk models

中央大学大学院 理工学研究科
博士課程前期課程 物理学専攻
渡部 恭平

謝辞

はじめに指導教官である香取眞理先生には、研究に取り組む姿勢や研究の進め方など多くのことを学ばせて頂きました。研究への議論にはお忙しい中、時間を惜しまず付き合っ下さりました。また、学内、学外を問わず様々なセミナーに参加する機会を与えて下さりました。私の研究に関わることはもちろんのこと、専門外の研究に触れることもでき、とても充実した研究生活を送ることができました。心より感謝いたします。

横浜国立大学の今野紀雄先生には、論文の投稿や研究を進めるにあたり、最新の研究の報告や助言を数多く頂きました。感謝いたします。兵庫県立大学の乾徳夫先生には、論文の投稿にあたり、多くの助言を頂きました。感謝いたします。香取研究室の小林奈央樹さんには、論文の投稿や研究を進めるにあたり、多くの助言を頂きました。感謝いたします。隣室の中野徹先生は中野研究室の学生のように私と接して下さり、とても研究を進めやすい環境を提供して下さいました。感謝いたします。松下貢先生にはセミナーで非常にお世話になり、そこでは貴重なお話を伺うことができました。感謝いたします。杉本秀彦先生と若林淳一先生には、修士論文の副査をして頂きました。感謝いたします。香取研究室の先輩の宮崎玄洋さんには量子ウォークの引継ぎやプログラムの作り方を一から丁寧に教えて頂いたり、研究で悩んでいるときには相談にのって頂きました。香取研究室の佐藤充規君とは多くの議論を交え、切磋琢磨しあい、お互いに成長することができました。また同室の中野研究室の皆さん、香取研究室の大谷諭君、和泉南さんにも支えて頂きました。感謝いたします。

最後になりますが、私を大学院へ通わせてくれた両親には深く感謝いたします。

第1章 Introduction

量子ウォークは将来、量子コンピュータで使われる量子アルゴリズムを考案するための数学的なモデルとして期待されている [1, 2, 3, 4, 5, 6]. ランダムウォークの量子化の系統的な研究の歴史は短い [7, 8, 9, 10] が、1次元量子ウォークモデルに対しては多くの研究がなされており、その数学的特性が明らかになってきている [11]. 例えば、2成分量子ウォークモデルでは長時間極限で擬速度のモーメントの収束が証明され、弱収束の定理が確立している [12, 13, 14, 15]. この弱収束の定理は回転行列を用いた多成分量子ウォークモデル [16, 17] に対して一般化されている.

近年、量子ウォークの話題の一つに高次元モデルの系統的な研究 [18, 19, 14, 20, 21] が挙げられる. グローヴァーの検索アルゴリズムに関係することから、その中でもグローヴァーウォークモデルが最も盛んに研究が成されている [22, 23, 24, 25, 26]. 乾ら [27] は解析的に2次元グローヴァーウォークモデルを研究し、局在化という興味深い現象を明らかにした. また2次元量子ウォークのデコヒーレンスが Oliveira ら [28] によって研究されている.

本論文では乾ら [27] によって導入された2次元量子ウォークモデルの1-パラメータ族についての研究成果を報告する. (パラメータを p と記す.) このモデルは $p = 1/2$ のときにグローヴァーウォークを含むモデルとなっている. 一般に、正方格子上の量子ウォークは4成分の波動関数で与えられ、各時刻で隣り合う4つの点へ飛び移る. 本論文では2次元量子ウォークにおける弱収束の定理を証明し、量子ウォーカーの長時間極限における振る舞いがパラメータ p 及び量子ウォーカーの初期状態 (量子初期ビット) にどのように依存するかを明らかにする.

本論文は以下のように構成されている. 第2章では2次元量子ウォークを定義する. 第3章では波数空間において量子ウォークの時間発展行列の固有値, 固有ベクトルを計算することにより、擬速度 $X_t/t, Y_t/t$ の結合モーメントの長時間極限での振る舞いを解析する. それにより2次元量子ウォークにおける弱収束の定理が与えられ、擬速度の極限分布の量子コインのパラメータ p と量子ウォーカーの初期量子ビットへの依存性が示される. 第4章ではその結果を用いて極限分布と計算機シミュレーションの結果を比較する. 第5章で今後の展望について議論する.

第2章 2次元量子ウォーク模型

2.1 正方格子上の量子ウォーク模型

まず正方格子 $\mathbb{Z}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{Z}\}$ 上での2次元離散時間量子ウォークの定義から始める. ここで \mathbb{Z} は整数全体の集合を表す. 時刻 $t = 0, 1, 2, \dots$ で位置 $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ にいる量子ウォーカーの状態を4成分の波動関数

$$\Psi(x, y, t) = \begin{pmatrix} \Psi_1(x, y, t) \\ \Psi_2(x, y, t) \\ \Psi_3(x, y, t) \\ \Psi_4(x, y, t) \end{pmatrix}$$

で与える. また量子コインは 4×4 のユニタリ行列 $A = (A_{jk})_{j,k=1}^4$ で与えられ, シフト行列は波数空間 $(k_x, k_y) \in [-\pi, \pi)^2$ では

$$S(k_x, k_y) = \begin{pmatrix} e^{ik_x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-ik_x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{ik_y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-ik_y} \end{pmatrix}$$

と表せる. ただしここで, $i = \sqrt{-1}$ である. 初期時刻 $t = 0$ において量子ウォーカーは原点にいるものとし, そのときの量子ウォーカーの状態を ${}^T\phi_0 = (q_1, q_2, q_3, q_4)$ とする. ただし $q_1, q_2, q_3, q_4 \in \mathbb{C}$ であり, $\sum_{j=1}^4 |q_j|^2 = 1$ とする. ここで上付き文字の T は, ベクトルや行列の転置を表し, \mathbb{C} は複素数全体の集合を表す. 時間発展行列を

$$V(k_x, k_y) \equiv S(k_x, k_y)A \quad (2.1)$$

と定義し, 波数空間での時刻 t における量子ウォーカーの状態は

$$\hat{\Psi}(k_x, k_y, t) = \left(V(k_x, k_y)\right)^t \phi_0, \quad t = 0, 1, 2, \dots \quad (2.2)$$

で与える. すると実空間での時間発展はフーリエ変換

$$\Psi(x, y, t) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk_x}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk_y}{2\pi} e^{i(k_x x + k_y y)} \hat{\Psi}(k_x, k_y, t)$$

により得られる. 逆フーリエ変換は

$$\hat{\Psi}(k_x, k_y, t) = \sum_{(x,y) \in \mathbf{Z}^2} \Psi(x, y, t) e^{-i(k_x x + k_y y)}$$

である.

この上で, 実空間での2次元量子ウォークの確率過程を以下のように定義する. 時刻 t における量子ウォーカーの位置の x 座標, y 座標をそれぞれ X_t, Y_t とする. 時刻 t での実空間での量子ウォーカーの位置の確率分布関数は次のように与えられる.

$$P(x, y, t) \equiv \text{Prob}\left((X_t, Y_t) = (x, y)\right) = \Psi^\dagger(x, y, t) \Psi(x, y, t) \quad (2.3)$$

ただしここで, $\Psi^\dagger(x, y, t) = {}^T \bar{\Psi}(x, y, t)$ は $\Psi(x, y, t)$ のエルミート共役である. X_t, Y_t の結合モーメントは $\alpha, \beta = 0, 1, 2, \dots$ として次のように与えられる.

$$\begin{aligned} \langle X_t^\alpha Y_t^\beta \rangle &\equiv \sum_{(x,y) \in \mathbf{Z}^2} x^\alpha y^\beta P(x, y, t) \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk_x}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk_y}{2\pi} \hat{\Psi}^\dagger(k_x, k_y, t) \left(i \frac{\partial}{\partial k_x}\right)^\alpha \left(i \frac{\partial}{\partial k_y}\right)^\beta \hat{\Psi}(k_x, k_y, t) \end{aligned} \quad (2.4)$$

2.2 一般化されたグローヴァーウォーク模型

乾ら [27] は次に示すような量子コインを用いて正方格子上でグローヴァー模型を含む2次元量子ウォーク模型を導入した.

$$A = \begin{pmatrix} -p & q & \sqrt{pq} & \sqrt{pq} \\ q & -p & \sqrt{pq} & \sqrt{pq} \\ \sqrt{pq} & \sqrt{pq} & -q & p \\ \sqrt{pq} & \sqrt{pq} & p & -q \end{pmatrix}, \quad q = 1 - p \quad (2.5)$$

ここで p は $0 < p < 1$ であり, $p = 1/2$ のとき, グローヴァーウォークで用いられる量子コインになる. 一般的に量子コインとして (2.5) を選んだとき時間発展行列 (2.1) は

$$\begin{aligned} V(k_x, k_y) &= \begin{pmatrix} e^{ik_x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-ik_x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{ik_y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-ik_y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -p & q & \sqrt{pq} & \sqrt{pq} \\ q & -p & \sqrt{pq} & \sqrt{pq} \\ \sqrt{pq} & \sqrt{pq} & -q & p \\ \sqrt{pq} & \sqrt{pq} & p & -q \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -pe^{ik_x} & qe^{ik_x} & \sqrt{pq}e^{ik_x} & \sqrt{pq}e^{ik_x} \\ qe^{-ik_x} & -pe^{-ik_x} & \sqrt{pq}e^{-ik_x} & \sqrt{pq}e^{-ik_x} \\ \sqrt{pq}e^{ik_y} & \sqrt{pq}e^{ik_y} & -qe^{ik_y} & pe^{ik_y} \\ \sqrt{pq}e^{-ik_y} & \sqrt{pq}e^{-ik_y} & pe^{-ik_y} & -qe^{-ik_y} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.6)$$

と与えられる.

第3章 極限分布の導出

3.1 モーメントの計算とその長時間極限

以下では前章で導入した量子ウォーク模型を解析する. この解析には Grimmett ら [14] によって考案された方法を用いた. まず時間発展行列 (2.6) を対角化することを考える. この行列の固有値は容易に

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -1, \quad \lambda_3 = e^{i\omega(k_x, k_y)}, \quad \lambda_4 = e^{-i\omega(k_x, k_y)} \quad (3.1)$$

と求めることができる. ここで $\omega(k_x, k_y)$ は方程式

$$\cos \omega(k_x, k_y) = -(p \cos k_x + q \cos k_y) \quad (3.2)$$

により決定される. また固有値 λ_j , $j = 1, 2, 3, 4$ に対応する固有ベクトルは

$$\mathbf{v}_j(k_x, k_y) = N_j \begin{pmatrix} q(e^{ik_y} \lambda_j + 1)(e^{ik_x} \lambda_j + 1)(e^{-ik_y} \lambda_j + 1) \\ q(e^{ik_y} \lambda_j + 1)(e^{-ik_x} \lambda_j + 1)(e^{-ik_y} \lambda_j + 1) \\ \sqrt{pq}(e^{ik_y} \lambda_j + 1)(e^{-ik_x} \lambda_j + 1)(e^{ik_x} \lambda_j + 1) \\ \sqrt{pq}(e^{-ik_x} \lambda_j + 1)(e^{ik_x} \lambda_j + 1)(e^{-ik_y} \lambda_j + 1) \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2, 3, 4 \quad (3.3)$$

と計算できる. ここで N_j は規格化因子であり, 以下のように定まる.

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4\sqrt{(1 + \cos k_x)(1 + \cos k_y)(q + pq \cos k_x + q^2 \cos k_y)}} \\ N_2 &= \frac{1}{4\sqrt{(1 - \cos k_x)(1 - \cos k_y)(q - pq \cos k_x - q^2 \cos k_y)}} \\ N_3 &= \frac{1}{4\sqrt{pq^2(\cos k_x - \cos k_y)^2(1 + p \cos k_x + q \cos k_y)(1 - p \cos k_x - q \cos k_y)}} \\ N_4 &= \frac{1}{4\sqrt{pq^2(\cos k_x - \cos k_y)^2(1 + p \cos k_x + q \cos k_y)(1 - p \cos k_x - q \cos k_y)}} \end{aligned}$$

ユニタリ行列 $R(k_x, k_y)$ を固有ベクトル (3.3) を用いて以下のように定義する.

$$R(k_x, k_y) \equiv (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$$

そのとき時間発展行列 (2.6) は固有値 (3.1) とユニタリ行列 $R(k_x, k_y)$ により

$$V(k_x, k_y) = R(k_x, k_y) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix} R^\dagger(k_x, k_y)$$

と対角化することができる. すると $R(k_x, k_y)$ のユニタリ性 $R^\dagger(k_x, k_y) = [R(k_x, k_y)]^{-1}$ により, (2.2) 式は

$$\begin{aligned} \hat{\Psi}(k_x, k_y, t) &= \left(V(k_x, k_y) \right)^t \phi_0 \\ &= R(k_x, k_y) \begin{pmatrix} (\lambda_1)^t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda_2)^t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda_3)^t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda_4)^t \end{pmatrix} R^\dagger(k_x, k_y) \phi_0 \\ &= \sum_{j=1}^4 (\lambda_j)^t \mathbf{v}_j C_j(k_x, k_y) \end{aligned} \quad (3.4)$$

のように書き表すことができる. ここで $C_j(k_x, k_y)$ は

$$C_j(k_x, k_y) \equiv \mathbf{v}_j^\dagger(k_x, k_y) \phi_0$$

である. (3.4) 式の展開式から, その微分に関して

$$\begin{aligned} &\left(i \frac{\partial}{\partial k_y} \right)^\beta \left(i \frac{\partial}{\partial k_x} \right)^\alpha \hat{\Psi}(k_x, k_y, t) \\ &= \left(-\frac{\partial \omega(k_x, k_y)}{\partial k_y} \right)^\beta \left(-\frac{\partial \omega(k_x, k_y)}{\partial k_x} \right)^\alpha (\lambda_3)^t \mathbf{v}_3(k_x, k_y) C_3(k_x, k_y) t^{\alpha+\beta} \\ &+ \left(\frac{\partial \omega(k_x, k_y)}{\partial k_y} \right)^\beta \left(\frac{\partial \omega(k_x, k_y)}{\partial k_x} \right)^\alpha (\lambda_4)^t \mathbf{v}_4(k_x, k_y) C_4(k_x, k_y) t^{\alpha+\beta} \\ &+ O(t^{\alpha+\beta-1}) \end{aligned}$$

という評価が直ちに得られる. ただしここで, $O(t^n)$ は t の n -次以下のオーダーの項を表すものとする. $R(k_x, k_y)$ はユニタリ行列なので, その列ベクトルはそれぞれ正規直交関係

$$\mathbf{v}_j^\dagger(k_x, k_y) \mathbf{v}_{j'}(k_x, k_y) = \delta_{jj'}$$

をなしている. このことより

$$\begin{aligned} &\hat{\Psi}^\dagger(k_x, k_y, t) \left(i \frac{\partial}{\partial k_y} \right)^\beta \left(i \frac{\partial}{\partial k_x} \right)^\alpha \hat{\Psi}(k_x, k_y, t) \\ &= \left\{ (-1)^{\alpha+\beta} |C_3(k_x, k_y)|^2 + |C_4(k_x, k_y)|^2 \right\} \\ &\times \left(\frac{\partial \omega(k_x, k_y)}{\partial k_y} \right)^\beta \left(\frac{\partial \omega(k_x, k_y)}{\partial k_x} \right)^\alpha t^{\alpha+\beta} + O(t^{\alpha+\beta-1}) \end{aligned} \quad (3.5)$$

となる. 時刻 t での量子ウォーカーの擬速度を

$$\mathbf{V}_t = \left(\frac{X_t}{t}, \frac{Y_t}{t} \right), \quad t = 1, 2, 3, \dots \quad (3.6)$$

と定義する. (3.5) の評価を (2.4) 式に代入すると, 長時間極限で擬速度 $X_t/t, Y_t/t$ の結合モーメントは収束し

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \left\langle \left(\frac{X_t}{t} \right)^\alpha \left(\frac{Y_t}{t} \right)^\beta \right\rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk_x}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk_y}{2\pi} \left\{ (-1)^{\alpha+\beta} |C_3(k_x, k_y)|^2 + |C_4(k_x, k_y)|^2 \right\} \\ &\times \left(\frac{\partial \omega(k_x, k_y)}{\partial k_y} \right)^\beta \left(\frac{\partial \omega(k_x, k_y)}{\partial k_x} \right)^\alpha \end{aligned}$$

という積分で与えられる. ここで (3.2) 式より以下を得る.

$$\omega(k_x, k_y) = \arccos \{ -(p \cos k_x + q \cos k_y) \}$$

微分の公式 $(d/dx)\arccos x = \mp 1/\sqrt{1-x^2}$ を使うと,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega(k_x, k_y)}{\partial k_x} &= -\frac{p \sin k_x}{\sqrt{1 - (p \cos k_x + q \cos k_y)^2}} \\ \frac{\partial \omega(k_x, k_y)}{\partial k_y} &= -\frac{q \sin k_y}{\sqrt{1 - (p \cos k_x + q \cos k_y)^2}} \end{aligned}$$

となる.

次に積分変数を k_x, k_y から v_x, v_y へ

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{p \sin k_x}{\sqrt{1 - (p \cos k_x + q \cos k_y)^2}} \\ v_y &= \frac{q \sin k_y}{\sqrt{1 - (p \cos k_x + q \cos k_y)^2}} \end{aligned} \quad (3.7)$$

によって変換することを考える. この写像 $(k_x, k_y) \in [-\pi, \pi]^2 \mapsto (v_x, v_y)$ は 2 対 1 の写像であり, その像は楕円の内側

$$\frac{v_x^2}{p} + \frac{v_y^2}{q} < 1 \quad (3.8)$$

とその楕円上の 4 点 $\{(p, q), (p, -q), (-p, q), (-p, -q)\}$ である. このとき (3.7) 式から次のような関係を得ることができる.

$$\begin{aligned} \sin k_x &= \frac{2v_x \sqrt{pq - qv_x^2 - pv_y^2}}{p\sqrt{(v_x + v_y + 1)(v_x - v_y + 1)(v_x + v_y - 1)(v_x - v_y - 1)}} \\ \cos k_x &= \frac{(1+q)v_x^2 + pv_y^2 - p}{p\sqrt{(v_x + v_y + 1)(v_x - v_y + 1)(v_x + v_y - 1)(v_x - v_y - 1)}} \\ \sin k_y &= \frac{2v_y \sqrt{pq - qv_x^2 - pv_y^2}}{q\sqrt{(v_x + v_y + 1)(v_x - v_y + 1)(v_x + v_y - 1)(v_x - v_y - 1)}} \\ \cos k_y &= -\frac{qv_x^2 + (1+p)v_y^2 - q}{q\sqrt{(v_x + v_y + 1)(v_x - v_y + 1)(v_x + v_y - 1)(v_x - v_y - 1)}} \end{aligned} \quad (3.9)$$

これらの関係より逆写像 $(v_x, v_y) \mapsto (k_x, k_y)$ に関するヤコビアン

$$\begin{aligned} J &\equiv \begin{vmatrix} \partial v_x / \partial k_x & \partial v_x / \partial k_y \\ \partial v_y / \partial k_x & \partial v_y / \partial k_y \end{vmatrix} \\ &= \frac{|(v_x + v_y + 1)(v_x - v_y + 1)(v_x + v_y - 1)(v_x - v_y - 1)|}{4} \end{aligned}$$

が得られる. この変数変換によって $C_j(k_x, k_y)$ は $\hat{C}_j(v_x, v_y)$, $j = 3, 4$ に変わるものとする
と, 積分は

$$\begin{aligned} &\lim_{t \rightarrow \infty} \left\langle \left(\frac{X_t}{t} \right)^\alpha \left(\frac{Y_t}{t} \right)^\beta \right\rangle \\ &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dv_x}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dv_y}{2\pi} \frac{1}{J} \left\{ |\hat{C}_3(v_x, v_y)|^2 + (-1)^{\alpha+\beta} |\hat{C}_4(v_x, v_y)|^2 \right\} v_x^\alpha v_y^\beta \mathbf{1}_{\{v_x^2/p + v_y^2/q < 1\}} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dv_x \int_{-\infty}^{\infty} dv_y v_x^\alpha v_y^\beta \mu_p(v_x, v_y) \left\{ |\hat{C}_3(v_x, v_y)|^2 + (-1)^{\alpha+\beta} |\hat{C}_4(v_x, v_y)|^2 \right\} \quad (3.10) \end{aligned}$$

と書き直すことができる. ここで $\mathbf{1}_{\{\Omega\}}$ は条件 Ω の指示関数であり, Ω を満足していれば $\mathbf{1}_{\{\Omega\}} = 1$, それ以外では $\mathbf{1}_{\{\Omega\}} = 0$ である. また $(v_x + v_y + 1)(v_x - v_y + 1)(v_x + v_y - 1)(v_x - v_y - 1)$ は, $v_x^2/p + v_y^2/q < 1$, $q = 1 - p$, $0 < p < 1$ のとき $(v_x + v_y + 1)(v_x - v_y + 1)(v_x + v_y - 1)(v_x - v_y - 1) > 0$ であることが確認できるので, $\mu_p(v_x, v_y)$ は

$$\begin{aligned} &\mu_p(v_x, v_y) \\ &= \frac{2}{\pi^2 (v_x + v_y + 1)(v_x - v_y + 1)(v_x + v_y - 1)(v_x - v_y - 1)} \mathbf{1}_{\{v_x^2/p + v_y^2/q < 1\}} \quad (3.11) \end{aligned}$$

で与えられる. この関数 $\mu_p(v_x, v_y)$ が正しく規格化されていることは, Appendix A に示した. この関数 $\mu_p(v_x, v_y)$ は擬速度の極限分布に対して, その基礎となる関数を与える. 図 3.1 では $p = 1/4$ のときの $\mu_p(v_x, v_y)$ を示す.

$|\hat{C}_j(v_x, v_y)|^2$, $j = 3, 4$ は v_x と v_y の関数である. ここで, ある 1 変数関数に対して, もし偶関数であるならそのパリティを $\pi = +$ で表し, 奇関数であるならそのパリティを $\pi = -$ で表すことにする. いま $M_{\pi_{v_x} \pi_{v_y}}(v_x, v_y)$ を, $|\hat{C}_3(v_x, v_y)|^2 + (-1)^{\alpha+\beta} |\hat{C}_4(v_x, v_y)|^2$ のうちで, v_x についてはパリティ π_{v_x} , v_y についてはパリティ π_{v_y} をもつ部分とする. $\mu_p(v_x, v_y)$ は v_x と v_y のいずれに対しても偶関数なので, (3.10) 式は $n, m = 1, 2, 3, \dots$ に対して

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \left\langle \left(\frac{X_t}{t} \right)^{2n} \left(\frac{Y_t}{t} \right)^{2m} \right\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} dv_x \int_{-\infty}^{\infty} dv_y v_x^{2n} v_y^{2m} \mu_p(v_x, v_y) \mathcal{M}_{++}(v_x, v_y) \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \left\langle \left(\frac{X_t}{t} \right)^{2n-1} \left(\frac{Y_t}{t} \right)^{2m} \right\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} dv_x \int_{-\infty}^{\infty} dv_y v_x^{2n-1} v_y^{2m} \mu_p(v_x, v_y) \mathcal{M}_{-+}(v_x, v_y) \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \left\langle \left(\frac{X_t}{t} \right)^{2n} \left(\frac{Y_t}{t} \right)^{2m-1} \right\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} dv_x \int_{-\infty}^{\infty} dv_y v_x^{2n} v_y^{2m-1} \mu_p(v_x, v_y) \mathcal{M}_{+-}(v_x, v_y) \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \left\langle \left(\frac{X_t}{t} \right)^{2n-1} \left(\frac{Y_t}{t} \right)^{2m-1} \right\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} dv_x \int_{-\infty}^{\infty} dv_y v_x^{2n-1} v_y^{2m-1} \mu_p(v_x, v_y) \mathcal{M}_{--}(v_x, v_y) \end{aligned}$$

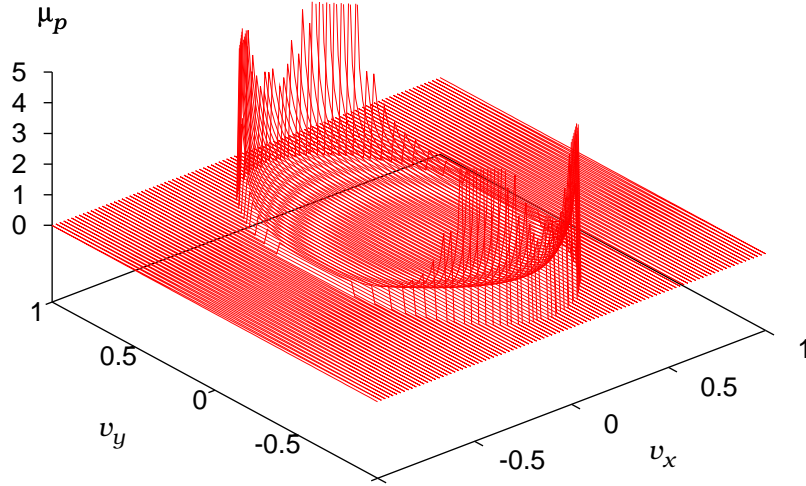


図 3.1: $p = 1/4$ における $\mu_p(v_x, v_y)$

となる. そこで

$$\mathcal{M}(v_x, v_y) = \mathcal{M}_{++}(v_x, v_y) + \mathcal{M}_{-+}(v_x, v_y) + \mathcal{M}_{+-}(v_x, v_y) + \mathcal{M}_{--}(v_x, v_y)$$

とおくと, (3.10) 式は $\alpha, \beta = 0, 1, 2, \dots$ に対して

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left\langle \left(\frac{X_t}{t} \right)^\alpha \left(\frac{Y_t}{t} \right)^\beta \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dv_x \int_{-\infty}^{\infty} dv_y v_x^\alpha v_y^\beta \mu_p(v_x, v_y) \mathcal{M}(v_x, v_y)$$

となる. 関数 $\mu_p(v_x, v_y)$ はパラメータ p に依存しているが量子ウォーカーの初期状態 $^T \phi_0 = (q_1, q_2, q_3, q_4)$ には依存していない. これに対して, 重み関数 $\mathcal{M}(v_x, v_y)$ は初期量子ビットに依存している. 次節ではこの重み関数 $\mathcal{M}(v_x, v_y)$ の初期量子ビット依存性について示す.

3.2 重み関数 $\mathcal{M}(v_x, v_y)$

(3.9) 式を用いることで極限分布の中の重み関数 $\mathcal{M}(v_x, v_y)$ は計算することができる. 以下ではその結果を与えることにする. ここで, 複素数 z に対して, $\text{Re}(z)$ は z の実部を意味し, \bar{z} は z の複素共役を表すものとする.

$$\mathcal{M}(v_x, v_y) = \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2 v_x + \mathcal{M}_3 v_y + \mathcal{M}_4 v_x^2 + \mathcal{M}_5 v_y^2 + \mathcal{M}_6 v_x v_y \quad (3.12)$$

ただし,

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_1 &= \frac{1}{2} + \operatorname{Re}(q_1\bar{q}_2 + q_3\bar{q}_4) \\
\mathcal{M}_2 &= -(|q_1|^2 - |q_2|^2) + \frac{q}{\sqrt{pq}} \operatorname{Re}(q_1\bar{q}_3 + q_1\bar{q}_4 - q_2\bar{q}_3 - q_2\bar{q}_4) \\
\mathcal{M}_3 &= -(|q_3|^2 - |q_4|^2) + \frac{p}{\sqrt{pq}} \operatorname{Re}(q_1\bar{q}_3 - q_1\bar{q}_4 + q_2\bar{q}_3 - q_2\bar{q}_4) \\
\mathcal{M}_4 &= \frac{1}{2}(|q_1|^2 + |q_2|^2 - |q_3|^2 - |q_4|^2) - \frac{1+q}{p} \operatorname{Re}(q_1\bar{q}_2) - \operatorname{Re}(q_3\bar{q}_4) \\
&\quad - \frac{q}{\sqrt{pq}} \operatorname{Re}(q_1\bar{q}_3 + q_1\bar{q}_4 + q_2\bar{q}_3 + q_2\bar{q}_4) \\
\mathcal{M}_5 &= -\frac{1}{2}(|q_1|^2 + |q_2|^2 - |q_3|^2 - |q_4|^2) - \operatorname{Re}(q_1\bar{q}_2) - \frac{1+p}{q} \operatorname{Re}(q_3\bar{q}_4) \\
&\quad - \frac{p}{\sqrt{pq}} \operatorname{Re}(q_1\bar{q}_3 + q_1\bar{q}_4 + q_2\bar{q}_3 + q_2\bar{q}_4) \\
\mathcal{M}_6 &= -\frac{1}{\sqrt{pq}} \operatorname{Re}(q_1\bar{q}_3 - q_1\bar{q}_4 - q_2\bar{q}_3 + q_2\bar{q}_4) \tag{3.13}
\end{aligned}$$

である.

また (3.13) 式は $\mathcal{M}_n = \phi_0^\dagger \mathbf{M}_n \phi_0$ と書き表せ, 次のような実対称行列 \mathbf{M}_n , $1 \leq n \leq 6$ を得ることが出来る.

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_1 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M}_2 = -\frac{1}{2\sqrt{pq}} \begin{pmatrix} 2\sqrt{pq} & 0 & -q & -q \\ 0 & -2\sqrt{pq} & q & q \\ -q & q & 0 & 0 \\ -q & q & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\mathbf{M}_3 &= -\frac{1}{2\sqrt{pq}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -p & p \\ 0 & 0 & -p & p \\ -p & -p & 2\sqrt{pq} & 0 \\ p & p & 0 & -2\sqrt{pq} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M}_4 = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & \frac{1+q}{p} & \frac{q}{\sqrt{pq}} & \frac{q}{\sqrt{pq}} \\ \frac{1+q}{p} & -1 & \frac{q}{\sqrt{pq}} & \frac{q}{\sqrt{pq}} \\ \frac{q}{\sqrt{pq}} & \frac{q}{\sqrt{pq}} & 1 & 1 \\ \frac{q}{\sqrt{pq}} & \frac{q}{\sqrt{pq}} & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
\mathbf{M}_5 &= -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{p}{\sqrt{pq}} & \frac{p}{\sqrt{pq}} \\ 1 & 1 & \frac{p}{\sqrt{pq}} & \frac{p}{\sqrt{pq}} \\ \frac{p}{\sqrt{pq}} & \frac{p}{\sqrt{pq}} & -1 & \frac{1+p}{q} \\ \frac{p}{\sqrt{pq}} & \frac{p}{\sqrt{pq}} & \frac{1+p}{q} & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M}_6 = \frac{1}{2\sqrt{pq}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

このような行列表現は佐藤ら [17] によって研究されているように, 模型を一般化する際に役立つと考えられる.

また, 積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} dv_x \int_{-\infty}^{\infty} dv_y \mu_p(v_x, v_y) \mathcal{M}(v_x, v_y)$$

は一般に 1 より小さい。これは固有値 λ_1 と λ_2 の寄与が含まれていないことによる。この差

$$\Delta = 1 - \int_{-\infty}^{\infty} dv_x \int_{-\infty}^{\infty} dv_y \mu_p(v_x, v_y) \mathcal{M}(v_x, v_y) \quad (3.14)$$

は分布の中で $v_x = v_y = 0$ におけるデルタ関数の重みを与える。つまり、 Δ は下の第 3 章 4 節で見るとおり 2 次元量子ウォークの原点近傍での局在確率を与える。

3.3 弱収束の定理と極限分布の対称性

今までの結果は次のような収束の定理としてまとめることができる。

定理

$\nu(v_x, v_y)$ を

$$\nu(v_x, v_y) = \mu_p(v_x, v_y) \mathcal{M}(v_x, v_y) + \Delta \delta(v_x) \delta(v_y) \quad (3.15)$$

とする。ここで $\mu_p(v_x, v_y)$, $\mathcal{M}(v_x, v_y)$ 及び Δ は (3.11) - (3.14) でそれぞれ与えられており、また $\delta(z)$ はディラックのデルタ関数を表している。このとき $\alpha, \beta = 0, 1, 2, \dots$ に対して

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left\langle \left(\frac{X_t}{t} \right)^\alpha \left(\frac{Y_t}{t} \right)^\beta \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dv_x \int_{-\infty}^{\infty} dv_y v_x^\alpha v_y^\beta \nu(v_x, v_y) \quad (3.16)$$

が成り立つ。

次に (3.12) 式の形から極限分布 $\nu(v_x, v_y)$ の対称性を求めることが出来る。以下ではその結果を示す。

- (i) $\mathcal{M}_3 = \mathcal{M}_6 = 0$ のとき、極限分布 $\nu(v_x, v_y)$ は v_x 軸に対して対称性を持つ; $\nu(v_x, -v_y) = \nu(v_x, v_y)$
- (ii) $\mathcal{M}_2 = \mathcal{M}_6 = 0$ のとき、極限分布 $\nu(v_x, v_y)$ は v_y 軸に対して対称性を持つ; $\nu(-v_x, v_y) = \nu(v_x, v_y)$
- (iii) $\mathcal{M}_2 = \mathcal{M}_3 = \mathcal{M}_6 = 0$ のとき、極限分布 $\nu(v_x, v_y)$ は v_x 軸と v_y 軸両方に対称性を持つ; $\nu(v_x, -v_y) = \nu(-v_x, v_y) = \nu(v_x, v_y)$
- (iv) $\mathcal{M}_2 = \mathcal{M}_3 = 0$ のとき、極限分布 $\nu(v_x, v_y)$ は v_z 軸に対して二回回転対称性を持つ; $\nu(-v_x, -v_y) = \nu(v_x, v_y)$

3.4 原点近傍での局在確率

関数 (3.11) の対称性により、(3.14) は

$$\Delta = 1 - \mathcal{M}_1 - \mathcal{M}_4 K_x - \mathcal{M}_5 K_y$$

ただし,

$$\begin{aligned} K_x &= \int_{-\infty}^{\infty} dv_x \int_{-\infty}^{\infty} dv_y \mu_p(v_x, v_y) v_x^2 \\ K_y &= \int_{-\infty}^{\infty} dv_x \int_{-\infty}^{\infty} dv_y \mu_p(v_x, v_y) v_y^2 \end{aligned}$$

となる. これらの積分は計算することが出来て, 原点における局在確率を具体的に

$$\Delta = 1 - \mathcal{M}_1 - \frac{2}{\pi}(\arcsin \sqrt{p} - \sqrt{pq})\mathcal{M}_4 - \frac{2}{\pi}(\arcsin \sqrt{q} - \sqrt{pq})\mathcal{M}_5 \quad (3.17)$$

と求めることが出来る. 証明は Appendix A に与えた.

局在確率 Δ は, パラメータ $p \in (0, 1)$ と初期量子ビット ${}^T\phi_0 = (q_1, q_2, q_3, q_4) \in \mathbf{C}^4, \sum_{j=1}^4 |q_j|^2 = 1$ の関数である. 例えば, 初期量子ビット ${}^T\phi_0 = (1, 1, -1, -1)/2$ と ${}^T\phi_0 = (1, 1, 1, 1)/2$ に対して局在確率 (3.17) はそれぞれ以下のように与えられる.

$$\Delta = \frac{1}{\pi}(1 - 2\sqrt{pq}) \left\{ \frac{1}{p} \arcsin \sqrt{p} + \frac{1}{q} \arcsin \sqrt{q} - \frac{1}{\sqrt{pq}} \right\}$$

$$\Delta = \frac{1}{\pi}(1 + 2\sqrt{pq}) \left\{ \frac{1}{p} \arcsin \sqrt{p} + \frac{1}{q} \arcsin \sqrt{q} - \frac{1}{\sqrt{pq}} \right\}$$

ただし, $q = 1 - p$ である. 図 3.2 に示すように, ${}^T\phi_0 = (1, 1, -1, -1)/2$ のとき, 局在確率 Δ はグローヴァーウォーク模型 ($p = q = 1/2$) に対して, 最小値 0 をとる. 一方で, ${}^T\phi_0 = (1, 1, 1, 1)/2$ のときグローヴァーウォーク模型 ($p = q = 1/2$) に対して, 最大値 $= 2(\pi - 2)/\pi = 0.726 \dots$ をとる.

特にパラメータに依存した初期量子ビット

$${}^T\phi_0 = \left(\pm \sqrt{\frac{p}{2}}, \pm \sqrt{\frac{p}{2}}, \mp \sqrt{\frac{q}{2}}, \mp \sqrt{\frac{q}{2}} \right), \quad q = 1 - p \quad (3.18)$$

を選べば $\mathcal{M}_1 = 1, \mathcal{M}_4 = \mathcal{M}_5 = 0$ であるので $\Delta \equiv 0$ である. したがって, このとき全ての $p \in (0, 1)$ に対して原点近傍に局在しない分布が得られる.

また, Δ は擬速度の極限分布 (3.15) に見られるように原点でのディラックのデルタ関数の強さとして定義されている. これは Δ が出発点 (原点) 近傍での量子ウォーカーの局在確率を与えるということの意味している. それゆえ, 一般的に Δ は乾ら [27] によって計算されているちょうど出発点での局在確率の時間平均 \bar{P}_∞ より大きい. 例えば, 初期ビットを ${}^T\phi_0 = (1, 1, 1, 1)/2$ とした場合のグローヴァーウォーク模型 ($p = q = 1/2$) で比較すると $\Delta = 2(\pi - 2)/\pi = 0.726 \dots$ であるのに対して \bar{P}_∞ は [27] の Sec.V.C で報告されているように $\bar{P}_\infty = 2\{(\pi - 2)/\pi\}^2 = 0.264 \dots$ である.

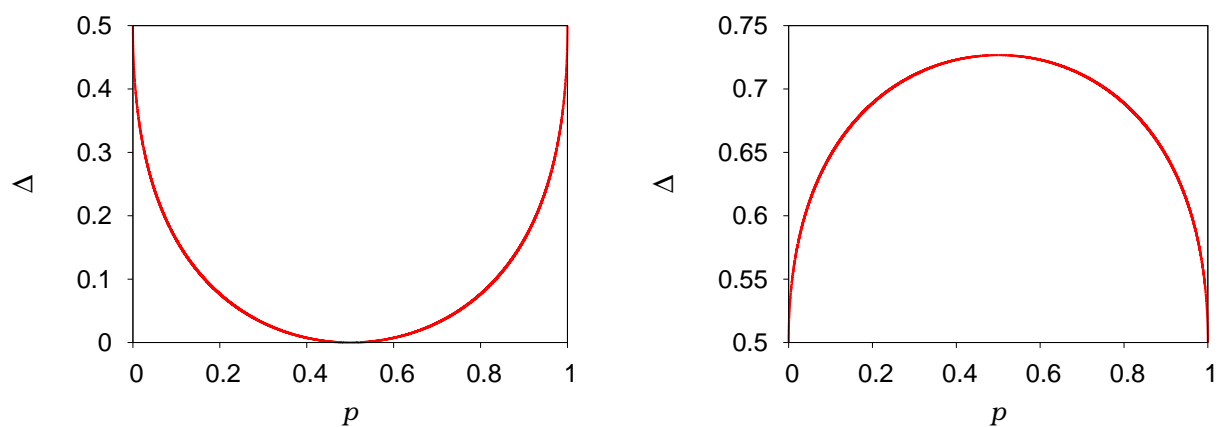


図 3.2: 原点近傍での局在確率のパラメータ $p \in (0, 1)$ 依存性. (a) ${}^T\phi_0 = (1, 1, -1, -1)/2$ の場合. $p = 1/2$ (グローヴァーウォーク模型) の時, $\Delta = 0$. (b) ${}^T\phi_0 = (1, 1, 1, 1)/2$ の場合. $p = 1/2$ (グローヴァーウォーク模型) の時, $\Delta = 2(\pi - 2)/\pi = 0.726\dots$.

第4章 計算機シミュレーションとの比較

上記の結果の妥当性を示すために、計算機シミュレーションの結果との比較を示すことにする。以下の図(図 4.1-4.4)は $p = 1/4$ におけるもので、前章で報告した対称性を示している。ただし、左図は計算機シミュレーションによって得られた時刻 $t = 30$ での擬速度 $\mathbf{V}_t = (X_t/t, Y_t/t)$ の分布を表し、右図は前章で与えられた極限分布 $\nu(v_x, v_y)$ を表す。

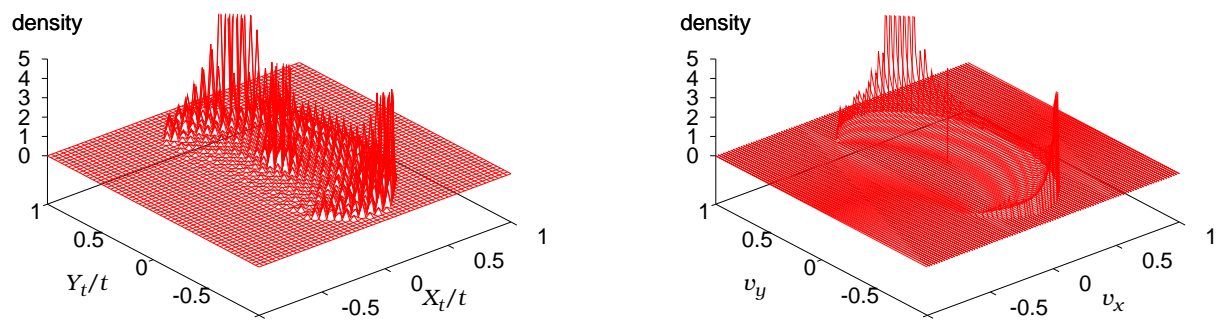


図 4.1: 初期量子ビット ${}^T\phi_0 = (1, -1, 1, 1)/2$ の場合. このとき $M_3 = M_6 = 0$ なので、極限分布は v_x 軸に対して対称性をもっている; $\nu(v_x, -v_y) = \nu(v_x, v_y)$. (a) 計算機シミュレーションによって得られた時刻 $t = 30$ での擬速度 $\mathbf{V}_t = (X_t/t, Y_t/t)$ の分布 (b) 極限分布.

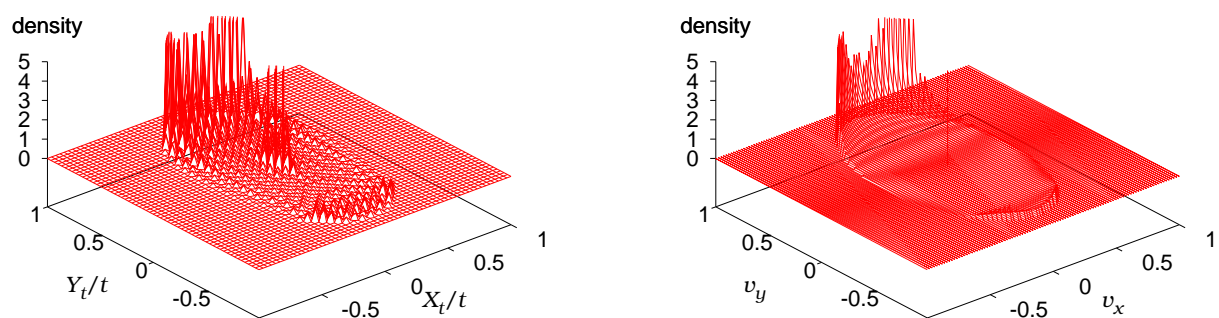


図 4.2: 初期量子ビット ${}^T\phi_0 = (1, 1, 1, -1)/2$ の場合. このとき $M_2 = M_6 = 0$ なので、極限分布は v_y 軸に対して対称性をもっている; $\nu(-v_x, v_y) = \nu(v_x, v_y)$. (a) 計算機シミュレーションによって得られた時刻 $t = 30$ での擬速度 $\mathbf{V}_t = (X_t/t, Y_t/t)$ の分布 (b) 極限分布.

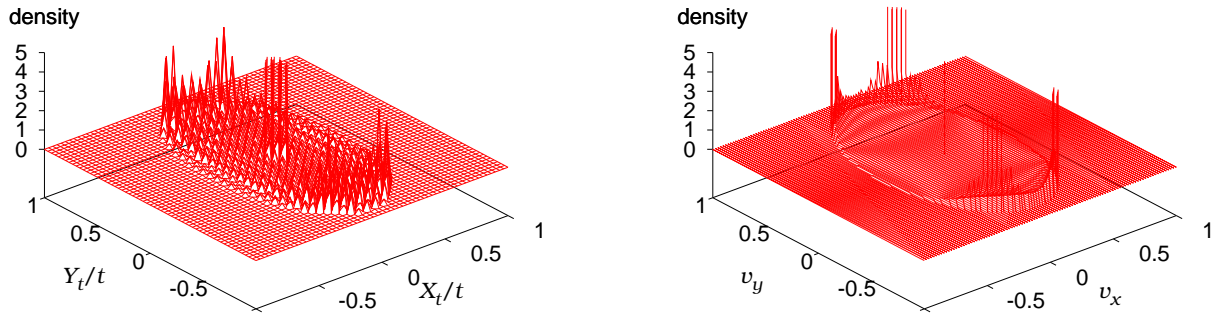


図 4.3: 初期量子ビット ${}^T\phi_0 = (1, 1, 0, 0)/\sqrt{2}$ の場合. このとき $\mathcal{M}_2 = \mathcal{M}_3 = \mathcal{M}_6 = 0$ なので, 極限分布は v_x 軸と v_y 軸に対して対称性をもっている; $\nu(v_x, -v_y) = \nu(-v_x, v_y) = \nu(v_x, v_y)$. (a) 計算機シミュレーションによって得られた時刻 $t = 30$ での擬速度 $\mathbf{V}_t = (X_t/t, Y_t/t)$ の分布 (b) 極限分布.

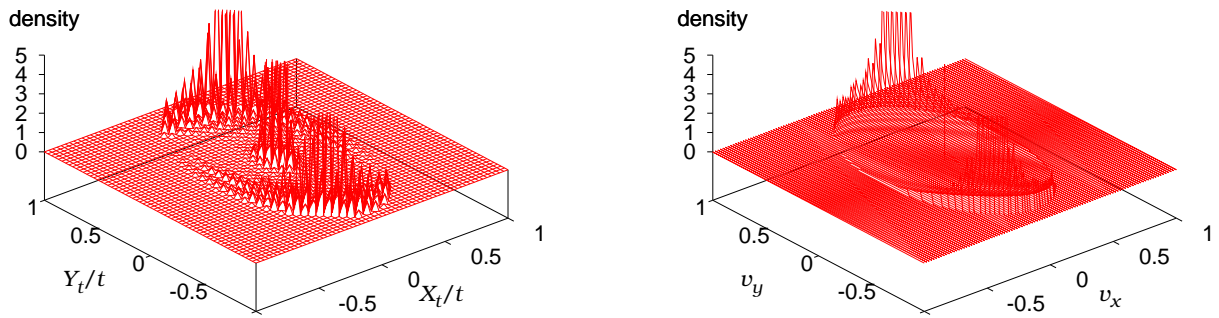


図 4.4: 初期量子ビット ${}^T\phi_0 = (1, -1, -1, 1)/2$ の場合. このとき $\mathcal{M}_2 = \mathcal{M}_3 = 0$ なので, 極限分布は v_z 軸に対して二回回転対称性をもっている; $\nu(-v_x, -v_y) = \nu(v_x, v_y)$ (a) 計算機シミュレーションによって得られた時刻 $t = 30$ での擬速度 $\mathbf{V}_t = (X_t/t, Y_t/t)$ の分布 (b) 極限分布.

計算機シミュレーションと極限分布関数との結果を比較してみると, どの図においても計算機シミュレーションの擬速度 $\mathbf{V}_t = (X_t/t, Y_t/t)$ の分布が振動している様子が見られる. 一般的に時間ステップ t が増えるにつれて振動は激しくなる. しかし, その振動をならすことによって分布を平均した線を考えて, それは極限分布関数 (3.15) によってよく描写されることを意味している. 弱収束の定理はこのことを意味している.

第5章 今後の課題

一般的に量子コインはユニタリ行列で与えられ、空間シフト行列とともに量子ウォーカーの時間発展を決定する。 $N \times N$ のユニタリ行列の集合はユニタリ群 $U(N)$ を成し、その次元は N^2 である。ユニタリ行列の行列式は一般に $e^{i\varphi}$, $\varphi \in [-\pi/2, \pi/2)$ の形で与えられるが、この位相 φ を変えても量子ウォーカーの位置のモーメントの値は変わらない。よって $N \times N$ のユニタリ行列で表される量子コインをもつ量子ウォークモデルのパラメータの次元は $N^2 - 1$ である。例えば、2成分 ($N = 2$) 量子ウォークモデルでは量子コインを定めるためのパラメータの数は $N^2 - 1 = 2^2 - 1 = 3$ であり (ケリー・クラインパラメータ)、擬速度の極限分布への3個のパラメータの依存性は、完全に決定されている [12, 13, 15, 16]。今回の研究では量子コインとして $U(4)$ の中の1-パラメータ族であるユニタリ行列 (2.5) を用いている。今後、量子コインとして $4^2 - 1 = 15$ 個のパラメータによって定められるユニタリ行列を用いた、より一般的なモデルへの拡張が考えられる。

今回のモデルを研究する動機の一つはこのモデルがグローヴァーウォークを含んでいるということである。今後、正方格子とは違う様々な平面格子でのグローヴァーウォークやより高次元でのグローヴァーウォークの擬速度の極限分布を導くことは興味深いし、重要なことである。例えば D 次元立方体格子でのグローヴァーウォークの量子コインは、行列要素、

$$A_{jk}^{(D)} = \begin{cases} 1/D - 1, & j = k \text{ のとき} \\ 1/D, & j \neq k \text{ のとき} \end{cases}$$

をもつ $2D \times 2D$ の直交行列 $A^{(D)} = (A_{jk}^{(D)})$ で与えられる。

近年、1次元量子ウォークだけでなく2次元量子ウォークに対しても、光学装置を用いて実現する方法の提案 [30, 31] やイオントラップされた原子を用いた実現方法 [32] が報告されている。今後、量子物理学の実験と理論とが相まって、量子情報科学の発展に大きく貢献することを望む。

Appendix A 積分の計算

積分

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dv_x \int_{-\infty}^{\infty} dv_y \mathbf{1}_{\{v_x^2/p + v_y^2/q < 1\}} \frac{1}{(v_x + v_y + 1)(v_x - v_y + 1)(v_x + v_y - 1)(v_x - v_y - 1)}$$

を考える。ただし、 $p + q = 1, p, q \geq 0$ である。ここで積分変数を以下のように変換する。

$$v_x = \sqrt{pr} \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right), \quad v_y = \sqrt{qr} \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right) \quad (5.1)$$

この変換により積分は

$$I = -2^4 i \sqrt{pq} \int_0^1 dr \frac{J(r)}{r^3}$$

と書き直せる。ここで、 $J(r)$ は

$$J(r) = \oint_{C_0} dz f(z) \quad (5.2)$$

であり、複素平面 \mathbb{C} 上での閉曲線積分である。また、

$$f(z) = \frac{z^3}{(z + z_+)(z + z_-)(z - z_+)(z - z_-)(z + \bar{z}_+)(z + \bar{z}_-)(z - \bar{z}_+)(z - \bar{z}_-)} \quad (5.3)$$

であり、 z_{\pm} は

$$z_{\pm} = (\sqrt{p} + i\sqrt{q}) \frac{1}{r} (1 \pm \sqrt{1 - r^2})$$

で与えられる。ただし、 C_0 は複素平面上で原点を中心とする単位円 $|z| = 1$ を意味する。積分路 C_0 内には4つの極 $z = z_-, \bar{z}_-, -z_-, -\bar{z}_-$ があることから、コーシーの留数定理により積分 (5.2) は

$$J(r) = 2\pi i \left\{ \text{Res}(f, z_-) + \text{Res}(f, \bar{z}_-) + \text{Res}(f, -z_-) + \text{Res}(f, -\bar{z}_-) \right\}$$

と表される。ただし、

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, z_-) &= (z - z_-) f(z) \Big|_{z=z_-} \\ &= \frac{r^4}{2^7 \sqrt{pq} \sqrt{1 - r^2}} \frac{(\sqrt{p} + i\sqrt{q} \sqrt{1 - r^2})(\sqrt{q} - i\sqrt{p} \sqrt{1 - r^2})}{(1 - pr^2)(1 - qr^2)} \end{aligned}$$

であり $\text{Res}(f, -z_-) = \text{Res}(f, z_-)$, $\text{Res}(f, -\bar{z}_-) = \text{Res}(f, \bar{z}_-) = \overline{\text{Res}(f, z_-)}$ という関係を持っている。以上より、積分 (5.2) を

$$J(r) = \frac{\pi i}{2^4} \frac{r^4}{\sqrt{1 - r^2}} \left\{ \frac{1}{1 - pr^2} + \frac{1}{1 - qr^2} \right\}$$

と求めることができる. さらに積分公式

$$\int_0^1 dx \frac{x}{(1-a^2x^2)\sqrt{1-x^2}} = \frac{\arcsin a}{a\sqrt{1-a^2}}, \quad |a| < 1 \quad (5.4)$$

を用いることにより,

$$I = \pi(\arcsin \sqrt{p} + \arcsin \sqrt{q}) = \frac{\pi^2}{2}$$

が得られる. このことから (3.11) 式で与えられる $\mu_p(v_x, v_y)$ が規格化されていることが分かる.

$$\int_{-\infty}^{\infty} dv_x \int_{-\infty}^{\infty} dv_y \mu_p(v_x, v_y) = I \times \frac{2}{\pi^2} = 1$$

同様に積分

$$I_x = \int_{-\infty}^{\infty} dv_x \int_{-\infty}^{\infty} dv_y \mathbf{1}_{\{v_x^2/p + v_y^2/q < 1\}} \frac{v_x^2}{(v_x + v_y + 1)(v_x - v_y + 1)(v_x + v_y - 1)(v_x - v_y - 1)}$$

$$I_y = \int_{-\infty}^{\infty} dv_x \int_{-\infty}^{\infty} dv_y \mathbf{1}_{\{v_x^2/p + v_y^2/q < 1\}} \frac{v_y^2}{(v_x + v_y + 1)(v_x - v_y + 1)(v_x + v_y - 1)(v_x - v_y - 1)}$$

も計算することができる. (5.1) の積分変数の変換により I_x, I_y は

$$I_x = -2^2 ip \sqrt{pq} \int_0^1 dr \frac{J_x(r)}{r}, \quad I_y = 2^2 iq \sqrt{pq} \int_0^1 dr \frac{J_y(r)}{r}$$

と書き直される. ただし

$$J_x(r) = \oint_{C_0} dz f_x(z), \quad J_y(r) = \oint_{C_0} dz f_y(z)$$

であり, $f_x(z) = (z + 1/z)^2 f(z)$, $f_y(z) = (z - 1/z)^2 f(z)$ である. $J(r)$ と同様にコーシーの留数定理により

$$J_x(r) = \frac{\pi i}{2^2} \frac{r^4}{(1-pr^2)\sqrt{1-r^2}}, \quad J_y(r) = -\frac{\pi i}{2^2} \frac{r^4}{(1-qr^2)\sqrt{1-r^2}}$$

と計算することができる. さらに積分公式 (5.4) と積分 $\int_0^1 dr r / \sqrt{1-r^2} = 1$ により

$$I_x = \pi(\arcsin \sqrt{p} - \sqrt{pq})$$

$$I_y = \pi(\arcsin \sqrt{q} - \sqrt{pq})$$

が得られる.

最後に, 先に示した積分 I の計算から次のような興味深い恒等式が見られることを示しておく.

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dv_x \int_{-\infty}^{\infty} dv_y \mu_p(v_x, v_y) = \int_0^{\infty} dr r \mu(r; \sqrt{p}) + \int_0^{\infty} dr r \mu(r; \sqrt{q}) \quad (5.5)$$

ただしここで, $\mu_p(x; a)$ は 1 次元量子ウォークの今野密度関数 [12, 13, 15, 16, 17] である.

$$\mu(x; a) = \frac{\sqrt{1-a^2}}{\pi(1-x^2)\sqrt{a^2-x^2}} \mathbf{1}_{\{|x| \leq |a|\}}$$

参考文献

- [1] B. C. Travaglione and G. J. Milburn, Phys. Rev. A **65**, 032310 (2002)
- [2] J. Kempe, Contemp. Phys. **44**, 307 (2003).
- [3] A. Ambainis, Int. J. Quantum Inf. **1**, 507 (2003).
- [4] T. A. Brun, H. A. Carteret, and A. Ambainis, Phys. Rev. A **67**, 052317 (2003).
- [5] V. M. Kendon, Int. J. Quantum Inf. **4**, 791 (2006).
- [6] 今野紀雄 : 量子ウォークの数理, 産業図書 (2008).
- [7] Y. Aharonov, L. Davidovich, and N. Zagury, Phys. Rev. A **48**, 1687 (1993).
- [8] D. A. Meyer, J. Stat. Phys. **85**, 551 (1996).
- [9] A. Nayak and A. Vishwanath, e-print quant-ph/0010117.
- [10] A. Ambainis, E. Bach, A. Nayak, A. Vishwanath, and J. Watrous, in Proceedings of the 33rd Annual ACM Symposium on Theory of Computing (ACM Press, New York, 2001), pp.37-49.
- [11] N. Konno, *Quantum Walks*, Lecture at the School “Quantum Potential Theory: Structure and Applications to Physics” held at the Alfried Krupp Wissenschaftskolleg, Greifswald, 26 February - 9 March 2007. (Reihe Mathematik, Ernst-Moritz-Arndt-Universität Greifswald, No.2, 2007.) The lecture note is available at <http://www.math-inf.uni-greifswald.de/algebra/qpt/konno-26nov2007>.
- [12] N. Konno, Quantum Inf. Process **1**, 345 (2002).
- [13] N. Konno, J. Math. Soc. Jpn, **57**, 1179 (2005).
- [14] G. Grimmett, S. Janson, and P. F. Scudo, Phys. Rev. E **69**, 026119 (2004).
- [15] M. Katori, S. Fujino, and N. Konno, Phys. Rev. A **72**, 012316 (2005).
- [16] T. Miyazaki, M. Katori, and N. Konno, Phys. Rev. A **76**, 012332 (2007).

- [17] M. Sato, N. Kobayashi, M. Katori and N. Konno, e-print quant-ph/0802.1997.
- [18] T. D. Mackay, S. D. Bartlett, L. T. Stephenson, and B. C. Sanders, *J. Phys. A: Math. Gen.* **35**, 2745 (2002).
- [19] B. Tregenna, W. Flanagan, R. Maile, and V. Kendon, *New J. Phys.* **5**, 83 (2003).
- [20] I. Carneiro, M. Loo, X. Xu, M. Girerd, V. Kendon, and P. L. Knight, *New J. Phys.* **7**, 156 (2005).
- [21] S. E. Venegas-Andraca, J. L. Ball, K. Burnett, and S. Bose, *New J. Phys.* **7**, 221 (2005).
- [22] L. K. Grover, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 325 (1997).
- [23] N. Shenvi, J. Kempe and K. Birgitta Whaley, *Phys. Rev. A* **67**, 052307 (2003).
- [24] A. M. Childs and J. Goldstone, *Phys. Rev. A* **70**, 022314 (2004).
- [25] A. M. Childs and J. Goldstone, *Phys. Rev. A* **70**, 042312 (2004).
- [26] A. Tulsi, e-print quant-ph/0801.0497.
- [27] N. Inui, Y. Konishi, and N. Konno, *Phys. Rev. A* **69**, 052323 (2004).
- [28] A. C. Oliveira, R. Portugal and R. Donangelo, *Phys. Rev. A* **74**, 012312 (2006).
- [29] H. Georgi, *Lie Algebras in Particle Physics*, 2nd ed. (Perseus Books, Reading, 1999).
- [30] E. Roldán and J. C. Soriano, *J. Mod. Opt.* **52**, 2649 (2005).
- [31] K. Eckert, J. Mompart, G. Birkl, and M. Lewenstein, *Phys. Rev. A* **72**, 012327 (2005).
- [32] S. Fujiwara, H. Osaki, I. M. Buluta, and S. Hasegawa, *Phys. Rev. A* **72**, 032329 (2005).
- [33] M. J. Ablowitz and A. S. Fokas, *Complex Variables, Introduction and Applications*, 2nd ed. (Cambridge University Press, 2003).