

2008年度 修士論文

非衝突ブラウン経路の極値分布

Extreme Value Distributions of Noncolliding
Brownian Paths

中央大学大学院 理工学研究科
博士課程前期課程 物理学専攻
和泉 南

目次

第1章	はじめに	4
第2章	多粒子非衝突ブラウン運動の 解析方法	9
2.1	さまざまな条件付ブラウン運動とその推移確率密度	9
2.2	非衝突ブラウン経路の推移確率密度	11
2.3	非衝突ブラウン経路の累積確率分布	12
2.4	$N = 1$ のときの3次元ベッセル橋	17
第3章	$N = 2$ の非衝突ベッセル橋, 2重ディリクレ級数, ヤコビのテータ関数	19
3.1	$N = 2$ の非衝突ベッセル橋における累積確率分布	20
3.2	\hat{H}_2 の s 次モーメント	21
3.3	モーメントの表式の満たす関数方程式	23
3.4	不完全ガンマ関数と数値評価	26
3.5	Appendix A	29
第4章	非衝突ベッセル橋の最大値分布 (N :一般)	31
4.1	非衝突ベッセル橋の推移確率密度	31
4.2	クラスCの行列値ブラウン橋	34
4.3	一番上の経路における最大値の解析結果	35
4.3.1	\hat{H}_N の累積確率分布	35
4.3.2	行列式表現とヤコビのテータ関数	37
4.4	数値計算から得られた結果	40
4.4.1	固有値過程から見出されるベッセル橋	40
4.4.2	\hat{H}_N の平均と分散	41
4.4.3	$N \rightarrow \infty$ の漸近評価と一番上の経路	41
4.4.4	内部経路の統計則について	43
4.5	第4章の結び	45
4.6	Appendix B	46
4.7	Appendix C	48

第 5 章	非衝突ブラウン経路の極値分布	50
5.1	非衝突ブラウン橋の累積確率分布	50
5.2	非衝突ベッセル彷徨過程と非衝突ブラウン彷徨過程の 累積確率分布	53
5.3	Appendix D	57

目次

1.1	watermelon 配置 (1 次元)	5
1.2	2 次元 star 配置	5
1.3	非衝突 3 次元ベッセル橋	6
1.4	非衝突ブラウン橋	6
1.5	非衝突 3 次元ベッセル彷徨過程	6
1.6	非衝突ブラウン彷徨過程	6
2.1	ブラウン運動の反射原理	10
2.2	N 粒子非衝突ベッセル過程 $Y(t)$	16
2.3	N 粒子非衝突ブラウン運動 $X(t)$	16
2.4	N 粒子非衝突ベッセル橋 $\hat{Y}(t)$	16
2.5	N 粒子非衝突ブラウン橋 $\hat{X}(t)$	16
2.6	N 粒子非衝突ベッセル彷徨過程 $\tilde{Y}(t)$	16
2.7	N 粒子非衝突ブラウン彷徨過程 $\tilde{X}(t)$	16
2.8	$N = 1$ の 3 次元ベッセル橋	17
3.1	$N = 2$ の 3 次元ベッセル橋	19
4.1	$N = 10$ の非衝突ベッセル橋	32
4.2	$N = 10$ の固有値過程 $\lambda^{(N)}(t), 0 \leq t \leq 1$	36
4.3	3 次元ベッセル橋の最大値 \hat{H}_1 と数値計算シミュレーションによる比較	40
4.4	$1/N$ に対する ν_0 の関係	42
4.5	$1/N$ に対する c_0 の関係	42
4.6	粒子数 N と平均 m_N の関係	43
4.7	粒子数 N と分散 v_N の関係	43
4.8	N に対する $m_1^{(N)}$ の両対数プロット	44
4.9	N に対する $v_1^{(N)}$ の両対数プロット	44
4.10	k に対する $m_k^{(N)}$ 依存性	45
4.11	図 4.10 のデータコラプス	45

第1章 はじめに

多粒子ランダムウォークを考える際に重要なことはランダムウォーカー同士にどのような相互作用を設定するかということである．ここではランダムウォーカー同士が同時刻に同一の格子点を共有できないという条件を課すことにより，強い斥力相互作用を導入することにする．その結果，系は排除体積効果を持つことになる．このような系を Fisher はヴィシヤスウォークと名づけた [1]．ヴィシヤスウォークは濡れや融解といった物質界面の構造変化を説明する数理モデルとして，あるいは高分子ネットワークなどの非平衡な物理現象を説明するモデルとして用いられている．

ランダムウォークの連続極限（拡散スケーリング極限）はブラウン運動である．ブラウン運動は不規則な運動を表すものであり，物理学，化学，計算機科学，経済学，社会科学など広い分野で使われている．特にブラウン運動の考察から導かれたアインシュタインの関係式は拡散現象の理解を深め，非平衡統計力学の誕生と発展に重要な役割を果たした．また確率解析の分野においてブラウン運動はウィーナー過程とも呼ばれている．さらにブラウン運動の推移確率密度は拡散方程式の初期値問題の解として得られるガウス分布であり計算の上でも非常に扱い易いという利点がある．本論文ではヴィシヤスウォークの拡散スケーリング極限である多粒子非衝突ブラウン粒子系を対象として，その極値統計を議論する．

N 本の非衝突ブラウン運動

$$\mathbf{X}(t) = (X_1(t), X_2(t), \dots, X_N(t))$$

を考える．非衝突条件より，粒子の順番は保存される，

$$X_1(t) < X_2(t) < \dots < X_N(t), \quad t \geq 0.$$

時刻 0 で原点からすべての粒子が一斉にスタートし，ある時刻 T で原点に戻ってくる条件

$$\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}(T) = \mathbf{0},$$

を満たすものを watermelon 配置という．一点から広がり一点に戻ってくる様がスイカの形と模様に似ているためそのように名づけられた (図 1.1)．また，時刻 0 で原点からスタートする条件

$$\mathbf{X}(0) = \mathbf{0},$$

のみを課したものを star 配置という．2次元 star 配置の図を描くと，始点の一点から広がっていく様が星の形に見えるため star 配置と名づけられた (図 1.2)．これらはそれぞれ

watermelon 配置のヴィシヤスウォークと star 配置のヴィシヤスウォークの拡散スケーリング極限として得られる．

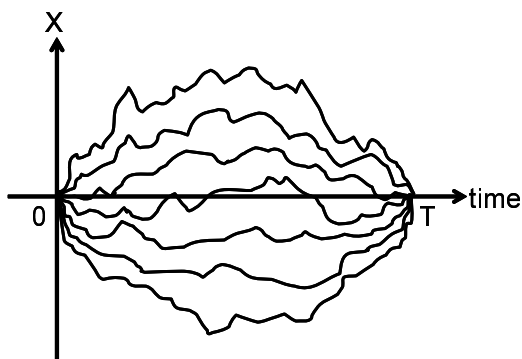


図 1.1: watermelon 配置 (1次元)

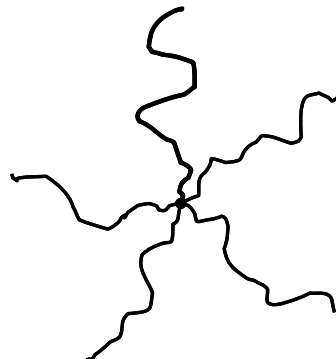


図 1.2: 2次元 star 配置

確率論では watermelon 配置のように始点と終点の位置に条件をつけた系を bridge (橋) と呼び, star 配置のように始点の位置のみに条件をつけた系を meander (彷徨過程) と呼ぶ. 本論文では, watermelon 配置と star 配置のブラウン粒子系をそれぞれ非衝突ブラウン橋, 非衝突ブラウン彷徨過程と呼ぶことにする.

$$\begin{array}{lcl}
 \text{watermelon 配置のヴィシヤスウォーク} & \xrightarrow{\text{連続極限}} & \text{watermelon 配置のブラウン運動} \\
 & & = \text{非衝突ブラウン橋} \\
 \text{star 配置のヴィシヤスウォーク} & \xrightarrow{\text{連続極限}} & \text{star 配置のブラウン運動} \\
 & & = \text{非衝突ブラウン彷徨過程}
 \end{array}$$

ここで常に正の値をとる 1次元ブラウン運動について考える. その理由は, 原点に吸収壁のある watermelon 配置と star 配置の多粒子ブラウン運動について興味があるためである. 常に正の値をとる 1次元標準ブラウン運動は 3次元ベッセル過程と呼ばれる. 3次元ベッセル過程は 3次元ブラウン運動の動径方向への射影, つまり原点からの距離

$$Y(t) = \sqrt{B_1(t)^2 + B_2(t)^2 + B_3(t)^2},$$

として定義される確率過程で, $B_1(t), B_2(t), B_3(t)$ は互いに独立な 1次元標準ブラウン運動である [2]. そのため原点に吸収壁のある (以後, 壁ありという) watermelon 配置のブラウン粒子系を非衝突 3次元ベッセル橋, 壁あり star 配置の場合は非衝突 3次元ベッセル彷徨過程と呼ぶ. ここまでにでてきた非衝突ブラウン運動の名称をまとめると表 1.1 のようになる.

上記の壁あり watermelon 配置, つまり非衝突 3次元ベッセル橋について, その高さの極値統計が近年注目されており, 離散的なランダムウォークと連続的なブラウン運動の双方から研究されている. 離散的な場合は, 格子経路を基にした壁あり watermelon 配置の

高分子物理学での名称		確率論での名称	
壁あり watermelon 配置のブラウン運動	非衝突 3 次元ベッセル橋	図 1.3	
壁なし watermelon 配置のブラウン運動	非衝突ブラウン橋	図 1.4	
壁あり star 配置のブラウン運動	非衝突 3 次元ベッセル彷徨過程	図 1.5	
壁なし star 配置のブラウン運動	非衝突ブラウン彷徨過程	図 1.6	

表 1.1: 非衝突ブラウン粒子系の高分子物理学と確率論における名称の違い

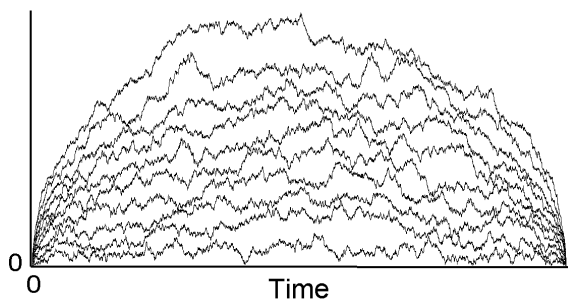


図 1.3: 非衝突 3 次元ベッセル橋

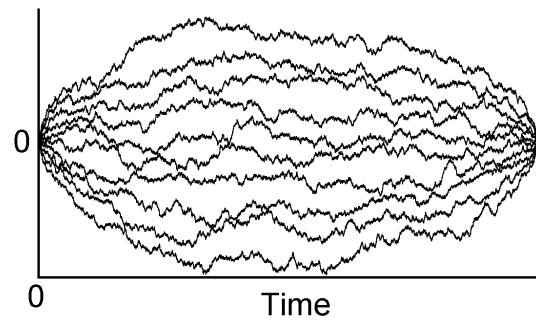


図 1.4: 非衝突ブラウン橋

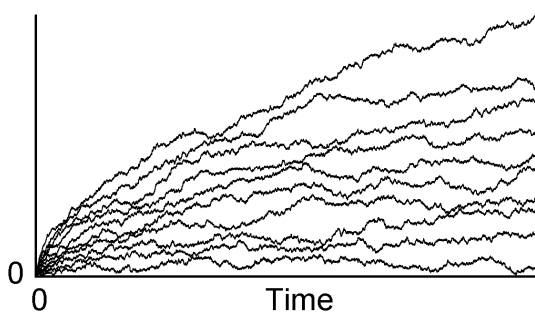


図 1.5: 非衝突 3 次元ベッセル彷徨過程

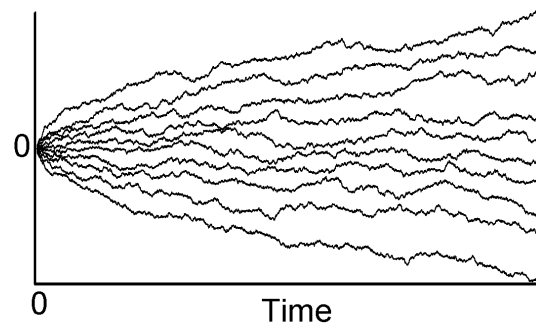


図 1.6: 非衝突ブラウン彷徨過程

ヴィシヤスウォークを考え，その長時間極限をとることにより連続的な非衝突3次元ベッセル過程と同じ極値分布を得ている．まず $N = 1$ について Biane-Pitman-Yor は3次元ベッセル橋の最大高さ \hat{H}_1 の s 次モーメント

$$\langle \hat{H}_1^s \rangle = \frac{s(s-1)}{2^{s/2}} \Gamma(s/2) \zeta(s), \quad s = 0, 1, 2, \dots$$

はガンマ関数と数論において重要な特殊関数であるリーマンのゼータ関数

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},$$

を使って表されることを示した (2001) [3]．また Dyck path と呼ばれる壁あり1次元ランダムウォーク，つまり壁あり1-watermelon のランダムウォークの平均高さの漸近解析は Bruijn-Knuth-Rice によってすでに求められている (1972) [4]． $N = 2$ について，Fulmek は壁あり2-watermelon のヴィシヤスウォークの平均高さの漸近評価を行った (2007) [6]．我々はその連続極限である $N = 2$ の非衝突ベッセル橋について研究し，最大高さ \hat{H}_2 の極値分布を求め，そのモーメントがヤコビのテータ関数や，2重ディリクレ級数を使って表されることを示した (2008) [7]．一般の N について，Bonichon-Mosbah は計算機シミュレーションにより N -watermelon の一番上の経路における最大値の平均値を得ている (2003) [5]．Feierl は N -watermelon のヴィシヤスウォークの一番上の経路の最大高さのモーメントの長時間漸近解析を行った (2008) [8]．また，Schehr らは N 粒子非衝突ベッセル橋について経路積分法を用いてその最大高さを求めている (2008) [9]．我々も彼らと同じ問題について N 粒子非衝突ベッセル橋の最大値分布の解析と数値計算の両方を行い以下の結果を得た (2008) [10]．解析計算では，一番外側の経路の最大値 \hat{H}_N の分布がエルミート多項式

$$H_n(x) = n! \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(-1)^k (2x)^{n-2k}}{k!(n-2k)!}, \quad (1.1)$$

の無限和を成分にもつ $N \times N$ 行列式

$$\mathbf{P}(\hat{H}_N < h) = \frac{(-1)^N}{2^{N^2} \prod_{j=1}^N (2j-1)!} \det_{1 \leq j, k \leq N} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} H_{2(j+k-1)}(\sqrt{2}nh) e^{-2n^2 h^2} \right], \quad (1.2)$$

で表されることを示し，この結果がヤコビのテータ関数の満たす関数方程式を用いることにより Feierl と Schehr らの2つの結果と一致することを確かめた．また数値計算による結果では Dyson の BM モデル [11] とランダム行列の固有値過程が分布として等しい原理を使い，クラス C [12, 13] のランダム行列の固有値過程から N 粒子非衝突ベッセル橋をシミュレーションした．その結果，一番外側の経路だけでなくすべての内部経路の最大値分布について研究し， $N \rightarrow \infty$ の漸近挙動について論じている．ちなみに，図 1.3 ~ 図 1.6 はランダム行列の固有値過程からシミュレーションした図である．

また壁なしの watermelon 配置についても研究が進んでおり，Feierl は離散的な格子経路の長時間極限についてその最大幅の極値分布を求め (2008) [14]，Schehr らはその連続極限である非衝突ブラウン橋の幅ではなく一方向への最大高さ分布を得ている (2008) [9]．

我々は非衝突ブラウン粒子系において壁なし watermelon 配置のみならず star 配置についても研究し，下記のような極値統計を得た（現在投稿準備中）．壁なし watermelon 配置の N 粒子非衝突ブラウン運動はその極値分布が壁あり watermelon 配置のときとは別のエルミート多項式の無限和を成分にもつ $N \times N$ 行列式で表されることを示し，star 配置の場合については壁あり・壁なしそれぞれの極値分布がエルミート多項式の無限和を成分にもつ N 次パフィアンで表されることを示す．

本修士論文は以下のような構成となっている．まず第2章では，多粒子非衝突ブラウン経路の解析方法をまとめ，具体的に $N = 1$ のベッセル橋を例にとり，その計算方法と結果を示す．第3章では， $N = 2$ の非衝突ベッセル橋における Katori-Izumi-Kobayashi [7] の内容をまとめ，第4章では，一般の N における非衝突ベッセル橋に着目した Kobayashi-Izumi-Katori [10] の内容を説明している．第5章では，一般の N における非衝突ブラウン橋，非衝突ベッセル彷徨過程，非衝突ブラウン彷徨過程それぞれの極値分布を導出する．

第2章 多粒子非衝突ブラウン運動の解析方法

2.1 さまざまな条件付ブラウン運動とその推移確率密度

原点からスタートする1次元標準ブラウン運動 $B(t)$ について考える．任意の時刻の列 $t_0 \equiv 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_M$, $M = 1, 2, \dots$ に対して, ブラウン運動が各時刻 t_m , $m = 1, 2, \dots, M$ で区間 $[a_m, b_m]$ に滞在する確率は,

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\left(B(t_m) \in [a_m, b_m], m = 1, 2, \dots, M\right) \\ &= \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \int_{a_2}^{b_2} dx_2 \cdots \int_{a_M}^{b_M} dx_M \prod_{m=0}^{M-1} p(t_{m+1} - t_m, x_{m+1}|x_m), \end{aligned}$$

と書ける．ここで, $p(t, y|x)$ は時間間隔 t の間に x から y に遷移する推移確率密度で, 平均0分散 t のガウス分布 (正規分布) の確率密度

$$p(t, y|x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left\{-\frac{(y-x)^2}{2t}\right\}, \quad t > 0, x, y \in \mathbf{R}, \quad (2.1)$$

として与えられる．

原点に吸収壁を持つブラウン運動の推移確率密度はブラウン運動の反射原理から導くことができる．まず時刻0で x から始まり時刻 t で y に到達するブラウン運動を考えると, 常に正の値をとる経路 I とある時刻で原点を横切る経路 II とに場合分けすることができる．経路 II の場合について, 最初に原点に到達した時刻を τ と置いて時刻 τ 以降の経路を時間軸に対して反転したものを経路 III (破線) とする (図 2.1)．ブラウン運動の増分 $\{B(t_m) - B(t_{m-1})\}$ は各時刻 t_m に対して独立で左右対称な正規分布に従うため, 経路 II と経路 III のブラウン運動の分布は変わらない．つまりある時刻で原点を横切るブラウン運動の場合, x から y に到達する確率と x から $-y$ に到達する確率とが等しくなる．これがブラウン運動の反射原理である．このことから常に正の値をとる吸収壁ブラウン運動の推移確率密度は, x から y に到達する推移確率密度と, x から $-y$ に到達する推移確率密度の差をとることにより求めることができる [2]．

$$\begin{aligned} p_{\text{abs}}(t, y|x) &= p(t, y|x) - p(t, -y|x) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \left\{ e^{-(y-x)^2/(2t)} - e^{-(y+x)^2/(2t)} \right\}, \quad t > 0, x, y \geq 0. \quad (2.2) \end{aligned}$$

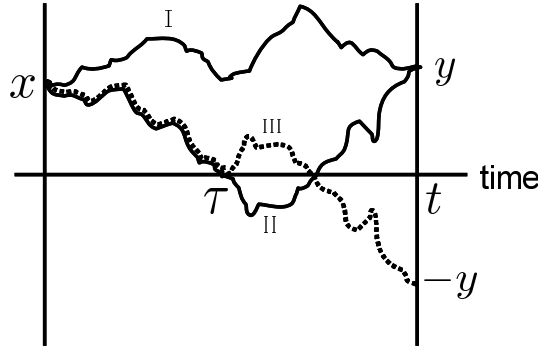


図 2.1: ブラウン運動の反射原理

ここで3次元ベッセル過程 (BES(3)) について言及すると, BES(3) の推移確率密度は正值条件を課した1次元ブラウン運動の推移確率密度と等しい. そのため期間 $T \rightarrow \infty$ まで生き残るという条件の下での吸収壁ブラウン運動を計算することにより BES(3) の推移確率密度を求めることができる. 時間区間 $[0, T]$ の間には原点に吸収されない生存確率

$$h(T, x) = \int_0^{\infty} p_{\text{abs}}(T, y|x) dy \quad (2.3)$$

についての $T \rightarrow \infty$ の漸近評価を用いれば,

$$\begin{aligned} p_{\text{BES}(3)}(t, y|x) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{h(T-t, y) p_{\text{abs}}(t, y|x)}{h(T, x)} \\ &= \frac{y}{x} p_{\text{abs}}(t, y|x) \end{aligned} \quad (2.4)$$

となり, $p_{\text{abs}}(t, y|x)$ を y/x 倍に変換することで $p_{\text{BES}(3)}(t, y|x)$ を求めることができる.

次に原点と高さ h に吸収壁を持つブラウン運動について考える. 原点にのみ吸収壁を持つ場合と同様にブラウン運動の反射原理を用いることができる. このとき原点と壁 h の両方について経路を反転させるため2重の「合わせ鏡」のように原点で反転させた経路を壁 h で反転させてさらに原点で反転させて... という無限回の反転が起こりうる. このため原点と壁 h に吸収壁を持つ吸収壁ブラウン運動の推移確率密度は無和の形で表される.

$$\begin{aligned} p_{\text{abs},h}(t, y|x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ p(t, y|x + 2hn) - p(t, y|-x + 2hn) \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\exp \left\{ -\frac{1}{2t} (y - (x + 2hn))^2 \right\} - \exp \left\{ -\frac{1}{2t} (y - (-x + 2hn))^2 \right\} \right], \\ &\quad t > 0, x, y \in (0, h). \end{aligned} \quad (2.5)$$

また，別の求め方として拡散方程式の初期値問題とディリクレ境界値問題

$$\begin{cases} \frac{\partial u(t, y)}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u(t, y)}{\partial y^2} \\ \lim_{t \rightarrow 0} u(t, y) = \delta(y - x) \\ u(t, 0) = u(t, h) = 0 \end{cases} \quad (2.6)$$

の解として区間 $(0, h)$ 内を運動するブラウン運動の推移確率を計算することができる．変数変換とフーリエ解析を用いればその推移確率密度は次のようになる．

$$p_{\text{abs}, h}(t, y|x) = \frac{2}{h} \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{n^2 \pi^2}{2h^2} t\right) \sin\left(\frac{n\pi}{h} y\right) \sin\left(\frac{n\pi}{h} x\right), \quad t > 0, x, y \in (0, h). \quad (2.7)$$

同様の方法を用いれば $-w_L$ と w_R に吸収壁を持つブラウン運動の推移確率密度を求めることができる．このときディリクレ境界条件を

$$u(t, -w_L) = u(t, w_R) = 0$$

に変更して (2.6) の問題を解けば，区間 $(-w_L, w_R)$ 内を運動するブラウン運動の推移確率密度

$$p_{w_L, w_R}(t, y|x) = \frac{2}{w_L + w_R} \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{n^2 \pi^2}{2(w_L + w_R)^2} t\right) \sin\left(\pi \frac{w_L + x}{w_L + w_R} n\right) \sin\left(\pi \frac{w_L + y}{w_L + w_R} n\right), \quad t > 0, x, y \in (-w_L, w_R), \quad (2.8)$$

が得られる．

2.2 非衝突ブラウン経路の推移確率密度

第 2.1 節に出てきた条件付ブラウン運動の推移確率密度はすべて 1 粒子の場合について記述したものだ．これらの推移確率密度をお互いに非衝突な多粒子系に拡張するために必要なのが Karlin-McGregor の公式である [15]．この公式はブラウン運動の推移確率密度を成分とする $N \times N$ 行列の行列式は非衝突な N 粒子系の推移確率密度になるというもので，量子力学において自由フェルミ粒子からなる多体系の波動関数を表す Slater 行列式の確率過程版とみなすこともできる [16]．ここで 1 次元標準ブラウン運動の推移確率密度を例にとれば，その N 粒子非衝突の 1 次元標準ブラウン運動は次のように表される．

$$q^{(N)}(t, \mathbf{y}|\mathbf{x}) = \det_{1 \leq j, k \leq N} \left[p(t, y_j|x_k) \right], \quad t > 0, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{W}_N^A. \quad (2.9)$$

ここで \mathbf{W}_N^A は N 粒子の順位付けされた配置空間

$$\mathbf{W}_N^A = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathbf{R}^N : x_1 < x_2 < \dots < x_N\},$$

であり表現論 [17] からタイプ A_{N-1} 型の Weyl chamber と呼ばれる . 原点に吸収壁を持つブラウン運動や , 区間 $(0, h)$ 内を運動するブラウン運動 , 区間 $(-w_L, w_R)$ 内を運動するブラウン運動を N 粒子非衝突に拡張したものは以下ようになる .

$$q_{\text{abs}}^{(N)}(t, \mathbf{y}|\mathbf{x}) = \det_{1 \leq j, k \leq N} \left[p_{\text{abs}}(t, y_j | x_k) \right], \quad t > 0, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{W}_N^{\text{C}}, \quad (2.10)$$

$$q_{\text{abs}, h}^{(N)}(t, \mathbf{y}|\mathbf{x}) = \det_{1 \leq j, k \leq N} \left[p_{\text{abs}, h}(t, y_j | x_k) \right], \quad t > 0, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{W}_N^h, \quad (2.11)$$

$$q_{w_L, w_R}^{(N)}(t, \mathbf{y}|\mathbf{x}) = \det_{1 \leq j, k \leq N} \left[p_{w_L, w_R}(t, y_j | x_k) \right], \quad t > 0, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{W}_N^{w_L, w_R}. \quad (2.12)$$

ここでそれぞれの配置空間は ,

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_N^{\text{C}} &= \{ \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathbf{R}_+^N : x_1 < x_2 < \dots < x_N \}, \\ \mathbf{W}_N^h &= \{ \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N) \in (0, h)^N : x_1 < x_2 < \dots < x_N \}, \\ \mathbf{W}_N^{w_L, w_R} &= \{ \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N) \in (-w_L, w_R)^N : x_1 < x_2 < \dots < x_N \}, \end{aligned}$$

である . 特に \mathbf{W}_N^{C} はタイプ C_N 型の Weyl chamber と呼ばれる .

2.3 非衝突ブラウン経路の累積確率分布

ここでは N 粒子非衝突ブラウン運動と N 粒子非衝突 (3 次元) ベッセル過程の累積確率分布についての求め方を示す . 1 粒子の場合 , ブラウン運動 $X(t)$ は第 2.1 節に出てきた 1 次元標準ブラウン運動 $B(t)$ そのもの

$$X(t) \equiv B(t), \quad t \geq 0,$$

であり , ベッセル過程は 3 次元ブラウン運動の動径方向への射影

$$Y(t) \equiv |\mathbf{B}(t)| = \sqrt{B_1(t)^2 + B_2(t)^2 + B_3(t)^2},$$

として表される . ここで , $B_1(t), B_2(t), B_3(t)$ は互いに独立な 1 次元標準ブラウン運動である . 多粒子非衝突に拡張した場合 , N 粒子非衝突ブラウン運動と N 粒子非衝突ベッセル過程をそれぞれ

$$\mathbf{X}(t) = (X_1(t), X_2(t), \dots, X_N(t)), \quad X_1(t) < X_2(t) < \dots < X_N(t), \quad t \geq 0,$$

$$\mathbf{Y}(t) = (Y_1(t), Y_2(t), \dots, Y_N(t)), \quad 0 < Y_1(t) < Y_2(t) < \dots < Y_N(t), \quad t \geq 0,$$

と書く . まず , N 粒子非衝突ベッセル過程 $\mathbf{Y}(t)$ を例にとり , その累積確率分布を求めてみる . N 粒子非衝突ベッセル過程 $\mathbf{Y}(t)$ が時刻 0 で \mathbf{x} から出発し時刻 T で \mathbf{y} に到達するとき ,

$$\mathbf{Y}(0) = \mathbf{x}, \quad \mathbf{Y}(T) = \mathbf{y}, \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{W}_N^{\text{C}},$$

その一番上の経路の最大値

$$H_N = \max_{0 < t < T} Y_N(t)$$

がある任意の値 h より小さくなる累積確率分布 $P(H_N < h)$ は、時刻 0 で \mathbf{x} からスタートしてお互いに非衝突に運動し 原点 にぶつかることなく時刻 T で \mathbf{y} に到達するブラウン運動の推移確率密度と、時刻 0 で \mathbf{x} からスタートしてお互いに非衝突に運動し 原点と壁 h にぶつかることなく時刻 T で \mathbf{y} に到達するブラウン運動の推移確率密度の比を取ることにより求めることができるので、

$$\begin{aligned} P(H_N < h) &= \frac{\mathbf{x} \text{ から出発して } (0, h) \text{ 内を運動し時刻 } T \text{ で } \mathbf{y} \text{ に到達する非衝突 BM}}{\mathbf{x} \text{ から出発して正の領域内を運動し時刻 } T \text{ で } \mathbf{y} \text{ に到達する非衝突 BM}} \\ &= \frac{q_{\text{abs},h}^{(N)}(T, \mathbf{y}|\mathbf{x})}{q_{\text{abs}}^{(N)}(T, \mathbf{y}|\mathbf{x})}, \end{aligned}$$

となる。ブラウン運動の時空間スケール性から T の大きさを変えても本質は変わらないため、以後 $T = 1$ とすれば、

$$P(H_N < h) = \frac{q_{\text{abs},h}^{(N)}(1, \mathbf{y}|\mathbf{x})}{q_{\text{abs}}^{(N)}(1, \mathbf{y}|\mathbf{x})}. \quad (2.13)$$

N 粒子非衝突ベッセル橋 $\hat{Y}(t)$ の場合は、 N 粒子非衝突ベッセル過程 $Y(t)$ の始点の配置 \mathbf{x} と終点の配置 \mathbf{y} のすべての成分を 0 とすれば良い。

$$|\mathbf{x}| = |\mathbf{y}| \rightarrow 0.$$

この条件を加えることにより $Y(t)$ は時刻 0 で原点を出発し時刻 1 で原点に戻ってくる非衝突ベッセル橋 $\hat{Y}(t)$ となる。それゆえ、一番上の経路の最大値

$$\hat{H}_N = \max_{0 < t < 1} \hat{Y}_N(t)$$

がある値 h より小さくなる累積確率分布は (2.13) 式について $|\mathbf{x}|, |\mathbf{y}| \rightarrow 0$ の極限をとれば良いので、

$$P(\hat{H}_N < h) = \lim_{|\mathbf{x}|, |\mathbf{y}| \rightarrow 0} \frac{q_{\text{abs},h}^{(N)}(1, \mathbf{y}|\mathbf{x})}{q_{\text{abs}}^{(N)}(1, \mathbf{y}|\mathbf{x})}, \quad (2.14)$$

と表すことができる。一方、 N 粒子非衝突ベッセル彷徨過程 $\tilde{Y}(t)$ については、 N 粒子非衝突ベッセル過程 $Y(t)$ の始点の配置 \mathbf{x} のすべての成分を 0 とすれば良い。

$$|\mathbf{x}| \rightarrow 0.$$

その一番上の経路の最大値

$$\tilde{H}_N = \max_{0 < t < 1} \tilde{Y}_N(t)$$

の累積確率分布は (2.13) 式において $|\mathbf{x}| \rightarrow 0$ の極限をとり、さらに \mathbf{y} について積分すれば累積確率分布を得ることができる。

$$\mathbf{P}(\tilde{H}_N < h) = \frac{\int_{W_N^C} \lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow 0} q_{\text{abs},h}^{(N)}(1, \mathbf{y}|\mathbf{x}) d\mathbf{y}}{\int_{W_N^C} \lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow 0} q_{\text{abs}}^{(N)}(1, \mathbf{y}|\mathbf{x}) d\mathbf{y}}. \quad (2.15)$$

次に、 N 粒子非衝突ブラウン運動 $\mathbf{X}(t)$ について、その累積確率分布を求めてみる。 N 粒子非衝突ブラウン運動 $\mathbf{X}(t)$ が時刻 0 で \mathbf{x} から出発し時刻 1 で \mathbf{y} に到達するとき、

$$\mathbf{X}(0) = \mathbf{x}, \mathbf{X}(1) = \mathbf{y}, \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{W}_N^A,$$

その一番下の経路の最小値と一番上の経路の最大値をそれぞれ

$$L_N = \min_{0 < t < 1} X_1(t), \quad R_N = \max_{0 < t < 1} X_N(t),$$

とおけば、最小値 L_N がある値 $-w_L$ より大きく、最大値 R_N がある値 w_R より小さくなる
ときの累積確率分布は

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}(-w_L < L_N, R_N < w_R) \\ &= \frac{\mathbf{x} \text{ から出発して } (-w_L, w_R) \text{ 内を運動し時刻 1 で } \mathbf{y} \text{ に到達する非衝突 BM}}{\mathbf{x} \text{ から出発して時刻 1 で } \mathbf{y} \text{ に到達する非衝突 BM}} \\ &= \frac{q_{w_L, w_R}^{(N)}(1, \mathbf{y}|\mathbf{x})}{q^{(N)}(1, \mathbf{y}|\mathbf{x})}, \end{aligned} \quad (2.16)$$

となる。 N 粒子非衝突ブラウン橋 $\widehat{\mathbf{X}}(t)$ と N 粒子非衝突ブラウン方向過程 $\widetilde{\mathbf{X}}(t)$ の累積確率分布も N 粒子非衝突ベッセル過程と同様に $|\mathbf{x}|, |\mathbf{y}| \rightarrow 0$ の極限をとる、もしくは $|\mathbf{x}| \rightarrow 0$ の極限をとり、さらに \mathbf{y} について積分すれば求めることができ、その結果は表 2.1 のようになる。

<p>N 粒子非衝突ベッセル過程 $Y(t)$</p> $H_N = \max_{0 < t < 1} Y_N(t)$ $\mathbf{P}(H_N < h) = \frac{q_{\text{abs},h}^{(N)}(1, \mathbf{y} \mathbf{x})}{q_{\text{abs}}^{(N)}(1, \mathbf{y} \mathbf{x})}$ <p style="text-align: center;">図 2.2</p>	<p>N 粒子非衝突ブラウン運動 $X(t)$</p> $L_N = \min_{0 < t < 1} X_1(t), R_N = \max_{0 < t < 1} X_N(t)$ $\mathbf{P}(-w_L < L_N, R_N < w_R) = \frac{q_{w_L, w_R}^{(N)}(1, \mathbf{y} \mathbf{x})}{q^{(N)}(1, \mathbf{y} \mathbf{x})}$ <p style="text-align: center;">図 2.3</p>
<p>N 粒子非衝突ベッセル橋 $\widehat{Y}(t)$</p> <p>条件: $\widehat{Y}(0) = \widehat{Y}(1) = 0$</p> $\widehat{H}_N = \max_{0 < t < 1} \widehat{Y}_N(t)$ $\mathbf{P}(\widehat{H}_N < h) = \lim_{ \mathbf{x} , \mathbf{y} \rightarrow 0} \frac{q_{\text{abs},h}^{(N)}(1, \mathbf{y} \mathbf{x})}{q_{\text{abs}}^{(N)}(1, \mathbf{y} \mathbf{x})}$ <p style="text-align: center;">図 2.4</p>	<p>N 粒子非衝突ブラウン橋 $\widehat{X}(t)$</p> <p>条件: $\widehat{X}(0) = \widehat{X}(1) = 0$</p> $\widehat{L}_N = \min_{0 < t < 1} \widehat{X}_1(t), \widehat{R}_N = \max_{0 < t < 1} \widehat{X}_N(t)$ $\mathbf{P}(-w_L < \widehat{L}_N, \widehat{R}_N < w_R) = \lim_{ \mathbf{x} , \mathbf{y} \rightarrow 0} \frac{q_{w_L, w_R}^{(N)}(1, \mathbf{y} \mathbf{x})}{q^{(N)}(1, \mathbf{y} \mathbf{x})}$ <p style="text-align: center;">図 2.5</p>
<p>N 粒子非衝突ベッセル彷徨過程 $\widetilde{Y}(t)$</p> <p>条件: $\widetilde{Y}(0) = 0$</p> $\widetilde{H}_N = \max_{0 < t < 1} \widetilde{Y}_N(t)$ $\mathbf{P}(\widetilde{H}_N < h) = \frac{\int_{W_N^C} \lim_{ \mathbf{x} \rightarrow 0} q_{\text{abs},h}^{(N)}(1, \mathbf{y} \mathbf{x}) d\mathbf{y}}{\int_{W_N^C} \lim_{ \mathbf{x} \rightarrow 0} q_{\text{abs}}^{(N)}(1, \mathbf{y} \mathbf{x}) d\mathbf{y}}$ <p style="text-align: center;">図 2.6</p>	<p>N 粒子非衝突ブラウン彷徨過程 $\widetilde{X}(t)$</p> <p>条件: $\widetilde{X}(0) = 0$</p> $\widetilde{L}_N = \min_{0 < t < 1} \widetilde{X}_1(t), \widetilde{R}_N = \max_{0 < t < 1} \widetilde{X}_N(t)$ $\mathbf{P}(-w_L < \widetilde{L}_N, \widetilde{R}_N < w_R) = \frac{\int_{W_N^A} \lim_{ \mathbf{x} \rightarrow 0} q_{w_L, w_R}^{(N)}(1, \mathbf{y} \mathbf{x}) d\mathbf{y}}{\int_{W_N^A} \lim_{ \mathbf{x} \rightarrow 0} q^{(N)}(1, \mathbf{y} \mathbf{x}) d\mathbf{y}}$ <p style="text-align: center;">図 2.7</p>

表 2.1: 各非衝突ブラウン経路の累積確率分布

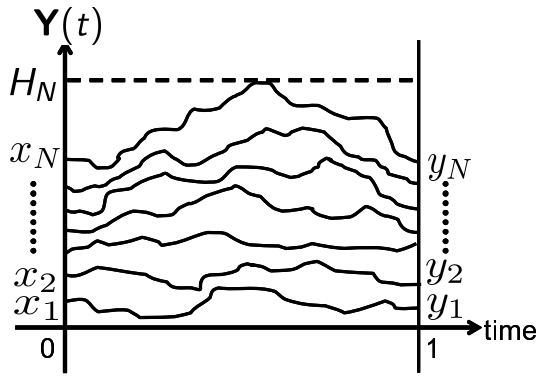


図 2.2: N 粒子非衝突ベッセル過程 $Y(t)$

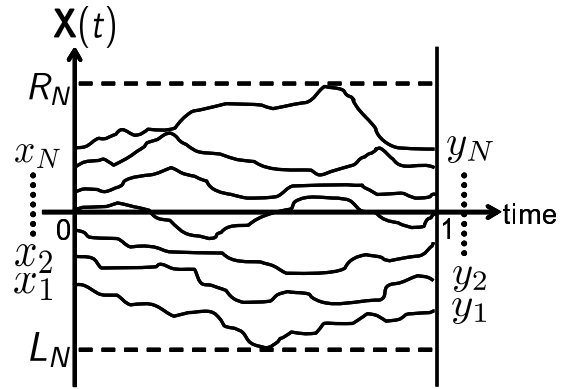


図 2.3: N 粒子非衝突ブラウン運動 $X(t)$

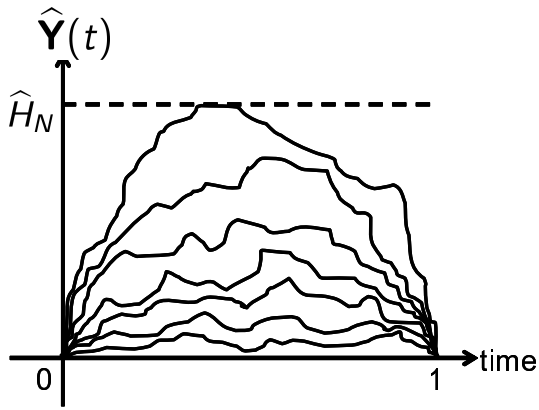


図 2.4: N 粒子非衝突ベッセル橋 $\hat{Y}(t)$

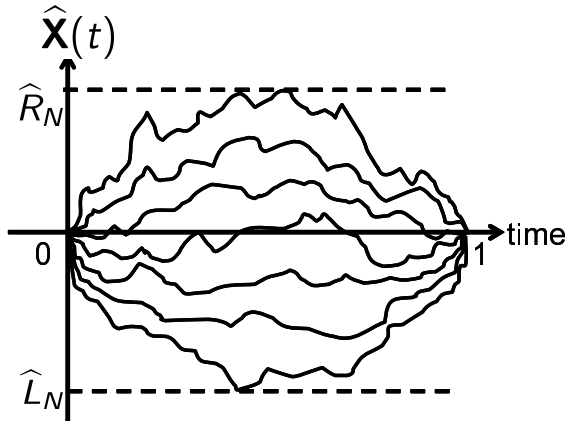


図 2.5: N 粒子非衝突ブラウン橋 $\hat{X}(t)$

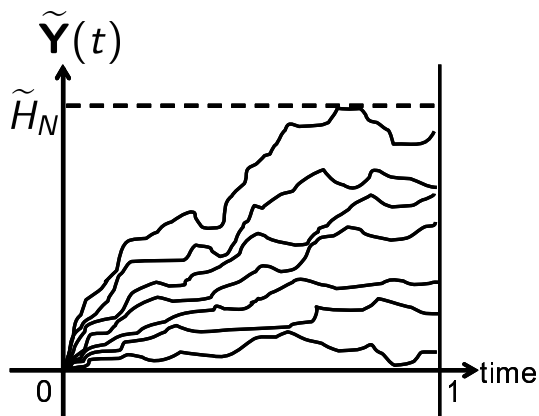


図 2.6: N 粒子非衝突ベッセル彷徨過程 $\tilde{Y}(t)$

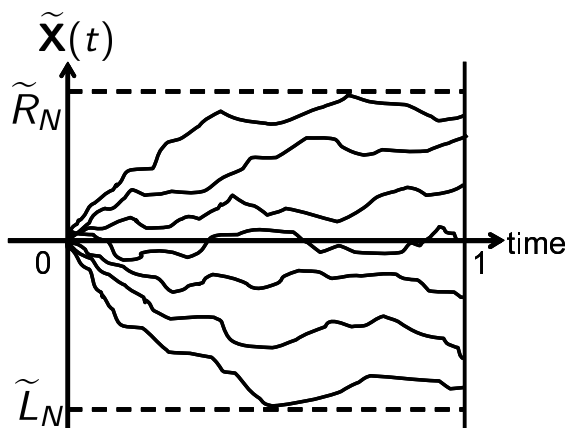


図 2.7: N 粒子非衝突ブラウン彷徨過程 $\tilde{X}(t)$

2.4 $N = 1$ のときの3次元ベッセル橋

ここでは, $N = 1$ の3次元ベッセル橋を例にとり, その最大高さ

$$\hat{H}_1 = \max_{0 < t < 1} \hat{Y}_1(t)$$

の累積確率分布の求め方を示す.

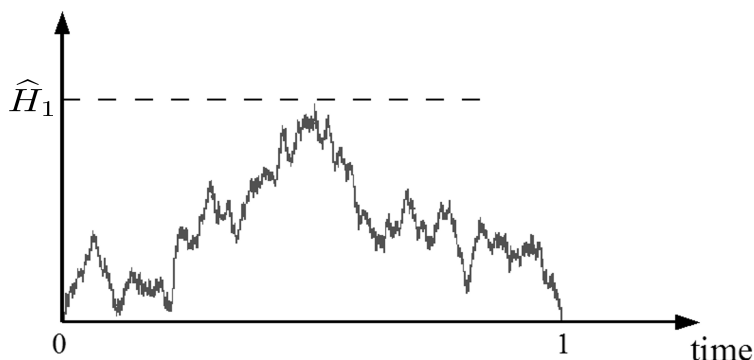


図 2.8: $N = 1$ の3次元ベッセル橋

$N = 1$ のとき非衝突条件は加わらないので累積確率分布は原点に吸収壁のあるブラウン運動の推移確率密度 (2.2) と, 原点と壁 h に吸収壁のあるブラウン運動の推移確率密度 (2.5) の比から求めることができる.

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\hat{H}_1 < h) &= \lim_{x, y \rightarrow 0} \frac{p_{\text{abs}, h}(1, y|x)}{p_{\text{abs}}(1, y|x)} \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{p_{\text{abs}, h}(1, a|a)}{p_{\text{abs}}(1, a|a)} \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} 2a^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-2h^2 n^2} (1 - 4h^2 n^2) + \mathcal{O}(a^3)}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} 2a^2 + \mathcal{O}(a^4)} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (1 - 4h^2 n^2) e^{-2h^2 n^2}. \end{aligned} \tag{2.17}$$

累積確率分布を求めることができれば, 累積確率分布と確率密度の関係

$$\mathbf{P}(\hat{H}_1 < h) \equiv \int_0^h p_{\hat{H}_1}(x) dx,$$

から h における確率密度分布は以下ようになる .

$$\begin{aligned} p_{\widehat{H}_1}(h) &= \frac{d}{dh} \mathbf{P}(\widehat{H}_1 < h) \\ &= 8 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2n^2 h^2} (4n^4 h^3 - 3n^2 h), \quad 0 \leq h < \infty. \end{aligned} \quad (2.18)$$

さらにモーメントの定義式から \widehat{H}_1 の s 次モーメントを求めることができる .

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[\widehat{H}_1^s] &\equiv \int_0^{\infty} dh h^s p_{\widehat{H}_1}(h) \\ &= 2 \left(\frac{\pi}{2} \right)^{\frac{s}{2}} \xi(s), \quad s \in \mathbf{C}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

ここで

$$\xi(s) = \frac{1}{2} s(s-1) \pi^{-s/2} \Gamma(s/2) \zeta(s), \quad (2.20)$$

$$\Gamma(x) \equiv \int_0^{\infty} du u^{x-1} e^{-u}, \quad \Re x > 0, \quad (2.21)$$

$$\zeta(s) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad (2.22)$$

であり, \widehat{H}_1 の s 次モーメントはガンマ関数 $\Gamma(x)$ と数論において重要な特殊関数であるリーマンのゼータ関数 $\zeta(s)$ を使って表されることがわかる .

また $\xi(s)$ はヤコビのテータ関数

$$\vartheta(u) \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 u}, \quad u > 0, \quad (2.23)$$

を用いて

$$\xi(s) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} s(s-1) \int_1^{\infty} du (u^{s/2-1} + u^{(1-s)/2-1}) (\vartheta(u) - 1), \quad (2.24)$$

のように変形でき,

$$\xi(1-s) = \xi(s), \quad (2.25)$$

という関数方程式を満たすことがわかる .

第3章 $N = 2$ の非衝突ベッセル橋 , 2重ディリクレ級数 , ヤコビのテータ関数

この章では主に Katori-Izumi-Kobayashi [7] の論文をまとめ、必要な情報を付け足して説明する。

第 2.4 節では、 $N = 1$ のときのベッセル橋の最大値 \hat{H}_1 における累積確率分布を求め、 \hat{H}_1 の s 次モーメント (2.19) がガンマ関数 (2.21) とリーマンのゼータ関数 (2.22) を使って表されることを示した。さらにモーメントの表式にあらわれる $\xi(s)$ はヤコビのテータ関数を用いて変形でき、(2.25) 式の関数方程式を満たすことを述べた。この章では $N = 2$ のときの非衝突ベッセル橋の最大値 \hat{H}_2 における累積確率分布を求め、その s 次モーメントがガンマ関数と、リーマンのゼータ関数の多重版とみなせる 2 重ディリクレ級数を使って表されることを示す。また、モーメントの表式に表れる $\xi_2(s)$ の満たす関数方程式をヤコビのテータ関数を用いて求める。さらに不完全ガンマ関数を用いてモーメントの値の数値評価も行う。

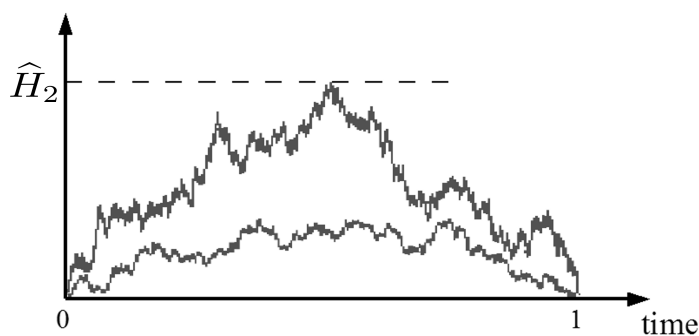


図 3.1: $N = 2$ の 3 次元ベッセル橋

3.1 $N = 2$ の非衝突ベッセル橋における累積確率分布

$N = 2$ の非衝突ベッセル橋における累積確率分布は (2.14) 式より,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\widehat{H}_2 < h) &= \lim_{|\mathbf{x}|, |\mathbf{y}| \rightarrow 0} \frac{q_{\text{abs},h}^{(2)}(1, \mathbf{y}|\mathbf{x})}{q_{\text{abs}}^{(2)}(1, \mathbf{y}|\mathbf{x})} \\ &= \lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow 0} \frac{q_{\text{abs},h}^{(2)}(1, \mathbf{x}|\mathbf{x})}{q_{\text{abs}}^{(2)}(1, \mathbf{x}|\mathbf{x})}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

(3.1) 式右辺の分母は (2.10) 式と (2.2) 式より

$$\begin{aligned} q_{\text{abs}}^{(2)}(1, \mathbf{x}|\mathbf{x}) &= \det_{1 \leq j, k \leq 2} \left[p_{\text{abs}}(t, x_j | x_k) \right] \\ &= \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(1 - e^{-2x_1^2}) & \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(e^{-(x_2-x_1)^2/2} - e^{-(x_2+x_1)^2/2}) \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(e^{-(x_2-x_1)^2/2} - e^{-(x_2+x_1)^2/2}) & \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(1 - e^{-2x_2^2}) \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{3\pi} x_1^2 x_2^2 (x_1 - x_2)^2 (x_1 + x_2)^2 + \mathcal{O}(x_1^{10}, x_2^{10}). \end{aligned} \quad (3.2)$$

続いて (3.1) 式右辺の分子は (2.11) 式と (2.5) 式より

$$\begin{aligned} &q_{\text{abs},h}^{(2)}(1, \mathbf{x}|\mathbf{x}) \\ &= \det_{1 \leq j, k \leq 2} \left[p_{\text{abs},h}(t, x_j | x_k) \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \begin{vmatrix} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (e^{-2h^2 n^2} - e^{-2(x_1-hn)^2}) & \sum_{n=-\infty}^{\infty} (e^{-(x_2-x_1-2hn)^2/2} - e^{-(x_2+x_1-2hn)^2/2}) \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} (e^{-(x_1-x_2-2hn)^2/2} - e^{-(x_1+x_2-2hn)^2/2}) & \sum_{n=-\infty}^{\infty} (e^{-2h^2 n^2} - e^{-2(x_2-hn)^2}) \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{3\pi} x_1^2 x_2^2 (x_1 - x_2)^2 (x_1 + x_2)^2 \\ &\quad \times \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} e^{-2h^2(n_1^2+n_2^2)} A_h(n_1, n_2) + \mathcal{O}(x_1^9, x_2^9), \end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{aligned} A_h(n_1, n_2) &= 1 - 16h^2 n_1^2 + 24h^4 n_1^4 + 24h^4 n_1^2 n_2^2 - \frac{32}{3} h^6 n_1^6 - 32h^6 n_1^4 n_2^2 \\ &\quad + \frac{128}{3} h^8 n_1^6 n_2^2 - \frac{128}{3} h^8 n_1^4 n_2^4, \end{aligned} \quad (3.3)$$

とおいた．よって累積確率分布は

$$\mathbf{P}(\widehat{H}_2 < h) = \sum_{(n_1, n_2) \in \mathbf{Z}^2} e^{-2h^2(n_1^2+n_2^2)} A_h(n_1, n_2), \quad (3.4)$$

となる．ここで \mathbf{Z} は整数全体を表す．

3.2 \widehat{H}_2 の s 次モーメント

確率密度分布は (3.4) 式を h で微分することにより,

$$\begin{aligned} p_{\widehat{H}_2}(h) &\equiv \frac{d}{dh} \mathbf{P}(\widehat{H}_2 < h) \\ &= \sum_{(n_1, n_2) \in \mathbf{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}} e^{-2h^2(n_1^2 + n_2^2)} B_h(n_1, n_2), \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} B_h(n_1, n_2) &= \frac{8}{3} h \{ -15n_1^2 + 60h^2n_1^4 + 60h^2n_1^2n_2^2 - 60h^4n_1^6 - 180h^4n_1^4n_2^2 \\ &\quad + 16h^6n_1^8 + 192h^6n_1^6n_2^2 - 80h^6n_1^4n_2^4 - 64h^8n_1^8n_2^2 + 64h^8n_1^6n_2^4 \}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

と表せる．また,

$$I_s(\alpha, \beta) = \sum_{(n_1, n_2) \in \mathbf{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}} n_1^\alpha n_2^\beta \int_0^\infty dh h^{\alpha+\beta-1+s} e^{-2h^2(n_1^2 + n_2^2)}, \quad (3.7)$$

という表記を用いれば \widehat{H}_2 の s 次モーメントは

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[\widehat{H}_2^s] &= \int_0^\infty dh h^s p_{\widehat{H}_2}(h) \\ &= \frac{8}{3} \{ -15I(2, 0) + 60I(4, 0) + 60I(2, 2) - 60I(6, 0) - 180I(4, 2) \\ &\quad + 16I(8, 0) + 192I(6, 2) - 80I(4, 4) - 64I(8, 2) + 64I(6, 4) \}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

となる．(3.7) 式について $u = 2h^2(n_1^2 + n_2^2)$ の変数変換を行い, ガンマ関数 (2.21) 式と 2 重ディリクレ級数

$$Z(\alpha, \beta; \gamma) \equiv \sum_{(n_1, n_2) \in \mathbf{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}} \frac{n_1^\alpha n_2^\beta}{(n_1^2 + n_2^2)^\gamma}, \quad (3.9)$$

を用いて表すと,

$$I_s(\alpha, \beta) = 2^{-(\alpha+\beta+2+s)/2} \Gamma((\alpha + \beta + s)/2) Z(\alpha, \beta; (\alpha + \beta + s)/2),$$

と変形できる．モーメントの式はガンマ関数と 2 重ディリクレ級数を用いて,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[\widehat{H}_2^s] &= \frac{1}{3} 2^{(2-s)/2} \left[-15\Gamma(1 + s/2) Z(2, 0; 1 + s/2) \right. \\ &\quad + 30\Gamma(2 + s/2) \{ Z(4, 0; 2 + s/2) + Z(2, 2; 2 + s/2) \} \\ &\quad - 15\Gamma(3 + s/2) \{ Z(6, 0; 3 + s/2) + 3Z(4, 2; 3 + s/2) \} \\ &\quad + 2\Gamma(4 + s/2) \{ Z(8, 0; 4 + s/2) + 12Z(6, 2; 4 + s/2) - 5Z(4, 4; 4 + s/2) \} \\ &\quad \left. - 4\Gamma(5 + s/2) \{ Z(8, 2; 5 + s/2) - Z(6, 4; 5 + s/2) \} \right], \end{aligned} \quad (3.10)$$

と表される．ここで2重ディリクレ級数 (3.9) の定義から以下の関係式を得る．

$$\begin{aligned}
Z(2, 0; 1 + s/2) &= \frac{1}{2} \sum_{(n_1, n_2) \in \mathbf{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}} \frac{n_1^2 + n_2^2}{(n_1^2 + n_2^2)^{1+s/2}} = \frac{1}{2} Z(0, 0; s/2), \\
Z(4, 0; 2 + s/2) + Z(2, 2; 2 + s/2) &= \frac{1}{2} \sum_{(n_1, n_2) \in \mathbf{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}} \frac{n_1^4 + 2n_1^2 n_2^2 + n_2^4}{(n_1^2 + n_2^2)^{2+s/2}} = \frac{1}{2} Z(0, 0; s/2), \\
Z(6, 0; 3 + s/2) + 3Z(4, 2; 3 + s/2) &= \frac{1}{2} \sum_{(n_1, n_2) \in \mathbf{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}} \frac{n_1^6 + 3n_1^4 n_2^2 + 3n_1^2 n_2^4 + n_2^6}{(n_1^2 + n_2^2)^{3+s/2}} \\
&= \frac{1}{2} Z(0, 0; s/2), \\
Z(8, 0; 4 + s/2) + 12Z(6, 2; 4 + s/2) - 5Z(4, 4; 4 + s/2) \\
&= \sum_{(n_1, n_2) \in \mathbf{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}} \frac{n_1^8 + 12n_1^6 n_2^2 - 5n_1^4 n_2^4}{(n_1^2 + n_2^2)^{4+s/2}} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{(n_1, n_2) \in \mathbf{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}} \frac{(n_1^2 + n_2^2)^4 + 8n_1^2 n_2^2 (n_1^2 + n_2^2)^2 - 32n_1^4 n_2^4}{(n_1^2 + n_2^2)^{4+s/2}} \\
&= \frac{1}{2} Z(0, 0; s/2) + 4Z(2, 2; 2 + s/2) - 16Z(4, 4; 4 + s/2), \\
Z(8, 2; 5 + s/2) - Z(6, 4; 5 + s/2) &= \sum_{(n_1, n_2) \in \mathbf{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}} \frac{n_1^8 n_2^2 - n_1^6 n_2^4}{(n_1^2 + n_2^2)^{5+s/2}} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{(n_1, n_2) \in \mathbf{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}} \frac{n_1^2 n_2^2 (n_1^2 + n_2^2)^3 - 4n_1^4 n_2^4 (n_1^2 + n_2^2)}{(n_1^2 + n_2^2)^{5+s/2}} \\
&= \frac{1}{2} Z(2, 2; 2 + s/2) - 2Z(4, 4; 4 + s/2).
\end{aligned}$$

これらの関係式から (3.10) 式は

$$\mathbf{E}[\widehat{H}_2^s] = \frac{2^{(2-s)/2}}{3} \left[c_1(s) Z(0, 0; s/2) + c_2(s) Z(2, 2; 2 + s/2) + c_3(s) Z(4, 4; 4 + s/2) \right],$$

$$\begin{aligned}
c_1(s) &= -\frac{15}{2} \Gamma(1 + s/2) + 15 \Gamma(2 + s/2) - \frac{15}{2} \Gamma(3 + s/2) + \Gamma(4 + s/2) \\
&= \frac{1}{16} s(s-1)(s^2 - 2s + 12) \Gamma(s/2), \\
c_2(s) &= 8 \Gamma(4 + s/2) - 2 \Gamma(5 + s/2) \\
&= -s \Gamma(s/2 + 4) \\
&= -\frac{1}{4} s(s+4)(s+6) \Gamma(s/2 + 2), \\
c_3(s) &= -32 \Gamma(4 + s/2) + 8 \Gamma(5 + s/2) \\
&= 4s \Gamma(s/2 + 4),
\end{aligned}$$

のようにまとめることができる．結局，

$$\tilde{Z}_a(b) = \Gamma(a + 2b)Z(2b, 2b; a + 2b), \quad (3.11)$$

と書いて書き直せば，

$$\mathbf{E}[\hat{H}_2^s] = \frac{2^{-s/2}}{24}s \left[(s-1)(s^2 - 2s + 12)\tilde{Z}_{s/2}(0) - 4(s+4)(s+6)\tilde{Z}_{s/2}(1) + 64\tilde{Z}_{s/2}(2) \right], \quad (3.12)$$

という綺麗な表式が得られ， \hat{H}_2 の s 次モーメントはガンマ関数と 2 重ディリクレ級数を用いて表されることがわかる．

3.3 モーメントの表式の満たす関数方程式

この節では \hat{H}_2 の s 次モーメントの表式を変形し， $\xi_2(s)$ という関数を使って表す．また $\xi_2(s)$ の満たす関数方程式を求める．

ガンマ関数 (2.21) において $u = \pi(n_1^2 + n_2^2)w$ の変数変換を行うと，

$$\Gamma(s) = \pi^s (n_1^2 + n_2^2)^s \int_0^\infty dw w^{s-1} e^{-\pi(n_1^2 + n_2^2)w},$$

となる．よって，(3.11) 式は

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_a(b) &= \pi^{a+2b} \int_0^\infty dw w^{a+2b-1} \sum_{(n_1, n_2) \in \mathbf{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}} n_1^{2b} n_2^{2b} e^{-\pi(n_1^2 + n_2^2)w} \\ &= \pi^{a+2b} \int_0^\infty dw w^{a+2b-1} \left\{ \left(\sum_{n=-\infty}^\infty n^{2b} e^{-\pi n^2 w} \right)^2 - \mathbf{1}_{\{b=0\}} \right\} \\ &= \pi^a \int_0^\infty du u^{a+2b-1} \left\{ \left(\frac{d^b}{du^b} \vartheta(u) \right)^2 - \mathbf{1}_{\{b=0\}} \right\}, \end{aligned} \quad (3.13)$$

と書ける．ここで $\mathbf{1}_{\{\omega\}}$ は条件 ω が満たされるとき 1 となり，それ以外は 0 となる関数であり， $\vartheta(u)$ は (2.23) 式で定義されたヤコビのテータ関数である．(3.13) 式を使い (3.12) 式を書き直すと，以下のようにヤコビのテータ関数を用いたモーメントの表式を得ることができる．

$$\mathbf{E}[\hat{H}_2^s] = \frac{1}{24} \left(\frac{\pi}{2} \right)^{s/2} s \left[(s-1)(s^2 - 2s + 12)I_1 - 4(s+4)(s+6)I_2 + 64I_3 \right]. \quad (3.14)$$

ただしここで,

$$I_1 = \int_0^\infty du u^{s/2-1} \{\vartheta(u)^2 - 1\}, \quad (3.15)$$

$$I_2 = \int_0^\infty du u^{s/2-1} \{\vartheta(u)^2 - 1\}, \quad (3.16)$$

$$I_3 = \int_0^\infty du u^{s/2+3} \vartheta''(u)^2. \quad (3.17)$$

さらに, ヤコビのテータ関数の反転則 [3]

$$\vartheta(u) = \sqrt{\frac{1}{u}} \vartheta\left(\frac{1}{u}\right), \quad \Re u > 0, \quad (3.18)$$

を使い I_1, I_2, I_3 を変形すると,

$$I_1 = -\frac{2}{s} + \frac{2}{s-2} + \int_1^\infty du u^{-s/2} \{\vartheta(u)^2 - 1\} + \int_1^\infty du u^{s/2-1} \{\vartheta(u)^2 - 1\}, \quad (3.19)$$

$$I_2 = \frac{1}{2(s-2)} + \int_1^\infty du u^{s/2+1} \vartheta'(u)^2 + \int_1^\infty du u^{-s/2+1} \vartheta(u) \vartheta'(u) \\ + \int_1^\infty du u^{-s/2+2} \vartheta'(u)^2 + \frac{1}{4} \int_1^\infty du u^{-s/2} \{\vartheta(u)^2 - 1\}, \quad (3.20)$$

$$I_3 = \frac{9}{8(s-2)} + \int_1^\infty du u^{s/2+3} \vartheta''(u)^2 + \int_1^\infty du u^{-s/2+4} \vartheta''(u)^2 \\ + 6 \int_1^\infty du u^{-s/2+3} \vartheta'(u) \vartheta''(u) + \frac{3}{2} \int_1^\infty du u^{-s/2+2} \vartheta(u) \vartheta''(u) \\ + \frac{9}{2} \int_1^\infty du u^{-s/2+1} \vartheta(u) \vartheta'(u) + 9 \int_1^\infty du u^{-s/2+2} \vartheta'(u)^2 \\ + \frac{9}{16} \int_1^\infty du u^{-s/2} \{\vartheta(u)^2 - 1\}, \quad (3.21)$$

となる (計算方法は第 3.5 節 Appendix A 参照). ここで $I_1(s)$ は $s = 0$ (留数 -2) と $s = 2$ (留数 2), $I_2(s)$ は $s = 2$ (留数 $1/2$), $I_3(s)$ は $s = 2$ (留数 $9/8$) の 1 位の極を持っている. これらを (3.14) 式に代入すると, 極は消え, すべての s に対して正則な形となる.

$$\mathbf{E}[\widehat{H}_2^s] = \frac{1}{24} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{s/2} \left[2(s^2 - 14s + 12) \right. \\ + s \left\{ (s-1)(s^2 - 2s + 12)K_0(s) - 4(s+4)(s+6)K_1(s) + 64K_2(s) \right. \\ + s(s-2)^2 K_0(2-s) - 4(s^2 + 10s - 120)K_1(2-s) + 64K_2(2-s) \\ \left. \left. - 4(s^2 + 10s - 48)J_1(s) + 96J_2(s) + 384J_3(s) \right\} \right], \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned}
K_0(s) &= \int_1^\infty du u^{s/2-1} \{\vartheta(u)^2 - 1\}, \\
K_1(s) &= \int_1^\infty du u^{s/2+1} \vartheta'(u)^2, \\
K_2(s) &= \int_1^\infty du u^{s/2+3} \vartheta''(u)^2, \\
J_1(s) &= \int_1^\infty du u^{-s/2+1} \vartheta(u) \vartheta'(u), \\
J_2(s) &= \int_1^\infty du u^{-s/2+2} \vartheta(u) \vartheta''(u), \\
J_3(s) &= \int_1^\infty du u^{-s/2+3} \vartheta'(u) \vartheta''(u).
\end{aligned}$$

さらに $J_1(s), J_2(s), J_3(s)$ についてそれぞれ部分積分し, $K_0(s), K_1(s)$ を使って表すと,

$$\begin{aligned}
J_1(s) &= \left[u^{-s/2+1} \vartheta(u)^2 \right]_1^\infty - \int_1^\infty du \frac{d}{du} \left(u^{-s/2+1} \vartheta(u) \right) \vartheta(u) \\
&= \left[u^{-s/2+1} \vartheta(u)^2 \right]_1^\infty + \frac{1}{2}(s-2)K_0(2-s) - \left[u^{-s/2+1} \right]_1^\infty - J_1(s). \\
&= \frac{1}{2}(s-2)K_0(2-s) + \left[u^{-s/2+1} \{\vartheta(u)^2 - 1\} \right]_1^\infty - J_1(s) \\
&= \frac{1}{4}(s-2)K_0(2-s) - \frac{1}{2}\{\vartheta(1)^2 - 1\}, \tag{3.23}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_2(s) &= \left[u^{-s/2+2} \vartheta(u) \frac{d}{du} \vartheta(u) \right]_1^\infty - \int_1^\infty du \frac{d}{du} \left\{ u^{-s/2+2} \vartheta(u) \right\} \frac{d}{du} \vartheta(u) \\
&= -\vartheta(1) \vartheta'(1) + \frac{1}{2}(s-4)J_1(s) - K_1(2-s) \\
&= -\vartheta(1) \vartheta'(1) - \frac{1}{4}(s-4)\{\vartheta(1)^2 - 1\} \\
&\quad + \frac{1}{8}(s-2)(s-4)K_0(2-s) - K_1(2-s), \tag{3.24}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_3(s) &= \left[u^{-s/2+3} \left(\frac{d}{du} \vartheta(u) \right)^2 \right]_1^\infty + \frac{1}{2}(s-6)K_1(2-s) - J_3(s) \\
&= -\frac{1}{2}\vartheta'(1)^2 + \frac{1}{4}(s-6)K_1(2-s), \tag{3.25}
\end{aligned}$$

となり, これらを代入して (3.22) 式を書き直せば,

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[\widehat{H}_2^s] &= \left(\frac{\pi}{2} \right)^{s/2} \left[\frac{1}{24}(1-s)(s^2 - 2s + 12)(2 - sK_0(s)) \right. \\
&\quad \left. - 4s \left(\vartheta(1) \vartheta'(1) + 2s \vartheta'(1)^2 \right) + s \xi_2(s) \right], \quad s \in \mathbf{C}, \tag{3.26}
\end{aligned}$$

$$K_0(s) = \int_1^\infty du u^{s/2-1} \{\vartheta(u)^2 - 1\}, \quad (3.27)$$

$$\begin{aligned} \xi_2(s) = & -\frac{1}{6} \left\{ (s+4)(s+6) \int_1^\infty du u^{s/2+1} \vartheta'(u)^2 \right. \\ & \left. + ((2-s)+4)((2-s)+6) \int_1^\infty du u^{(2-s)/2+1} \vartheta'(u)^2 \right\} \\ & + \frac{8}{3} \int_1^\infty du (u^{s/2+3} + u^{(2-s)/2+3}) \vartheta''(u)^2 + \frac{1}{12} s(s-2) \vartheta(1)^2, \end{aligned} \quad (3.28)$$

となる．ここで (3.28) 式の $\xi_2(s)$ において s を $2-s$ としても全く同じ形となるため関数方程式

$$\xi_2(2-s) = \xi_2(s), \quad s \in \mathbf{C},$$

を満たすことがわかる．

3.4 不完全ガンマ関数と数値評価

この節では $\xi(s)$, $K_0(s)$, $\xi_2(s)$ が不完全ガンマ関数を使って表されることを示し，不完全ガンマ関数の収束の速さを利用して $N = 1, 2$ それぞれの場合のモーメントの表式の数値評価を行う．

例として，

$$L = \int_1^\infty du u^{-1/2} \{\vartheta(u)^2 - 1\}$$

について第 2 種不完全ガンマ関数

$$\begin{aligned} \Gamma(z, p) &= \int_p^\infty du u^{z-1} e^{-u} \\ &= \Gamma(z) - \int_0^p du u^{z-1} e^{-u}, \quad \Re z > 0, p > 0, \end{aligned} \quad (3.29)$$

を用いて表す．まず，ヤコビのテータ関数の定義 (2.23) から，

$$\begin{aligned} L &= \int_1^\infty du u^{-1/2} \sum_{(n_1, n_2) \in \mathbf{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}} e^{-\pi(n_1^2 + n_2^2)u} \\ &= 4 \int_1^\infty du u^{-1/2} \sum_{n_1=1}^\infty \sum_{n_2=1}^\infty e^{-\pi(n_1^2 + n_2^2)u} + 4 \int_1^\infty du u^{-1/2} \sum_{n=1}^\infty e^{-\pi n^2 u}. \end{aligned}$$

ここで第 1 項と第 2 項についてそれぞれ $\pi(n_1^2 + n_2^2)u = w$, $\pi n^2 u = w$ と変数変換し， w を

改めて u と置きなおせば,

$$\begin{aligned} L &= 4\pi^{-1/2} \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\infty} \frac{1}{(n_1^2 + n_2^2)^{1/2}} \int_{\pi(n_1^2 + n_2^2)}^{\infty} dw w^{-1/2} e^{-w} + 4\pi^{-1/2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \int_{\pi n^2}^{\infty} dw w^{-1/2} e^{-w} \\ &= 4\pi^{-1/2} \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\infty} \frac{1}{(n_1^2 + n_2^2)^{1/2}} \Gamma(1/2, \pi(n_1^2 + n_2^2)) + 4\pi^{-1/2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \Gamma(1/2, \pi n^2), \end{aligned}$$

となり不完全ガンマ関数で表されることがわかる．同様の計算から,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[\widehat{H}_1^s] &= \left(\frac{\pi}{2}\right)^{s/2} \left[1 + s(s-1) \right. \\ &\quad \times \left. \left\{ \pi^{-s/2} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} \Gamma(s/2, \pi n^2) + \pi^{s/2-1/2} \sum_{n=1}^{\infty} n^{s-1} \Gamma(-s/2 + 1/2, \pi n^2) \right\} \right], \end{aligned} \quad (3.30)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[\widehat{H}_2^s] &= \left(\frac{\pi}{2}\right)^{s/2} \left[\frac{1}{12} (1-s)(s^2 - 2s + 12) \right. \\ &\quad \times \left. \left\{ 1 - 2s\pi^{-s/2} \left(\sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\infty} \frac{1}{(n_1^2 + n_2^2)^{s/2}} \Gamma(s/2, \pi(n_1^2 + n_2^2)) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \Gamma(s/2, \pi n^2) \right) \right\} \right. \\ &\quad \left. - 4s \{ \vartheta(1)\vartheta'(1) + 2(\vartheta'(1))^2 \} + s\xi_2(s) \right], \end{aligned} \quad (3.31)$$

$$\begin{aligned} \xi_2(s) &= -\frac{2}{3} \left\{ \pi^{-s/2} (s+4)(s+6) \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\infty} \frac{n_1^2 n_2^2}{(n_1^2 + n_2^2)^{s/2+2}} \Gamma(s/2 + 2, \pi(n_1^2 + n_2^2)) \right. \\ &\quad \left. + \pi^{s/2-1} ((2-s)+4)((2-s)+6) \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\infty} \frac{n_1^2 n_2^2}{(n_1^2 + n_2^2)^{-s/2+3}} \Gamma(-s/2 + 3, \pi(n_1^2 + n_2^2)) \right\} \\ &\quad + \frac{32}{3} \left\{ \pi^{-s/2} \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\infty} \frac{n_1^4 n_2^4}{(n_1^2 + n_2^2)^{s/2+4}} \Gamma(s/2 + 4, \pi(n_1^2 + n_2^2)) \right. \\ &\quad \left. + \pi^{s/2-1} \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\infty} \frac{n_1^4 n_2^4}{(n_1^2 + n_2^2)^{-s/2+5}} \Gamma(-s/2 + 5, \pi(n_1^2 + n_2^2)) \right\} \\ &\quad + \frac{1}{12} s(s-2)\vartheta(1)^2, \end{aligned} \quad (3.32)$$

を得る． n, n_1, n_2 の値を大きくしていくと不完全ガンマ関数の値が急激に 0 に収束する性質を利用してモーメントの値を評価すると表 3.1 のようになる．さらに壁あり N -

表 3.1: モーメントの数値結果

s	0	1	2	3	4	5
$\mathbf{E}[\widehat{H}_1^s]$	1.0	1.253314	1.644934	2.259832	3.246969	4.873485
$\mathbf{E}[\widehat{H}_2^s]$	1.0	1.822625	3.395156	6.463823	12.576665	25.005999

watermelon のランダムウォークとその連続極限である N 粒子非衝突ベッセル橋の最大値の満たす関係式

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\langle \left(\frac{h_N(2n)}{\sqrt{2n}} \right)^s \right\rangle = \mathbf{E}[\widehat{H}_N^s] \quad (3.33)$$

に表 3.1 の $s = 1$ のときの $\mathbf{E}[\widehat{H}_1]$, $\mathbf{E}[\widehat{H}_2]$ の値を代入すれば,

$$\begin{aligned} \langle h_1(2n) \rangle &\simeq \sqrt{2n} \times \mathbf{E}[\widehat{H}_1] \\ &= \sqrt{2n} \times 1.253314 \cdots = \sqrt{\pi n}, \\ \langle h_2(2n) \rangle &\simeq \sqrt{2n} \times \mathbf{E}[\widehat{H}_2] \\ &= \sqrt{2n} \times 1.822625 \cdots = 2.57758 \cdots \times \sqrt{n}, \end{aligned}$$

を得る．これは de Bruijn-Knuth-Rice[4] の壁あり 1-watermelon (Dyck path) の最大高さの漸近評価

$$\langle h_1(2n) \rangle \simeq \sqrt{\pi n} - \frac{3}{2} + o(1), \quad n \rightarrow \infty, \quad (3.34)$$

や, Fulmek[6] の壁あり 2-watermelon の最大高さの漸近評価

$$\langle h_2(2n) \rangle \simeq c_2 \sqrt{n} - \frac{3}{2} + o(1), \quad c_2 = 2.57758 \cdots, \quad n \rightarrow \infty, \quad (3.35)$$

の主要項を再現している．

3.5 Appendix A

この節では第 3.3 節に出てきた I_j , $j = 1, 2, 3$ (3.19),(3.20),(3.21) の計算を導く．
ヤコビのテータ関数の反転則 (3.18) から，

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int_0^1 du u^{s/2-1} \{\vartheta(u)^2 - 1\} + \int_1^\infty du u^{s/2-1} \{\vartheta(u)^2 - 1\} \\
 &= \int_0^1 du u^{s/2-1} \left\{ \frac{1}{u} \left(\vartheta \left(\frac{1}{u} \right) \right)^2 - 1 \right\} + \int_1^\infty du u^{s/2-1} \{\vartheta(u)^2 - 1\} \\
 &= \int_0^1 du u^{s/2-1} \left\{ \frac{1}{u} - 1 \right\} \\
 &\quad + \int_0^1 du u^{s/2-2} \left\{ \left(\vartheta \left(\frac{1}{u} \right) \right)^2 - 1 \right\} + \int_1^\infty du u^{s/2-1} \{\vartheta(u)^2 - 1\}.
 \end{aligned}$$

ここで第 1 項の積分を計算し，第 2 項の積分については $w = 1/u$ の変数変換を行うと (3.19) 式を得る．次に

$$I_2 = \int_0^1 du u^{s/2+1} \left(\frac{d}{du} \vartheta(u) \right)^2 + \int_1^\infty du u^{s/2+1} \left(\frac{d}{du} \vartheta(u) \right)^2$$

について第 1 項目にヤコビのテータ関数の反転則 (3.18) を適用し，

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{d}{du} \vartheta(u) \right)^2 &= \left\{ \frac{d}{du} \left(\sqrt{\frac{1}{u}} \vartheta \left(\frac{1}{u} \right) \right) \right\}^2 \\
 &= \left\{ -\frac{1}{2} u^{-3/2} \vartheta \left(\frac{1}{u} \right) + \sqrt{\frac{1}{u}} \frac{d}{du} \vartheta \left(\frac{1}{u} \right) \right\}^2 \\
 &= \frac{1}{4} u^{-3} \left(\vartheta \left(\frac{1}{u} \right) \right)^2 - u^{-2} \vartheta \left(\frac{1}{u} \right) \frac{d}{du} \vartheta \left(\frac{1}{u} \right) + u^{-1} \left(\frac{d}{du} \vartheta \left(\frac{1}{u} \right) \right)^2,
 \end{aligned}$$

これを I_2 に戻して $w = 1/u$ の変数変換を行えば，

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \frac{1}{4} \int_1^\infty dw w^{-s/2} \vartheta(w)^2 + \int_1^\infty dw w^{-s/2+1} \vartheta(w) \frac{d}{dw} \vartheta(w) \\
 &\quad + \int_1^\infty dw w^{-s/2+2} \left(\frac{d}{dw} \vartheta(w) \right)^2 + \int_1^\infty dw w^{s/2+1} \left(\frac{d}{dw} \vartheta(w) \right)^2
 \end{aligned}$$

となり，第 1 項目の積分を，

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{4} \int_1^\infty dw w^{-s/2} \vartheta(w)^2 &= \frac{1}{4} \int_1^\infty dw w^{-s/2} + \frac{1}{4} \int_1^\infty dw w^{-s/2} \{\vartheta(w)^2 - 1\} \\
 &= \frac{1}{2(s-2)} + \frac{1}{4} \int_1^\infty dw w^{-s/2} \{\vartheta(w)^2 - 1\}
 \end{aligned}$$

と計算すれば (3.20) 式を得る . I_3 についても

$$I_3 = \int_0^1 du u^{s/2+3} \left(\frac{d^2}{du^2} \vartheta(u) \right)^2 + \int_1^\infty du u^{s/2+3} \left(\frac{d^2}{du^2} \vartheta(u) \right)^2$$

とし , 第 1 項目について以下のようにヤコビのテータ関数の反転則を用いて ,

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2}{du^2} \vartheta(u) \right)^2 &= \left\{ \frac{d^2}{du^2} \left(\sqrt{\frac{1}{u}} \vartheta \left(\frac{1}{u} \right) \right) \right\}^2 \\ &= \left\{ \frac{3}{4} u^{-5/2} \vartheta \left(\frac{1}{u} \right) - u^{-3/2} \frac{d}{du} \vartheta \left(\frac{1}{u} \right) + u^{-1/2} \frac{d^2}{du^2} \vartheta \left(\frac{1}{u} \right) \right\}^2 \\ &= \frac{9}{16} u^{-5} \left(\vartheta \left(\frac{1}{u} \right) \right)^2 + u^{-3} \left(\frac{d}{du} \vartheta \left(\frac{1}{u} \right) \right)^2 + u^{-1} \left(\frac{d^2}{du^2} \vartheta \left(\frac{1}{u} \right) \right)^2 \\ &\quad - \frac{3}{2} u^{-4} \vartheta \left(\frac{1}{u} \right) \frac{d}{du} \vartheta \left(\frac{1}{u} \right) + \frac{3}{2} u^{-3} \vartheta \left(\frac{1}{u} \right) \frac{d^2}{du^2} \vartheta \left(\frac{1}{u} \right) \\ &\quad - 2u^{-2} \left(\frac{d}{du} \vartheta \left(\frac{1}{u} \right) \right) \left(\frac{d^2}{du^2} \vartheta \left(\frac{1}{u} \right) \right) \end{aligned}$$

とすれば I_2 と同様の計算により (3.21) を得る .

第4章 非衝突ベッセル橋の最大値分布 (N :一般)

この章では主に Kobayashi-Izumi-Katori [10] の論文をまとめ、必要な情報を付け足して説明する。

第3章では $N = 2$ の非衝突ベッセル橋の一番上の経路の最大値 \hat{H}_2 における累積確率分布を求め、そのモーメントが2重ディリクレ級数やヤコビのテータ関数を使って表されることを示し、不完全ガンマ関数を用いてモーメントの値の数値評価も行った。この章では N を一般の値に拡張した非衝突ベッセル橋 (図 4.1) の極値分布の解析と、数値シミュレーションを行う。解析結果として、一番上の経路の最大値 \hat{H}_N における累積確率分布は差積の形と、 $N \times N$ 行列式の形の2種類の表現を得る。さらにヤコビのテータ関数の満たす関数方程式から後者の表現はエルミート多項式の無限和を成分にもつ $N \times N$ 行列式

$$\mathbf{P}(\hat{H}_N < h) = \frac{(-1)^N}{2^{N^2} \prod_{j=1}^N (2j-1)!} \det_{1 \leq j, k \leq N} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} H_{2(j+k-1)}(\sqrt{2}nh) e^{-2n^2 h^2} \right], \quad (4.1)$$

で表されることを示す。数値シミュレーションでは Dyson の BM モデルと呼ばれるランダム行列の固有値過程から N 粒子非衝突ベッセル橋をシミュレーションし、その統計則を導く。

また $N \rightarrow \infty$ における平均最大値の漸近挙動における Bonichon-Mosbah[5] の評価

$$\langle \hat{H}_N \rangle \simeq \sqrt{1.67N - 0.06}, \quad N \rightarrow \infty, \quad (4.2)$$

と、それを擬似的な漸近挙動とみなし本当の漸近挙動を

$$\langle \hat{H}_N \rangle \simeq \sqrt{2N}, \quad N \rightarrow \infty, \quad (4.3)$$

とする Schehr ら [9] の議論についても数値的な結果から考察を述べる。さらに、一番上の経路のみならずその内部経路の最大値分布についても調べる。

4.1 非衝突ベッセル橋の推移確率密度

独立な1次元標準ブラウン運動 $\{B_j(t)\}_{j=1}^d$ からなる d 次元ブラウン運動 $\mathbf{B}^{(d)}(t) = (B_1(t), B_2(t), \dots, B_d(t))$ の原点からの距離

$$\begin{aligned} R^{(d)}(t) &= |\mathbf{B}^{(d)}(t)| \\ &= \sqrt{(B_1(t))^2 + (B_2(t))^2 + \dots + (B_d(t))^2}, \end{aligned}$$

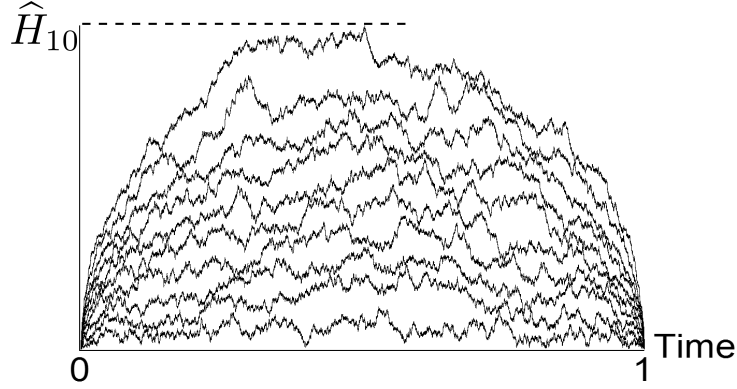


図 4.1: $N = 10$ の非衝突ベッセル橋

は $\mathbf{R}_+ \cup \{0\}$ 上を運動する拡散過程であり，その推移確率密度は，

$$p_{\text{BES}(d)}(t, y|x) = \frac{y^{\nu+1}}{x^\nu} \frac{1}{t} e^{-(x^2+y^2)/(2t)} I_\nu \left(\frac{xy}{t} \right), \quad x > 0, y \geq 0, t > 0, \quad (4.4)$$

$$\nu = \frac{d-2}{2},$$

である．ここで，

$$I_\nu(z) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} (z/2)^{2n+\nu} / \{\Gamma(n+1)\Gamma(\nu+n+1)\}, \quad (4.5)$$

は変形ベッセル関数である． $R^{(d)}(t)$ は d -次元ベッセル過程 $\text{BES}(d)$ [18, 19, 20] と呼ばれその推移確率密度 (4.4) において $d = 3$ とすれば $I_{1/2}(z) = (e^z - e^{-z})/\sqrt{2\pi z}$ であるから (2.4) と等しくなる．

$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_N) \in \mathbf{W}_N^{\text{C}}$, $t > 0$ において (2.4) 式と行列式の多重線形性から次式が成り立つ．

$$\det_{1 \leq j, k \leq N} \left[p_{\text{BES}(3)}(t, y_j|x_k) \right] = \prod_{j=1}^N \frac{y_j}{x_j} \det_{1 \leq j, k \leq N} \left[p_{\text{abs}}(t, y_j|x_k) \right].$$

また， $\mathbf{x} \in \mathbf{W}_N^{\text{C}}$ 配置から始まる N 粒子非衝突 3 次元ベッセル過程 $\text{BES}(3)$ がお互いにぶつからずに $T > 0$ まで運動する確率は Karlin-McGregor の公式 [15] (または [21] 及び [22],[23]) から

$$\mathcal{N}_N^{\text{C}}(T, \mathbf{x}) = \int_0^\infty dy_1 \cdots \int_0^\infty dy_N \det_{1 \leq j, k \leq N} \left[p_{\text{BES}(3)}(T, y_j|x_k) \right],$$

となる．拡散過程におけるマルコフ性から $0 < t_1 < t_2 < 1$ において時刻 1 で $\mathbf{y} \in \mathbf{W}_N^{\text{C}}$ の配置を固定してしまえば，時刻 t_1 で $\mathbf{x}^{(1)} \in \mathbf{W}_N^{\text{C}}$ から推移し，時刻 t_2 で $\mathbf{x}^{(2)} \in \mathbf{W}_N^{\text{C}}$ へ到達

する 3 次元ベッセル過程の推移確率密度は ,

$$\begin{aligned}
& p_{\mathbf{y}}^{(N)}(t_1, \mathbf{x}^{(1)}; t_2, \mathbf{x}^{(2)}) \\
&= \frac{\det_{1 \leq j, k \leq N} \left[p_{\text{BES}(3)}(1 - t_2, y_j | x_k^{(2)}) \right] \det_{1 \leq j, k \leq N} \left[p_{\text{BES}(3)}(t_2 - t_1, x_j^{(2)} | x_k^{(1)}) \right]}{\det_{1 \leq j, k \leq N} \left[p_{\text{BES}(3)}(1 - t_1, y_j | x_k^{(1)}) \right]} \\
&= \frac{\det_{1 \leq j, k \leq N} \left[p_{\text{abs}}(1 - t_2, y_j | x_k^{(2)}) \right] \det_{1 \leq j, k \leq N} \left[p_{\text{abs}}(t_2 - t_1, x_j^{(2)} | x_k^{(1)}) \right]}{\det_{1 \leq j, k \leq N} \left[p_{\text{abs}}(1 - t_1, y_j | x_k^{(1)}) \right]}, \quad (4.6)
\end{aligned}$$

である . $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathbf{W}_N^{\text{C}}$ に対して $|\mathbf{x}|^2 = \sum_{j=1}^N x_j^2$ とし , また差積

$$h_N^{\text{C}}(\mathbf{x}) = \prod_{1 \leq j < k \leq N} (x_k^2 - x_j^2) \prod_{\ell=1}^N x_{\ell} \quad (4.7)$$

を定義する . (4.6) 式とすでに知られている漸近評価 ([24, (33) 式において $\nu = 1/2$ とする])

$$\det_{1 \leq j, k \leq N} \left[p_{\text{abs}}(t, y_j | x_k) \right] \simeq \frac{t^{-N(2N+1)/2} e^{-|\mathbf{x}|^2/(2t)}}{2^{N(2N-1)/2} \prod_{j=1}^N \{\Gamma(j)\Gamma(j+1/2)\}} h_N^{\text{C}}(\mathbf{x}) h_N^{\text{C}}(\mathbf{y}), \quad |\mathbf{y}| \rightarrow 0,$$

から以下の式を得る .

$$\begin{aligned}
& p^{(N)}(t_1, \mathbf{x}^{(1)}; t_2, \mathbf{x}^{(2)}) \equiv \lim_{|\mathbf{y}| \rightarrow 0} p_{\mathbf{y}}^{(N)}(t_1, \mathbf{x}^{(1)}; t_2, \mathbf{x}^{(2)}) \\
&= \left(\frac{1 - t_2}{1 - t_1} \right)^{-N(2N+1)/2} \frac{h_N^{\text{C}}(\mathbf{x}^{(2)})}{h_N^{\text{C}}(\mathbf{x}^{(1)})} \\
&\quad \times \det_{1 \leq j, k \leq N} \left[p_{\text{abs}}(t_2 - t_1, x_j^{(2)} | x_k^{(1)}) \right] \exp \left\{ -\frac{|\mathbf{x}^{(2)}|^2}{2(1 - t_2)} + \frac{|\mathbf{x}^{(1)}|^2}{2(1 - t_1)} \right\}. \quad (4.8)
\end{aligned}$$

さらに

$$\begin{aligned}
& p^{(N)}(0, \mathbf{0}; t, \mathbf{x}) \equiv \lim_{|\mathbf{x}^{(1)}| \rightarrow 0} p^{(N)}(0, \mathbf{x}^{(1)}; t, \mathbf{x}) \\
&= \frac{\{t(1 - t)\}^{-N(2N+1)/2}}{(\pi/2)^{N/2} \prod_{j=1}^N (2j - 1)!} \left\{ h_N^{\text{C}}(\mathbf{x}) \right\}^2 \exp \left\{ -\frac{|\mathbf{x}|^2}{2t(1 - t)} \right\}, \quad 0 < t < 1, \quad (4.9)
\end{aligned}$$

を導くことができる . 期間 1 の N 粒子非衝突 3 次元ベッセル橋 $\widehat{\mathbf{Y}}(t) = (\widehat{Y}_1(t), \widehat{Y}_2(t), \dots, \widehat{Y}_N(t))$ は (4.8) や (4.9) のような推移確率密度を持つ拡散過程として定義され , 任意の時刻の列 $t_0 \equiv 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_M < 1$, $M = 1, 2, \dots$ に対して $\widehat{\mathbf{Y}}(t_m)$ が各時刻で $\Delta_m \in \mathbf{W}_N^{\text{C}}$, $m = 1, 2, \dots, M$ の区間内に滞在する確率は

$$\begin{aligned}
& \mathbf{P} \left(\mathbf{r}^{(N)}(t_m) \in \Delta_m, m = 1, 2, \dots, M \right) \\
&= \int_{\Delta_1} d\mathbf{x}^{(1)} \dots \int_{\Delta_M} d\mathbf{x}^{(M)} \prod_{m=0}^{M-1} p^{(N)}(t_m, \mathbf{x}^{(m)}; t_{m+1}, \mathbf{x}^{(m+1)}), \quad (4.10)
\end{aligned}$$

と書ける．

4.2 クラス C の行列値ブラウン橋

I_N を $N \times N$ 単位行列, 0_N を $N \times N$ 零行列として $2N \times 2N$ 行列

$$J = \begin{pmatrix} 0_N & I_N \\ -I_N & 0_N \end{pmatrix},$$

を定義する． $\mathcal{H}(N)$ を $N \times N$ エルミート行列全体の集合, $\mathcal{S}(N; \mathbf{C})$ を $N \times N$ 複素対称行列全体の集合として次のエルミート行列を考える．

$$\mathcal{H}^C(2N) = \left\{ C = \begin{pmatrix} H & S \\ S^\dagger & -{}^t H \end{pmatrix}; H \in \mathcal{H}(N), S \in \mathcal{S}(N; \mathbf{C}) \right\}. \quad (4.11)$$

ここで ${}^t H$ は H の転置行列であり, S^\dagger は S のエルミート共役である． $C \in \mathcal{H}^C(2N) \subset \mathcal{H}(2N)$ は

$${}^t C J + J C = 0, \quad (4.12)$$

を満たすためシンプレクティック・リー代数となり, $\mathcal{H}^C(2N) = \text{sp}(2N, \mathbf{C}) \cap \mathcal{H}(2N)$ [17] と書くことができる．(4.12) 式の条件から, C の $2N$ 個の実固有値は,

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N, -\lambda_1, -\lambda_2, \dots, -\lambda_N), \lambda_j \geq 0, 1 \leq j \leq N,$$

の形で得られる．Altland-Zirnbauer は $\mathcal{H}^C(2N)$ を超伝導の BCS 平均場理論における Bogoliubov-de Gennes 形式のハミルトニアン全体の集合として研究し, $\mathcal{H}^C(2N)$ の正負の固有値のペア $(\lambda_j, -\lambda_j)$, $1 \leq j \leq N$ を Bogoliubov-de Gennes 理論における粒子とホールの対称性とみなした [12, 13]．彼らは $\text{sp}(2N, \mathbf{C})$ がカルタン表記 [25] で C_N と書かれる事にちなんで $\mathcal{H}^C(2N)$ をクラス C と呼んだ．

期間 1 のブラウン橋 $b(t)$, $0 \leq t \leq 1$ は時刻 0 で原点から出発し時刻 1 で原点に戻ってくるという条件付 1 次元ブラウン運動なのでその推移確率密度は

$$p_{\text{Bb}}(s, x; t, y) = \frac{p(1-t, 0|y)p(t-s, y|x)}{p(1-s, 0|x)}, \quad 0 \leq s < t \leq 1, x, y \in \mathbf{R}, \quad (4.13)$$

となる．ここで $b_{jk}^\rho(t)$, $0 \leq \rho \leq 2, 1 \leq j \leq k \leq N$ と $\tilde{b}_{jk}^0(t)$, $1 \leq j < k \leq N$ をそれぞれ独立な期間 1 のブラウン橋とし,

$$s_{jk}^\rho(t) = \begin{cases} b_{jk}^\rho(t)/\sqrt{2} & \text{if } j < k \\ b_{jj}^\rho(t) & \text{if } j = k \\ b_{kj}^\rho(t)/\sqrt{2} & \text{if } j > k \end{cases}$$

$$a_{jk}^0(t) = \begin{cases} \tilde{b}_{jk}^0(t)/\sqrt{2} & \text{if } j < k \\ 0 & \text{if } j = k \\ -\tilde{b}_{kj}^0(t)/\sqrt{2} & \text{if } j > k, \end{cases}$$

とおく．そして $N \times N$ 行列

$$S^\rho(t) = \left(s_{jk}^\rho(t) \right)_{1 \leq j, k \leq N}, 0 \leq \rho \leq 2,$$

$$A^0(t) = \left(a_{jk}^0(t) \right)_{1 \leq j, k \leq N}$$

を用いて $2N \times 2N$ 行列値 BM

$$C^{(N)}(t) = \begin{pmatrix} S^0(t) + iA^0(t) & S^1(t) + iS^2(t) \\ S^1(t) - iS^2(t) & -(S^0(t) - iA^0(t)) \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (4.14)$$

を定義する． $C^{(N)}(t)$ は $C^{(N)}(t) \in \mathcal{H}^C(2N), 0 \leq t \leq 1$ を満たし， $C^{(N)}(0) = C^{(N)}(1) = 0_{2N}$ である． $C^{(N)}(t)$ をつくるためには $N(N+1)/2 \times 3 + N(N-1)/2 = N(2N+1)$ 個の独立なブラウン橋が必要である．よって $C^{(N)}(t)$ は $N(2N+1)$ 次元の $\mathcal{H}^C(2N)$ 空間におけるブラウン橋とみなせる．

$C^{(N)}(t)$ は $0 < t < 1$ の各時刻においてユニタリー・シンプレクティック行列で直交化でき，固有値過程

$$\lambda^{(N)}(t) = (\lambda_1^{(N)}(t), \dots, \lambda_N^{(N)}(t), -\lambda_1^{(N)}(t), \dots, -\lambda_N^{(N)}(t)),$$

$$0 \leq \lambda_1^{(N)}(t) \leq \dots \leq \lambda_N^{(N)}(t),$$

を得る．一般化された Bru の理論 [24] から

$$\lambda_+^{(N)}(t) = (\lambda_1^{(N)}(t), \lambda_2^{(N)}(t), \dots, \lambda_N^{(N)}(t)),$$

の推移確率密度を求めることができる．その結果 $\lambda_+^{(N)}(t)$ の推移確率密度は (4.8), (4.9) と一致するため， $\lambda_+^{(N)}(t)$ は非衝突ベッセル橋 $\hat{Y}(t)$ と分布として等しいことと， $\lambda_+^{(N)}(t) \in \mathbf{W}_N^C, 0 < t < 1$ を満たすことがわかる．図 4.2 は $N = 10$ の固有値過程 $\lambda^{(N)}(t)$ をシミュレーションしたもので $\lambda = 0$ の線を境に対称になっていることがわかる．このうち正の固有値過程 $\lambda_+^{(N)}(t)$ のみを取り出したものが図 4.1 の非衝突ベッセル橋である．

4.3 一番上の経路における最大値の解析結果

4.3.1 \hat{H}_N の累積確率分布

N 粒子非衝突ベッセル橋の累積確率分布は (2.14) 式より，

$$\mathbf{P}(\hat{H}_N < h) = \lim_{|\mathbf{x}|, |\mathbf{y}| \rightarrow 0} \frac{q_{\text{abs}, h}^{(N)}(1, \mathbf{y} | \mathbf{x})}{q_{\text{abs}}^{(N)}(1, \mathbf{y} | \mathbf{x})}. \quad (4.15)$$

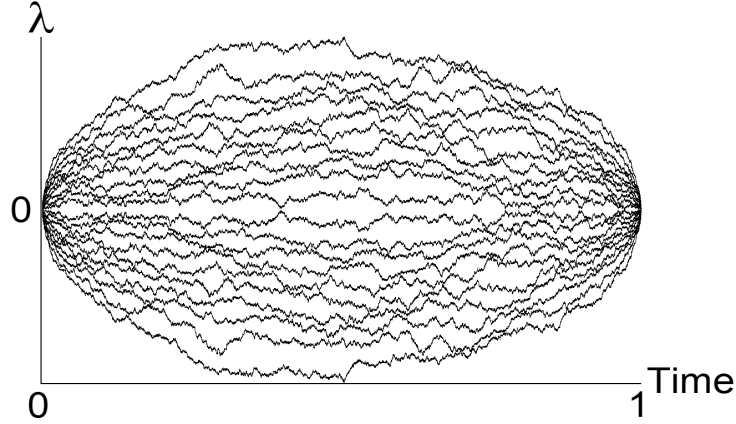


図 4.2: $N = 10$ の固有値過程 $\lambda^{(N)}(t), 0 \leq t \leq 1$

シュア関数展開 [24] を用いると (4.15) 式の分母分子は $|\mathbf{x}| \rightarrow 0, |\mathbf{y}| \rightarrow 0$ において以下のような漸近解析を得る (第 4.6 章 Appendix B 参照) .

$$q_{\text{abs}}^{(N)}(1, \mathbf{y}|\mathbf{x}) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{N/2} \prod_{j=1}^N \frac{1}{(2j-1)!} h_N^{\text{C}}(\mathbf{x}) h_N^{\text{C}}(\mathbf{y}) \times \left\{1 + \mathcal{O}(|\mathbf{x}|, |\mathbf{y}|)\right\}, \quad (4.16)$$

$$\begin{aligned} q_{\text{abs},h}^{(N)}(1, \mathbf{y}|\mathbf{x}) &= \left(\frac{2}{h}\right)^N \left(\frac{\pi}{h}\right)^{2N^2} \left\{ \prod_{j=1}^N \frac{1}{(2j-1)!} \right\}^2 h_N^{\text{C}}(\mathbf{x}) h_N^{\text{C}}(\mathbf{y}) \\ &\times \sum_{1 \leq n_1 < n_2 < \dots < n_N} \exp\left\{-\frac{\pi^2}{2h^2} |\mathbf{n}|^2\right\} \left\{h_N^{\text{C}}(\mathbf{n})\right\}^2 \times \left\{1 + \mathcal{O}(|\mathbf{x}|, |\mathbf{y}|)\right\}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

ここで h_N^{C} は (4.7) 式で定義された差積である . よって (4.15) 式は

$$\mathbf{P}(\widehat{H}_N < h) = c_N h^{-N(2N+1)} \sum_{1 \leq n_1 < n_2 < \dots < n_N} \left\{h_N^{\text{C}}(\mathbf{n})\right\}^2 \exp\left\{-\frac{\pi^2}{2h^2} |\mathbf{n}|^2\right\}, \quad (4.18)$$

$$c_N = 2^{N/2} \pi^{N(4N+1)/2} / \prod_{j=1}^N (2j-1)!,$$

となり差積の形で表されることがわかる . この表現は経路積分法からセルバーグ積分を用いて求めた [9, (5) 式] と一致している . ここで (4.18) 式と (4.9) 式が非常に似た形であることに気づく . 第 4.2 節でも述べたように (4.9) 式はクラス C のランダム行列 (分散 $t(1-t)$) の固有値過程と同じ確率密度を持っている . また (4.18) 式の $h^{-N(2N+1)}$ の指数は $\mathcal{H}^{\text{C}}(2N)$ の次元とも一致している . その他にもこの最大値問題における隠れた対称性には以下のよ

うなものがある．シンプレクティック・リー代数の分割 μ に相当する既約表現は [17] より，

$$\mathrm{sp}_\mu(\mathbf{x}) = \frac{\det_{1 \leq j, k \leq N} \left[x_j^{\mu_k + N - k + 1} - x_j^{-(\mu_k + N - k + 1)} \right]}{\det_{1 \leq j, k \leq N} \left[x_j^{N - k + 1} - x_j^{-(N - k + 1)} \right]}, \quad (4.19)$$

で与えられる．もし $n_j = \mu_{N-j+1} + j, 1 \leq j \leq N, x_j = 1, 1 \leq j \leq N$ とおけば (4.19) 式は ([26, (3.33) 式], [27, (3.10) 式]) にもあるように，

$$\mathrm{sp}_\mu(1, 1, \dots, 1) = \frac{h_N^{\mathbb{C}}(\mathbf{n})}{\prod_{j=1}^N (2j)!},$$

となる．これは非衝突拡散過程の最大値問題がいくつかの対称な既約表現の集合における確率論の数え上げ問題と関連していることを示唆している．また対称な既約表現はランダム行列集合の離散版とみなすことができる．今回の場合，吸収壁という条件がシンプレクティック構造 (クラス C) に変化している．[9] でも指摘されているように，(4.18) において自明な式 $\lim_{h \rightarrow \infty} \mathbf{P}(H_N^{(N)} < h) = 1$ はセルバーグ積分 [28, 29] の一種，

$$\begin{aligned} & \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{n_1 = -\infty}^{\infty} \cdots \sum_{n_N = -\infty}^{\infty} \prod_{1 \leq j < k \leq N} \left\{ (\delta n_j)^2 - (\delta n_k)^2 \right\}^2 \prod_{\ell=1}^N \left\{ (\delta n_\ell)^2 e^{-(\delta n_\ell)^2 / 2\delta} \right\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{1 \leq j < k \leq N} (x_j^2 - x_k^2)^2 \prod_{\ell=1}^N \left\{ x_\ell^2 e^{-x_\ell^2 / 2} dx_\ell \right\} \\ &= (2\pi)^{N/2} N! \prod_{j=1}^N (2j - 1)!, \end{aligned} \quad (4.20)$$

を与える．これは [30, (17.6.6) 式] において $\gamma = 1, \alpha = 3/2$ とおいた特別な場合である．

4.3.2 行列式表現とヤコビのテータ関数

(4.18) 式から \widehat{H}_N に関する累積確率分布について以下の行列式表現を得る (証明は第 4.7 章 Appendix C 参照)．

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\widehat{H}_N < h) &= c_N h^{-N(2N+1)} \det_{1 \leq j, k \leq N} \left[\sum_{n=1}^{\infty} n^{2(j+k-1)} e^{-\pi^2 n^2 / (2h^2)} \right] \\ &= \frac{(-1)^N 2^{-N/2} \pi^{N(2N+1)/2}}{\prod_{j=1}^N (2j - 1)!} h^{-N(2N+1)} \tau_N \left(\frac{\pi}{2h^2} \right), \end{aligned} \quad (4.21)$$

$$\tau_N(u) = \det_{1 \leq j, k \leq N} \left[\frac{\partial^{j+k-1}}{\partial u^{j+k-1}} \theta(u) \right], \quad \theta(u) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 u}.$$

さらに以下のようなヤコビのテータ関数の一種を考える .

$$\begin{aligned}\vartheta_3(x, y) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} z^{2n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i x n + \pi i y n^2}, \quad \text{Im } y > 0.\end{aligned}\quad (4.22)$$

ここで $z = e^{x\pi i}$, $q = e^{y\pi i}$ において 2 行目の式を得た . さらにヤコビのテータ関数の満たす関数方程式 ([31, 第 10.12 節], [6, 第 A.3.1 節])

$$\vartheta_3(x, y) = \vartheta_3(x/y, -1/y) e^{-\pi i x^2/y} \sqrt{\frac{i}{y}} \quad (4.23)$$

において $x = i\xi + \eta^2 u/(2\pi)$, $y = i\eta^2$, $\xi, \eta \in \mathbf{R}$ とおけば ,

$$\vartheta_3\left(i\xi + \frac{\eta^2 u}{2\pi}, i\eta^2\right) = \vartheta_3\left(\frac{\xi}{\eta^2} - \frac{i u}{2\pi}, \frac{i}{\eta^2}\right) e^{\pi(\xi/\eta - i\eta u/(2\pi))^2} \frac{1}{\eta}$$

となる . さらに (4.22) 式を用いて

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2/\eta^2 + (2\pi i \xi/\eta^2 + u)n} = \eta \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-(\sqrt{\pi}\eta n + \sqrt{\pi}\xi/\eta - i\eta u/(2\sqrt{\pi}))^2}. \quad (4.24)$$

ここでエルミート多項式 (1.1) の母関数

$$e^{2ux - u^2} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{u^n}{n!},$$

から (4.24) 式は

$$\begin{aligned}&\sum_{\alpha=0}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(nu)^\alpha}{\alpha!} e^{-\pi n^2/\eta^2 + 2\pi i \xi n/\eta^2} \\ &= \eta \sum_{\alpha=0}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_\alpha(\sqrt{\pi}n\eta + \sqrt{\pi}\xi/\eta) \left(\frac{i\eta u}{2\sqrt{\pi}}\right)^\alpha \frac{1}{\alpha!} e^{-(\sqrt{\pi}n\eta + \sqrt{\pi}\xi/\eta)^2}\end{aligned}$$

となるため以下の関係式を得る .

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} n^\alpha e^{-\pi n^2/\eta^2 + 2\pi i \xi n/\eta^2} = \frac{i^\alpha \eta^{\alpha+1}}{2^\alpha \pi^{\alpha/2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_\alpha(\sqrt{\pi}n\eta + \sqrt{\pi}\xi/\eta) e^{-(\sqrt{\pi}n\eta + \sqrt{\pi}\xi/\eta)^2}. \quad (4.25)$$

(4.25) 式において $\xi = 0$, $\eta = h\sqrt{2/\pi}$, $\alpha = 2\ell$ とおけば

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} n^{2\ell} e^{-\pi^2 n^2/(2h^2)} &= \frac{(-1)^\ell}{2^{\ell+1/2} \pi^{2\ell+1/2}} h^{2\ell+1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_{2\ell}(\sqrt{2}nh) e^{-2n^2 h^2}, \\ &\ell = 0, 1, 2, \dots\end{aligned}\quad (4.26)$$

となりこの関係式を用いて (4.21) 式を書き直すと第 1 章に出てきた累積確率分布の以下の行列式表現を得る .

$$\mathbf{P}(\widehat{H}_N < h) = \frac{(-1)^N}{2^{N^2} \prod_{j=1}^N (2j-1)!} \det_{1 \leq j, k \leq N} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} H_{2(j+k-1)}(\sqrt{2}nh) e^{-2n^2 h^2} \right]. \quad (4.27)$$

(4.27) 式の特別な場合として $N = 1, 2$ の場合を計算すると ,

$$\mathbf{P}(\widehat{H}_1 < h) = -\frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_2(\sqrt{2}nh) e^{-2h^2 n^2},$$

$$\mathbf{P}(\widehat{H}_2 < h) = \frac{1}{2^4 \times 3!} \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} e^{-2h^2(n_1^2+n_2^2)} \det \begin{bmatrix} H_2(\sqrt{2}n_1h) & H_4(\sqrt{2}n_1h) \\ H_4(\sqrt{2}n_2h) & H_6(\sqrt{2}n_2h) \end{bmatrix}.$$

ここで $H_2(x) = 4x^2 - 2$, $H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12$, $H_6(x) = 64x^6 - 480x^4 + 720x^2 - 120$ であるから ,

$$\mathbf{P}(\widehat{H}_1 < h) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (1 - 4h^2 n^2) e^{-2h^2 n^2}, \quad (4.28)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\widehat{H}_2 < h) = & \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} e^{-2h^2(n_1^2+n_2^2)} \left\{ 1 - 16h^2 n_1^2 + 24h^4 n_1^4 + 24h^4 n_1^2 n_2^2 - \frac{32}{3} h^6 n_1^6 \right. \\ & \left. - 32h^6 n_1^4 n_2^2 + \frac{128}{3} h^8 n_1^6 n_2^2 - \frac{128}{3} h^8 n_1^4 n_2^4 \right\} \end{aligned} \quad (4.29)$$

と展開でき , (4.28) 式は (2.17) 式と一致し , (4.29) 式は (3.4) 式と一致していることが確かめられる .

$\widehat{H}_N \in dh$ の確率密度分布や \widehat{H}_N の s 次モーメントを累積確率分布 $\mathbf{P}(\widehat{H}_N < h)$ を用いて表すと

$$\begin{aligned} \langle (\widehat{H}_N)^s \rangle &= \int_0^{\infty} h^s \left(\frac{d}{dh} \mathbf{P}(\widehat{H}_N < h) \right) dh \\ &= s \int_0^{\infty} h^{s-1} \left\{ 1 - \mathbf{P}(\widehat{H}_N < h) \right\} dh, \end{aligned} \quad (4.30)$$

となる . ここで 2 行目の式を得るために部分積分を行った . (4.21) 式の表現を (4.30) 式に代入すれば s 次モーメントに関する行列式表現となる . これはまさに Feierl の壁あり watermelon 配置のヴィシヤスウォークの最大高さ分布の長時間漸近極限の形 [8, Theorem 1 の $\kappa_s^{(p)}$ 関数] と一致することがわかる . さらに Feierl の壁あり watermelon 配置における最大高さ分布の中心極限定理の行列式表現 [8, Theorem 2 (28) 式] は $\phi_k(z)$ がまさにエルミート多項式であることに気づけば , 我々の 2 つ目の行列式表現 (4.27) 式と同じであることもわかる . 離散的なヴィシヤスウォークと連続的な非衝突ブラウン経路からこれらの一致が確かめられることは非常に興味深い .

4.4 数値計算から得られた結果

4.4.1 固有値過程から見出されるベッセル橋

まず10000ステップのランダムウォークによる近似から期間1のブラウン橋 $b(t)$, $0 \leq t \leq 1$ を発生させるプログラムを作る．このプログラムを使って3つのベッセル橋 $b_j(t)$, $0 \leq t \leq 1, j = 1, 2, 3$ を生成させ，以下の 2×2 行列値過程を考える．

$$C^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) & b_2(t) + ib_3(t) \\ b_2 - ib_3(t) & -b_1(t) \end{pmatrix}. \quad (4.31)$$

この正負の固有値のペア

$$\lambda^{(2)}(t) = (\lambda_1^{(1)}(t), -\lambda_1^{(1)}(t)), \quad (4.32)$$

$$\lambda_1^{(1)}(t) = \sqrt{(b_1(t))^2 + (b_2(t))^2 + (b_3(t))^2} \quad (4.33)$$

から固有値過程 $C^{(1)}(t)$ は簡単に求めることができ，正の固有値過程(4.33)は3次元ベッセル橋 $\hat{Y}(t)$, $0 \leq t \leq 1$ を数値的に再現する．この数値計算方法が妥当であることを確かめるため1000個の3次元ベッセル橋の経路を生成し，その最大値

$$\hat{H}_1 = \max_{0 < t < 1} \hat{Y}(t),$$

をプロットした(図4.3)．実線は(2.18)式から得られた曲線であり，プロットされた値と完全に一致していることがわかる．

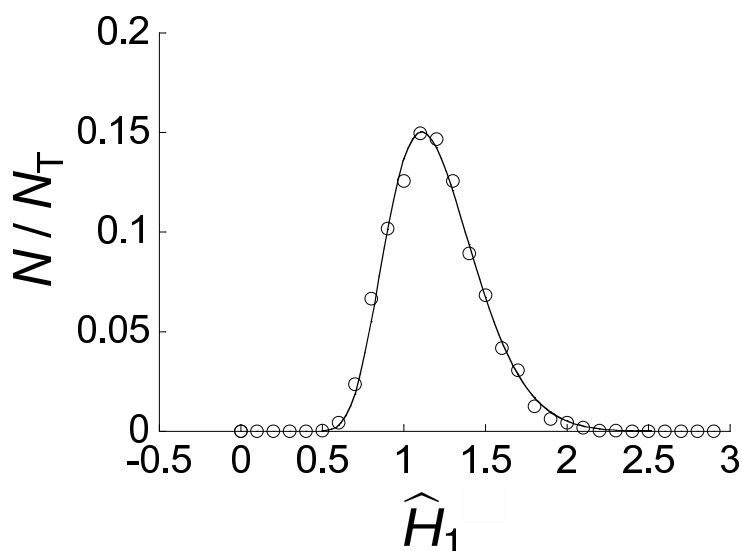


図 4.3: 3次元ベッセル橋の最大値 \hat{H}_1 と数値計算シミュレーションによる比較

4.4.2 \widehat{H}_N の平均と分散

2×2 行列 (4.31) は (4.14) 式の $N = 1$ の場合とみなすことができる．もし 10 個のブラウン橋 $\{b_j(t)\}_{j=1}^{10}$ を用意すれば， $\mathcal{H}^C(4)$ の 4×4 行列値ブラウン橋

$$C^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) & \frac{1}{\sqrt{2}}(b_2(t) + ib_3(t)) & b_5(t) + ib_6(t) & \frac{1}{\sqrt{2}}(b_7(t) + ib_8(t)) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(b_2(t) - ib_3(t)) & b_4(t) & \frac{1}{\sqrt{2}}(b_7(t) + ib_8(t)) & b_9(t) + ib_{10}(t) \\ b_5(t) - ib_6(t) & \frac{1}{\sqrt{2}}(b_7(t) - ib_8(t)) & -b_1 & -\frac{1}{\sqrt{2}}(b_2(t) - ib_3(t)) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(b_7(t) - ib_8(t)) & b_9(t) - ib_{10}(t) & -\frac{1}{\sqrt{2}}(b_2(t) + ib_3(t)) & -b_4(t) \end{pmatrix},$$

をシミュレーションすることができる．これは $N = 2$ のときの (4.14) 式に相当する．2 つの正の固有値

$$\lambda_+^{(2)}(t) = (\lambda_1^{(2)}(t), \lambda_2^{(2)}(t)), \quad 0 < \lambda_1^{(2)}(t) < \lambda_2^{(2)}(t), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

をたどれば，2 粒子非衝突ベッセル橋 $\widehat{Y}(t) = (\widehat{Y}_1(t), \widehat{Y}_2(t))$ とその上位の経路の最大値 $\widehat{H}_2 = \max_{0 < t < 1} \widehat{Y}_2(t)$ の統計データを得られる．一般的に N -非衝突ベッセル橋は独立に生成させた $N(2N + 1)$ 個のブラウン橋 $\{b_j(t)\}_{j=1}^{N(2N+1)}$ を用いて作られる $2N \times 2N$ 行列の N 個の正の固有値をたどることでシミュレーションすることができる．

ここで平均と分散の表記のために

$$\begin{aligned} m_N &= \langle \widehat{H}_N \rangle, \\ v_N &= \text{var}(\widehat{H}_N) = \langle (\widehat{H}_N - m_N)^2 \rangle, \end{aligned} \quad (4.34)$$

を用いる．表 4.1 は一番上の経路における $N = 70$ までの平均と分散を求めたもので，平均をとるために 1000 個のサンプルを用いている．この数値計算結果は Feierl[8] や表 3.1 の解析計算結果と一致している．

4.4.3 $N \rightarrow \infty$ の漸近評価と一番上の経路

m_N の $N \rightarrow \infty$ における漸近評価について着目し，

$$m_N = c_0 N^{\nu_0}, \quad N \gg 1, \quad (4.35)$$

と仮定する．(4.35) の指数 ν_0 と係数 c_0 を求めるため，数値計算により求めた一連の値 $(m_{N_1}^{(N_1)}, m_{N_2}^{(N_2)}, m_{N_3}^{(N_3)}, m_{N_4}^{(N_4)}, m_{N_5}^{(N_5)})$ を用いて最小二乗法でフィッティングする．そして $N_j, 1 \leq j \leq 5$ の値が大きくなるに連れて ν_0 と c_0 の値がむしろ系統的に変わることを観測した．図 4.4 と図 4.5 は $N = N_3$ における ν_0 と c_0 の値の依存性を示している．[32] の $1/N$ -プロットの値から最も大きい 3 つの点において図 4.4 と図 4.5 の実線で表される線形フィッティングを行い， $\nu_0 = 0.493$ と $c_0 = 1.42$ を得た．これらは $\nu_0 = 1/2$, $c_0 = \sqrt{2} = 1.414\dots$ とみなす事ができるので (4.3) 式と一致する．また，図 4.5 の中間領域 $0.1 < 1/N < 0.2$ にお

N	m_N	v_N	F m_N	F v_N	KIK m_N	KIK v_N
1	1.251	0.0774	1.2533	0.0737	1.253314	0.074138
2	1.819	0.0732	1.8222	0.0746	1.822625	0.073194
3	2.262	0.0704	2.2677	0.0720		
4	2.641	0.0664	2.6460	0.0692		
5	2.979	0.0640	2.9805	0.0656		
6	3.280	0.0624				
7	3.558	0.0600				
8	3.817	0.0556				
9	4.057	0.0570				
10	4.291	0.0543				
20	6.146	0.0409				
30	7.597	0.0396				
40	8.790	0.0384				
50	9.841	0.0364				
60	10.806	0.0354				
70	11.678	0.0310				

表 4.1: 数値計算から得られた m_N と v_N の値と, 解析的に得られた ‘F’ の値 ([8] の Table 1) と ‘KIK’ の値 (第 3.4 節の表 3.1) との比較

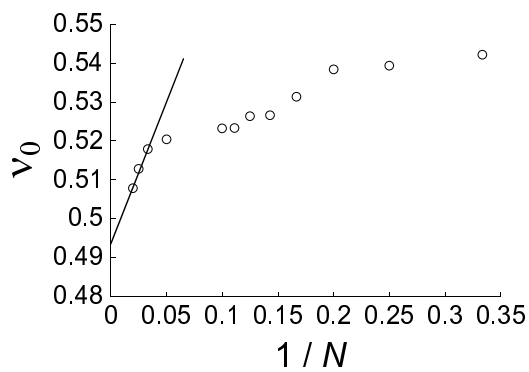


図 4.4: $1/N$ に対する ν_0 の関係

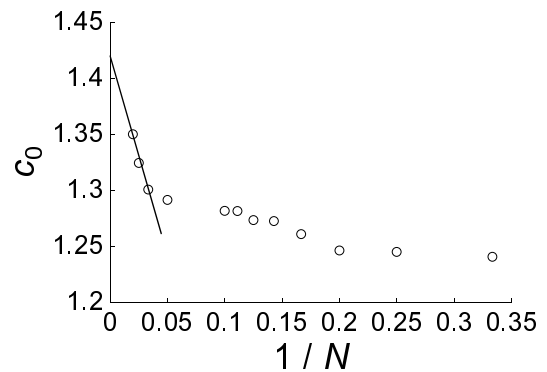


図 4.5: $1/N$ に対する c_0 の関係

いて c_0 の値は $1.25 < c_0 < 1.3$ である．これらは $\sqrt{1.67} \simeq 1.29$ とみなせるので Bonichon-Mosbah [5] の (4.2) 式の予想と一致している．そしてこの式は Schehr *et al.*[9] より擬似的漸近挙動と呼ばれている．図 4.6 は N における m_N の log-log プロットで実線は

$$m_N = \sqrt{2N} + c_1 N^{-\nu_1}, \quad \nu_1 = \frac{1}{6} \quad (4.36)$$

でフィッティングしている．パラメータは $c_1 \simeq 0.253$ である．

さらに $N \rightarrow \infty$ における v_N の漸近評価を行ったものが図 4.7 の log-log プロットである．最小二乗法から

$$v_N \simeq 0.09N^{-0.23} \quad (4.37)$$

を得る．ここで負の指数は $N \rightarrow \infty$ において $v_N \rightarrow 0$ となることを示唆している．

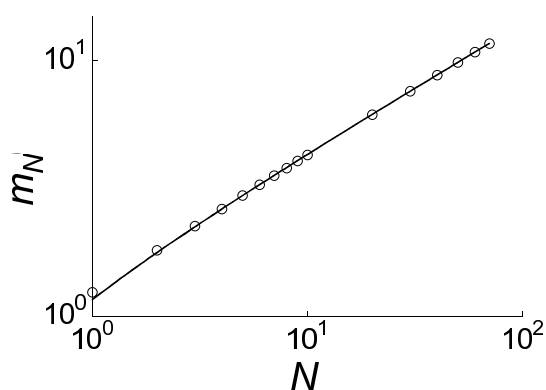


図 4.6: 粒子数 N と平均 m_N の関係

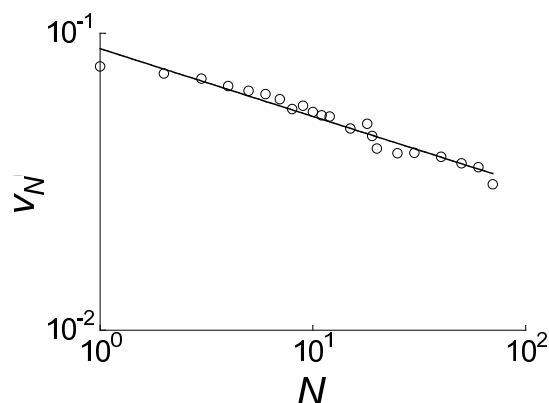


図 4.7: 粒子数 N と分散 v_N の関係

4.4.4 内部経路の統計則について

第 4.4.1 節で説明している方法で N -非衝突ベッセル橋を生成すると，時間区間 $(0, 1)$ 内において一番上の経路だけではなくその内部経路の最大値の統計則を調べることができる．そこで N -非衝突ベッセル橋

$$\widehat{\mathbf{Y}}(t) = (\widehat{Y}_1(t), \widehat{Y}_2(t), \dots, \widehat{Y}_N(t)),$$

の原点に近いほうから k 本目の経路の最大値を

$$\widehat{H}_k^{(N)} = \max_{0 < t < 1} \widehat{Y}_k(t), \quad (4.38)$$

と書くことにする．表 4.2 には $N = 10$ におけるすべての経路の平均と分散

$$\begin{aligned} m_k^{(N)} &= \langle \widehat{H}_k^{(N)} \rangle, \\ v_k^{(N)} &= \text{var}(\widehat{H}_k^{(N)}) = \langle (\widehat{H}_k^{(N)} - m_k^{(N)})^2 \rangle, \quad 1 \leq k \leq N, \end{aligned} \quad (4.39)$$

k	$m_k^{(10)}$	$v_k^{(10)}$
1	0.547	0.00528
2	0.891	0.00778
3	1.240	0.00971
4	1.598	0.0126
5	1.958	0.0147
6	2.337	0.0170
7	2.735	0.0209
8	3.168	0.0262
9	3.659	0.0320
10	4.291	0.0553

表 4.2: 数値計算から得た $m_k^{(10)}$ と $v_k^{(10)}$ の値

の値をまとめた。

次に内部経路の最大値における N 依存性を調べる。図 4.8 と図 4.9 は 1 本目の内部経路の最大値 $\hat{H}_1^{(N)}$ の平均と分散をプロットしたものである。この log-log から N に関する以下のべき乗則を得る。

$$m_1^{(N)} \sim N^{-0.38}, \quad v_1^{(N)} \sim N^{-1.17}. \quad (4.40)$$

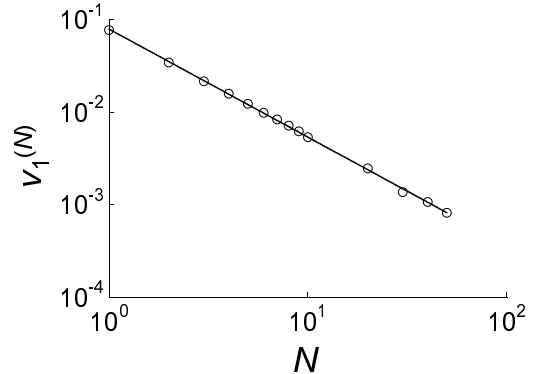
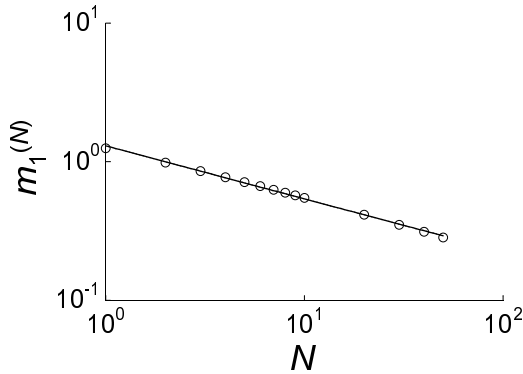


図 4.8: N に対する $m_1^{(N)}$ の両対数プロット 図 4.9: N に対する $v_1^{(N)}$ の両対数プロット

図 4.10 は k 本目の経路における平均 $m_k^{(N)}$ を表したもので内側から外側に向かって経路の最大値をたどったものである。ここで k における各曲線に共通の形が見出される。そこで k/N に対して $m_k^{(N)}/m_N^{(N)}$ をプロットする方法 [33] を用いれば図 Fig.4.11 のようになる。この結果は十分大きな N において以下の関係が成り立つような万能関数 $f(x)$ がある

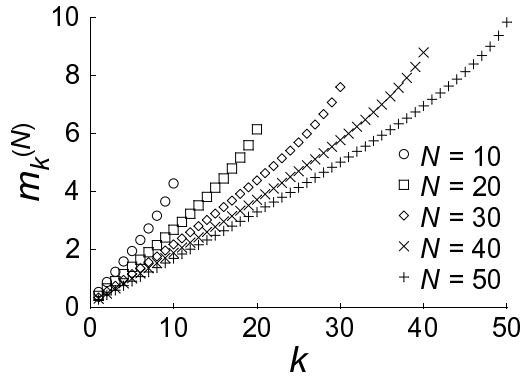


図 4.10: k に対する $m_k^{(N)}$ 依存性

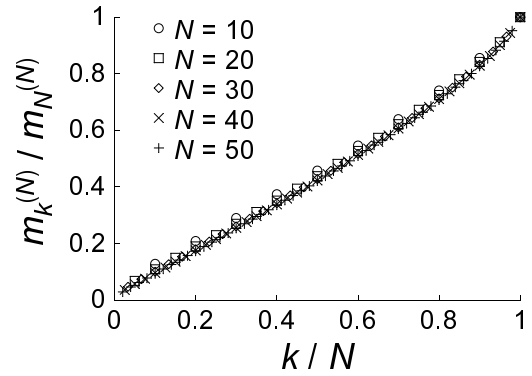


図 4.11: 図 4.10 のデータコラプス

ことを示唆している .

$$\frac{m_k^{(N)}}{m_N^{(N)}} \sim f\left(\frac{k}{N}\right). \quad (4.41)$$

スケーリング関数 $f(x)$ は閾値 x^* を持ち, $x \ll x^*$ では線形関数として振る舞い, $x \gg x^*$ では単純な線形関数としては扱えない . 数値フィッティングよりスケーリング関数は以下のように予想できる .

$$f(x) \sim \begin{cases} x & (x \ll x^*), \\ a^x & (x \gg x^*), \end{cases} \quad a \simeq 5.1. \quad (4.42)$$

4.5 第 4 章の結び

第 4 章では N -非衝突ベッセル橋の経路の最大値について解析的な結果と数値的な結果を報告した . 統計物理学のヴィシヤスウォークモデルの一種であるこの最大値問題はランダム行列理論や対称性に関する表現論 , そして数論とも関係している . ここに存在する数多くの未解決問題のうちいくつかをここであげる .

$(0, h)$ 内を運動する吸収壁ブラウン運動の推移確率密度 $p_{\text{abs},h}$ の表現 (2.7) において $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ はフーリエ級数展開のモードを表すために導入された変数である . N -経路システムを考えるとこの離散的な変数 $\mathbf{n} = (n_1, n_2, \dots, n_N) \in \mathbb{N}^N$ が導入される . \mathbf{n} は補助的な関数であるにもかかわらず (2.7), (4.18), (4.21), (4.27) 式で \mathbf{n} の和から物理量が与えられているため , 離散変数 \mathbf{n} は物理的な位置を表す連続な変数 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_N)$ と双対関係があるように振る舞う . クラス C のランダム行列の固有値過程から得られた経路の確率密度と分布として等しい (4.9) と離散的な変数の分配関数から与えられた最大値の分布関数 (4.18) との類似は双対関係を暗示している . watermelon 配置のみならず star 配置についての非衝突経路問題 [34] とそれらの極値問題の間の双対関係を明確にするため系統的な研究が求められるだろう .

また，ベッセル橋の最大値 $\widehat{H}_1 = \max_{0 < t < 1} \widehat{Y}(t)$ の分布とベッセル橋が $t = 1/2$ のときの位置は経路の変動のため一致しない．しかし，図 4.7 や (4.37) 式でも示したように分散 v_N の値は $N \rightarrow \infty$ で 0 になるはずである．そのため $N \rightarrow \infty$ の極限で

$$\langle \widehat{H}_N \rangle \simeq \langle \widehat{Y}_N(1/2) \rangle,$$

となることが予想され，具体的に

$$\langle \widehat{Y}_N(t) \rangle \simeq 2\sqrt{2Nt(1-t)}, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad N \rightarrow \infty,$$

が知られている ([43, (2.26) 式において $a = 0$ とし， $\sqrt{x} = \lim_{N \rightarrow \infty} \langle \widehat{Y}_N(t) \rangle / \sqrt{2N}$ を用いる]). よって Schehr *et al.* は (4.3) 式を結論付けた． $N \rightarrow \infty$ に関する適切なスケールング極限をとれば，一番上の経路 $\widehat{Y}_N(t)$, $0 \leq t \leq 1$ の変動は Airy 過程 [35, 36, 37, 38] と定義される．Airy 過程は Tracy-Widom 分布 [39] に従う確率過程である．これらの考察から Airy 過程の最大値分布についての研究が非常に興味深い．

また，内部経路の最大値分布の解析については難しい問題となるだろう．

4.6 Appendix B

(4.16) 式, (4.17) 式の導出

行列式の多重線形性から $q_{\text{abs},h}^{(N)}(1, \mathbf{y} | \mathbf{x})$ 式は

$$\begin{aligned} q_{\text{abs}}^{(N)}(1, \mathbf{y} | \mathbf{x}) &= \det_{1 \leq j, k \leq N} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ e^{-(y_j - x_k)^2/2} - e^{-(y_j + x_k)^2/2} \right\} \right] \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} e^{-(|\mathbf{x}|^2 + |\mathbf{y}|^2)/2} \det_{1 \leq j, k \leq N} [e^{y_j x_k} - e^{-y_j x_k}], \end{aligned}$$

となる．ここで，

$$\begin{aligned} &\det_{1 \leq j, k \leq N} [e^{y_j x_k} - e^{-y_j x_k}] \\ &= 2^N \prod_{j=1}^N (x_j y_j) \sum_{0 \leq m_1 < m_2 < \dots < m_N} \prod_{j=1}^N \frac{1}{(2m_j + 1)!} \det_{1 \leq j, k \leq N} [y_j^{2m_k}] \det_{1 \leq j, k \leq N} [x_j^{2m_k}], \end{aligned}$$

である．さらに， m_j から $\mu_j \wedge \mu_j = m_{N-j+1} - N + j$, $1 \leq j \leq N$ という変数変換を行い，シューア関数 [17, 40, 41]

$$s_{\mu}(\mathbf{x}) = \frac{\det_{1 \leq j, k \leq N} [x_j^{\mu_k + N - k}]}{\det_{1 \leq j, k \leq N} [x_j^{N - k}]}, \quad (4.43)$$

を導入する．(4.43) 式の分母はヴァンデルモンド行列式

$$\det_{1 \leq j, k \leq N} [x_j^{N-k}] = \prod_{1 \leq j, k \leq N} (x_j - x_k), \quad (4.44)$$

である．シューア関数展開を用いれば，

$$q_{\text{abs}}^{(N)}(1, \mathbf{y}|\mathbf{x}) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{N/2} e^{-(|\mathbf{x}|^2+|\mathbf{y}|^2)/2} \prod_{j=1}^N (x_j y_j) \prod_{1 \leq j, k \leq N} \left\{ (x_j^2 - x_k^2)(y_j^2 - y_k^2) \right\} \\ \times \sum_{\mu: \ell(\mu) \leq N} \prod_{j=1}^N \frac{1}{(2\mu_{N-j+1} + 2j - 1)!} s_{\mu}(\{x_j^2\}) s_{\mu}(\{y_j^2\}),$$

となる．ここで， $\ell(\mu)$ は分割 μ の分割数を示している． $|\mathbf{x}|, |\mathbf{y}| \rightarrow 0$ を考えると， μ が $\mu = \mathbf{0} \equiv (0, \dots, 0) \in \mathbf{N}_0^N$ のとき $s_{\mathbf{0}}(\mathbf{0}) = 1$ となり，それ以外の μ では $s_{\mu}(\mathbf{0}) = 0$ となることから漸近的に (4.16) 式が得られる．($\mathbf{N} = \{1, 2, \dots\}$, $\mathbf{N}_0 = \mathbf{N} \cup \{0\}$ とする．)

次に，(4.17) 式を求め．まず，(2.7) 式と (2.11) 式から，

$$q_{\text{abs},h}^{(N)}(1, \mathbf{y}|\mathbf{x}) = \left(\frac{2}{h}\right)^N \sum_{\mathbf{n} \in \mathbf{N}^N} \exp\left(-\frac{\pi^2}{2h^2} |\mathbf{n}|^2\right) \det_{1 \leq j, k \leq N} \left[\sin\left(\frac{\pi}{h} n_j y_j\right) \sin\left(\frac{\pi}{h} n_j x_k\right) \right] \\ = \left(\frac{2}{h}\right)^N \sum_{\mathbf{n} \in \mathbf{N}^N} \exp\left(-\frac{\pi^2}{2h^2} |\mathbf{n}|^2\right) \frac{1}{N!} \sum_{\sigma \in S_N} \det_{1 \leq j, k \leq N} \left[\sin\left(\frac{\pi}{h} n_{\sigma(j)} y_j\right) \sin\left(\frac{\pi}{h} n_{\sigma(j)} x_k\right) \right] \\ = \frac{1}{N!} \left(\frac{2}{h}\right)^N \sum_{\mathbf{n} \in \mathbf{N}^N} \exp\left(-\frac{\pi^2}{2h^2} |\mathbf{n}|^2\right) \det_{1 \leq j, k \leq N} \left[\sin\left(\frac{\pi}{h} y_j n_k\right) \right] \det_{1 \leq j, k \leq N} \left[\sin\left(\frac{\pi}{h} x_j n_k\right) \right],$$

となる．ここで S_N は N 個のものの置換全体の集合である．また，

$$\det_{1 \leq j, k \leq N} \left[\sin\left(\frac{\pi}{h} x_j n_k\right) \right] \\ = \det_{1 \leq j, k \leq N} \left[\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} \left(\frac{\pi}{h} x_j n_k\right)^{2m+1} \right] \\ = \sum_{\mathbf{m} \in \mathbf{N}_0^N} \prod_{j=1}^N \left\{ \frac{(-1)^{m_j}}{(2m_j+1)!} x_j n_j \right\} \left(\frac{\pi}{h}\right)^{2\sum_{j=1}^N m_j + N} \det_{1 \leq j, k \leq N} \left[(x_j n_k)^{2m_j} \right] \\ = \prod_{j=1}^N (x_j n_j) \sum_{\mathbf{m} \in \mathbf{N}_0^N} \left(\frac{\pi}{h}\right)^{2\sum_{j=1}^N m_j + N} \prod_{j=1}^N \frac{(-1)^{m_j}}{(2m_j+1)!} \frac{1}{N!} \det_{1 \leq j, k \leq N} [x_j^{2m_k}] \det_{1 \leq j, k \leq N} [n_j^{2m_k}],$$

であることから，推移確率密度は，

$$q_{\text{abs},h}^{(N)}(1, \mathbf{y}|\mathbf{x}) \\ = \frac{1}{N!} \left(\frac{2}{h}\right)^N \prod_{j=1}^N (x_j y_j) \sum_{\mathbf{n} \in \mathbf{N}^N} \exp\left(-\frac{\pi^2}{2h^2} |\mathbf{n}|^2\right) \prod_{j=1}^N n_j^2 \\ \times \sum_{0 \leq m_1 < m_2 < \dots < m_N} \left(\frac{\pi}{h}\right)^{2\sum_{j=1}^N m_j + N} \prod_{j=1}^N \frac{(-1)^{m_j}}{(2m_j+1)!} \det_{1 \leq j, k \leq N} [x_j^{2m_k}] \det_{1 \leq j, k \leq N} [n_j^{2m_k}] \\ \times \sum_{0 \leq \ell_1 < \ell_2 < \dots < \ell_N} \left(\frac{\pi}{h}\right)^{2\sum_{j=1}^N \ell_j + N} \prod_{j=1}^N \frac{(-1)^{\ell_j}}{(2\ell_j+1)!} \det_{1 \leq j, k \leq N} [y_j^{2\ell_k}] \det_{1 \leq j, k \leq N} [n_j^{2\ell_k}],$$

となる．さらに， $\det_{1 \leq j, k \leq N} [y_j^{2\ell_k}] = (-1)^{N(N-1)/2} \det_{1 \leq j, k \leq N} [y_j^{2\ell_{N-k+1}}]$ と変形し， $\mu_k = m_{N-k+1} - N + k$ ， $\nu_k = \ell_{N-k+1} - N + k$ と変数変換すれば， $2 \sum_{j=1}^N m_j + N = 2|\mu| + N^2$ ， $|\mu| \equiv \sum_{j=1}^N \mu_j$ であり，

$$\begin{aligned}
& q_{\text{abs},h}^{(N)}(1, \mathbf{y} | \mathbf{x}) \\
&= \frac{1}{N!} \left(\frac{2}{h}\right)^N \left(\frac{\pi}{h}\right)^{2N^2} \prod_{j=1}^N (x_j y_j) \prod_{1 \leq j < k \leq N} \{(x_j^2 - x_k^2)(y_j^2 - y_k^2)\} \\
&\quad \times \sum_{\mathbf{n} \in \mathbf{N}^N} \exp\left(-\frac{\pi^2}{2h^2} |\mathbf{n}|^2\right) \prod_{j=1}^N n_j^2 \\
&\quad \times \sum_{\mu: \ell(\mu) \leq N} \sum_{\nu: \ell(\nu) \leq N} \left(\frac{\pi}{h}\right)^{2(|\mu|+|\nu|)} \prod_{j=1}^N \left\{ \frac{(-1)^{\mu_j + \nu_j}}{(2\mu_{N-j+1} + 2j - 1)!(2\nu_{N-j+1} + 2j - 1)!} \right\} \\
&\quad \times \det_{1 \leq j, k \leq N} [n_j^{2(\mu_k + N - k)}] \det_{1 \leq j, k \leq N} [n_j^{2(\nu_k + N - k)}] s_\mu(\{x_j^2\}) s_\nu(\{y_j^2\}),
\end{aligned}$$

となり (4.17) 式が導ける．

4.7 Appendix C

(4.21) 式の証明

(4.18) 式はヴァンデルモンド行列式 (4.44) より，

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(\widehat{H}_N < h) &= c_N h^{-N(2N+1)} \frac{1}{N!} \sum_{\mathbf{n} \in \mathbf{N}^N} \exp\left(-\frac{\pi^2}{2h^2} |\mathbf{n}|^2\right) \\
&\quad \times \prod_{j=1}^N n_j^2 \det_{1 \leq j, k \leq N} [n_j^{2(k-1)}] \det_{1 \leq \ell, m \leq N} [n_\ell^{2(m-1)}] \\
&= c_N h^{-N(2N+1)} \frac{1}{N!} \sum_{\mathbf{n} \in \mathbf{N}^N} \prod_{j=1}^N \left\{ n_j^2 \exp\left(-\frac{\pi^2}{2h^2} n_j^2\right) \right\} \\
&\quad \times \sum_{\sigma \in S_N} \text{sgn}(\sigma) \sum_{\rho \in S_N} \text{sgn}(\rho) \prod_{\ell=1}^N n_\ell^{2(\sigma(\ell) + \rho(\ell) - 2)} \\
&= c_N h^{-N(2N+1)} \frac{1}{N!} \sum_{\sigma \in S_N} \sum_{\rho \in S_N} \text{sgn}(\sigma) \text{sgn}(\rho) \prod_{j=1}^N \left\{ \sum_{n_j=1}^{\infty} n_j^{2\sigma(j) + 2\rho(j) - 2} \exp\left(-\frac{\pi^2}{2h^2} n_j^2\right) \right\},
\end{aligned}$$

であり,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\widehat{H}_N < h) &= c_N h^{-N(2N+1)} \frac{1}{N!} \sum_{\mathbf{n} \in \mathbf{N}^N} e^{-\pi^2 |\mathbf{n}|^2 / (2h^2)} \sum_{\sigma \in S_N} \sum_{\rho \in S_N} \operatorname{sgn}(\sigma) \operatorname{sgn}(\rho) \prod_{j=1}^N n_j^{2\sigma(j)+2\rho(j)-2} \\ &= c_N h^{-N(2N+1)} \frac{1}{N!} \sum_{\mathbf{n} \in \mathbf{N}^N} e^{-\pi^2 |\mathbf{n}|^2 / (2h^2)} \sum_{\sigma \in S_N} \sum_{\rho \in S_N} \operatorname{sgn}(\sigma) \operatorname{sgn}(\rho) \prod_{k=1}^N n_{\sigma^{-1}(k)}^{2k+2\rho(\sigma^{-1}(k))-2}, \end{aligned}$$

となる．ここで $k = \sigma(j)$ といたとき， $\sum_{\mathbf{n} \in \mathbf{N}^N}$ があるので上式は

$$\begin{aligned} & c_N h^{-N(2N+1)} \frac{1}{N!} \sum_{\mathbf{n} \in \mathbf{N}^N} e^{-2\pi |\mathbf{n}|^2 / (2h^2)} \sum_{\sigma \in S_N} \sum_{\rho \in S_N} \operatorname{sgn}(\sigma) \operatorname{sgn}(\rho) \prod_{k=1}^N n_k^{2k+2\rho(\sigma^{-1}(k))-2} \\ &= c_N h^{-N(2N+1)} \frac{1}{N!} \sum_{\mathbf{n} \in \mathbf{N}^N} e^{-\pi^2 |\mathbf{n}|^2 / (2h^2)} \sum_{\sigma \in S_N} \sum_{\tau \in S_N} \operatorname{sgn}(\tau) \prod_{k=1}^N n_k^{2k+2\tau(k)-2} \\ &= c_N h^{-N(2N+1)} \sum_{\mathbf{n} \in \mathbf{N}^N} e^{-\pi^2 |\mathbf{n}|^2 / (2h^2)} \sum_{\tau \in S_N} \operatorname{sgn}(\tau) \prod_{j=1}^N n_j^{2j+2\tau(j)-2} \\ &= c_N h^{-N(2N+1)} \sum_{\mathbf{n} \in \mathbf{N}^N} e^{-\pi^2 |\mathbf{n}|^2 / (2h^2)} \det_{1 \leq j, k \leq N} \left[n_j^{2j+2k-2} \right] \\ &= c_N h^{-N(2N+1)} \det_{1 \leq j, k \leq N} \left[\sum_{n=1}^{\infty} n^{2j+2k-2} e^{-\pi^2 n^2 / (2h^2)} \right], \end{aligned}$$

と書ける．ここで $\tau = \rho \circ \sigma^{-1}$ と $\operatorname{sgn}(\sigma) \operatorname{sgn}(\rho) = \operatorname{sgn}(\tau)$ の関係を用いた．よって1つ目の等式は導ける．2つ目の等式については簡単に導くことができる．

第5章 非衝突ブラウン経路の極値分布

第3章では $N = 2$ のときの非衝突ベッセル橋の最大値分布やそのモーメントを求めた。また第4章では N が一般の値のときの非衝突ベッセル橋の経路の最大値分布や数値計算を行った。これらはいずれも非衝突ベッセル橋、つまり壁あり watermelon 配置に関する研究である。第5章では壁なしの watermelon 配置や、壁あり壁なし両方における star 配置の非衝突ブラウン経路の極値分布がエルミート多項式を成分にもつ $N \times N$ 行列式や N 次パフィアンで表されることを導く。一般に壁ありはその極値として一番上の経路の最大値 H_N を持つが、壁なしは一番上の経路の最大値 R_N と一番下の経路の最小値 L_N という2つの極値を持っており計算が複雑になる。また star 配置は watermelon 配置と違い終点 y への条件がないため、最終的に y についての積分をしなくてはならないという計算の特徴がある。ここではこれらすべての非衝突ブラウン経路についての計算方法とその結果を示す。

5.1 非衝突ブラウン橋の累積確率分布

非衝突ブラウン橋、つまり壁なし watermelon 配置のブラウン経路 (図 1.4 または 図 2.5)

$$\widehat{\mathbf{X}}(t) = (\widehat{X}_1(t), \widehat{X}_2(t), \dots, \widehat{X}_N(t))$$

の累積確率分布は表 2.1 より

$$\mathbf{P}(-w_L < \widehat{L}_N, \widehat{R}_N < w_R) = \lim_{|\mathbf{x}|, |\mathbf{y}| \rightarrow 0} \frac{q_{w_L, w_R}^{(N)}(1, \mathbf{y} | \mathbf{x})}{q^{(N)}(1, \mathbf{y} | \mathbf{x})} \quad (5.1)$$

である．(5.1) 式の分母は，

$$\begin{aligned}
q^{(N)}(1, \mathbf{y}|\mathbf{x}) &= \det_{1 \leq j, k \leq N} [p(1, y_k | x_j)] \\
&= \det_{1 \leq j, k \leq N} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{(y_k - x_j)^2}{2} \right\} \right] \\
&= \left(\frac{1}{2\pi} \right)^{N/2} e^{-(|\mathbf{x}|^2 + |\mathbf{y}|^2)/2} \det_{1 \leq j, k \leq N} [e^{x_j y_k}] \\
&= \left(\frac{1}{2\pi} \right)^{N/2} e^{-(|\mathbf{x}|^2 + |\mathbf{y}|^2)/2} \\
&\quad \times \sum_{\lambda: \ell(\lambda) \leq N} \prod_{j=1}^N \frac{1}{(\lambda_{N-j+1} + j - 1)!} s_\lambda(\mathbf{x}) s_\lambda(\mathbf{y}) \det_{1 \leq j, k \leq N} [x_j^{k-1}] \det_{1 \leq j, k \leq N} [y_j^{k-1}],
\end{aligned} \tag{5.2}$$

となる．ここで行列式の多重線形性を用いて 3 行目の式となり，4-5 行目を得るために行列式内の指数関数をテイラー展開した後， N におけるすべての置換をとり x_j, y_k における 2 つの行列式に分割し，変数変換してからシューア関数展開を用いた (第 4.6 節 Appendix B と同じ方法)．さらに $|\mathbf{x}|, |\mathbf{y}| \rightarrow 0$ を考えると， $s_\lambda(\mathbf{0})$ の値は $\lambda = \mathbf{0}$ のとき 1 となり，それ以外では 0 となることから漸近的に，

$$\begin{aligned}
q^{(N)}(1, \mathbf{y}|\mathbf{x}) &= \left(\frac{1}{2\pi} \right)^{N/2} \prod_{j=1}^N \frac{1}{(j-1)!} \det_{1 \leq j, k \leq N} [x_j^{k-1}] \det_{1 \leq j, k \leq N} [y_j^{k-1}] \\
&\quad \times \{1 + \mathcal{O}(|\mathbf{x}|, |\mathbf{y}|)\} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{N/2} \prod_{j=1}^N \Gamma(j)} \prod_{1 \leq j < k \leq N} (x_k - x_j) \prod_{1 \leq j < k \leq N} (y_k - y_j) \\
&\quad \times \{1 + \mathcal{O}(|\mathbf{x}|, |\mathbf{y}|)\},
\end{aligned} \tag{5.3}$$

となる [34, Lemma 3.1]．ここでヴァンデルモンド行列式 (4.44) から差積の形を使った．

同様に (5.1) 式の分子については分母の計算よりやや複雑になるが基本的な計算は同じで，以下のようになる (第 5.3 節 Appendix D 参照)．

$$\begin{aligned}
&q_{w_L, w_R}^{(N)}(1, \mathbf{y}|\mathbf{x}) \\
&= \frac{\pi^{N(N-1)} \prod_{j=1}^N \Gamma(j)}{2^N \left(\prod_{j=1}^N \Gamma(j) \right)^2} (w_L + w_R)^{-N^2} \prod_{1 \leq j < k \leq N} (x_k - x_j) \prod_{1 \leq j < k \leq N} (y_k - y_j) \\
&\quad \times \sum_{\mathbf{n} \in \mathbf{Z}^N} \exp \left(-\frac{\pi^2}{2(w_L + w_R)^2} |\mathbf{n}|^2 \right) \prod_{j=1}^N \left\{ n_j^{j-1} \left[(-1)^j + \exp \left(2i\pi \frac{w_L}{w_L + w_R} n_j \right) \right] \right\} \\
&\quad \times \prod_{1 \leq j < k \leq N} (n_k - n_j) \times \{1 + \mathcal{O}(|\mathbf{x}|, |\mathbf{y}|)\}.
\end{aligned} \tag{5.4}$$

(5.3) 式と (5.4) 式から累積確率分布 (5.1) は

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}(-w_L < \widehat{L}_N, \widehat{R}_N < w_R) \\ &= c'_N (w_L + w_R)^{-N^2} \sum_{\mathbf{n} \in \mathbf{Z}^N} \exp\left(-\frac{\pi^2}{2(w_L + w_R)^2} |\mathbf{n}|^2\right) \\ & \quad \times \prod_{j=1}^N \left\{ n_j^{j-1} \left[(-1)^j + \exp\left(2i\pi \frac{w_L}{w_L + w_R} n_j\right) \right] \right\} \prod_{1 \leq j < k \leq N} (n_k - n_j), \end{aligned} \quad (5.5)$$

$$c'_N = \frac{\pi^{N(2N-1)/2} \prod_{j=1}^N \Gamma(j)}{2^{N^2/2}} \quad (5.6)$$

となる .

また積の表現 (5.5) から行列式表現

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}(-w_L < \widehat{L}_N, \widehat{R}_N < w_R) \\ &= c'_N (w_L + w_R)^{-N^2} \\ & \quad \times \det_{1 \leq j, k \leq N} \left[\left\{ (-1)^j \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^{j+k-2} \exp\left(-\frac{\pi^2}{2(w_L + w_R)^2} n^2\right) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^{j+k-2} \exp\left(-\frac{\pi^2}{2(w_L + w_R)^2} n^2 + 2i\pi \frac{w_L}{w_L + w_R} n\right) \right\} \right] \end{aligned} \quad (5.7)$$

に書き直し, ヤコビのテータ関数の関数方程式から導かれる関係式 (4.25) を用いてエルミート多項式を導入する . まず (5.7) 式の行列式内第 1 項目に (4.25) 式において $\alpha = j + k - 2$, $\eta = \sqrt{2/\pi}(w_L + w_R)$, $\xi = 0$ とおいた関係式を適用し, 第 2 項目に $\alpha = j + k - 2$, $\eta = \sqrt{2/\pi}(w_L + w_R)$, $\xi = 2w_L(w_L + w_R)/\pi$ とおいた関係式を適用すれば,

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}(-w_L < \widehat{L}_N, \widehat{R}_N < w_R) \\ &= \frac{(-1)^N}{2^{N(N-1)/2} \prod_{j=1}^N \Gamma(j)} \\ & \quad \times \det_{1 \leq j, k \leq N} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ (-1)^j H_{j+k-2}(\sqrt{2}a) e^{-2a^2} + H_{j+k-2}(\sqrt{2}b) e^{-2b^2} \right\} \right], \end{aligned} \quad (5.8)$$

$$a = (w_L + w_R)n, \quad b = (w_L + w_R)n + w_L$$

を得る . このように, 非衝突ブラウン橋 $\widehat{X}(t)$ においてもその累積確率分布はエルミート多項式の無限和を成分に持つ $N \times N$ 行列式で表されることが導かれた .

5.2 非衝突ベッセル彷徨過程と非衝突ブラウン彷徨過程の累積確率分布

非衝突ベッセル彷徨過程

非衝突ベッセル彷徨過程，すなわち壁あり star 配置のブラウン経路 (図 1.5 または 図 2.6)

$$\tilde{\mathbf{Y}}(t) = (\tilde{Y}_1(t), \tilde{Y}_2(t), \dots, \tilde{Y}_N(t))$$

の累積確率分布は (2.15) 式より，

$$\mathbf{P}(\tilde{H}_N < h) = \frac{\int_{W_N^C} \lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow 0} q_{\text{abs},h}^{(N)}(1, \mathbf{y}|\mathbf{x}) d\mathbf{y}}{\int_{W_N^C} \lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow 0} q_{\text{abs}}^{(N)}(1, \mathbf{y}|\mathbf{x}) d\mathbf{y}} \quad (5.9)$$

となる．第 5.1 節と同様の方法を用いれば (5.9) 式の分母分子はそれぞれ，

$$q_{\text{abs}}^{(N)}(1, \mathbf{y}|\mathbf{x}) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{N/2} e^{-|\mathbf{y}|^2/2} \prod_{j=1}^N \frac{x_j y_j}{(2j-1)!} \prod_{1 \leq j, k \leq N} \left\{ (x_k^2 - x_j^2)(y_k^2 - y_j^2) \right\} \\ \times \{1 + \mathcal{O}(|\mathbf{x}|)\},$$

$$q_{\text{abs},h}^{(N)}(1, \mathbf{y}|\mathbf{x}) = (-1)^{N(N-2)/2} \left(\frac{1}{h}\right)^N \prod_{j=1}^N \frac{x_j}{(2j-1)!} \prod_{1 \leq j, k \leq N} (x_k^2 - x_j^2) \\ \times \det_{1 \leq j, k \leq N} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\pi}{h} n\right)^{2j-1} \exp\left(-\frac{\pi^2}{2h^2} n^2 + i\frac{\pi}{h} y_k n\right) \right] \\ \times \{1 + \mathcal{O}(|\mathbf{x}|)\}$$

となり，これを代入すれば (5.9) 式は

$$\mathbf{P}(\tilde{H}_N < h) = (-1)^{N(N-2)/2} \left(\frac{\pi}{2h^2}\right)^{N/2} \\ \times \frac{\int_{W_N^C} \det_{1 \leq j, k \leq N} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\pi}{h} n\right)^{2j-1} \exp\left(-\frac{\pi^2}{2h^2} n^2 + i\frac{\pi}{h} y_k n\right) \right] d\mathbf{y}}{\int_{W_N^C} \prod_{j=1}^N y_j \prod_{1 \leq j, k \leq N} (y_k^2 - y_j^2) e^{-|\mathbf{y}|^2/2} d\mathbf{y}} \quad (5.10)$$

となる．ここでセルバーク積分の一種である次の積分公式 [30, (17.6.6) p.321]

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbf{R}^N} \prod_{1 \leq j < k \leq N} |y_j - y_k|^{2\gamma} \prod_{j=1}^N |y_j|^{2\alpha-1} \exp \left\{ -\frac{|y|^2}{2} \right\} d\mathbf{y} \\ &= 2^{\alpha N + \gamma N(N-1)} \prod_{j=1}^N \frac{\Gamma(1 + j\gamma) \Gamma(\alpha + \gamma(j-1))}{\Gamma(1 + \gamma)} \end{aligned} \quad (5.11)$$

において $\alpha = 1$, $\gamma = 1/2$ とおけば,

$$\int_{W_N^C} \prod_{1 \leq j < k \leq N} (y_k - y_j) \prod_{j=1}^N y_j e^{-|y|^2/2} d\mathbf{y} = \prod_{j=1}^N \Gamma(j), \quad (5.12)$$

を得る．この公式を (5.10) 式の分母に適用する．さらに de Bruijn の公式 [42]

$$\int_{W_N^C} d\mathbf{x} \det_{1 \leq j, k \leq N} [g_j(x_k)] = \text{Pf}_{1 \leq j, k \leq N} \left[\int_{\mathbf{R}_+} dx \int_{\mathbf{R}_+} d\tilde{x} \text{sgn}(\tilde{x} - x) g_j(x) g_k(\tilde{x}) \right] \quad (5.13)$$

を用いる．ここで Pf はパフィアンと呼ばれ,

$$\text{Pf}(A) = \text{Pf}_{1 \leq j, k \leq 2N} (a_{jk}) = \frac{1}{N!} \sum_{\sigma} \text{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)\sigma(2)} a_{\sigma(3)\sigma(4)} \cdots a_{\sigma(2N-1)\sigma(2N)} \quad (5.14)$$

と定義される．パフィアンは反対称行列式の平方根に相当する行列式の仲間である．よって非衝突ベッセル彷徨過程 $\tilde{Y}(t)$ の累積確率分布は,

$$\mathbf{P}(\tilde{H}_N < h) = \text{Pf}_{1 \leq j, k \leq N} \left[\int_{\mathbf{R}_+} dy \int_{\mathbf{R}_+} d\tilde{y} \text{sgn}(\tilde{y} - y) g_j(y) g_k(\tilde{y}) \right], \quad (5.15)$$

$$g_j(y) = \frac{(-1)^{j+1/2} \pi^{2j-1/2}}{2^{1/2} h^{2j} \Gamma(j)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^{2j-1} \exp \left(-\frac{\pi^2}{2h^2} n^2 + i \frac{\pi}{h} yn \right) \quad (5.16)$$

となる．さらに (4.25) 式において $\alpha = 2j - 1$, $\eta = \sqrt{2/\pi}h$, $\xi = hy_k/\pi$, とおき, エルミート多項式を導入すれば,

$$\mathbf{P}(\tilde{H}_N < h) = \text{Pf}_{1 \leq j, k \leq N} \left[\int_{\mathbf{R}_+} dy \int_{\mathbf{R}_+} d\tilde{y} \text{sgn}(\tilde{y} - y) g_j(y) g_k(\tilde{y}) \right], \quad (5.17)$$

$$g_j(y) = \frac{1}{2^{j-1/2} \Gamma(j)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_{2j-1}(\sqrt{2}nh + y/\sqrt{2}) e^{-(\sqrt{2}nh + y/\sqrt{2})^2} \quad (5.18)$$

となり, エルミート多項式の無限和を成分にもつ N 次パフィアンで表されることが導かれた．

非衝突ブラウン彷徨過程

続いて非衝突ブラウン彷徨過程，つまり壁なし star 配置のブラウン経路 (図 1.6 または 図 2.7)

$$\widetilde{\mathbf{X}}(t) = (\widetilde{X}_1(t), \widetilde{X}_2(t), \dots, \widetilde{X}_N(t))$$

の累積確率分布は表 2.1 より

$$\mathbf{P}(-w_L < \widetilde{L}_N, \widetilde{R}_N < w_R) = \frac{\int_{W_N^A} \lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow 0} q_{w_L, w_R}^{(N)}(1, \mathbf{y} | \mathbf{x}) d\mathbf{y}}{\int_{W_N^A} \lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow 0} q^N(1, \mathbf{y} | \mathbf{x}) d\mathbf{y}} \quad (5.19)$$

となり，その分母分子を今までと同様の方法で計算すれば，

$$q^{(N)}(1, \mathbf{y} | \mathbf{x}) = \frac{e^{-|\mathbf{y}|^2/2}}{(2\pi)^{N/2} \prod_{j=1}^N \Gamma(j)} \prod_{1 \leq j, k \leq N} \left\{ (x_k - x_j)(y_k - y_j) \right\} \\ \times \{1 + \mathcal{O}(|\mathbf{x}|)\},$$

$$q_{w_L, w_R}^{(N)}(1, \mathbf{y} | \mathbf{x}) = \frac{(-1)^{N(N-3)/4} \pi^{N(N-1)/2}}{(w_L + w_R)^{N(N+1)/2} \prod_{j=1}^N \Gamma(j)} \prod_{1 \leq j, k \leq N} (x_k - x_j) \\ \times \det_{1 \leq j, k \leq N} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} n^{k-1} \exp\left(-\frac{\pi^2}{2(w_L + w_R)^2} n^2 + i\pi \frac{w_L}{w_L + w_R} n\right) \right. \\ \left. \times \sin\left(\pi \frac{w_L + y_j}{w_L + w_R} n\right) \right] \times \{1 + \mathcal{O}(|\mathbf{x}|)\}$$

となる．よって (5.19) 式は以下のようになる．

$$\mathbf{P}(-w_L < \widetilde{L}_N, \widetilde{R}_N < w_R) \\ = \frac{(-1)^{N(N-3)/4} 2^{N/2} \pi^{N^2/2}}{(w_L + w_R)^{N(N+1)/2}} \\ \times \frac{\int_{W_N^A} \det_{1 \leq j, k \leq N} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} n^{k-1} \exp\left(-\frac{\pi^2}{2(w_L + w_R)^2} n^2 + i\pi \frac{w_L}{w_L + w_R} n\right) \sin\left(\pi \frac{w_L + y_j}{w_L + w_R} n\right) \right] d\mathbf{y}}{\int_{W_N^A} e^{-|\mathbf{y}|^2/2} \prod_{1 \leq j, k \leq N} (y_k - y_j) d\mathbf{y}}. \quad (5.20)$$

ここで，(5.11) 式とは別のセルバーグ積分の公式 [30, (17.6.7) p.321]

$$\int_{\mathbf{R}^N} \prod_{1 \leq j < k \leq N} |y_j - y_k|^{2\gamma} e^{-\alpha|y|^2} d\mathbf{y} = (2\pi)^{N/2} (2\alpha)^{-N\{\Gamma(N-1)+1\}/2} \prod_{j=1}^N \frac{\Gamma(1+j\gamma)}{\Gamma(1+\gamma)} \quad (5.21)$$

において $\alpha = 1/2$, $\gamma = 1/2$ とおけば,

$$\int_{W_N^A} \prod_{1 \leq j < k \leq N} (y_k - y_j) e^{-|y|^2/2} dy = 2^{N/2} \prod_{j=1}^N \Gamma(j/2)$$

を得る．この公式により (5.20) 式の分母は計算できる．さらに de Bruijn の公式 [42]

$$\int_{W_N^A} dx \det_{1 \leq j, k \leq N} [f_j(x_k)] = \text{Pf}_{1 \leq j, k \leq N} \left[\int_{\mathbf{R}} dx \int_{\mathbf{R}} d\tilde{x} \text{sgn}(\tilde{x} - x) f_j(x) f_k(\tilde{x}) \right] \quad (5.22)$$

から非衝突ブラウン彷徨過程 $\tilde{X}(t)$ の累積確率分布は

$$\mathbf{P}(-w_L < \tilde{L}_N, \tilde{R}_N < w_R) = \text{Pf}_{1 \leq j, k \leq N} \left[\int_{\mathbf{R}} dy \int_{\mathbf{R}} d\tilde{y} \text{sgn}(\tilde{y} - y) f_j(y) f_k(\tilde{y}) \right], \quad (5.23)$$

$$\begin{aligned} f_j(y) &= \frac{(-1)^{j/2-1} \pi^{j-1/2}}{(w_L + w_R)^j \Gamma(j/2)} \\ &\times \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^{j-1} \exp \left(-\frac{\pi^2}{2(w_L + w_R)^2} n^2 + i\pi \frac{w_L}{w_L + w_R} n \right) \sin \left(\pi \frac{w_L + y}{w_L + w_R} n \right) \end{aligned} \quad (5.24)$$

となる．ここで, (4.25) を使うために $f_j(y)$ の \sin 関数をオイラーの公式を用いて指数関数で表すと

$$\begin{aligned} f_j(y) &= \frac{j^{j+1} \pi^{j-1/2}}{2(w_L + w_R)^j \Gamma(j/2)} \\ &\times \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^{j-1} \exp \left(-\frac{\pi^2}{2(w_L + w_R)^2} n^2 + i\pi \frac{2w_L + y}{w_L + w_R} n \right) \right. \\ &\quad \left. + (-1)^j \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^{j-1} \exp \left(-\frac{\pi^2}{2(w_L + w_R)^2} n^2 + i\pi \frac{y}{w_L + w_R} n \right) \right\} \end{aligned} \quad (5.25)$$

となる．1つ目の無限和の項に $\alpha = j - 1$, $\eta = \sqrt{2/\pi}(w_L + w_R)$, $\xi = (2w_L + y)(w_L + w_R)/\pi$ とおき, 2つ目の無限和の項に $\alpha = j - 1$, $\eta = \sqrt{2/\pi}(w_L + w_R)$, $\xi = y(w_L + w_R)/\pi$ とおいた (4.25) を適用すれば,

$$\mathbf{P}(-w_L < \tilde{L}_N, \tilde{R}_N < w_R) = \text{Pf}_{1 \leq j, k \leq N} \left[\int_{\mathbf{R}} dy \int_{\mathbf{R}} d\tilde{y} \text{sgn}(\tilde{y} - y) f_j(y) f_k(\tilde{y}) \right], \quad (5.26)$$

$$f_j(y) = \frac{1}{2^{j/2} \Gamma(j/2)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ H_{j-1}(\sqrt{2}\alpha) e^{-2\alpha^2} + (-1)^j H_{j-1}(\sqrt{2}\beta) e^{-2\beta^2} \right\}, \quad (5.27)$$

$$\alpha = (w_L + w_R)n + y/2,$$

$$\beta = (w_L + w_R)n + (y + 2w_L)/2$$

となる．よって非衝突ブラウン彷徨過程 $\widetilde{X}(t)$ も非衝突ベッセル彷徨過程 $\widetilde{Y}(t)$ とは別のエルミート多項式を成分にもつ N 次パフィアンで表されることが導かれた．

以上のことから，watermelon 配置と star 配置，壁ありと壁なしの分類における非衝突ベッセル橋 $\widehat{Y}(t)$ ，非衝突ブラウン橋 $\widehat{X}(t)$ ，非衝突ベッセル彷徨過程 $\widetilde{Y}(t)$ ，そして非衝突ブラウン彷徨過程 $\widetilde{X}(t)$ の 4 種類すべての極値分布を得ることができた．これらはすべてエルミート多項式の無限和を含む累積確率分布 (1.2), (5.8), (5.17)-(5.18), (5.26)-(5.27) を持ち，watermelon 配置の場合は $N \times N$ 行列式で表され，star 配置の場合は N 次パフィアンで表されるという性質を持つことがわかる．

5.3 Appendix D

(5.4) 式を導く

(2.8) 式と (2.12) 式から，推移確率密度は

$$\begin{aligned} & q_{w_L, w_R}^{(N)}(1, \mathbf{y} | \mathbf{x}) \\ &= \det_{1 \leq j, k \leq N} \left[p_{w_L, w_R}(1, y_j | x_k) \right] \\ &= \det_{1 \leq j, k \leq N} \left[\frac{2}{w_L + w_R} \sum_{n_j=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{\pi^2}{2(w_L + w_R)^2} n_j^2\right) \sin\left(\pi \frac{w_L + y_j}{w_L + w_R} n_j\right) \sin\left(\pi \frac{w_L + x_k}{w_L + w_R} n_j\right) \right] \\ &= \left(\frac{2}{w_L + w_R}\right)^N \sum_{\mathbf{n} \in \mathbf{N}^N} \exp\left(-\frac{\pi^2}{2(w_L + w_R)^2} |\mathbf{n}|^2\right) \\ &\quad \times \frac{1}{N!} \det_{1 \leq j, k \leq N} \left[\sin\left(\pi \frac{w_L + y_j}{w_L + w_R} n_k\right) \right] \det_{1 \leq j, k \leq N} \left[\sin\left(\pi \frac{w_L + x_j}{w_L + w_R} n_k\right) \right], \end{aligned} \quad (5.28)$$

となる．ここで $|\mathbf{n}|^2 = \sum_{j=1}^N n_j^2$ としている．さらに (5.28) 式の行列式の成分に着目すると，

$$\begin{aligned} & \sin\left(\pi \frac{w_L + x_j}{w_L + w_R} n_k\right) \\ &= \sin\left(\pi \frac{w_L}{w_L + w_R} n_k\right) \cos\left(\pi \frac{x_j}{w_L + w_R} n_k\right) + \cos\left(\pi \frac{w_L}{w_L + w_R} n_k\right) \sin\left(\pi \frac{x_j}{w_L + w_R} n_k\right) \\ &= \sum_{p=0}^{\infty} c_p(n_k) (x_j n_k)^p, \end{aligned} \quad (5.29)$$

$$\begin{aligned}
c_p(n_k) &= \frac{(-1)^{(p-1)/2}}{2p!} \left(\frac{\pi}{w_L + w_R} \right)^p \\
&\quad \times \left\{ \exp \left(i\pi \frac{w_L}{w_L + w_R} n_k \right) + (-1)^{p+1} \exp \left(-i\pi \frac{w_L}{w_L + w_R} n_k \right) \right\},
\end{aligned} \tag{5.30}$$

となっていることから, (5.28) 式は,

$$\begin{aligned}
&q_{w_L, w_R}^{(N)}(1, \mathbf{y} | \mathbf{x}) \\
&= \frac{1}{N!} \left(\frac{2}{w_L + w_R} \right)^N \sum_{\mathbf{n} \in \mathbf{N}^N} \exp \left(-\frac{\pi^2}{2(w_L + w_R)^2} |\mathbf{n}|^2 \right) \\
&\quad \times \sum_{0 \leq p_1 < p_2 < \dots < p_N} \det_{1 \leq j, k \leq N} [x_j^{p_k}] \det_{1 \leq j, k \leq N} [c_{p_k}(n_j) n_j^{p_k}] \\
&\quad \times \sum_{0 \leq q_1 < q_2 < \dots < q_N} \det_{1 \leq j, k \leq N} [y_j^{q_k}] \det_{1 \leq j, k \leq N} [c_{q_k}(n_j) n_j^{q_k}] \\
&= \left(\frac{2}{w_L + w_R} \right)^N \sum_{\mathbf{n} \in \mathbf{N}^N} \exp \left(-\frac{\pi^2}{2(w_L + w_R)^2} |\mathbf{n}|^2 \right) \det_{1 \leq j, k \leq N} [c_{j-1}(n_j) c_{k-1}(n_j) n_j^{j+k-2}] \\
&\quad \times \prod_{1 \leq j < k \leq N} (x_k - x_j) \prod_{1 \leq j < k \leq N} (y_k - y_j) \times \{1 + \mathcal{O}(|\mathbf{x}|, |\mathbf{y}|)\},
\end{aligned} \tag{5.31}$$

となる. ここでシューア関数展開を行っている. さらに, (5.31) 式の行列式の成分は (5.30) 式より,

$$\begin{aligned}
&c_{j-1}(n_j) c_{k-1}(n_j) \\
&= \frac{(-1)^{(j+k)/2}}{4(j-1)!(k-1)!} \left(\frac{\pi}{w_L + w_R} \right)^{j+k-2} (-1)^{(j+k)/2-2} \\
&\quad \times \left\{ \exp \left(2i\pi \frac{w_L}{w_L + w_R} n_j \right) + (-1)^j + (-1)^k + (-1)^{j+k} \exp \left(-2i\pi \frac{w_L}{w_L + w_R} n_j \right) \right\},
\end{aligned}$$

とできる. よって (5.31) 式は,

$$\begin{aligned}
&q_{w_L, w_R}^{(N)}(1, \mathbf{y} | \mathbf{x}) \\
&= \frac{\pi^{N^2-N} i^{N^2+N}}{2^N \left(\prod_{j=1}^N \Gamma(j) \right)^2} (w_L + w_R)^{-N^2} \prod_{1 \leq j < k \leq N} (x_k - x_j) \prod_{1 \leq j < k \leq N} (y_k - y_j) \\
&\quad \times \det_{1 \leq j, k \leq N} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} n^{j+k-2} \exp \left(-\frac{\pi^2}{2(w_L + w_R)^2} n^2 \right) \left\{ (-1)^j + \exp \left(2i\pi \frac{w_L}{w_L + w_R} n \right) \right\} \right] \\
&\quad \times \{1 + \mathcal{O}(|\mathbf{x}|, |\mathbf{y}|)\},
\end{aligned} \tag{5.32}$$

となり, これを差積の形にすれば (5.4) 式を得ることができる.

謝辞

最後になりますが，大学院での研究生活，また本修士論文をまとめるにあたり，多くの方々にご協力をいただきました．ここに，心より感謝の意を述べたいと思います．

指導教官の香取眞理先生には研究指導や発表練習，論文の書き方など沢山のことを教えて頂き，学会発表や研究会など多くの機会を与えて頂きました．また，先生の研究に対する姿勢からも多くのことを学ぶことができました．さらに，博士課程に進学するか迷っていた際にも，お忙しい中，親身に相談にのって頂き深く感謝致しております．

助教の小林奈央樹さんには本修士論文でのランダム行列を用いた非衝突ブラウン経路の図のすべてを，プログラムから製作して頂きました．また，大学院の2年間，多くの議論に付き合っ頂き，数値計算の方法も教えて頂き大変勉強になりました．稲見武夫先生，中野徹先生には修士論文の副査をして頂きました．稲見先生には卒研でも大変お世話になりました．中野先生には進路で迷っている際に話を聞いて下さり大変感謝致しております．松下貢先生には物理学科談話会などの数々のセミナーやその飲み会で大変お世話になり，数々の助言を頂きました．香取研究室の大谷君，佐藤君，山崎君，アンドラウスさんとは研究の話題はもちろんのこと，研究とは関係のない話でも盛り上がり，大変有意義な大学院生活となりました．また，大学1年生からの友達である鈴木さん，小谷野さんとは多くの時間を共有し，大学院に入学してからはお互いに集まるのは難しくなりましたが，たまに研究室に遊びに来てくれて井戸端会議をするのはとても楽しい時間でした．最後に，大学院まで進学させて頂き，私の生活を支え，良き話し相手となってくれた両親と，長い学生生活の間，いつもおいしい晩御飯を作ってくれて私の帰りを待っていてくれた2人の祖母に深く感謝致します．

参考文献

- [1] M. E. Fisher, *J. Stat. Phys.* **34**, 667 (1984).
- [2] 香取眞理, 種村秀紀著「ランダム行列と非衝突過程」(小嶋泉編「物理数学への誘い6」第6話, 遊星社, 2006).
- [3] P. Biane, J. Pitman, and M. Yor, *Bull. Amer. Math. Soc.* **38**, 435 (2001).
- [4] N. G. de Bruijn, D. E. Knuth, and S. O. Rice, in *Graph Theory and Computing*, edited by R. C. Read, pp.15-22 (Academic Press, 1972).
- [5] N. Bonichon and M. Mosbah, *Theoretical Computer Science* **307**, 241 (2003).
- [6] M. Fulmek, *Elec. J. Combinatorics*, **14**, #R64/1 (2007),
- [7] M. Katori, M. Izumi, and N. Kobayashi, *J. Stat. Phys.* **131**, 1067 (2008).
- [8] T. Feierl, [arXiv:math.CO/0802.2691](https://arxiv.org/abs/math.CO/0802.2691).
- [9] G. Schehr, S. N. Majumdar, A. Comtet, and J. Randon-Furling, *Phys. Rev. Lett.* **101**, 15061 (2008).
- [10] N. Kobayashi, M. Izumi, and M. Katori, *Phys. Rev. E* **78**, 051102 (2008).
- [11] F. J. Dyson, *J. Math. Phys.* **3**, 1191 (1962).
- [12] A. Altland and M. R. Zirnbauer, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 3420 (1996).
- [13] A. Altland and M. R. Zirnbauer, *Phys. Rev. B* **55**, 1142 (1997).
- [14] T. Feierl, [arXiv:math.CO/0806.0037](https://arxiv.org/abs/math.CO/0806.0037).
- [15] S. Karlin and J. McGregor, *Pacific J. Math.* **9**, 1141 (1959).
- [16] 鈴木淳史, 「現代物理数学への招待, ランダムウォークから広がる多彩な物理と数理」, サイエンス社, 2006.
- [17] W. Fulton and J. Harris, *Representation Theory, A First Course* (Springer, New York, 1991).

- [18] I. Karatzas and S. E. Shreve, *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, 2nd edn. (Springer, Berlin, 1991).
- [19] D. Revuz and M. Yor, *Continuous Martingales and Brownian Motion*, 3rd edn. (Springer, Now York, 1998).
- [20] A. N. Borodin and P. Salminen, *Handbook of Brownian Motion - Facts and Formulae*, 2nd edn. (Birkhäuser, Basel, 2002).
- [21] M. Katori and H. Tanemura, RIMS Kokyuroku **1438**, 83 (2005); arXiv:math.PR/0501218.
- [22] B. Lindström, Bull. London Math. Soc. **5**, 85 (1973).
- [23] I. Gessel and G. Viennot, Adv. in Math. **58**, 300 (1985).
- [24] M. Katori and H. Tanemura, J. Math. Phys. **45**, 3058 (2004).
- [25] S. Helgason, *Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces* (Academic, New York, 1978).
- [26] M. Katori and H. Tanemura, Stoch. Stoch. Rep. **75**, 369 (2003); arXiv:math.PR/0203286.
- [27] C. Krattenthaler, A. J. Guttmann, and X. G. Viennot, J. Stat. Phys. **110**, 1069 (2003).
- [28] A. Selberg, Norsk Matematisk Tidsskrift **26**, 71 (1944).
- [29] I. G. Macdonald, SIAM J. Math. Anal. **13**, 988 (1982).
- [30] M. L. Mehta, *Random Matrices*, 3rd edn. (Elsevier, Amsterdam, 2004).
- [31] G. E. Andrews, R. Askey, and R. Roy, *Special functions* (Cambridge University Press, Cambridge, 1999).
- [32] A. J. Guttmann, in *Phase Transitions and Critical Phenomena*, vol.13, edited by C. Domb and J. L. Lebowitz, pp.1-234 (Academic Press, London, 1989).
- [33] N. Kobayashi, K. Saito, T. Ozawa, Y. Yamazaki, K. Honda, and M. Matsushita, J. Phys. Soc. Jpn. **74**, 2712 (2005).
- [34] M. Katori and H. Tanemura, J. Stat. Phys. **129**, 1233 (2007).
- [35] M. Prähofer and H. Spohn, J. Stat. Phys. **108**, 1071 (2002).

- [36] K. Johansson, *Commun. Math. Phys.* **242**, 277 (2003).
- [37] C. A. Tracy and H. Widom, *Elect. Commun. Probab.* **8**, 93 (2003).
- [38] C. A. Tracy and H. Widom, *Ann. Appl. Probab.* **17**, 953 (2007).
- [39] C. A. Tracy and H. Widom, *Commun. Math. Phys.* **159**, 151 (1994).
- [40] I. G. Macdonald, *Symmetric Functions and Hall Polynomials*, 2nd edn. (Oxford University Press, Oxford, 1995).
- [41] W. Fulton, *Young Tableaux with Applications to Representation Theory and Geometry*, (Cambridge University Press, Cambridge, 1997).
- [42] de Bruijn, N.G, *J. Indian Math. Soc.* **19**, 133 (1955)
- [43] A. B. J. Kuijlaars, A. Martínez-Finkelshtein and F. Wielonsky, *Commun. Math. Phys.* **286**, 217 (2009)