

2009年度 修士論文

Master Thesis, March 2010

ユニタリ変換及び共形変換に伴う確率過程

Unitary Transformation, Conformal Transformation,  
and Stochastic Processes

佐藤 史仁

Fumihito Sato

中央大学大学院 理工学研究科 物理学専攻

Department of Physics, Faculty of Science and Engineering,  
Chuo University



# まえがき

本修士論文で扱うテーマは大きく2つに分けられる．1つは第1部で述べる量子ウォーク模型についてであり，ユニタリ変換と確率過程に関する話題である．もう1つは第2部で述べる反復 Schwarz-Christoffel 変換についてであり，共形変換と確率過程に関する話題である．第1部の量子ウォーク模型は，古典的な離散時間の確率過程であるランダムウォークの量子力学的拡張である．ランダムウォークはその確率過程の決定にサイコロ(コイン)を用いるが量子ウォークでは量子サイコロ(量子コイン)を用いる．この量子サイコロはユニタリ行列で表され，量子ウォーカーの運動を記述する時間発展はユニタリ変換によって実現される．言い換えると量子ウォークはユニタリ行列により駆動(ユニタリ変換)されると言うことになる．他方，反復 Schwarz-Christoffel 変換は2次元平面上に折れ線を生成する共形変換である．この反復 Schwarz-Christoffel 変換を用いてランダムウォークで決まる確率過程に従う点の運動からランダムな折れ線を生成する模型を考えた．言い換えればランダムウォークで駆動される共形変換(反復 Schwarz-Christoffel 変換)によって2次元平面上に折れ線を生成するアルゴリズムと言える．

このように2つのテーマには確率過程(ランダムウォーク)と変換という共通のキーワードがある．別々の話題ではあるが，確率過程に関連する現象や理論をユニタリ変換と共形変換という2つの視点から眺められたことは有意義であった．本修士論文はこの2つの研究を2部構成で報告する．第1部では，量子ウォーク模型の特徴的な性質のどの部分が相対論的量子力学の基礎方程式である Dirac 方程式を用いて理解可能かどうかを目的として行った研究の成果を示す．第2部ではこのランダムウォークで駆動された反復 Schwarz-Christoffel 変換のアルゴリズム開発とそれによって生成される折れ線の性質を研究した成果を報告する．なお第1部の内容については下記の論文で公表した．

F.Sato and M.Katori, Dirac equation with an ultraviolet cutoff and a quantum walk, Phys. Rev. A **81**, (2010), 012314/1-10.



# 目次

<b>第 I 部</b>	<b>ユニタリ変換と確率過程</b>	<b>1</b>
第 1 章	はじめに	3
1.1	量子ウォーク模型と極限分布	3
1.2	量子ウォーク模型と相対論的量子力学の Dirac 方程式系との類似性	6
第 2 章	Dirac 方程式の極限分布	9
2.1	Dirac 方程式による量子ウォーク模型	9
2.2	相対論的速度の極限分布	11
2.3	紫外切断の導入	13
第 3 章	低次元系における Dirac 方程式の極限分布	15
3.1	2次元系	15
3.2	1次元系	16
第 4 章	第 1 部結び	19
4.1	付録 A:4次元系	20
<b>第 II 部</b>	<b>共形変換と確率過程</b>	<b>23</b>
第 1 章	はじめに	25
第 2 章	Schramm-Loewner evolution	27
2.1	Loewner 方程式	27
2.2	SLE とその基本的性質	28
2.2.1	共形不変性	28
2.2.2	領域 Markov 性	28
2.2.3	SLE	29
2.3	SLE の分割と離散化	31
2.4	SLE の分割による写像の近似	31
第 3 章	反復 Schwarz-Christoffel 変換	35
3.1	Schwarz-Christoffel 変換	35

3.2	Schwarz-Christoffel 変換による斜めスリットの変換 . . . . .	35
3.3	反復 Schwarz-Christoffel 変換 . . . . .	38
3.4	ランダムウォークで駆動される反復 SC 変換とその SLE との対応 . . . . .	40
第 4 章	計算機シミュレーションによる反復 Schwarz-Christoffel 変換の折れ線解 析 . . . . .	<b>43</b>
4.1	ランダムウォークで駆動される反復 SC 変換で生成される折れ線の定性的 性質 . . . . .	43
4.2	フラクタル次元解析 . . . . .	50
4.3	高さ分布の解析 . . . . .	53

# 目 次

1.1	SQW <sup>(1)</sup> の擬速度の長時間極限での 1 次元の密度関数 $\mu^{(1)}(v_1;  a )$ (今野関数)	5
1.2	SQW <sup>(2)</sup> の擬速度の極限分布である 2 次元の密度関数 $\mu^{(2)}(v_1, v_2; p)$	7
2.1	$\mu_{\text{Dirac}}^{(3)}$ の擬速度 $v$ の大きさの依存性.	14
3.1	SQW <sup>(2)</sup> の $\nu^{(2)}$ と $\nu_{\text{Dirac}}^{(2)}$ の比較. 対称の場合.	16
3.2	SQW <sup>(2)</sup> の $\nu^{(2)}$ と $\nu_{\text{Dirac}}^{(2)}$ の比較. 非対称の場合.	17
3.3	SQW <sup>(1)</sup> の $\nu^{(1)}$ と $\nu_{\text{Dirac}}^{(1)}$ の比較. 対称の場合.	18
3.4	SQW <sup>(1)</sup> の $\nu^{(1)}$ と $\nu_{\text{Dirac}}^{(1)}$ の比較. 非対称の場合.	18
2.1	曲線や曲線と実軸で囲まれた領域を消す共形写像 $g_t$	28
2.2	共形不変性.	29
2.3	領域 Markov 性.	29
2.4	SLE <sub><math>\kappa</math></sub> の 3 つの相	30
2.5	合成写像.	32
2.6	写像 $f_{t_{k-1}+t}(z)$ の様子.	33
3.1	多角形の変換 (Schwarz-Christoffel 変換).	36
3.2	斜めスリットの生成.	36
3.3	反復写像による折れ線の生成と発展.	39
4.1	時空 2 次元上のランダムウォークの経路が描かれる格子.	43
4.2	4 ステップの全てのランダムウォークの経路に対応する $\mathbb{H}$ 上の折れ線.	44
4.3	4 ステップの全てのランダムウォークの経路に対応する $\mathbb{H}$ 折れ線.	45
4.4	折れ線の生成に使用したランダムウォークの経路.	45
4.5	20 ステップのランダムウォークの経路で駆動された反復 Schwarz-Christoffel 変換によって生成された $\mathbb{H}$ 上の折れ線.	46
4.6	生成に用いた 5 万ステップのランダムウォークの経路.	47
4.7	5 万ステップのランダムウォーク経路で駆動された反復 Schwarz-Christoffel 変換による $\mathbb{H}$ 上の折れ線. $\kappa$ が 2 と 4 の場合.	48
4.8	5 万ステップのランダムウォーク経路で駆動された反復 Schwarz-Christoffel 変換による $\mathbb{H}$ 上の折れ線. $\kappa$ が 6 と 8 の場合.	49
4.9	ボックス・カウント法.	51

4.10	ステップ数によるフラクタル次元の変化. . . . .	52
4.11	フラクタル次元の $\kappa$ 依存性. . . . .	52
4.12	高さの累積度数分布. . . . .	53
4.13	高さの累積度数分布の実軸付近の様子. . . . .	54
4.14	両対数によるプロットとべき関数によるフィッティング. . . . .	54
4.15	べき指数と $\kappa$ 依存性. . . . .	55
4.16	フィッティングを行ったべき関数の係数と $\kappa$ 依存性 (方対数によるプロット) . . . . .	55

# 第I部

## ユニタリ変換と確率過程



# 第1章 はじめに

拡散過程のモデルであるランダムウォークの量子化は広く議論されており [1–11]，量子情報理論 [12–14] や固体物理 [15] など様々な面において量子ウォークの応用が研究されている．近年の量子ウォークの新しい話題として量子ウォークモデルと相対論的量子力学 [16–18] の関係性についての議論が挙げられる．本修士論文第1部は，この量子ウォークモデルと相対論的量子力学の関連性についての研究であり，量子ウォークの擬速度の弱収束の定理についてと，量子ウォークモデルと Dirac 方程式の解との関係性について報告する．なお量子ウォークの擬速度の弱収束の定理は，今野によって単純な1次元の量子ウォークモデルについて初めて証明された定理 [6, 10, 19] であり，その後他のモデルに対しても証明されている [20–25] ．

## 1.1 量子ウォークモデルと極限分布

古典ランダムウォーク (simple random walk : SRW) は，格子上において粒子が時間ステップにつき最近接格子点にホップする離散時間の確率過程として定義される．1次元格子を  $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$  と書くと， $d$ 次元の超立方体格子は  $\mathbb{Z}^d = \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d) : x_j \in \mathbb{Z}, 1 \leq j \leq d\}$  と表すことができる． $\mathbb{Z}^d$  のそれぞれの格子点には， $2d$ 個の最近接格子点があり，粒子が  $j$ ， $1 \leq j \leq 2d$  番目の最近接格子点にホップする確率を  $p_j$  とおく．この SRW<sup>(d)</sup> の基本的な過程は  $0 \leq p_j \leq 1, 1 \leq j \leq 2d$  と  $\sum_{j=1}^{2d} p_j = 1$  の条件を満たすような  $2d$ 成分のベクトル  $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_{2d})$  によって決定することができる．言い換えれば， $2d$ 個の面を持ち  $j$  番目の面が現れる確率  $p_j, 1 \leq j \leq 2d$  が与えられたサイコロをランダムに振ることによって， $d$ 次元の SRW (SRW<sup>(d)</sup>) の経路は決定される．

$d$ 次元の単純量子ウォーク (simple quantum walk) SQW<sup>(d)</sup> は SRW<sup>(d)</sup> の量子力学的拡張であり，上述したサイコロに対して  $2d \times 2d$  のユニタリ行列  $A^{(d)} \in U(2d)$  で表現される量子サイコロを用いることによって量子化する．最近接格子点へのホップは  $2d \times 2d$  のユニタリ行列であるシフト行列によって記述することができ，フーリエ空間においてこのシフト行列は対角行列

$$S^{(d)}(\mathbf{k}) = \text{diag}\left[e^{ik_1}, e^{-ik_1}, \dots, e^{ik_d}, e^{-ik_d}\right], \quad (1.1)$$

で与えられる．ここで  $i = \sqrt{-1}$  であり， $k_j \in (\pi, \pi]$  は波数ベクトル  $\mathbf{k}$  の  $j$  番目の成分である．よって SQW<sup>(d)</sup> の時間発展はユニタリ行列

$$V^{(d)}(\mathbf{k}) = S^{(d)}(\mathbf{k})A^{(d)}, \quad \mathbf{k} \in (-\pi, \pi]^d. \quad (1.2)$$

により決定されることになる．この量子化の結果として重要なことは，各時刻での粒子（量子ウォーカー）の状態が， $2d \times 2d$  のユニタリ行列 (1.2) が作用するような  $2d$  成分のベクトルである波動関数として表現されなければならないという点である．時刻  $t = 0$  で1つの量子ウォーカーが原点にいるという場合を考える．また  $2d$  成分の初期量子ビットを  $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_{2d})$  とする．ただし， $q_j \in \mathbb{C}, 1 \leq j \leq 2d$  として規格化条件  $\sum_{j=1}^{2d} |q_j|^2 = 1$  を満たすものとする．このとき， $\mathbf{k}$  空間において初期波動関数は  $\mathbf{k}$  に依存せず

$$\widehat{\Psi}(\mathbf{k}, 0) = \widehat{\Psi}_0 \equiv {}^t(q_1 \ q_2 \ \dots \ q_{2d}) \quad (1.3)$$

となる．ここで，左肩に書かれている  $t$  は転置を表す．時刻  $t \in \mathbb{N}_0 \equiv \{0, 1, 2, 3, \dots\}$  での量子ウォーカーの波動関数は， $\mathbf{k}$  空間，実空間  $\mathbb{R}^d$  についてそれぞれ

$$\widehat{\Psi}(\mathbf{k}, t) = [V^{(d)}(\mathbf{k})]^t \widehat{\Psi}_0, \quad (1.4)$$

$$\Psi(\mathbf{x}, t) = \prod_{j=1}^d \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk_j}{2\pi} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \widehat{\Psi}(\mathbf{k}, t) \quad (1.5)$$

と表せる．ただし， $\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} = \sum_{j=1}^d k_j x_j$  である．また量子ウォーカーが時刻  $t$  で格子点  $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d$  に観測される確率は

$$P(\mathbf{x}, t) = \|\Psi(\mathbf{x}, t)\|^2 \equiv \Psi^\dagger(\mathbf{x}, t) \Psi(\mathbf{x}, t), \quad (1.6)$$

となる．ここで， $\Psi^\dagger(\mathbf{x}, t) = {}^t \bar{\Psi}(\mathbf{x}, t)$  は  $\Psi(\mathbf{x}, t)$  のエルミート共役である ( $z \in \mathbb{C}$  の複素共役  $\bar{z}$  と記す)．さらに (1.6) の確率分布によって与えられる量子ウォーカーの位置を  $\mathbf{X}(t) = (X_1(t), X_2(t), \dots, X_d(t))$  とすれば， $X_j(t), 1 \leq j \leq d$  の結合モーメントは

$$\begin{aligned} \left\langle \prod_{j=1}^d (X_j(t))^{\alpha_j} \right\rangle &\equiv \sum_{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d} \prod_{j=1}^d x_j^{\alpha_j} P(\mathbf{x}, t) \\ &= \prod_{j=1}^d \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk_j}{2\pi} \widehat{\Psi}^\dagger(\mathbf{k}, t) \prod_{j=1}^d \left( i \frac{\partial}{\partial k_j} \right)^{\alpha_j} \widehat{\Psi}(\mathbf{k}, t), \end{aligned} \quad (1.7)$$

( $\alpha_j \in \mathbb{N}_0, 1 \leq j \leq d$ ) となる [16]．

古典的な確率過程である  $\text{SRW}^{(d)}$  の粒子の拡散を表す確率分布は一般的に拡散スケールリング  $L/\sqrt{T} = \text{const.}$  のもとでの長時間極限  $T \rightarrow \infty$  とスケール極限  $L \rightarrow \infty$  に対して収束し，この粒子の拡散系の確率法則はガウス分布を用いて記述できる．これに対して， $\text{SQW}^{(d)}$  における時間発展演算子 (1.2) のユニタリ性により波動関数  $\Psi(\mathbf{x}, t)$  または確率分布  $P(\mathbf{x}, t)$  の長時間極限  $t \rightarrow \infty$  で収束しない．しかしながら，1次元模型の  $\text{SQW}^{(1)}$  において，位置  $X_1(t)$  もしくは速度  $dX_1(t)/dt$  の代わりに擬速度

$$V_1(t) = \frac{X_1(t)}{t} \quad (1.8)$$

を考えると,  $V_1(t)$  の任意のモーメントに対して  $t \rightarrow \infty$  で弱収束することが今野によって発見された [6, 10, 19] . このときの分布は新しい確率密度関数  $\mu^{(1)}$  として与えられた . これを今野の弱収束の定理と言う [6, 10, 19] . 量子サイコロ

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \in U(2), \quad a, b \in \mathbf{C}, \quad |a|^2 + |b|^2 = 1, \quad (1.9)$$

で駆動される SQW<sup>(1)</sup> 模型を考える . ただし初期量子ビットを  $\mathbf{q} = (q_1, q_2)$  とする . このとき,  $\alpha_1 \in \mathbf{N}_0$  に対して

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle V_1(t)^{\alpha_1} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dv_1 v_1^{\alpha_1} \nu^{(1)}(v_1; A^{(1)}, \mathbf{q}) \quad (1.10)$$

となる . ただし ,

$$\nu^{(1)}(v_1; A^{(1)}, \mathbf{q}) = \mu^{(1)}(v_1; |a|) \mathcal{M}^{(1)}(A^{(1)}, \mathbf{q}) \quad (1.11)$$

であり ,

$$\mu^{(1)}(v_1; |a|) = \frac{\sqrt{1 - |a|^2}}{\pi(1 - v_1^2)\sqrt{|a|^2 - v_1^2}} \mathbf{1}(|v_1| < |a|), \quad (1.12)$$

$$\mathcal{M}^{(1)}(A^{(1)}, \mathbf{q}) = 1 - \left( |q_1|^2 - |q_2|^2 + \frac{q_1 \bar{q}_2 a \bar{b} + \bar{q}_1 q_2 \bar{a} b}{|a|^2} \right). \quad (1.13)$$

である . ここで  $\mathbf{1}(\omega)$  は条件  $\omega$  の指示関数であり,  $\omega$  を満足していれば  $\mathbf{1}(\omega) = 1$  , それ以外では  $\mathbf{1}(\omega) = 0$  である . 図 1.1 は  $a = 1/\sqrt{2}$  のときの密度関数  $\mu^{(1)}(v_1; |a|)$  のグラフである .  $\mu^{(1)}$  は今野の密度関数と呼ばれている [10, 11] .

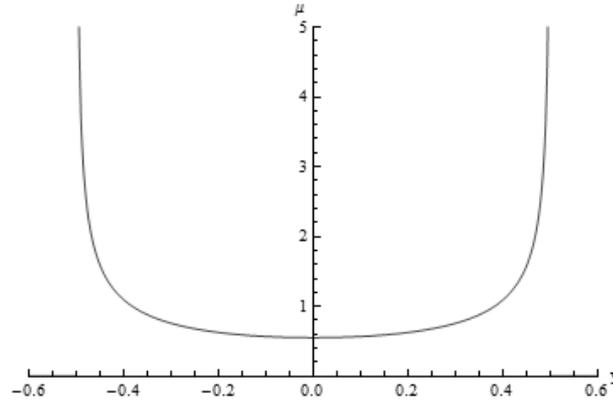


図 1.1: SQW<sup>(1)</sup> の擬速度の長時間極限での 1 次元の密度関数  $\mu^{(1)}(v_1; |a|)$  (今野関数) .  $a = 1/\sqrt{2}$ .

近年 SQW<sup>(2)</sup> において量子ウォーカーの位置  $\mathbf{X}(t) = (X_1(t), X_2(t))$  で定義される 2 成分の擬速度

$$\mathbf{V}(t) = (V_1(t), V_2(t)) = \left( \frac{X_1(t)}{t}, \frac{X_2(t)}{t} \right) \quad (1.14)$$

に対して弱収束の定理が示された [23] . この場合の量子サイコロはパラメータ  $p \in (0, 1)$  を含み

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} -p & 1-p & \sqrt{p(1-p)} & \sqrt{p(1-p)} \\ 1-p & -p & \sqrt{p(1-p)} & \sqrt{p(1-p)} \\ \sqrt{p(1-p)} & \sqrt{p(1-p)} & -(1-p) & p \\ \sqrt{p(1-p)} & \sqrt{p(1-p)} & p & -(1-p) \end{pmatrix} \in U(4) \quad (1.15)$$

と表される . また  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{N}_0$  に対して ,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle V_1(t)^{\alpha_1} V_2(t)^{\alpha_2} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dv_1 \int_{-\infty}^{\infty} dv_2 v_1^{\alpha_1} v_2^{\alpha_2} \nu^{(2)}(v_1, v_2; A^{(2)}, \mathbf{q}) \quad (1.16)$$

が得られる . ただし ,

$$\nu^{(2)}(v_1, v_2; A^{(2)}, \mathbf{q}) = \mu^{(2)}(v_1, v_2; p) \mathcal{M}^{(2)}(v_1, v_2; A^{(2)}, \mathbf{q}) \quad (1.17)$$

であり ,

$$\mu^{(2)}(v_1, v_2; p) = \frac{2}{\pi^2(v_1 + v_2 + 1)(v_1 - v_2 + 1)(v_1 + v_2 - 1)(v_1 - v_2 - 1)} \times \mathbf{1}(v_1^2/p + v_2^2/(1-p) < 1). \quad (1.18)$$

である . ベクトル  $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$  とパラメータの値で決まる量子サイコロ , また 4 成分の初期量子ビット  $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_4)$  に依存する  $\mathcal{M}^{(2)}(v_1, v_2; A^{(2)}, \mathbf{q})$  の正確な記述は [23] の Sec.III.B で与えられている . 図 1.2 は 今野の密度関数 (1.12) の 2 次元への拡張である密度関数  $\mu^{(2)}$  の  $p = 1/2$  の場合のグラフである . 図 1.1 の  $\mu^{(1)}$  と図 1.2 の  $\mu^{(2)}$  には共通点として , 区間  $(-a, a)$  で逆釣鐘型をしているという点と , 定義域が楕円  $\{(v_1, v_2) : v_1^2/p + v_2^2/(1-p) < 1\}$  である点が挙げられる . これは  $d = 1, d = 2$  において SRW での拡散スケーリングの極限 , つまりブラウン運動での分布が , 釣鐘型であるガウス分布になる事実との大きな相違点である .

## 1.2 量子ウォーク模型と相対論的量子力学の Dirac 方程式系との類似性

本第 1 部での目的は , 量子ウォーク模型と相対論的量子力学 [16–18] の多成分波動関数の時間発展との類似性に着目し , 量子ウォークにおける擬速度と極限分布が逆釣鐘型になる原因の物理的意味付けを明らかにすることである .  $V^{(d)}(\mathbf{k})$  は (1.2) 式によりユニタリ行列であったので , エルミート行列  $\mathcal{H}^{(d)}(\mathbf{k})$  を

$$V^{(d)}(\mathbf{k}) = e^{-i\mathcal{H}^{(d)}(\mathbf{k})/\hbar}, \quad (1.19)$$

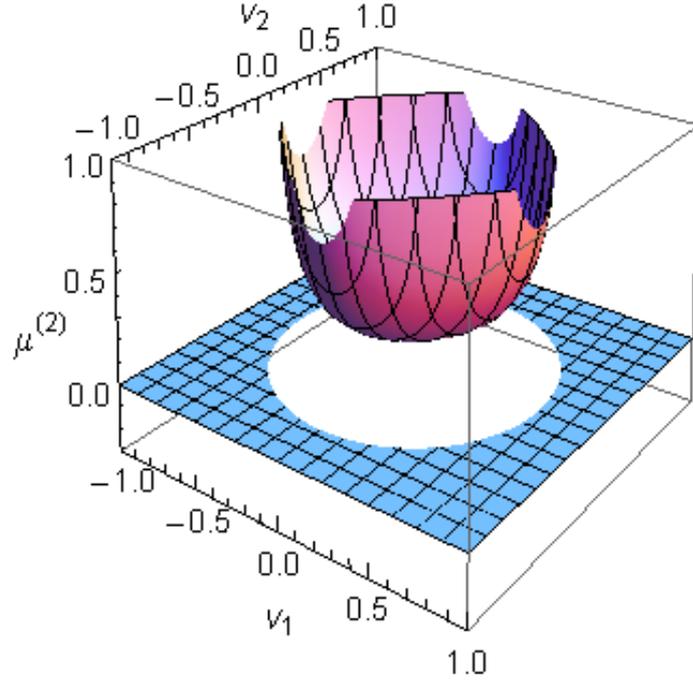


図 1.2: SQW<sup>(2)</sup> の擬速度の極限分布である 2 次元の密度関数  $\mu^{(2)}(v_1, v_2; p) \cdot p = 1/2$  の場合.

と与えることができる．ただし， $\hbar$  はプランク定数を  $2\pi$  で割った定数である．また SQW の時間発展は方程式

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\Psi}(\mathbf{k}, t) = \mathcal{H}^{(d)}(\mathbf{k}) \hat{\Psi}(\mathbf{k}, t). \quad (1.20)$$

の解と見なすことができる．ここで時間  $t$  は実数  $\mathbb{R}$  中の連続変数とする．論文 [16] では，SQW<sup>(1)</sup> 模型と Weyl 方程式との関係が報告されている．Weyl 方程式は (1.20) 式で，波動関数を 2 成分の波動関数  $\hat{\Psi}(\mathbf{k}, t) = {}^t(\psi_1(\mathbf{k}, t) \psi_2(\mathbf{k}, t))$  とし，ハミルトニアンをパウリ行列  $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  を用いて  $\mathcal{H}^{(2)}(\mathbf{k}) = \sigma \cdot \mathbf{k}$  としたときの方程式である．ここでパウリ行列は

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.21)$$

である．これと同様に (1.20) 式において 4 成分の波動関数  $\hat{\Psi}(\mathbf{k}, t) = {}^t(\psi_1(\mathbf{k}, t) \dots \psi_4(\mathbf{k}, t))$  とした場合の SQW<sup>(2)</sup> と Dirac 方程式との関係性が考えられる．なお Weyl 方程式と Dirac 方程式の時間発展式はそれぞれ質量 0 の相対論的粒子と質量を持つ相対論的粒子の場合に対しての方程式であり，またどちらも 3 次元の連続空間  $\mathbb{R}^3$  中の話である．つまり SQW<sup>(d)</sup> の次元  $d$  とそれに対応する相対論的量子力学系での次元とは一般的に一致していない [16]．さらに，SQW<sup>(d)</sup> と相対論的量子力学とをつなぐために，量子力学系での  $\mathbf{k}$  空間中に対して紫外切断を導入する必要がある．

本第1部は以下のような構成になっている．第2章ではまず自由粒子に対しての Dirac 方程式を紹介する [26–28]．また，時間発展行列 (1.2) と Dirac 方程式のハミルトニアン行列とを明確に同一視することにより，4成分の量子ビットをもつ量子ウォーカーの運動を記述する模型を示す．さらに原点から出発する自由な Dirac 粒子の擬速度の長時間後のモーメントの振る舞いを述べる．このとき我々の設定する初期状態は，Bracken, Flohr, and Melloy によって調べられている局在化の強い状態 [30] の理想的な極限と見なすことができる．また量子ウォーカーの擬速度に相当する量は厳密に Dirac 粒子の相対論的速度と一致するという事を述べる．量子ウォーカーと同様に Dirac 粒子がタキオン (tachyon) 粒子でなくターディオン (tardyon) 粒子でなければならないので，Dirac 粒子の速度は光速度  $c$  より遅くなければならない，

$$v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} < c. \quad (1.22)$$

これは量子ウォーク模型における  $V(t)$  の極限分布関数の台 (support) が一般的に有界であることの物理的根拠である．また Dirac 方程式系で，長時間極限  $t \rightarrow \infty$  における  $V_j(t)$ ,  $1 \leq j \leq 3$ , の結合モーメントが収束するためには紫外切断を導入しなければならないが，これは量子ウォーク模型が格子やツリー上など離散空間上で定義されている事の反映である．第3章では，Dirac 方程式に対し運動量の成分を減らすことによって  $d = 3$  より低い次元を考え，それに対する量子ウォーク模型を記述する．また量子ウォーカーの擬速度の極限分布とこれに対応する自由 Dirac 粒子での分布を適切な紫外切断のもと  $d = 1$  と  $d = 2$  の場合について示す．そして先行研究によって得られている SQW<sup>(d)</sup> の  $d = 1$  と  $d = 2$  の場合の極限分布 [6, 10, 16, 19, 23] と比較する．4章ではまとめと4次元系について述べる．なお4次元系の詳細は付録 A に与えた．

## 第2章 Dirac 方程式の極限分布

### 2.1 Dirac 方程式による量子ウォーク模型

3次元空間  $\mathbb{R}^3$  中の静止質量が  $m$  である自由粒子の Dirac 方程式 [26–29] は

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\mathbf{x}, t) = \hat{\mathcal{H}} \Psi(\mathbf{x}, t) \quad (2.1)$$

と記述される．ただし， $\Psi(\mathbf{x}, t)$  は4成分の波動関数であり， $\hat{\mathcal{H}}$  はハミルトニアン演算子で

$$\hat{\mathcal{H}} = \gamma_4 \left( \sum_{k=1}^3 c\hbar \gamma_k \frac{\partial}{\partial x_k} + mc^2 \right), \quad (2.2)$$

と与えられる．ここで  $\gamma_\nu, \nu = 1, 2, 3, 4$  は  $4 \times 4$  のガンマ行列であり

$$\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2\delta_{\mu\nu} I_4, \quad \mu, \nu = 1, 2, 3, 4 \quad (2.3)$$

の代数関係を満たす． $I_4$  は  $4 \times 4$  の単位行列である．また，ここではガンマ行列の表現を

$$\gamma_k = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -i\sigma_k \\ i\sigma_k & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, 3, \quad \gamma_4 = \begin{pmatrix} I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -I \end{pmatrix}, \quad (2.4)$$

と採ることにする． $\sigma_k, k = 1, 2, 3$  はパウリ行列であり  $I$  と  $\mathbf{0}$  はそれぞれ  $2 \times 2$  の単位行列と零行列である．ここからは波動関数について，波数ベクトル  $\mathbf{k} = (k_1, k_2, k_3)$  の代わりに粒子の運動量  $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$  で考えることにする．波数と運動量はド・ブローイ関係式  $\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}$  によって与えられる．自由粒子に対しては運動量  $\mathbf{p}$  とエネルギーとが運動の恒量であるので運動量  $\mathbf{p}$  に対応する解は平面波

$$\Psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{x}, t) = e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}/\hbar - iE(p)t/\hbar} u(\mathbf{p}), \quad (2.5)$$

になる．ただし

$$p = |\mathbf{p}| = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}, \quad E(p) = \sqrt{(pc)^2 + (mc^2)^2}, \quad (2.6)$$

であり， $u(p)$  は4成分ベクトルで固有方程式

$$E(p)u(\mathbf{p}) = \mathcal{H}(\mathbf{p})u(\mathbf{p}) \quad (2.7)$$

を満たす． $\mathcal{H}(\mathbf{p})$  はハミルトニアン行列

$$\mathcal{H}(\mathbf{p}) = \gamma_4 \left( i \sum_{k=1}^3 c\gamma_k p_k + mc^2 \right) \quad (2.8)$$

である．このとき運動量空間での波動関数は

$$\widehat{\Psi}(\mathbf{p}, t) = e^{-i\mathcal{H}(\mathbf{p})t/\hbar} u(\mathbf{p}). \quad (2.9)$$

と与えられる．

ハミルトニアン行列 (2.8) は Foldy-Wouthuysen-Tani 変換 [29, 31, 32] によって以下のように対角化することができる．

$$\mathcal{H}(\mathbf{p}) = U(\mathbf{p})^{-1} E(p) \gamma_4 U(\mathbf{p}). \quad (2.10)$$

ただし

$$\begin{aligned} U(\mathbf{p}) &= \frac{1}{\sqrt{2E(p)}} \left( \sqrt{E(p) + mc^2} I_4 + i \sum_{k=1}^3 \frac{c\gamma_k p_k}{\sqrt{E(p) + mc^2}} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2E(p)}} \begin{pmatrix} \sqrt{E(p) + mc^2} & 0 & \frac{cp_3}{\sqrt{E(p) + mc^2}} & \frac{c(p_1 - ip_2)}{\sqrt{E(p) + mc^2}} \\ 0 & \sqrt{E(p) + mc^2} & \frac{c(p_1 + ip_2)}{\sqrt{E(p) + mc^2}} & \frac{-cp_3}{\sqrt{E(p) + mc^2}} \\ \frac{-cp_3}{\sqrt{E(p) + mc^2}} & \frac{-c(p_1 - ip_2)}{\sqrt{E(p) + mc^2}} & \sqrt{E(p) + mc^2} & 0 \\ \frac{-c(p_1 + ip_2)}{\sqrt{E(p) + mc^2}} & \frac{cp_3}{\sqrt{E(p) + mc^2}} & 0 & \sqrt{E(p) + mc^2} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

である．これより， $\exp[-i\mathcal{H}(\mathbf{p})t/\hbar]$  に関して次のように行列として表すことができる．

$$\begin{aligned} e^{-i\mathcal{H}(\mathbf{p})t/\hbar} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( -i \frac{\mathcal{H}(\mathbf{p})}{\hbar} t \right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( \frac{-it}{\hbar} \right)^n (U(\mathbf{p})^{-1} E(p) \gamma_4 U(\mathbf{p}))^n \\ &= U(\mathbf{p})^{-1} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( \frac{-it}{\hbar} \right)^n (E(p) \gamma_4)^n \right] U(\mathbf{p}) \\ &= \left[ U(\mathbf{p})^{-1} \text{diag} \left[ e^{-iE(p)/\hbar}, e^{-iE(p)/\hbar}, e^{iE(p)/\hbar}, e^{iE(p)/\hbar} \right] U(\mathbf{p}) \right]^t. \end{aligned} \quad (2.12)$$

この結果により Dirac 方程式からウォーカーが  $4 \times 4$  のユニタリ行列

$$V(\mathbf{p}) = U(\mathbf{p})^{-1} \text{diag} \left[ e^{-iE(p)/\hbar}, e^{-iE(p)/\hbar}, e^{iE(p)/\hbar}, e^{iE(p)/\hbar} \right] U(\mathbf{p}), \quad (2.13)$$

によって駆動される量子ウォーク模型が与えられたことになる．

## 2.2 相対論的速度の極限分布

時刻  $t = 0$  で原点を出発した自由ディラック粒子の, 時刻  $t$  での位置を  $\mathbf{X}(t) = (X_1(t), X_2(t), X_3(t))$  とする.  $X_j(t), 1 \leq j \leq 3$  の結合モーメントは

$$\left\langle \prod_{j=1}^3 X_j(t)^{\alpha_j} \right\rangle = \prod_{j=1}^3 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_j}{2\pi\hbar} \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{p}, t) \prod_{j=1}^3 \left( i\hbar \frac{\partial}{\partial p_j} \right)^{\alpha_j} \hat{\Psi}(\mathbf{p}, t) \quad (2.14)$$

と与えられることになる. また行列  $U(\mathbf{p})$  の  $j$  ( $1 \leq j \leq 4$ ) 番目の列ベクトルを  $\mathbf{w}_j(\mathbf{p})$  とする. そして初期状態を

$$\hat{\Psi}(\mathbf{p}, 0) = \hat{\Psi}_0 \equiv {}^t(q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4), \quad (2.15)$$

とする. ここで  $q_j \in \mathbf{C}, 1 \leq j \leq 4$  はそれぞれ  $\mathbf{p}$  と独立であり, 規格化条件  $\sum_{j=1}^4 |q_j|^2 = 1$  を満たすものとする. このとき,

$$\begin{aligned} \hat{\Psi}(\mathbf{p}, t) &= \left[ U(\mathbf{p})^{-1} \text{diag} \left[ e^{-iE(\mathbf{p})t/\hbar}, e^{-iE(\mathbf{p})t/\hbar}, e^{iE(\mathbf{p})t/\hbar}, e^{iE(\mathbf{p})t/\hbar} \right] U(\mathbf{p}) \right]^t \hat{\Psi}_0 \\ &= e^{-iE(\mathbf{p})t/\hbar} \{ \mathbf{w}_1(\mathbf{p})C_1(\mathbf{p}) + \mathbf{w}_2(\mathbf{p})C_2(\mathbf{p}) \} \\ &\quad + e^{iE(\mathbf{p})t/\hbar} \{ \mathbf{w}_3(\mathbf{p})C_3(\mathbf{p}) + \mathbf{w}_4(\mathbf{p})C_4(\mathbf{p}) \}, \end{aligned} \quad (2.16)$$

ただし  $C_j(\mathbf{p}) \equiv [\mathbf{w}_j(\mathbf{p})]^\dagger \hat{\Psi}_0, 1 \leq j \leq 4$  となる.

$\alpha_j \in \mathbf{N} \equiv \{1, 2, \dots\}, 1 \leq j \leq 3$  に対して

$$\begin{aligned} &\prod_{j=1}^3 \left( i\hbar \frac{\partial}{\partial p_j} \right)^{\alpha_j} \hat{\Psi}(\mathbf{p}, t) \\ &= \prod_{j=1}^3 \left( \frac{\partial E(\mathbf{p})}{\partial p_j} \right)^{\alpha_j} e^{-iE(\mathbf{p})t/\hbar} \left[ \mathbf{w}_1(\mathbf{p})C_1(\mathbf{p}) + \mathbf{w}_2(\mathbf{p})C_2(\mathbf{p}) \right] t^{\sum_{j=1}^3 \alpha_j} \\ &\quad + \prod_{j=1}^3 \left( -\frac{\partial E(\mathbf{p})}{\partial p_j} \right)^{\alpha_j} e^{iE(\mathbf{p})t/\hbar} \left[ \mathbf{w}_3(\mathbf{p})C_3(\mathbf{p}) + \mathbf{w}_4(\mathbf{p})C_4(\mathbf{p}) \right] t^{\sum_{j=1}^3 \alpha_j} + \mathcal{O} \left( t^{\sum_{j=1}^3 \alpha_j - 1} \right). \end{aligned} \quad (2.17)$$

となることがわかる [20].  $U(\mathbf{p})$  はユニタリ行列なので, その列ベクトル  $\{ \mathbf{w}_j(\mathbf{p}) \}_{j=1}^4$  はそれぞれ正規直交関係

$$\mathbf{w}_j^\dagger(\mathbf{p}) \mathbf{w}_k(\mathbf{p}) = \delta_{jk}, \quad 1 \leq j, k \leq 4 \quad (2.18)$$

を成している. よって次の結果を得ることができる.

$$\begin{aligned} \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{p}, t) \prod_{j=1}^3 \left( i\hbar \frac{\partial}{\partial p_j} \right)^{\alpha_j} \hat{\Psi}(\mathbf{p}, t) &= \prod_{j=1}^3 \left( \frac{\partial E(\mathbf{p})}{\partial p_j} \right)^{\alpha_j} \\ &\quad \times \left[ |C_1(\mathbf{p})|^2 + |C_2(\mathbf{p})|^2 + (-1)^{\sum_{j=1}^3 \alpha_j} \{ |C_3(\mathbf{p})|^2 + |C_4(\mathbf{p})|^2 \} \right] t^{\sum_{j=1}^3 \alpha_j} \\ &\quad + \mathcal{O} \left( t^{\sum_{j=1}^3 \alpha_j - 1} \right). \end{aligned} \quad (2.19)$$

ここで擬速度を

$$\mathbf{V}(t) = \left( \frac{X_1(t)}{t}, \frac{X_2(t)}{t}, \frac{X_3(t)}{t} \right),$$

と定義すれば, 結合モーメントの長時間極限

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow \infty} \left\langle \prod_{j=1}^3 V_j(t)^{\alpha_j} \right\rangle \\ &= \prod_{j=1}^3 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_j}{2\pi\hbar} \left[ \{|C_1(\mathbf{p})|^2 + |C_2(\mathbf{p})|^2\} + (-1)^{\sum_{j=1}^3 \alpha_j} \{|C_3(\mathbf{p})|^2 + |C_4(\mathbf{p})|^2\} \right] \\ & \quad \times \prod_{j=1}^3 \left( \frac{\partial E(p)}{\partial p_j} \right)^{\alpha_j} \end{aligned} \quad (2.20)$$

( $\alpha_j \in \mathbf{N}_0, 1 \leq j \leq 3$ ) を得ることができる.  $E(p)$  は自由 Dirac 粒子の相対論的エネルギー (2.6) であるので,

$$\frac{\partial E(p)}{\partial p_j} = c^2 \frac{p_j}{E(p)}, \quad j = 1, 2, 3. \quad (2.21)$$

と計算できる. ここで積分 (2.20) での積分変数を  $p_j$  から  $v_j$  へ:

$$v_j = c^2 \frac{p_j}{E(p)}, \quad j = 1, 2, 3. \quad (2.22)$$

によって変換することを考える. この写像  $\mathbf{p} \in \mathbf{R}^3 \mapsto \mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$  は1対1の写像であり, その像は半径  $c$  円の内側

$$v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 < c^2. \quad (2.23)$$

である. このとき (2.22) 式から次のような関係を得ることができる.

$$p_j = \frac{mv_j}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad j = 1, 2, 3, \quad (2.24)$$

ただし,  $v = |\mathbf{v}|$ . この  $\mathbf{v}$  はまさに自由 Dirac 粒子の相対論的速度である. (2.24) 式の関係より逆写像  $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{p}$  に関するヤコビアン

$$J \equiv \det \left[ \frac{\partial v_j}{\partial p_k} \right]_{1 \leq j, k \leq 3} = c^{10} \frac{m^2}{E(p)^5} = \frac{1}{m^3} \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{5/2}.$$

が得られる. この変数変換によって  $C_j(\mathbf{p})$  は  $\widehat{C}_j(\mathbf{v}), j = 1, 2, 3$ , に変わるとすると (2.20)

式の積分は  $\alpha_j \in \mathbf{N}_0, 1 \leq j \leq 3$  に対して

$$\begin{aligned}
& \lim_{t \rightarrow \infty} \left\langle \prod_{j=1}^3 V_j(t)^{\alpha_j} \right\rangle \\
&= \prod_{j=1}^3 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dv_j}{2\pi\hbar} \frac{1}{J} \left[ \{|\widehat{C}_1(\mathbf{v})|^2 + |\widehat{C}_2(\mathbf{v})|^2\} + (-1)^{\sum_{j=1}^3 \alpha_j} \{|\widehat{C}_3(\mathbf{v})|^2 + |\widehat{C}_4(\mathbf{v})|^2\} \right] \\
&\quad \times \prod_{j=1}^3 v_j^{\alpha_j} \mathbf{1}(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 < c^2) \\
&= \prod_{j=1}^3 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dv_j}{c} \prod_{j=1}^3 v_j^{\alpha_j} \mu_{\text{Dirac}}^{(3)}(v) \mathcal{M}_{\text{Dirac}}^{(3)}(\mathbf{v}; \mathbf{q}), \tag{2.25}
\end{aligned}$$

と書き直すことができる．ここで

$$\mu_{\text{Dirac}}^{(3)}(v) = \left(\frac{mc}{2\pi\hbar}\right)^3 \frac{1}{(1 - v^2/c^2)^{5/2}} \mathbf{1}(v < c), \tag{2.26}$$

であり，

$$\mathcal{M}_{\text{Dirac}}^{(3)}(\mathbf{v}; \mathbf{q}) = 1 + \sum_{j=1}^3 \mathcal{M}_{\text{Dirac}}^{(3,j)}(\mathbf{q}) v_j \tag{2.27}$$

である．ただし，

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{\text{Dirac}}^{(3,1)}(\mathbf{q}) &= 2\text{Re}(q_1 \bar{q}_4 + q_2 \bar{q}_3) & \mathcal{M}_{\text{Dirac}}^{(3,2)}(\mathbf{q}) &= 2\text{Im}(\bar{q}_1 q_4 - \bar{q}_2 q_3), \\
\mathcal{M}_{\text{Dirac}}^{(3,3)}(\mathbf{q}) &= 2\text{Re}(q_1 \bar{q}_3 - q_2 \bar{q}_4). \tag{2.28}
\end{aligned}$$

また  $\text{Re}(z)$  と  $\text{Im}(z)$  はそれぞれ  $z \in \mathbf{C}$  の実部と虚部を表す．

## 2.3 紫外切断の導入

積分

$$\prod_{j=1}^3 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dv_j}{c} \prod_{j=1}^3 v_j^{\alpha_j} \mu_{\text{Dirac}}^{(3)}(v) \mathcal{M}_{\text{Dirac}}^{(3)}(\mathbf{v}; \mathbf{q})$$

は一般的に収束しない．そこで物理量として有限の値を得るために運動量空間に制限を設ける．パラメータ  $\lambda > 0$  を導入し，紫外切断を施すことにする．

$$p = |\mathbf{p}| < \lambda. \tag{2.29}$$

この紫外切断により  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$  の定義域は

$$v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 < \frac{\lambda^2 c^2}{(mc)^2 + \lambda^2} \tag{2.30}$$

となる．このとき，有限の  $\lambda$  に対して規格化定数は

$$\prod_{j=1}^3 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dv_j}{c} \left( \frac{mc}{2\pi\hbar} \right)^3 \frac{1}{(1-v^2/c^2)^{5/2}} \mathbf{1} \left( v < \sqrt{\frac{\lambda^2 c^2}{(mc)^2 + \lambda^2}} \right) = \frac{\lambda^3}{6\pi^2 \hbar^3}. \quad (2.31)$$

と得られる．よって極限分布は

$$\mu_{\text{Dirac}}^{(3)}(v; \lambda) = \frac{3}{4\pi} \left( \frac{mc}{\lambda} \right)^3 \frac{1}{(1-v^2/c^2)^{5/2}} \mathbf{1} \left( v < \sqrt{\frac{3\lambda^2 c^2}{(mc)^2 + 3\lambda^2}} \right). \quad (2.32)$$

となる．

ここでは  $m$  を電子の静止質量とした．図 2.1 は (2.32) 式によって与えられた  $\mu_{\text{Dirac}}^{(3)}(v; \lambda)$ ,  $v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} > 0$  の分布関数である．ただし実線と破線は紫外切断のパラメータ  $\lambda/(mc)$  がそれぞれ 1, 10 の場合である．この図は [30] の Fig.1 と類似したものになっている． $\lambda/(mc) \rightarrow \infty$  のとき，紫外切断を施した部分のエネルギー  $\bar{E} = \lambda c$  が，自由 Dirac 粒子の静止エネルギー  $mc^2$  より非常に大きくなり  $\mu_{\text{Dirac}}^{(3)}(v; \lambda) \rightarrow \delta(v - c)$  となる．これは Dirac 粒子が原点から外側へ広がる速度が，光速度  $c$  に収束していくことを意味する [17, 18, 30]．量子ウォーク模型は離散格子上で定義されたものであったので，紫外切断の導入は  $\lambda/(mc) = \bar{E}/(mc^2)$  の値を有限に留めるのために必要であることになる．これにより量子ウォーカーの擬速度の分布は  $v = c$  でのデルタピークが均されて，一般に逆釣鐘型になる．

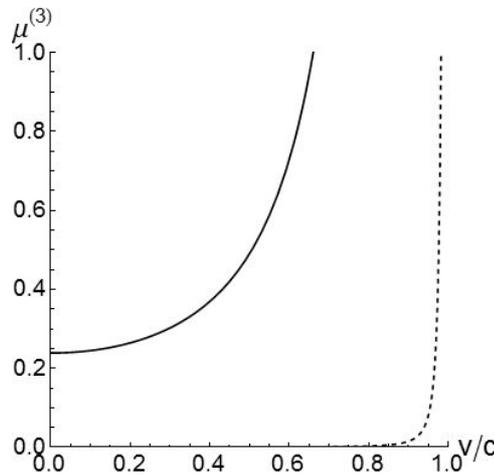


図 2.1:  $\mu_{\text{Dirac}}^{(3)}$  の擬速度  $v$  の大きさの依存性．実線がパラメータ  $\lambda/(mc) = 1$  の場合で，破線がパラメータ  $\lambda/(mc) = 10$  の場合．

## 第3章 低次元系における Dirac 方程式の極限分布

### 3.1 2次元系

2成分運動量を  $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$  とする．このとき運動量の大きさとエネルギーはそれぞれ  $E(p) = \sqrt{(pc)^2 + (mc^2)^2}$  ,  $p = |\mathbf{p}| = \sqrt{p_1^2 + p_2^2}$  となる．またハミルトニアン行列は

$$\mathcal{H}(\mathbf{p}) = U(\mathbf{p})^{-1} \sqrt{(pc)^2 + (mc^2)^2} \gamma_4 U(\mathbf{p}) \quad (3.1)$$

ただし，

$$U(\mathbf{p}) = \frac{1}{\sqrt{2E(p)}} \left( \sqrt{E(p) + mc^2} I_4 + i \sum_{k=1}^2 \frac{c\gamma_k p_k}{\sqrt{E(p) + mc^2}} \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2E(p)}} \begin{pmatrix} \sqrt{E(p) + mc^2} & 0 & 0 & \frac{c(p_1 - ip_2)}{\sqrt{E(p) + mc^2}} \\ 0 & \sqrt{E(p) + mc^2} & \frac{c(p_1 + ip_2)}{\sqrt{E(p) + mc^2}} & 0 \\ 0 & \frac{-c(p_1 - ip_2)}{\sqrt{E(p) + mc^2}} & \sqrt{E(p) + mc^2} & 0 \\ \frac{-c(p_1 + ip_2)}{\sqrt{E(p) + mc^2}} & 0 & 0 & \sqrt{E(p) + mc^2} \end{pmatrix}$$

である．第2章と同様な方法により，パラメータ  $\lambda$  について (2.29) で導入した紫外切断を施して得られる結果は次のようになる．

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left\langle \prod_{j=1}^2 V_j(t)^{\alpha_j} \right\rangle_{\lambda} = \prod_{j=1}^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dv_j}{c} \prod_{j=1}^2 v_j^{\alpha_j} \nu_{\text{Dirac}}^{(2)}(\mathbf{v}; \lambda, \mathbf{q}) , \quad \alpha_j \in \mathbf{N}_0, j = 1, 2 \quad (3.2)$$

ここで  $v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$  であり，

$$\nu_{\text{Dirac}}^{(2)}(\mathbf{v}; \lambda, \mathbf{q}) = \mu_{\text{Dirac}}^{(2)}(v; \lambda) \mathcal{M}_{\text{Dirac}}^{(2)}(\mathbf{v}; \mathbf{q}), \quad (3.3)$$

とおいた．また  $\mu_{\text{Dirac}}^{(2)}(v; \lambda)$  と  $\mathcal{M}_{\text{Dirac}}^{(2)}(\mathbf{v}; \mathbf{q})$  はそれぞれ

$$\mu_{\text{Dirac}}^{(2)}(v; \lambda) = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{mc}{\lambda} \right)^2 \frac{1}{(1 - v^2/c^2)^2} \mathbf{1} \left( v < \sqrt{\frac{2\lambda^2 c^2}{(mc)^2 + 2\lambda^2}} \right), \quad (3.4)$$

$$\mathcal{M}_{\text{Dirac}}^{(2)}(\mathbf{v}; \mathbf{q}) = 1 + \sum_{j=1}^2 \mathcal{M}_{\text{Dirac}}^{(2,j)}(\mathbf{q}) v_j \quad (3.5)$$

である．ただし，

$$\mathcal{M}_{\text{Dirac}}^{(2,1)}(\mathbf{q}) = 2\text{Re}(q_1\bar{q}_4 + q_2\bar{q}_3), \quad \mathcal{M}_{\text{Dirac}}^{(2,2)}(\mathbf{q}) = 2\text{Im}(\bar{q}_1q_4 - \bar{q}_2q_3). \quad (3.6)$$

図 3.1 は (1.17) 式で与えられた  $SQW^{(2)}$  の  $\nu^{(2)}$  のグラフ (a) と，(3.3) 式で与えられた  $\nu_{\text{Dirac}}^{(2)}$  のグラフ (b) の比較である．前者は [23] で報告されているものである．(a) では  $p = 1/2$ ,  $\mathbf{q} = (1/2, -i/2, -1/2, i/2)$  とパラメータをとった．(b) ではパラメータを  $\lambda/(mc) = 1$ ,  $\mathbf{q} = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0, 0)$  とした．この場合  $\nu^{(2)}$  は  $\nu^{(2)}(-v_1, -v_2) = \nu^{(2)}(v_1, v_2)$  の対称性を持っていが，原点周りで等方的ではない． $\nu_{\text{Dirac}}^{(2)}$  については原点に対して等方的である．これは紫外切断を，(2.29) のように運動量空間中において等方的に施したことによる．図 3.2 について (a) はパラメータを  $p = 1/2$ ,  $\mathbf{q} = (1/2, i/2, i/2, -1/2)$  ととったときの  $\nu^{(2)}$  のグラフであり，(b) はパラメータを  $\lambda/(mc) = 1$ ,  $\mathbf{q} = (-(1+i)/(2\sqrt{2}), -(1+i)/(2\sqrt{2}), (1+i)/(2\sqrt{2}), (1-i)/(2\sqrt{2}))$  ととったときの  $\nu_{\text{Dirac}}^{(2)}$  のグラフである．この場合はどちらの分布も原点に対して非等方的である．

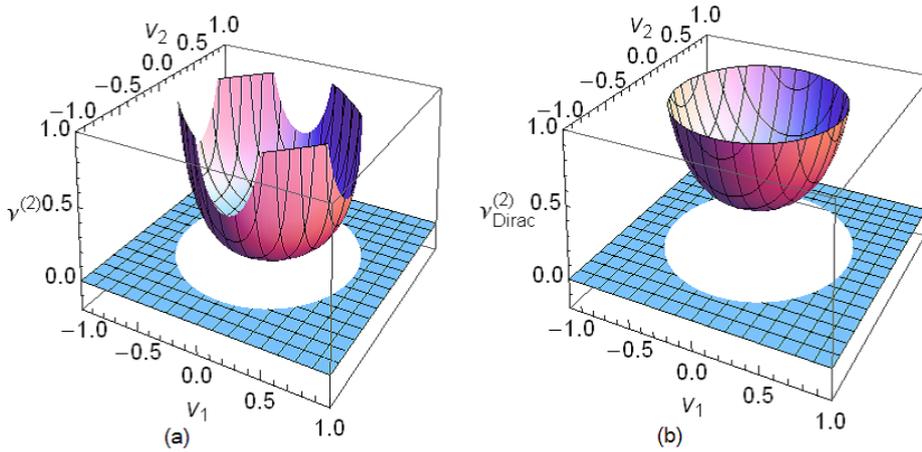


図 3.1: (a)  $SQW^{(2)}$  の  $\nu^{(2)}$  と (b)  $\nu_{\text{Dirac}}^{(2)}$  の比較．パラメータはそれぞれ (a)  $p = 1/2$ ,  $\mathbf{q} = (1/2, -i/2, -1/2, i/2)$  , (b)  $\lambda/(mc) = 1$ ,  $\mathbf{q} = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0, 0)$  である．

## 3.2 1次元系

1次元系では運動量はスカラー量となり  $p_1$  とする．また紫外切断のパラメータを  $\lambda$  とする．このとき，擬速度の極限分布は

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle V_1(t)^{\alpha_1} \rangle_\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dv_1}{c} v_1^{\alpha_1} \nu_{\text{Dirac}}^{(1)}(v_1; \lambda, \mathbf{q}), \quad \alpha_1 \in \mathbf{N}_0 \quad (3.7)$$

である．このとき

$$\nu_{\text{Dirac}}^{(1)}(v_1; \lambda, \mathbf{q}) = \mu_{\text{Dirac}}^{(1)}(v_1, \lambda) \mathcal{M}_{\text{Dirac}}^{(1)}(v_1; \mathbf{q}), \quad (3.8)$$

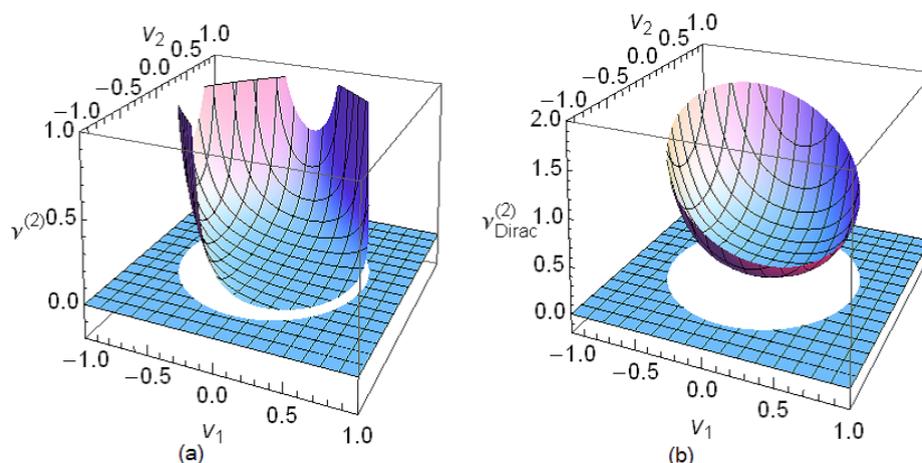


図 3.2: (a) SQW<sup>(2)</sup> の  $\nu^{(2)}$  と (b)  $\nu_{\text{Dirac}}^{(2)}$  の比較 . パラメータはそれぞれ (a)  $p = 1/2, \mathbf{q} = (1/2, i/2, i/2, -1/2)$  , (b)  $\lambda/(mc) = 1, \mathbf{q} = (-(1+i)/(2\sqrt{2}), -(1+i)/(2\sqrt{2}), (1+i)/(2\sqrt{2}), (1-i)/(2\sqrt{2}))$  である .

とおいた . ただし ,

$$\mu_{\text{Dirac}}^{(1)}(v_1, \lambda) = \frac{mc}{2\lambda} \frac{1}{(1 - v_1^2/c^2)^{3/2}} \mathbf{1} \left( v_1 < \sqrt{\frac{\lambda^2 c^2}{(mc)^2 + \lambda^2}} \right) \quad (3.9)$$

$$\mathcal{M}_{\text{Dirac}}^{(1)}(v_1; \mathbf{q}) = 1 + 2v_1 \text{Re}(q_1 \bar{q}_4 + q_2 \bar{q}_3). \quad (3.10)$$

である . (3.9) 式の結果は [18] の論文の Eq.(56) と比較することができる .

図 3.3 は (1.11) 式で与えられた SQW<sup>(1)</sup> の  $\nu^{(1)}$  のグラフ (a) と (3.8) で与えられた  $\nu_{\text{Dirac}}^{(1)}$  のグラフ (b) とを比較した図である . (a) は  $a = i\sqrt{7/10}, b = i\sqrt{3/10}, \mathbf{q} = (1/\sqrt{2}, i/\sqrt{2})$  とパラメータをとったときの分布であり , (b) は  $\lambda/(mc) = 3, \mathbf{q} = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0, 0)$  とパラメータをとったときの分布である . どちらの分布も対称的である . 図 3.4 についてパラメータを  $a = \sqrt{7/10}, b = i\sqrt{3/10}, \mathbf{q} = (1/\sqrt{5}, 2i/\sqrt{5})$  としたときの  $\nu^{(1)}$  のグラフ (a) とパラメータを  $\nu_{\text{Dirac}}^{(1)}$  with  $\lambda/(mc) = 3, \mathbf{q} = (1/\sqrt{10}, 1/\sqrt{10}, 2/\sqrt{10}, 2/\sqrt{10})$  としたときのグラフ (b) を比較した図である . この場合はどちらも非対称的となる .

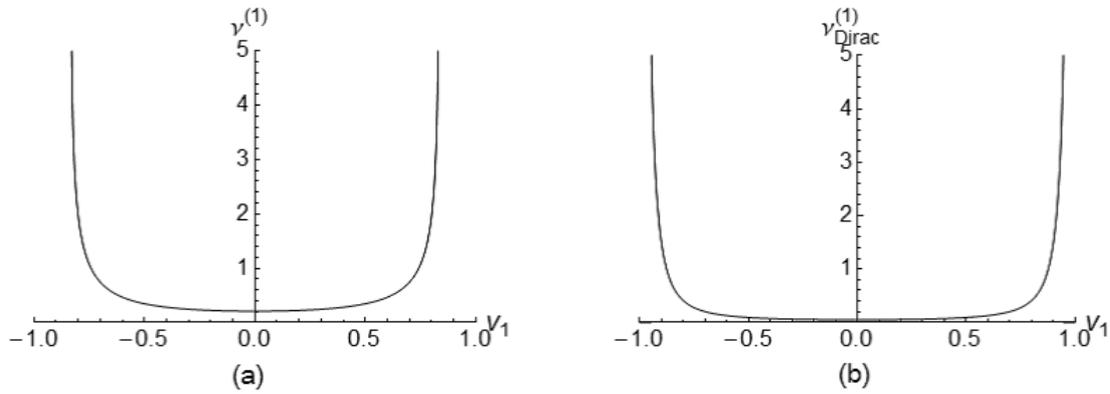


図 3.3: (a) SQW<sup>(1)</sup> の  $\nu^{(1)}$  と (b)  $\nu_{\text{Dirac}}^{(1)}$  の比較. パラメータはそれぞれ (a)  $a = i\sqrt{7/10}, b = i\sqrt{3/10}, \mathbf{q} = (1/\sqrt{2}, i/\sqrt{2})$ , (b)  $\lambda/(mc) = 3, \mathbf{q} = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0, 0)$  である.

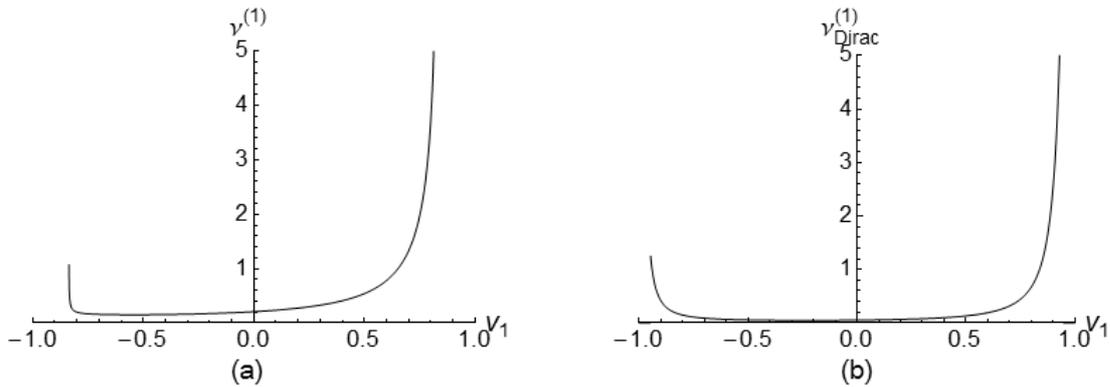


図 3.4: (a) SQW<sup>(1)</sup> の  $\nu^{(1)}$  と (b)  $\nu_{\text{Dirac}}^{(1)}$  の比較. パラメータはそれぞれ (a)  $a = \sqrt{7/10}, b = i\sqrt{3/10}, \mathbf{q} = (1/\sqrt{5}, 2i/\sqrt{5})$ , (b)  $\lambda/(mc) = 3, \mathbf{q} = (1/\sqrt{10}, 1/\sqrt{10}, 2/\sqrt{10}, 2/\sqrt{10})$  である.

## 第4章 第1部結び

本修士論文第1部では、相対論的量子力学の理論に従って量子ウォーク模型の擬速度の極限分布を構成するという新しい手法を示した。ここでは自由 Dirac 1 粒子系という非常に単純な系について考えたが、量子ウォーク模型との対応をとるため、Dirac 方程式を解くときに2つの特別な条件を置いた。1つは時刻  $t = 0$  で粒子が原点にいるという初期条件である。もうひとつが紫外切断である。

本研究で相対論的量子力学と量子ウォーク模型とを結びつける際に初期条件において自由ディラック粒子を原点に局在させるという点について重要な意味をもったが、これについては Bracken, Flohr, Mellow [30], また Strauch [17], そして Bracken, Ellinas, and Smyrnakis [18] によって詳しく議論されている。簡単に説明すると、Dirac 方程式を原点に局在する形ではなく波束としてその時間発展を解くという方法であり、その波束の幅を短くすることによって自由 Dirac 粒子が原点に局在する形にすると、その粒子の位置の分布は原点から外側に広がっていき、その速さは光速  $c$  に収束するというものである。本研究での初期条件は、彼らの設定である波束の幅が零という極限に対応する。

自由 Dirac 粒子の擬速度  $V(t)$  の分布について初期条件として自由 Dirac 粒子が実空間において原点に局在するとすれば、その  $V(t)$  の長時間極限における分布は半径  $c$  の球の表面となる。量子ウォーク模型の研究のほとんどは、離散格子やツリー上の離散空間上の話であったので、紫外切断を導入した。このことにより  $V(t)$  の極限分布は発散せず、逆釣鐘型の分布関数を得ることができた。

本第1部では、運動量空間において1-パラメータ  $\lambda$  の導入による等方的な紫外切断  $p = |\mathbf{p}| < \lambda$  を考えが、この紫外切断のとり方を工夫することによって、量子ウォーク模型での格子の構造やユニタリ行列によって表される量子サイコロの選択による分布の微妙な変化をも再現できると予想される。ただし今回は等方的に紫外切断を施したので、 $d = 2$  の場合の図 3.1 や図 3.2 のように、SQW<sup>(d)</sup> の  $\nu^{(d)}$  のグラフ (a) や Dirac 方程式から得られた  $\nu_{\text{Dirac}}^{(d)}$  のグラフ (b) の分布関数間には僅かな差異が現れてしまっている。

論文 [23] では SQW<sup>(2)</sup> に量子ウォーカーの始点での局在化という興味深い現象が報告されている [21, 22]。Dirac 方程式から構成した模型ではこの局在化の現象はおそらく現れないと予想している。

本研究では、3次元の Dirac 方程式から極限分布を導出しさらにそこから  $d = 1$  と  $d = 2$  の極限分布を導出した。ここで次元  $d$  について次のように簡略化した表現が可能である。

$$\mu_{\text{Dirac}}^{(d)}(v; \lambda) = \text{const.} \left( \frac{mc}{\lambda} \right)^d \frac{1}{(1 - v^2/c^2)^{(d+2)/2}} \mathbf{1} \left( \frac{v}{c} < \left\{ 1 + \left( \frac{mc}{\lambda} \right)^2 \right\}^{-1/2} \right). \quad (4.1)$$

また，第5のガンマ行列を  $\gamma_5 = \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4$  と定義し，ハミルトニアン演算子

$$\hat{\mathcal{H}} = \gamma_4 \left( \sum_{k=1}^3 c\hbar\gamma_k \frac{\partial}{\partial x_k} + c\hbar\gamma_5 \frac{\partial}{\partial x_5} + mc^2 \right), \quad (4.2)$$

を考えれば，4成分の量子ビットをもつ4次元空間での量子ウォークを議論することができる．この場合の極限分布は (4.1) 式で  $d = 4$  とした場合に一致する．(Appendix A 参照)

なお，本第1部の内容を Phys. Rev. A 誌に投稿した際，レフェリーから文献 [33] との関連性が指摘された．また本研究は量子ウォーク模型と相対論的量子力学との関連に関する最近の研究として文献 [34] に引用された．

## 4.1 付録 A:4次元系

(4.2) 式のハミルトニアン行列は4成分を持つ運動量空間  $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3, p_5)$  上で以下のように対角化できる．

$$\mathcal{H}(\mathbf{p}) = U(\mathbf{p})^{-1} E(p) \gamma_4 U(\mathbf{p}) \quad (4.3)$$

ここで

$$U(\mathbf{p}) = \frac{1}{\sqrt{2E(p)}} \left( \sqrt{E(p) + mc^2} I_4 + i \sum_{k=1,2,3,5} \frac{c\gamma_k p_k}{\sqrt{E(p) + mc^2}} \right), \quad (4.4)$$

とおいた．ただし， $E(p) = \sqrt{(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_5^2)c^2 + (mc^2)^2}$  である．また擬速度を  $\mathbf{V}(t) = (V_1(t), \dots, V_4(t))$  とし，このとき (2.29) 式のように等方的な紫外切断を導入すれば，弱収束の定理が次のように得られる．

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left\langle \prod_{j=1}^4 V_j(t)^{\alpha_j} \right\rangle_{\lambda} = \prod_{j=1}^4 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dv_j}{c} \prod_{j=1}^4 v_j^{\alpha_j} \nu_{\text{Dirac}}^{(4)}(\mathbf{v}; \lambda, \mathbf{q}), \quad \alpha_j \in \mathbf{N}_0, 1 \leq j \leq 4 \quad (4.5)$$

ここで

$$\nu_{\text{Dirac}}^{(4)}(\mathbf{v}; \lambda, \mathbf{q}) = \mu_{\text{Dirac}}^{(4)}(v; \lambda) \mathcal{M}_{\text{Dirac}}^{(4)}(\mathbf{v}; \mathbf{q}) \quad (4.6)$$

であり，

$$\mu_{\text{Dirac}}^{(4)}(v; \lambda) = \frac{2}{\pi^2} \left( \frac{mc}{\lambda} \right)^4 \frac{1}{(1 - v^2/c^2)^3} \mathbf{1} \left( v < \sqrt{\frac{4\lambda^2 c^2}{(mc)^2 + 4\lambda^2}} \right), \quad (4.7)$$

$$\mathcal{M}_{\text{Dirac}}^{(4)}(\mathbf{v}; \mathbf{q}) = 1 + \sum_{j=1}^4 \mathcal{M}_{\text{Dirac}}^{(4)}(\mathbf{q}) v_j \quad (4.8)$$

である．ただし，

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\text{Dirac}}^{(4,1)}(\mathbf{q}) &= 2\text{Re}(q_1 \bar{q}_4 + q_2 \bar{q}_3), & \mathcal{M}_{\text{Dirac}}^{(4,2)}(\mathbf{q}) &= 2\text{Im}(\bar{q}_1 q_4 - \bar{q}_2 q_3), \\ \mathcal{M}_{\text{Dirac}}^{(4,3)}(\mathbf{q}) &= 2\text{Re}(q_1 \bar{q}_3 - q_2 \bar{q}_4), & \mathcal{M}_{\text{Dirac}}^{(4,4)}(\mathbf{q}) &= 2\text{Im}(\bar{q}_1 q_3 + \bar{q}_2 q_4). \end{aligned} \quad (4.9)$$

## 参考文献

- [1] Y. Aharonov, L. Davidovich, and N. Zagury, Phys. Rev. A **48**, 1687 (1993).
- [2] D. A. Meyer, J. Stat. Phys. **85**, 551 (1996).
- [3] A. Nayak and A. Vishwanath, e-print quant-ph/0010117.
- [4] A. Ambainis, E. Bach, A. Nayak, A. Vishwanath, and J. Watrous, in Proc. of the 33rd Annual ACM Symp. on Theory of Computing (ACM Press, New York, 2001), pp.37-49.
- [5] B. C. Travaglione and G. J. Milburn, Phys. Rev. A **65**, 032310 (2002).
- [6] N. Konno, Quantum Inf. Process **1**, 345 (2002).
- [7] J. Kempe, Contemp. Phys. **44**, 307 (2003).
- [8] A. Ambainis, Int. J. Quantum Inf. **1**, 507 (2003).
- [9] V. M. Kendon, Int. J. Quantum Inf. **4**, 791 (2006).
- [10] 今野紀雄 : 量子ウォークの数理, 産業図書 (2008).
- [11] P. Biane, L. Bouten, F. Cipriani, N. Konno, N. Privault, Q. Xu, *Quantum Potential Theory*, Lecture Notes in Mathematics, 1954 (Springer, Berlin, 2008).
- [12] L. K. Grover, Phys. Rev. Lett. **79**, 325 (1997).
- [13] M. A. Nielsen and I. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information* (Cambridge University Press, Cambridge, England, 2000).
- [14] A. Ambainis, in Proc. 45th Annual IEEE Symp. on Foundations of Computer Science (Piscataway, NJ, IEEE, 2004), pp.22-31.
- [15] T. Oka, N. Konno, R. Arita, and H. Aoki, Phys. Rev. Lett. **94**, 100602 (2005).
- [16] M. Katori, S. Fujino, and N. Konno, Phys. Rev. A **72**, 012316 (2005).
- [17] F. W. Strauch, Phys. Rev. A **73**, 054302 (2006).

- [18] A. J. Bracken, D. Ellinas, and I. Smyrnakis, *Phys. Rev. A* **75**, 022322 (2007).
- [19] N. Konno, *J. Math. Soc. Jpn.*, **57**, 1179 (2005).
- [20] G. Grimmett, S. Janson, and P. F. Scudo, *Phys. Rev. E* **69**, 026119 (2004).
- [21] N. Inui, Y. Konishi, and N. Konno, *Phys. Rev. A* **69**, 052323 (2004).
- [22] T. Miyazaki, M. Katori, and N. Konno, *Phys. Rev. A* **76**, 012332 (2007).
- [23] K. Watabe, N. Kobayashi, M. Katori, and N. Konno, *Phys. Rev. A* **77**, 062331 (2008).
- [24] E. Segawa and N. Konno, *Int. J. of Quantum Inf.*, **6**, 1231 (2008).
- [25] N. Konno, *Quantum Inf. Process* **8**, 387 (2009).
- [26] J. D. Bjorken and S. D. Drell, *Relativistic Quantum Mechanics* (McGraw-Hill, New York, 1964).
- [27] P. A. M. Dirac, *The Principles of Quantum Mechanics*, 4th edn (Clarendon Press, Oxford, 1958).
- [28] C. Itzykson and J-B. Zuber, *Quantum Field Theory* (McGraw-Hill, New York, 1980).
- [29] 西島和彦 : 相对論的量子力学, 倍風館 (1973).
- [30] A. J. Bracken, J. A. Flohr, and G. F. Melloy, *Proc. R. Soc. A* **461**, 3633 (2005).
- [31] L. L. Foldy and A. Wouthuysen, *Phys. Rev.* **78**, 29 (1950).
- [32] S. Tani, *Prog. Theor. Phys.* **6**, 267 (1951).
- [33] F. W. Strauch, *J. Math. Phys.* **48**, 082102 (2007).
- [34] Y. Shikano, K. Chisaki, E. Segawa, N. Konno, arXiv : 1001.3989 [quant-ph].

## 第II部

### 共形変換と確率過程



## 第1章 はじめに

第2部では2次元平面上のランダムな曲線に関する研究結果を記す．2次元平面上の曲線と言えば，フラクタル曲線であるループ除去ランダムウォーク（loop-erased random walk : LERW）や自己回避ランダムウォーク（self-avoiding walk : SAW），平衡統計力学モデルである浸透模型（percolation）や磁性体の模型（Ising model），また平面を埋め尽くすランダムなペアノ曲線や非平衡統計模型である砂崩しまたは雪崩模型（Abelian sandpile model）や森林火災模型，など統計物理やフラクタル物理で重要となってくる様々な平面上の曲線がある．これらの曲線のモデルの設定はそれぞれ別々のものであるが，複素関数  $g_t(z)$  に対する

$$\frac{d}{dt}g_t(z) = \frac{2}{g_t(z) - \sqrt{\kappa}B_t}$$

という微分方程式一つで記述できることがわかってきた．この方程式を Schramm-Loewner evolution (SLE) [1] という． $B_t$  は標準ブラウン運動であり，パラメータは実数  $\kappa > 0$  である．この  $\kappa$  の値を変えるだけで上にあげた様々な曲線を再現できる．例えば  $\kappa = 2$  のときは LERW [4]， $\kappa = 8/3$  のときは SAW， $\kappa = 6$  のときは臨界浸透模型 [3, 5]， $\kappa = 8$  のときは平面を埋め尽くす uniform spanning tree (UST) などが知られている．ブラウン運動から SLE の方程式を通して解析関数  $g_t$  の  $t > 0$  の発展を得ることができ，その  $g_t$  によって2次元平面である複素平面上に曲線が生成される．この際施される写像は共形変換である．つまりある確率過程を与え，微分方程式を通して得られる解析関数によって共形変換を施すとランダムな曲線が生成されるわけである．

この話とは別に，複素平面上に任意の折れ線を生成する共形写像を解にもつ微分方程式が Schwarz-Christoffel の定理によって与えられている．この微分方程式を解くのは一般的に難しいが，ある特別な場合は微分方程式を解くことができる．例えば垂直なスリットや斜めスリットの場合である．直線的なスリットを生成する Schwarz-Christoffel 変換は実軸からの角度であるパラメータを一つ持っており，1回の変換では単なる線分を生成するだけであるがこのパラメータを変化させつつ反復写像を繰り返すことによってそのパラメータの列に対応する点列を得ることができる．本研究ではこの事実に着目した．パラメータの決定に確率過程を導入しそれによって決定する Schwarz-Christoffel 変換である共形変換を反復させることによりランダムな点列を生成しその性質を調べた．具体的には SLE と対応させるように条件を設定し，SLE により生成される曲線と我々の反復 Schwarz-Christoffel 変換により生成される点列（折れ線）とを比較した．この反復 Schwarz-Christoffel 変換は SLE の離散系と見なすことができ，その連続極限が SLE に収束することが示されて

いる．本研究は反復 Schwarz-Christoffel 変換やそれによって生成される曲線そのものに対して理解を深めることと同時に SLE への離散系からのアプローチという目的をもって進めた．本第2部の構成は以下のようにになっている．まず第2章では SLE についてその基本的な構成要素である Loewner 方程式，共変不変性，領域 Markov 性について紹介し，SLE の性質とその分割による離散化の方法，近似の方法について説明する．第3章からは Schwarz-Christoffel 変換について説明し，SLE との対応のさせ方 [6,7] を述べる．さらにランダムウォークで駆動する反復 Schwarz-Christoffel 変換のモデルの導出を行う．第4章では計算機シミュレーションによる解析結果を示す．

## 第2章 Schramm-Loewner evolution

この章では Schramm-Loewner evolution (SLE) の紹介とその基本的な性質について述べる．また SLE の離散化の考え方や，近似方法について説明する．なお本論文では考える領域を複素上半平面とし， $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}z > 0\}$  と記すことにする．このとき境界は実軸と無限遠点となる．

### 2.1 Loewner 方程式

実軸上のある一点から出発し，時間  $t \in [0, \infty)$  で発展していく曲線を考える．ただし曲線が交わらないとする．時刻  $t$  での曲線とその曲線の頂点をそれぞれ

$$\gamma_{(0,t]}, \gamma_t$$

と書くことにする．また領域  $\mathbb{H}$  からこの曲線  $\gamma_{(0,t]}$  を除いた領域を  $\mathbb{H}/\gamma_{(0,t]}$  と記すことにする．このとき各時刻  $t > 0$  において  $\mathbb{H}/\gamma_{(0,t]}$  を  $\mathbb{H}$  に写すような共形写像 (等角写像)  $g_t$  の存在が Riemann の写像定理により保障されており，流体力学的正規化条件 (hydrodynamic normalization)

$$\lim_{z \rightarrow \infty} [g_t(z) - z] = 0$$

により一意に与えられる．またこの共形写像  $g_t$  は Schwarz の鏡像原理により  $z \rightarrow \infty$  で

$$g_t(z) = z + \frac{a(t)}{z} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|z|^2}\right), \quad a(t) \in \mathbb{R}$$

と展開できる．ここで  $a(t)$  は  $\mathbb{H}/\gamma_{(0,t]}$  の形状を特徴づける量であり，上半平面容量 ( $\mathbb{H}$ -capacity) と呼ばれている．さらに  $g_t$  は Loewner 方程式

$$\frac{d}{dt}g_t(z) = \frac{1}{g_t(z) - U_t} \frac{da(t)}{dt}, \quad g_0(z) = z \quad (2.1)$$

を満たす．ただし  $U_t = g_t(\gamma_t) \in \mathbb{R}$  であり，駆動関数と呼ばれる連続関数である．よって，図 2.1 のように曲線または曲線で囲まれた領域を消すような共形変換  $g_t$  は Loewner 方程式の解として得られることになる．また以後  $\gamma_{(0,t]}$  を上半平面容量によって  $a(t) = 2t$  と径数付けすることにする．

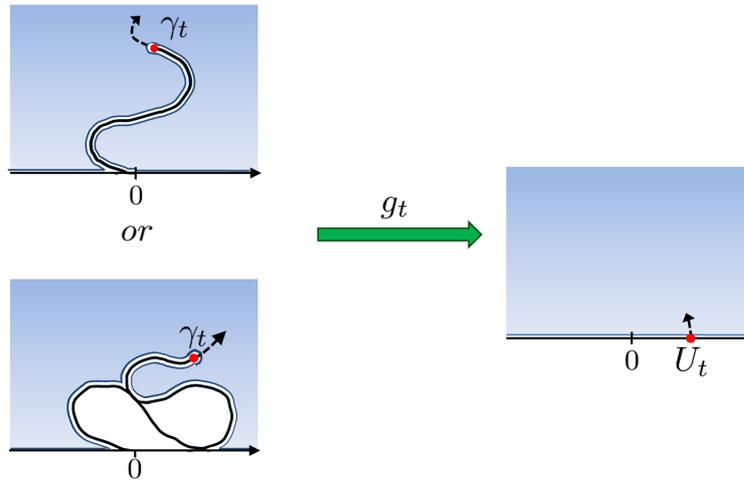


図 2.1: 曲線や曲線と実軸で囲まれた領域を消す共形写像  $g_t$

## 2.2 SLE とその基本的性質

曲線  $\gamma_{(0,t]}$  が与えられることにより Loewner 方程式を通して  $\gamma_{(0,t]}$  を消すような共形写像  $g_t$  が生成されることを述べたが, Loewner 方程式に確率変数を導入しランダムな曲線を生成させることを考える. この系に対して共形不変性と領域 Markov 性の 2 つの条件を満たすという強い制限を与えたとき駆動関数  $U_t$  は 1 次元 Brown 運動になることが示せる. そしてこのときの自由度は 1 パラメータ  $\kappa > 0$  しかなく, それを駆動関数の拡散係数とし, 駆動関数を  $\sqrt{\kappa}B_t$  とする. このとき Loewner 方程式の解として得られる共形変換の族  $\{g_t\}_{t \geq 0}$  が Schramm-Loewner evolution であり SLE $_{\kappa}$  と略記される. ここでは共形不変性と領域 Markov 性について説明し, SLE の基本的な性質をいくつか述べる.

### 2.2.1 共形不変性

任意の単連結領域を  $D$ , その境界を  $\partial D$  とし境界上の始点  $a \in \partial D$  と終点  $b \in D$  を結ぶ曲線について確率測度の族  $\{\mu_{(D;a,b)}\}$  が与えられたとする. このときこのとき共形変換  $f: D \rightarrow f(D)$  が存在して

$$\mu_{(D;a,b)}(\cdot) = \mu_{(f(D);f(a),f(b))}(\cdot)$$

が成り立つとき確率測度は共形不変であるという (図 2.2).

### 2.2.2 領域 Markov 性

確率測度  $\mu_{(D;a,b)}$  の下で, 曲線  $\gamma_{(0,t]}$  が  $\gamma_{t'} = c$  を通過したとする. このとき点  $c$  と点  $b$  を結ぶ残りの曲線の分布  $\mu_{(D;a,b)}(\cdot | \gamma_{(0,t' ]})$  は,  $D$  から  $\gamma_{(0,t' ]}$  を除いた領域で,  $c$  から  $b$  を結ぶ

曲線の分布  $\mu_{(D/\gamma_{(0,t]};c,b)}(\cdot)$  に等しい:

$$\mu_{(D;a,b)}(\cdot | \gamma_{(0,t]}) = \mu_{(D/\gamma_{(0,t]};c,b)}(\cdot).$$

この性質を領域 Markov 性と言う (図 2.3).

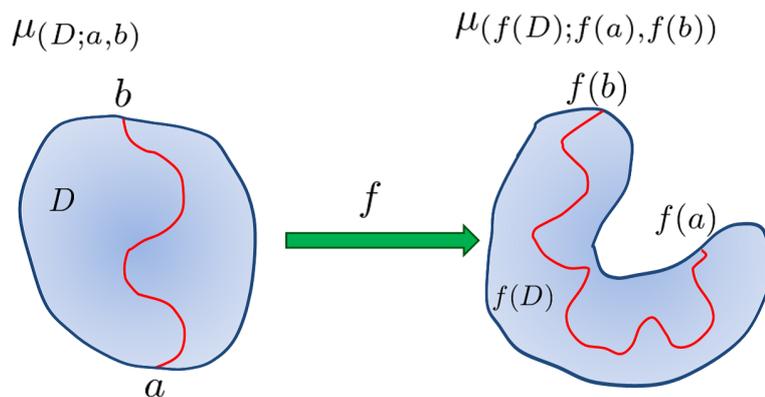


図 2.2: 共形不変性. 2点  $a, b$  を結ぶある曲線の出現確率はこの曲線を共形写像して得られる曲線が右図の領域内で出現する確率に等しい.

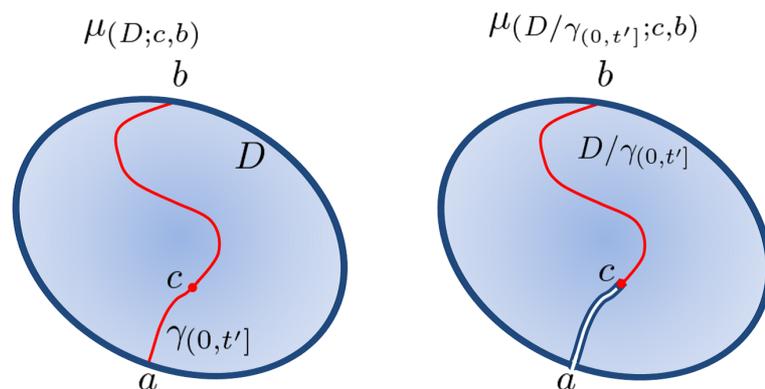


図 2.3: 領域 Markov 性. 左図の点  $a$  から出発し点  $c$  を通って点  $b$  に到達する曲線の点  $a$  から点  $b$  までの経路は条件として課したときの統計法則と右図の点  $c$  から出発して点  $b$  に到達する曲線の統計法則は等しい.

### 2.2.3 SLE

共形不変性と領域 Markov 性を満たすとき, Loewner 方程式の駆動関数は Brown 運動でなければならないことが示せる [2]. この共形不変性と領域 Markov 性を取り入れた

Loewner 方程式

$$\frac{d}{dt}g_t(z) = \frac{2}{g_t(z) - \sqrt{\kappa}B_t}, \quad g_0(z) = z \quad (2.2)$$

が Schramm-Loewner evolution (SLE) である. SLE では 1-パラメータ  $\kappa > 0$  は駆動関数であるブラウン運動の拡散係数としてある. ここで SLE の基本的性質のうち 2 つを紹介する.

スケーリング性

Brown 運動  $B_t$  は任意の  $c > 0$  に対して

$$\frac{1}{c}B_{c^2t} \stackrel{d}{=} B_t, \quad \forall c > 0$$

( $\stackrel{d}{=}$  は分布が等しいという意味) のスケーリング性を持っている. これが  $SLE_\kappa$  にも遺伝して任意の  $r > 0$  に対して

$$\frac{1}{r}g_{r^2t}(rz) \stackrel{d}{=} g_t(z), \quad \forall r > 0$$

が成り立ち,  $\tilde{\gamma} \equiv \gamma(r^2t)/r$  とすると

$$\tilde{\gamma} \stackrel{d}{=} \gamma$$

というスケーリング性を持つ.

$SLE_\kappa$  曲線の 3 相

- (a)  $0 < \kappa \leq 4$  のとき  $SLE_\kappa$  曲線  $\gamma$  は自分自身とは接しない単純曲線である.
- (b)  $\kappa > 4$  のときは  $\gamma$  は自分自身や実軸に接しながら発展する曲線である.
- (c)  $\kappa \geq 8$  のとき  $\gamma$  は  $\mathbb{H}$  を埋め尽くす.

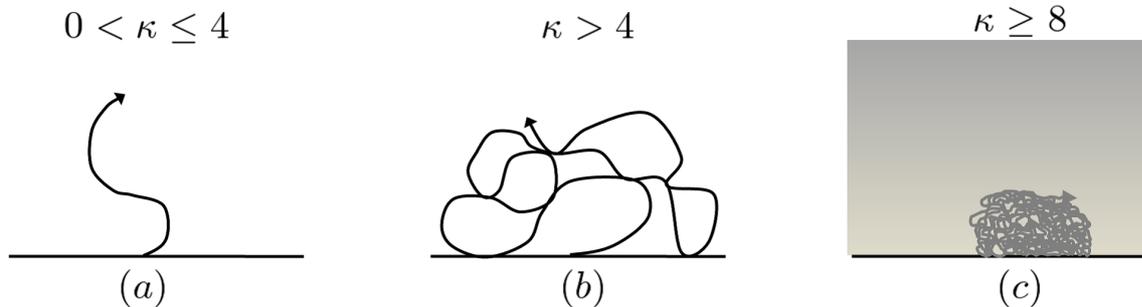


図 2.4:  $SLE_\kappa$  は  $\kappa$  の値の違いにより 3 つの相を表す.

## 2.3 SLE の分割と離散化

原点から伸びる SLE 曲線  $\gamma_{(0,t_n]}$  を消すような共形写像  $g_{t_n}$  は, SLE のもつ領域 Markov 性により時間区分を分割して考えることができる. まず  $t_n > t_0 \equiv 0$  に対して  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{k-1} < t_k < \dots < t_n$ , ( $k = 1, 2, 3, \dots, n$ ) であるような時刻の列  $(t_1, t_2, \dots, t_{n-1})$  を選ぶ. 曲線  $\gamma_{(0,t_n]}$  を消すような写像は  $g_{t_n}$  であるが例えば, 時間区分  $[t_{k-1}, t_k]$  の間のある時刻  $t$  を考え  $\gamma_{(0,t_{k-1}+t]}$  までを消す共形写像を 2 回に分割して考えることにする (図 2.5). 1 回目の写像は  $\gamma_{(0,t_{k-1}+t]}$  のうち  $\gamma_{(0,t_{k-1}]}$  を消す共形写像  $g_{t_{k-1}}$  である. 2 回目の写像は 1 回目の写像の後に残る曲線  $g_{t_{k-1}}(\gamma_{(0,t_{k-1}+t]})$  を消す写像で  $G_{t_{k-1}+t}$ , ( $G_{t_0} = g_{t_0}$ ) とする. 写像  $G_{t_{k-1}+t}$  は  $0 \leq t < t_k - t_{k-1}$  において, 点  $U_{t_{k-1}}$  から伸びる曲線  $g_{t_{k-1}}(\gamma_{(0,t_{k-1}+t]})$  を消すような写像であり, 駆動関数  $U_{t_{k-1}+t}$  の Loewner 方程式を満たす解析関数として与えられ, また共形写像  $g$  を用いて合成写像

$$G_{t_{k-1}+t} = g_{t_{k-1}+t} \circ g_{t_{k-1}}^{-1}, \quad 0 \leq t < t_k - t_{k-1} \quad (2.3)$$

として表せる共形写像となる. もちろんこの時の共形写像  $G_{t_{k-1}+t}$  に対応する駆動関数は  $U_{t_{k-1}}$  から  $U_{t_k}$  へと運動する. 上述の  $G_{t_{k-1}+t}$  を各時間区分  $[t_{k-1}, t_k]$ , ( $k = 1, 2, 3, \dots, n$ ) について考える. すると共形写像  $g_{t_n}$  は共形写像  $G_{t_k}$  の反復的な合成写像として考えることができ

$$g_{t_n} = G_{t_n} \circ G_{t_{n-1}} \circ \dots \circ G_{t_1} \quad (2.4)$$

と表せる. この分割の仕方は時間の分割の仕方による.

ここで最後に離散化を考える. 分割した各時刻における曲線  $\gamma_{(0,t_n]}$  上の各点  $(z_{t_1}, z_{t_2}, \dots, z_{t_n})$  をその時刻での共形写像  $g_{t_1}, g_{t_2}, \dots, g_{t_n}$  で

$$g_{t_1}(z_{t_1}) = U_{t_1}, g_{t_2}(z_{t_2}) = U_{t_2}, \dots, g_{t_n}(z_{t_n}) = U_{t_n}$$

と写像することにより離散型の SLE モデルとして考えることができる. もちろん上でした議論同様に  $G_{t_1}, G_{t_2}, \dots, G_{t_n}$  を用いて反復写像として表すこともできる. またこの時, 駆動関数も離散化されており, 逆の見方をすれば, 離散化された駆動関数から写像  $g$  の逆写像  $g^{-1}$  を施すことにより点列  $(z_{t_1}, z_{t_2}, \dots, z_{t_n})$  が生成されることになる. ここで逆写像  $g^{-1}$  を写像  $G$  を用いて表せば,

$$g_{t_n}^{-1} = G_{t_1}^{-1} \circ G_{t_2}^{-1} \circ \dots \circ G_{t_n}^{-1}$$

となる.

## 2.4 SLE の分割による写像の近似

前節 (2.2 節) で述べた離散化 SLE はすでに SLE の近似になっているが, この節ではさらに各時間間隔で共形写像  $G_{t_{k-1}+t}$  によって消す曲線を微小線分で近似することにより,

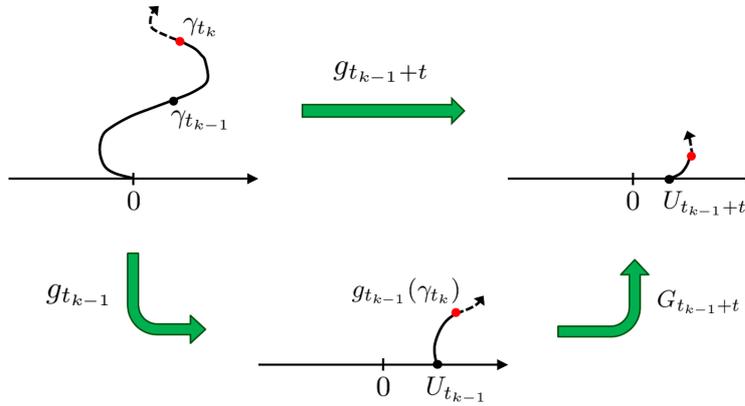


図 2.5: 合成写像として考えることができる。

写像  $G_{t_{k-1}+t}$  の代わりに扱いやすい写像を用いて，離散化 SLE の近似を考える．時間分割  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{k-1} < t_k < \dots < t_n$ , ( $k = 1, 2, 3, \dots, n$ ) に対する各時間間隔を

$$\Delta_k = t_k - t_{k-1} \quad (2.5)$$

と記すことにする．この各時間間隔  $\Delta_k$  が十分小さいとき，時刻  $t_{k-1}+t$ , ( $0 \leq t < t_k - t_{k-1}$ ) の間の SLE 曲線を共形写像  $g_{t_{k-1}}$  によって変換した曲線も微小であり，この微小曲線を微小線分として近似する．このように微小曲線を微小線分として近似した時，微小曲線を消すような共形写像  $G_{t_{k-1}+t}$  の代わりに，微小線分を消すような共形写像を  $\tilde{G}_{t_{k-1}+t}$  と書くことにする．もちろん時間間隔を  $\Delta_k \rightarrow 0$  とすれば連続 SLE に収束すると考えられる．この  $\tilde{G}_{t_{k-1}+t}$  を用いて次のような共形写像

$$f_{t_{k-1}+t}(z) \equiv \tilde{G}_{t_{k-1}+t}(z + U_{t_{k-1}}) - U_{t_{k-1}} \quad (2.6)$$

を定義する．この写像  $f_{t_{k-1}+t}$  は原点から伸びる線分，つまり斜めスリットを消していくような写像であり，駆動関数として  $U_{t_{k-1}+t} - U_{t_{k-1}}$  をもつ Loewner 方程式を満たす解析関数である．駆動関数  $U_{t_{k-1}+t} - U_{t_{k-1}}$  は 0 から  $U_{t_k} - U_{t_{k-1}}$  まで変化する．時間間隔  $\Delta_k$  での駆動関数の増分を

$$\delta_k = U_{t_k} - U_{t_{k-1}} \quad (2.7)$$

と書くことにする（ただし  $U_{t_0} = 0$ ）．図 2.6 が写像  $f_{t_{k-1}+t}$  の様子である．微小曲線を微小線分として近似し，さらに写像  $\tilde{G}_{t_{k-1}+t}$  とから (2.6) 式によって  $f_{t_{k-1}+t}$  を導入したことによって，原点から伸びる斜めスリットを消し，微小線分の頂点が  $\delta_k$  に写されるという写像が得られたことになる．

次にこれらを用いて駆動関数から曲線の離散近似を生成することを考える．それには時間区分の各時刻  $(t_0, t_1, \dots, t_n)$  での駆動関数を用いる．そして各時間間隔  $\Delta_k$  での駆動関数

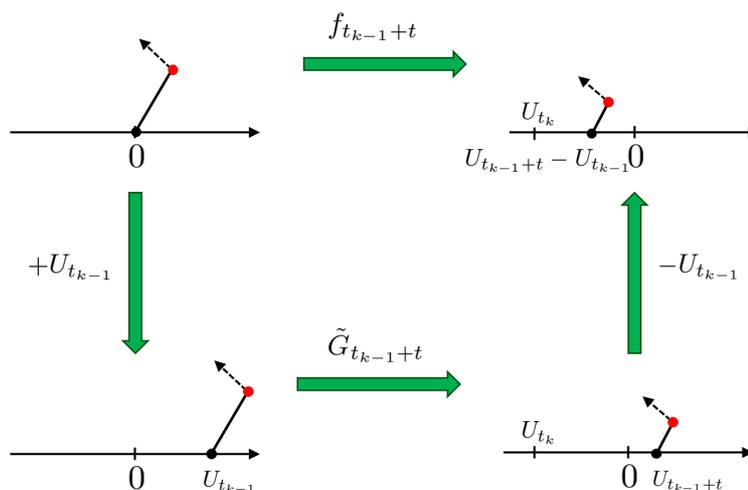


図 2.6: 写像  $f_{t_{k-1}+t}(z)$  の様子.

の増分  $\delta_k$  を求め，共形写像  $f$  で

$$\begin{aligned}
 z_n &= f_{t_1}^{-1} \circ f_{t_2}^{-1} \circ \cdots \circ f_{t_{n-1}}^{-1} \circ f_{t_n}^{-1}(\delta_n) \\
 z_{n-1} &= f_{t_1}^{-1} \circ f_{t_2}^{-1} \circ \cdots \circ f_{t_{n-1}}^{-1}(\delta_{n-1}) \\
 &\vdots \\
 z_2 &= f_{t_1}^{-1} \circ f_{t_2}^{-1}(\delta_2) \\
 z_1 &= f_{t_1}^{-1}(\delta_1)
 \end{aligned}$$

と反復写像することにより，複素平面上半平面上の点列  $(z_{t_1}, z_{t_2}, \dots, z_{t_n})$  が得られることになる．この点列を直線で結べば，分割によって微小線分として近似した離散化 SLE となる．



## 第3章 反復 Schwarz-Christoffel 変換

この章では Schwarz-Christoffel 変換について説明し、その特別な場合として複素平面の上半面に斜めスリットを生成する 1-パラメータをもつ共形変換の族を導入する。そしてこの共形変換のパラメータを、ある離散時間確率過程に従って時間変化させることを考える。パラメータを確率的に時間変化させて変換を反復させることにより複素平面の上半面にランダムな折れ線が生成できることを説明する。さらにこのアルゴリズムを SLE と対応させるための条件を示す。

### 3.1 Schwarz-Christoffel 変換

Schwarz-Christoffel 変換とは複素平面上の実軸と上半平面  $\mathbb{H}$  をそれぞれ、複素平面上のある多角形の境界とその内部に写すような共形変換である。定理として次のように与えられている。

$w$  平面上の多角形  $\Gamma$  に関して、その各頂点の内角を順番に  $\alpha_1\pi, \alpha_2\pi, \dots, \alpha_n\pi$  とするとき

$$\frac{dw(z)}{dz} = \gamma(z - a_1)^{\alpha_1-1}(z - a_2)^{\alpha_2-1} \dots (z - a_n)^{\alpha_n-1} \quad (3.1)$$

の微分方程式の解として与えられる共形写像  $w(z)$  によって、 $z$  平面の実軸が多角形  $\Gamma$  の境界に、また  $z$  平面の  $\mathbb{H}$  がその内部に写像される。ここで  $\gamma$  は複素定数であり、 $a_1, a_2, \dots, a_n$  は実数である。

この共形写像では実軸の点  $a_1, a_2, \dots, a_n$  が多角形の各頂点  $A_1, A_2, \dots, A_n$  にそれぞれ写像される。さらにこの共形写像は 1 対 1 である (図 3.1)。

### 3.2 Schwarz-Christoffel 変換による斜めスリットの変換

$0 < \alpha < \pi$  として図 3.2 にあるように斜めスリットを生成するような共形変換を  $h$  とする。

$h$  は (3.1) 式で  $n = 3$  として  $\alpha_1 = 1 - \alpha, \alpha_2 = 2, \alpha_3 = \alpha$  として得られる次の式を満たす。

$$\frac{dh(z)}{dz} = \gamma(z + x_l)^{-\alpha}(z - p)(z - x_r)^{-(1-\alpha)} \quad (3.2)$$

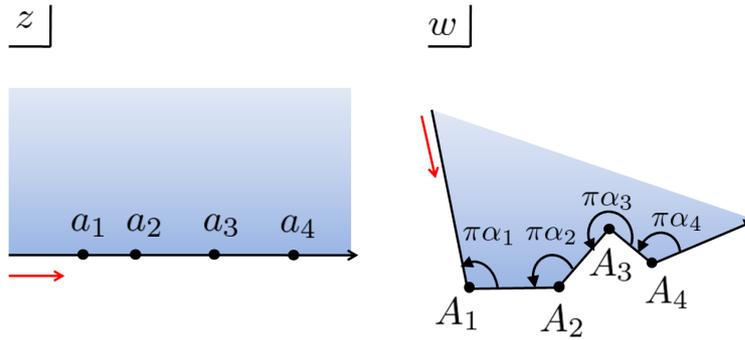


図 3.1: 多角形の変換 (Schwarz-Christoffel 変換).

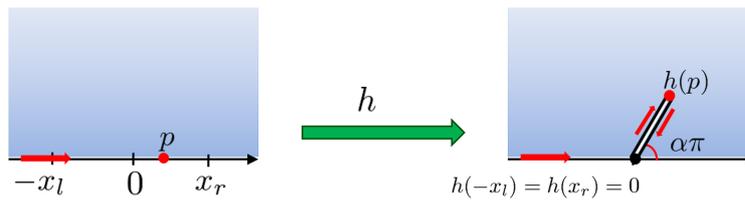


図 3.2: 斜めスリットの生成.

ただし,  $x_r, x_l, p$  は  $x_r > 0, x_l > 0, -x_l < p < x_r$  を満たす未定定数とする. (3.2) 式を不定積分し  $h(z)$  を求めると,

$$h(z) = \gamma(z-x_r)^\alpha(z+x_l)^{1-\alpha} \left( 1 + \frac{(p-x_r + \alpha(x_r+x_l))\Gamma(1-\alpha)}{x_r+x_l} \frac{F(1, 1, 2-\alpha; \frac{x_l+z}{x_r+x_l})}{\Gamma(2-\alpha)} \right) + C \tag{3.3}$$

となる. ここで  $C$  は積分定数であり,  $F(\alpha, \beta, \gamma; z)$  はガウスの超幾何級数

$$F(\alpha, \beta, \gamma; z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\beta+n)z^n}{\Gamma(\gamma+n)n!}.$$

ただし,  $\Gamma(z)$  はガンマ関数

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t}t^{z-1}dt$$

である. ここでは (3.3) 式に 2 つの条件を課した変換を考える. 1 つ目として流体力学的正規化条件

$$\lim_{z \rightarrow \infty} [h(z) - z] = 0,$$

2 つ目として展開

$$h^{-1}(z) = z + \frac{a}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right)$$

の第2項の係数として現れる上半平面容量  $a$  が  $2t$  に等しいという条件を課す．これは2.4節での SLE の分割による微小曲線から微小線分への近似と対応させるためである．この2つの条件から，

$$p = x_r - \alpha(x_r + x_l)$$

$$x_r = 2\sqrt{t}\sqrt{\frac{1-\alpha}{\alpha}}, \quad x_l = 2\sqrt{t}\sqrt{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

となり， $h(z)$  は時間  $t$  の関数として，

$$h_t(z) = \left( z + 2\sqrt{t}\sqrt{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \right)^{1-\alpha} \left( z - 2\sqrt{t}\sqrt{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \right)^{\alpha} \quad (3.4)$$

と表せることになる．また点  $p$  はこの斜めスリットを生成する Schwarz-Christoffel (SC) 変換の駆動関数として

$$U_t^{(\text{SC})} \equiv p = 2\frac{1-2\alpha}{\sqrt{\alpha(1-\alpha)}}\sqrt{t} \quad (3.5)$$

と表せる．

これは次のようにしても確認できる．今  $h_t(z)$  は流体力学的正規化条件と上半平面容量が  $2t$  であるという2つの条件を満たしており， $h_t(z)$  の逆写像である  $h_t^{-1}(z)$  は2.4節で述べた(2.6)式で表される Loewner 方程式を満たす SLE としての共形写像  $f_t$  に対応する．そこで，

$$h_t^{-1}(z) = f_t(z)$$

となるので，

$$h_t(f_t(z)) = z$$

であり，この式の両辺を時間  $t$  で微分すれば，

$$\frac{d}{dt}h_t(f_t(z)) + h'_t(f_t(z))\frac{d}{dt}f_t(z) = 0 \quad (3.6)$$

となるが， $df_t(z)/dt$  が上半平面容量  $2t$  の Loewner 方程式を満たすこと，また  $f_t(z)$  を改めて  $z$  と書くことにより(3.6)式は

$$\frac{d}{dt}h_t(z) = -h'_t(z)\frac{2}{z - (U_{t_{k-1}+t} - U_{t_{k-1}})} \quad (3.7)$$

となる．ここでは特に2.4節のように時間分割は考えず  $t_k, t_{k-1}$  が  $t_{k-1} < t < t_k$  を満たすだけとしておく．よって  $h_t(z)$  の駆動関数  $U_t^{(\text{SC})}$  は

$$U_t^{(\text{SC})} = U_{t_{k-1}+t} - U_{t_{k-1}} = 2\frac{1-2\alpha}{\sqrt{\alpha(1-\alpha)}}\sqrt{t} \quad (3.8)$$

であることがわかる．

また生成される斜めスリットの長さ  $R$  は

$$h_t(U_t^{(\text{SC})}) = e^{i\alpha\pi} 2\sqrt{t} \left( \frac{1-\alpha}{\alpha} \right)^{\frac{1}{2}-\alpha}$$

より,

$$R = 2\sqrt{t} \left( \frac{1-\alpha}{\alpha} \right)^{\frac{1}{2}-\alpha}$$

とわかる．我々の Schwarz-Christoffel 変換による斜めスリットの生成は図 3.2 の様な共形変換になっている．共形写像  $h$  によって点  $-x_l$  と点  $x_r$  は原点に写され，点  $p$  はスリットの頂点に写される．境界以外の上半平面はそのまま写像後の境界以外の  $\mathbb{H}$  に写され，流体力学的正規化条件を課していることにより無限遠の点は無限遠点へ写される．ある時刻  $t$  での斜めスリットの生成という意味では，実軸に沿っての写像，もっと言えば  $-x_l$  から  $x_l$  までの範囲を写像すれば，スリットが得られることになる．また  $0 \leq t$  での駆動関数  $U_t^{(\text{SC})}$  に対してのスリットの発展という意味では  $U_t^{(\text{SC})}$  を  $h_t$  で写像していった点の軌跡と対応することになる．

### 3.3 反復 Schwarz-Christoffel 変換

ここでは Schwarz-Christoffel 変換を反復させた時，曲線が得られることについて述べる．さらに時刻  $t$  が進むに従って曲線が発展していく様子をどのように記述できるかを述べる．ここで 1 回の Schwarz-Christoffel 変換における斜めスリットの変換に対して前節の最後に述べたある時刻  $t$  での斜めスリットの生成と駆動関数  $U_t^{(\text{SC})}$  によるスリットの発展のうち，前者の考えに従って議論を進める．さらにそのとき SLE とどのように対応がつくかを述べる．

ある時刻  $t_n$  を  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{k-1} < t_k < \dots < t_n$ , ( $k = 1, 2, 3, \dots, n$ ) と分割し，それぞれの時間間隔を  $\Delta_k = t_k - t_{k-1}$  とする．各時刻  $t_k$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots, n$ , で  $h_{t_k}$  が生成する斜めスリットの角度を指定するパラメータを  $\alpha_k$  とする．このとき  $h_{t_k}$  を  $H_k$  と書くことにすると，

$$H_k(z) = \left( z + 2\sqrt{\Delta_k} \sqrt{\frac{\alpha_k}{1-\alpha_k}} \right)^{1-\alpha_k} \left( z - 2\sqrt{\Delta_k} \sqrt{\frac{1-\alpha_k}{\alpha_k}} \right)^{\alpha_k} \quad (3.9)$$

と表せる．また各時刻に関して時間間隔  $\Delta_k$  での駆動関数の変化 (2.7) は (3.8) 式より

$$\delta_k = 2\sqrt{\Delta_k} \frac{1-2\alpha_k}{\sqrt{\alpha_k(1-\alpha_k)}} \quad (3.10)$$

となる．このときの反復 Schwarz-Christoffel 変換による曲線の生成と発展の概略を図 3.3 に示す．図 3.3 は上の段が時刻  $t_1$  から時刻  $t_2$  への曲線の発展の様子である．時刻  $t_1$  のと

きは原点  $0$  から点  $H_1(\delta_1)$  までの線分が伸びており，時刻  $t_2$  になるとその頂点  $H_1(\delta_1)$  から曲線が点  $H_1 \circ H_2(\delta_2)$  まで発展する．一方この線分または曲線のつなぎ合わせである曲線の発展を斜めスリットを生成する反復 Schwarz-Christoffel 変換によって記述するには，時刻  $t_k$  の時の複素平面を  $w_k$  (ただし  $w_0 = z$ ) とすると，時刻  $t_1$  の時は  $w_1 = H_1(z)$  で，時刻  $t_2$  の時は  $w_2 = H_1 \circ H_2(z)$  で各時刻での曲線と発展が記述できる．このようにして時刻  $0 = t_0$  から時刻  $t_n$  まで時間間隔  $\Delta_k$  によって分割した時の共形写像  $h_k$  を反復させることにより曲線の発展が記述でき，時刻  $t_k$  での曲線は

$$w_k = H_1 \circ H_2 \circ \cdots \circ H_{k-1} \circ H_k(z) \tag{3.11}$$

で得られる．

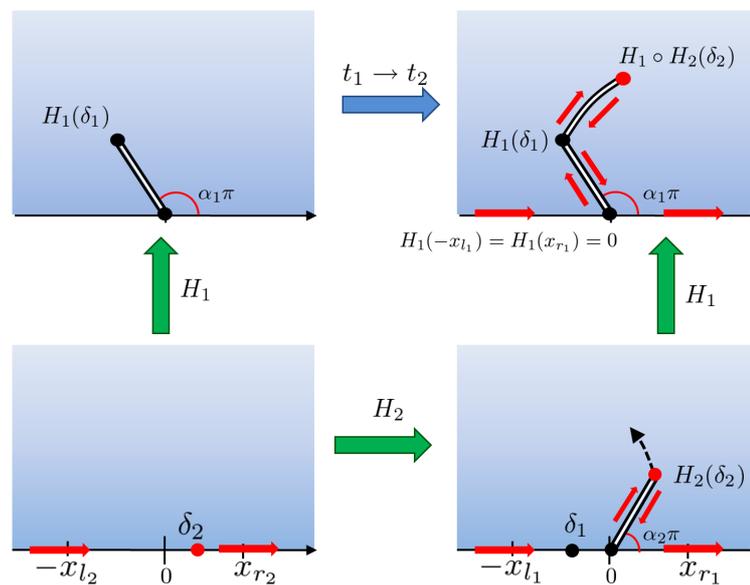


図 3.3: 反復写像による折れ線の生成と発展.

ここで注意する点として，反復写像によって生成されるのは斜めスリットである線分と線分のつなぎ合わせである折れ線が生成されるのではなく曲線と線分とのつなぎ合わせが生成されるという点である．なぜなら  $H_k$  は線分を生成する写像であるが，その線分をさらに  $H$  によって写像すると一般的に曲線として写されるからである (図 3.3)．ここで得られた曲線のつなぎ合わせはパラメータ  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  と時間間隔  $(\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n)$  によって決定される曲線である．曲線を得るには一番最初の複素平面上の実軸にそって反復写像を施せばよい．また一番最初の複素平面上の実軸上で得られる曲線の各頂点に対応する点の分布はパラメータ  $\alpha_k$  と時間間隔  $\Delta_k$  によって与えられ，得られる曲線と 1 対 1 対応する．

### 3.4 ランダムウォークで駆動される反復 Schwarz-Christoffel 変換とその SLE との対応

ここではある時間間隔  $\Delta_k$  を与えたとき反復 Schwarz-Christoffel 変換の駆動関数  $\delta_k$  を離散確率変数として (3.10) 式によってパラメータ  $\alpha_k$  が確率的に変動するモデルを考える. 駆動確率変数  $\delta_k$  は反復 Schwarz-Christoffel 変換によって曲線のつなぎ合わせである各頂点に対応する. ある確率過程に従う駆動関数  $\delta_k$  の離散的な運動が, 反復 Schwarz-Christoffel 変換によって複素平面上半面上にどのような点列として写像されるかを調べる.

準備として確率過程と反復 Schwarz-Christoffel 変換により生成される点列の本質的な関係を議論するため, 時間間隔を  $\Delta_k = 1$  とする. また反復写像を扱いやすくするため  $S_k(z) \equiv H_k(z + \delta_k)$  を定義する. よって (3.9) 式より,

$$S_k(z) = \left( z + 2\sqrt{\frac{1-\alpha_k}{\alpha_k}} \right)^{1-\alpha_k} \left( z - 2\sqrt{\frac{\alpha_k}{1-\alpha_k}} \right)^{\alpha_k} \quad (3.12)$$

となり点列は

$$\begin{aligned} z_n &= S_1 \circ S_2 \circ \cdots \circ S_{n-1} \circ S_n(0) \\ z_{n-1} &= S_1 \circ S_2 \circ \cdots \circ S_{n-1}(0) \\ &\vdots \\ z_2 &= S_1 \circ S_2(0) \\ z_1 &= S_1(0) \end{aligned}$$

と得られることになる.

ここでこの反復 Schwarz-Christoffel 変換が第2章で述べた, 分割を施し微小曲線を微小線分として近似し離散化した SLE との類似点より, 近似離散化した SLE と対応させることを考える. まず SLE としての条件のうち流体力学的条件と上半平面容量  $2t$  はすでに満たしており, 近似離散化での SLE の微小線分を消す共形写像  $f$  は  $h^{-1}$  と対応しており, Loewner 方程式も満たす. ところで SLE の駆動関数は

$$U_t = \sqrt{\kappa} B_t$$

であった. つまり共形写像  $S_k$  を SLE に対応させるには写像  $H_k$  の駆動関数  $\delta_k$  を時間間隔  $\Delta_k \rightarrow 0$  の極限で  $\sqrt{\kappa} B_t$  に収束するような確率過程に選ばばよい.

もともと  $\delta_k$  は (2.7) 式や (3.10) 式のように SLE の駆動関数の差分であった. 今, 時間間隔  $\Delta_k = 1, (k = 1, 2, \dots, n)$  と時間間隔を等間隔とおいているので  $\sqrt{\kappa} B_t$  に収束するような確率過程としてランダムウォークを選ぶことにする. よって駆動関数の増分  $\delta_k$  は

$$\delta_k = \pm\sqrt{\kappa} \quad (3.13)$$

となる．ただし符合は  $+1$  か  $-1$  かが等確率で起こる  $1/2$ -ベルヌーイ試行により決める．また (3.10) 式より， $\delta_k$  で決定されるパラメータ  $\alpha_k$  は

$$\alpha_k = \frac{1}{2} - \sigma_k \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\kappa}{16 + \kappa}}, \quad \sigma_k = \begin{cases} 1, & \delta_k > 0 \\ -1, & \delta_k < 0 \end{cases} \quad (3.14)$$

となる．このときの  $\alpha_k$  を  $\alpha_k = \alpha^{(\sigma_k)}$  と書くことにする．つまりパラメータ  $\kappa$  を固定した上で，時間間隔を等間隔とし駆動関数をランダムウォークに従うようにとったことで，斜めスリットを生成する Schwarz-Christoffel 変換のパラメータ  $\alpha_k$  が 2 値化されたことになる．そしてこのパラメータ  $\alpha^{(\sigma_k)}$  はランダムウォークによって決定し，その列  $(\alpha^{(\sigma_1)}, \alpha^{(\sigma_2)}, \dots, \alpha^{(\sigma_n)})$  はランダムウォークの経路に 1 対 1 対応することになる．よってランダムウォークの経路を記述する配置  $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$  と  $\mathbb{H}$  上の点列  $(z_1, z_2, \dots, z_n)$  とが 1 対 1 に対応することになる．このように駆動関数をランダムウォークに従う確率過程とし，それによってパラメータ  $\alpha_k$  を決定し得られた共形写像  $S_k$  によって反復写像して点列  $(z_1, z_2, \dots, z_n)$  を得るモデルをランダムウォークで駆動される反復 Schwarz-Christoffel 変換と呼ぶことにする．

ランダムウォークで駆動される反復 Schwarz-Christoffel 変換の解析的性質

[1] スケーリング性

(3.12) 式について，時間間隔  $\Delta_k = 1$  としたが， $\Delta_k = \Delta$  と一定にした場合の変換を

$$S_k^\Delta(z) = \left( z + 2\sqrt{\Delta} \sqrt{\frac{1 - \alpha_k}{\alpha_k}} \right)^{1 - \alpha_k} \left( z - 2\sqrt{\Delta} \sqrt{\frac{\alpha_k}{1 - \alpha_k}} \right)^{\alpha_k}$$

とおく．このとき次の関係が示せる．

$$S_1 \circ \dots \circ S_k(0) = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} S_1^\Delta \circ \dots \circ S_k^\Delta(0), \quad k = 2, 3, 4, \dots \quad (3.15)$$

ただし  $k = 1$  のときは  $S_1(0) = S_1^\Delta(0)/\sqrt{\Delta}$  .

[2] 極形式表示

(3.12) 式を極形式で表す．

まず次のように変数変換を施す．

$$\sqrt{\frac{\kappa}{16 + \kappa}} = \cos \theta, \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

すると (3.14) 式の  $\alpha_k$  は

$$\alpha_k = \frac{1}{2}(1 - \sigma_k \cos \theta) \quad (3.16)$$

と表せる .

$z = 2re^{i\phi}$ , ( $r > 0, 0 < \phi < \pi$ ) とすると,  $S^{(\sigma_k)}(z) \equiv S_k(z)$  は次の極形座標の形で与えられる .

$$S^{(\sigma_k)}(2re^{i\phi}) = R^{(\sigma_k)} \exp[i\Theta^{(\sigma_k)}] \quad (3.17)$$

ただし ,

$$R^{(\sigma_k)} = 2 \left( r^2 + 2\sigma_k \cot \frac{\theta}{2} r \cos \phi + \cot^2 \frac{\theta}{2} \right)^{\frac{1}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2}} \left( r^2 - 2\sigma_k \tan \frac{\theta}{2} r \cos \phi + \tan^2 \frac{\theta}{2} \right)^{\frac{1}{2} \sin^2 \frac{\theta}{2}} \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} \Theta^{(\sigma_k)} = \arccos \left( \frac{r \cos \phi + \sigma_k \cot \frac{\theta}{2}}{\sqrt{r^2 + 2\sigma_k \cot \frac{\theta}{2} r \cos \phi + \cot^2 \frac{\theta}{2}}} \right) \cos^2 \frac{\theta}{2} \\ + \arccos \left( \frac{r \cos \phi - \sigma_k \tan \frac{\theta}{2}}{\sqrt{r^2 - 2\sigma_k \tan \frac{\theta}{2} r \cos \phi + \tan^2 \frac{\theta}{2}}} \right) \sin^2 \frac{\theta}{2} \end{aligned} \quad (3.19)$$

である . さらに  $z = 2(x + iy)$  とすると  $r \cos \phi = x$ ,  $r^2 = y^2$  となるので,  $S^{(\sigma_k)}(z) = X^{(\sigma_k)} + iY^{(\sigma_k)}$  とおけば次のように実部  $X^{(\sigma_k)}$ , 虚部  $Y^{(\sigma_k)}$  を表せる .

$$\begin{aligned} X^{(\sigma_k)} = 2 \left( x^2 + y^2 + 2\sigma_k \cot \frac{\theta}{2} x + \cot^2 \frac{\theta}{2} \right)^{\frac{1}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2}} \left( x^2 + y^2 - 2\sigma_k \tan \frac{\theta}{2} x + \tan^2 \frac{\theta}{2} \right)^{\frac{1}{2} \sin^2 \frac{\theta}{2}} \\ \times \cos \left[ \arccos \left( \frac{x + \sigma_k \cot \frac{\theta}{2}}{\sqrt{r^2 + 2\sigma_k \cot \frac{\theta}{2} r \cos \phi + \cot^2 \frac{\theta}{2}}} \right) \cos^2 \frac{\theta}{2} \right. \\ \left. + \arccos \left( \frac{x - \sigma_k \tan \frac{\theta}{2}}{\sqrt{r^2 - 2\sigma_k \tan \frac{\theta}{2} r \cos \phi + \tan^2 \frac{\theta}{2}}} \right) \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} Y^{(\sigma_k)} = 2 \left( x^2 + y^2 + 2\sigma_k \cot \frac{\theta}{2} x + \cot^2 \frac{\theta}{2} \right)^{\frac{1}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2}} \left( x^2 + y^2 - 2\sigma_k \tan \frac{\theta}{2} x + \tan^2 \frac{\theta}{2} \right)^{\frac{1}{2} \sin^2 \frac{\theta}{2}} \\ \times \sin \left[ \arccos \left( \frac{x + \sigma_k \cot \frac{\theta}{2}}{\sqrt{r^2 + 2\sigma_k \cot \frac{\theta}{2} r \cos \phi + \cot^2 \frac{\theta}{2}}} \right) \cos^2 \frac{\theta}{2} \right. \\ \left. + \arccos \left( \frac{x - \sigma_k \tan \frac{\theta}{2}}{\sqrt{r^2 - 2\sigma_k \tan \frac{\theta}{2} r \cos \phi + \tan^2 \frac{\theta}{2}}} \right) \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] \end{aligned} \quad (3.21)$$

## 第4章 計算機シミュレーションによる反復 Schwarz-Christoffel 変換の折れ線解析

この章ではランダムウォークで駆動される反復 Schwarz-Christoffel 変換により生成された点列を結んで得られる折れ線の統計的性質を調べる．特にそのパラメータ  $\kappa$  依存性を計算機シミュレーションによって解析した結果を報告する．

### 4.1 ランダムウォークで駆動される反復 Schwarz-Christoffel 変換で生成される折れ線の定性的性質

ランダムウォークで駆動される反復 Schwarz-Christoffel 変換によって生成される点列が，パラメータ  $\kappa$  の値によってどのような振る舞いを示すか，まずは定性的な結果を示す．ランダムウォークの経路とそれによって生成される折れ線の対応を見るため 4 ステップで取りうるすべてのランダムウォークの経路（図 4.1）に対して生成される折れ線を重ねて表示させたものが図 4.2，図 4.3 である．

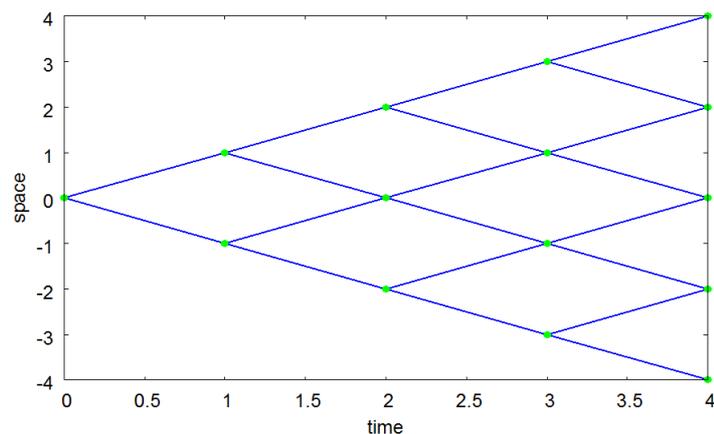


図 4.1: 時空 2 次元上のランダムウォークの経路が描かれる格子.

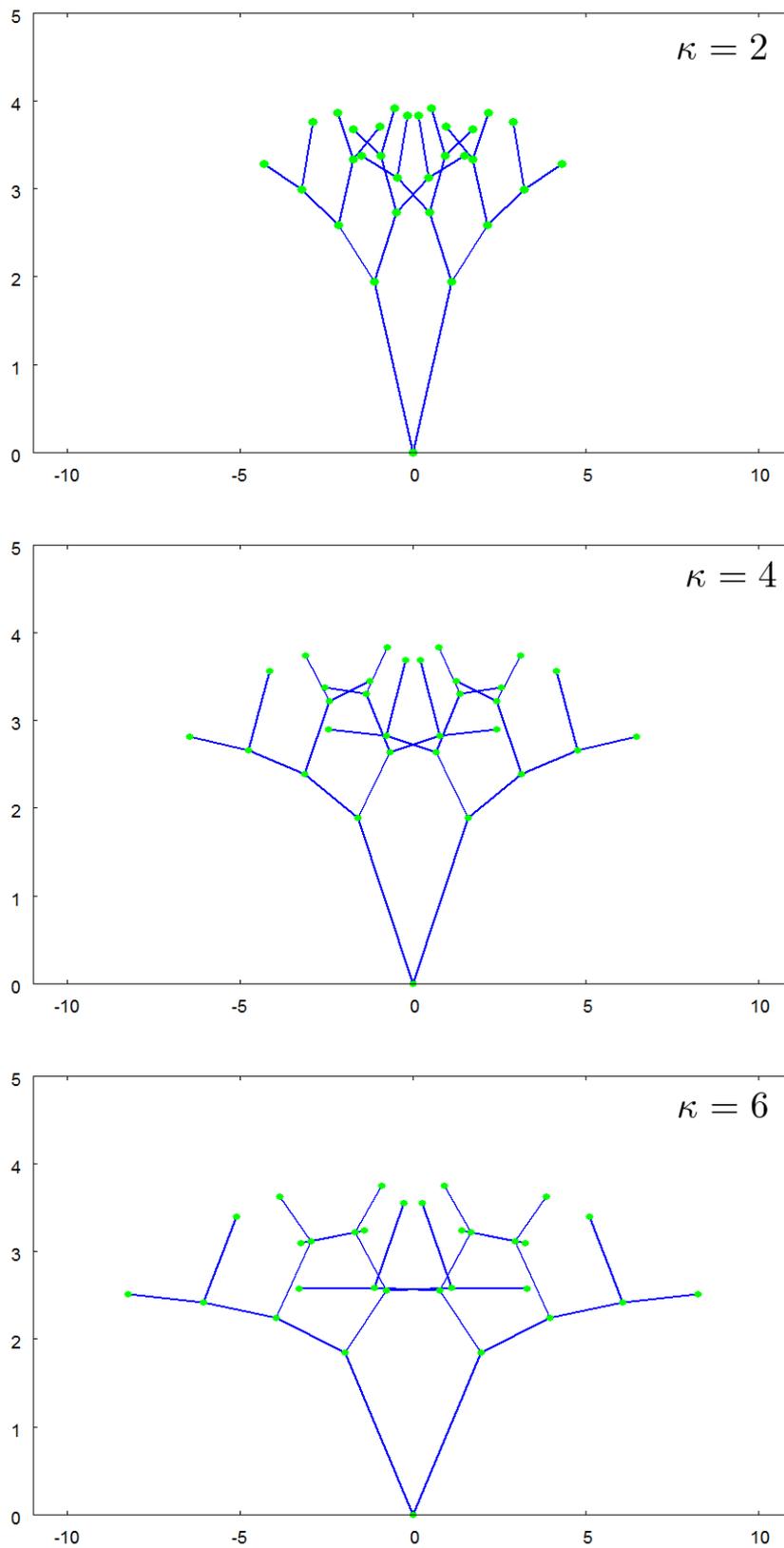


図 4.2: 4ステップの全てのランダムウォークの経路に対応する  $\mathbb{H}$  上の折れ線 .  $\kappa$  が 2, 4, 6 の場合

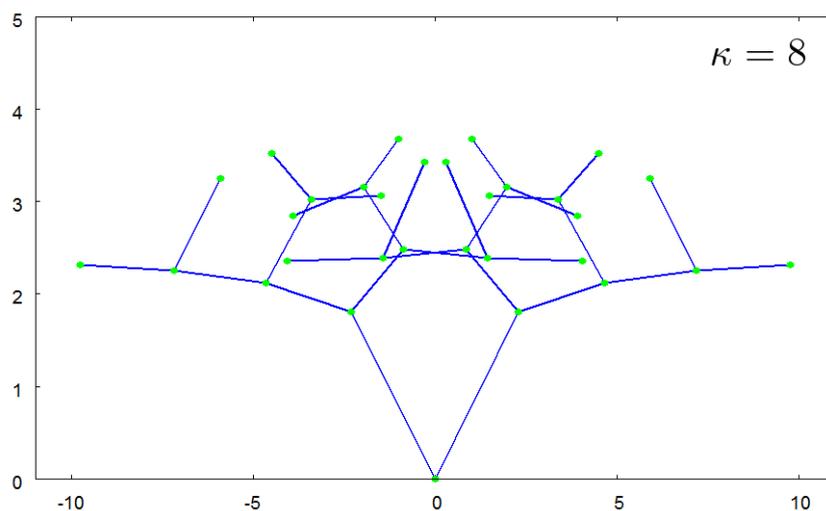


図 4.3: 4 ステップの全てのランダムウォークの経路に対応する  $\mathbb{H}$  折れ線.  $\kappa$  が 8 の場合

ランダムウォークの経路と反復 Schwarz-Christoffel 変換によって得られる折れ線が 1 対 1 対応しているのでランダムウォークの時空間上の正方格子 (図 4.1) そのものが変換されたとも考えられる. そのような視点で見れば, 反復 Schwarz-Christoffel 変換によってランダムウォークの格子が歪んでいく様子がわかる.  $\kappa$  の値が大きくなるほど, その歪みが大きくなっている. さらにステップ数を増やした場合は, 生成される折れ線は  $\kappa$  の違いによってさらに大きく変化する. 図 4.2 は折れ線に使用した 20 ステップのランダムウォークの経路である. このランダムウォークによって生成された折れ線が図 4.5 の赤

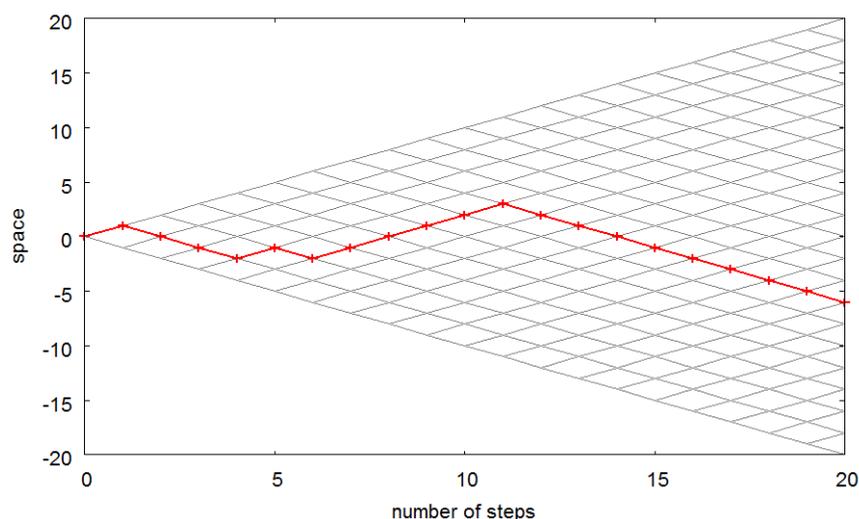


図 4.4: 折れ線の生成に使用したランダムウォークの経路.

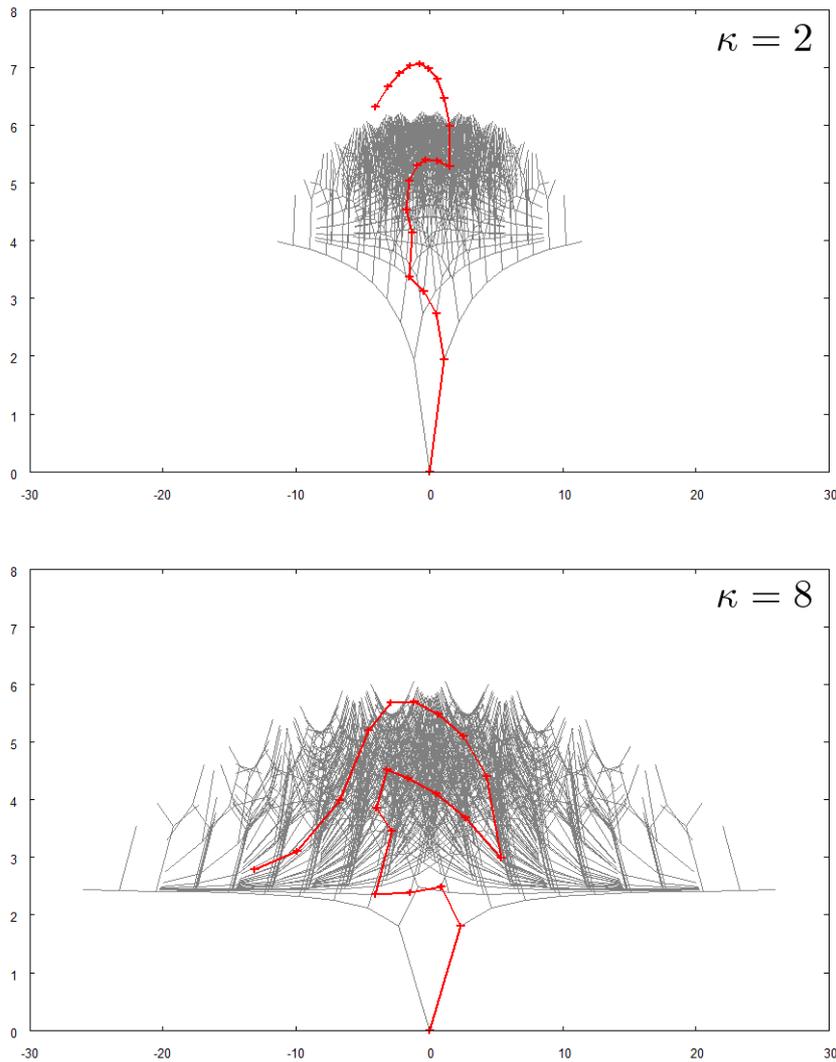


図 4.5: 図 4.4 で示した 20 ステップのランダムウォークの経路で駆動された反復 Schwarz-Christoffel 変換によって生成された  $\mathbb{H}$  上の折れ線．上が  $\kappa = 2$ ，下が  $\kappa = 8$  の場合．

い線（太線）である． $\kappa$  の違いでその様子は大きく変わる．また背景に描かれている灰色の線は，15 ステップにおけるすべての折れ線を表示したものである． $\kappa$  が大きいほど，その折れ線の集団は横に広がると同時に，その広がりの実軸からの高さが低くなっていく様子がわかる．

次に非常に大きいステップ数の時の折れ線の  $\kappa$  の違いによる全体的な定性変化がどうなるか調べた．ただし全体的な様子を見やすくするため，変換によって得られた点列に  $1/\sqrt{\text{ステップ数}}$  を乗じたものを使用した．これは (3.15) 式からもわかるように時間間隔を  $\Delta = 1/\text{ステップ数}$  としたことに相当し，また時刻  $t$  の範囲が  $[0, 1]$  で規格化されたことになる．図 4.6 は折れ線の生成に用いた 5 万ステップのランダムウォークの経路であり，

それによって生成された折れ線が図 4.7, 図 4.8 である.  $k$  が大きくなると折れ線が複雑になっていくと同時に, 折れ線が実軸に非常に接近する場合が出てきていることがわかる.

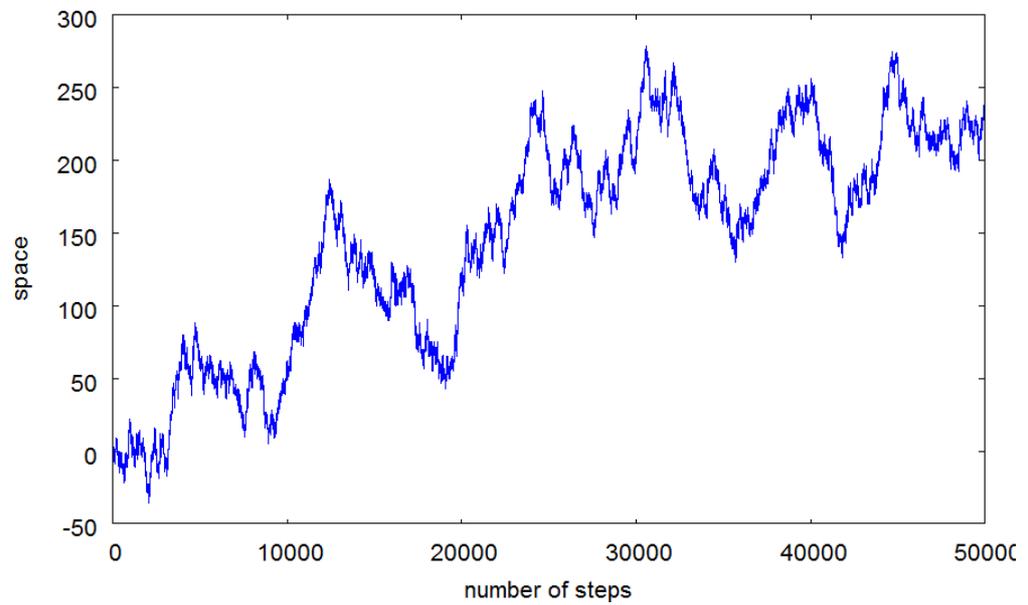


図 4.6: 生成に用いた 5 万ステップのランダムウォークの経路.

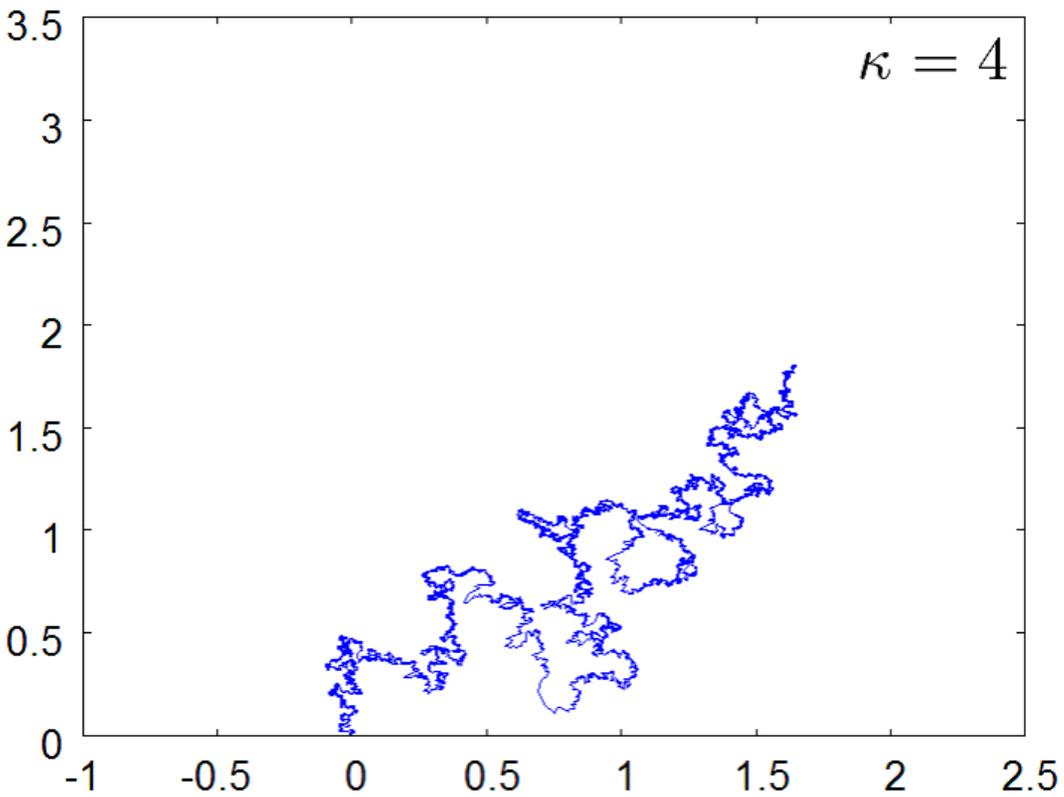
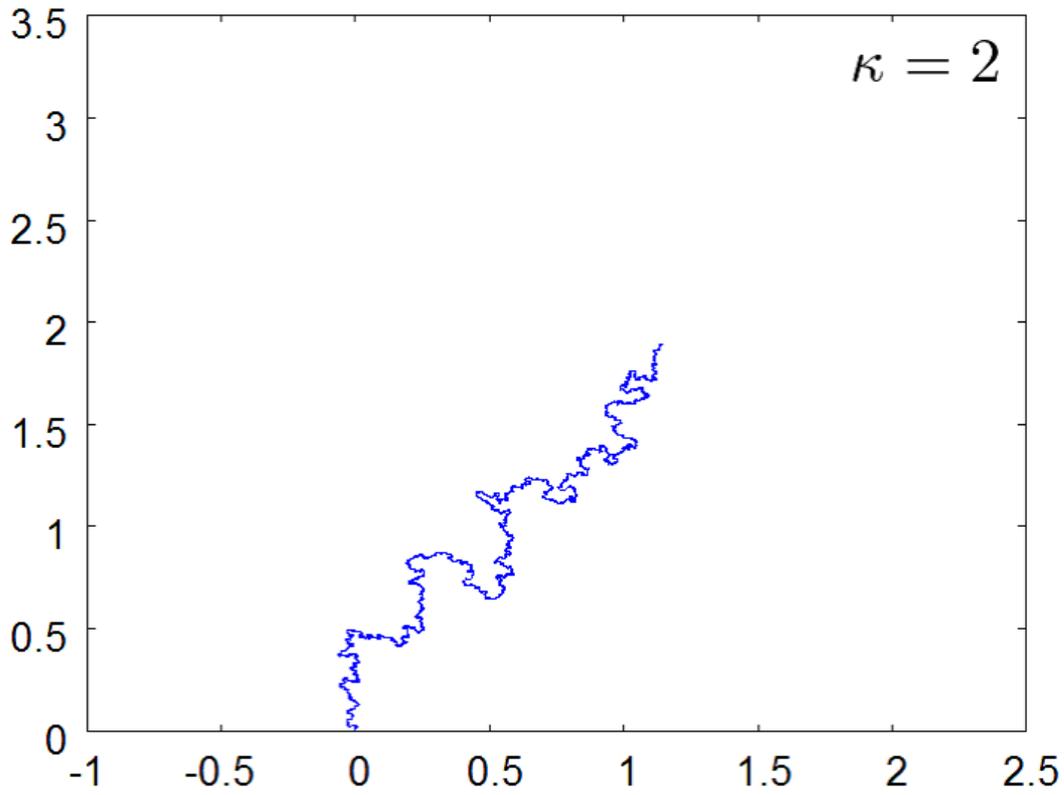


図 4.7: 図 4.6 で示された 5 万ステップのランダムウォーク経路で駆動された反復 Schwarz-Christoffel 変換による  $\mathbb{H}$  上の折れ線.  $\kappa$  が 2 と 4 の場合.

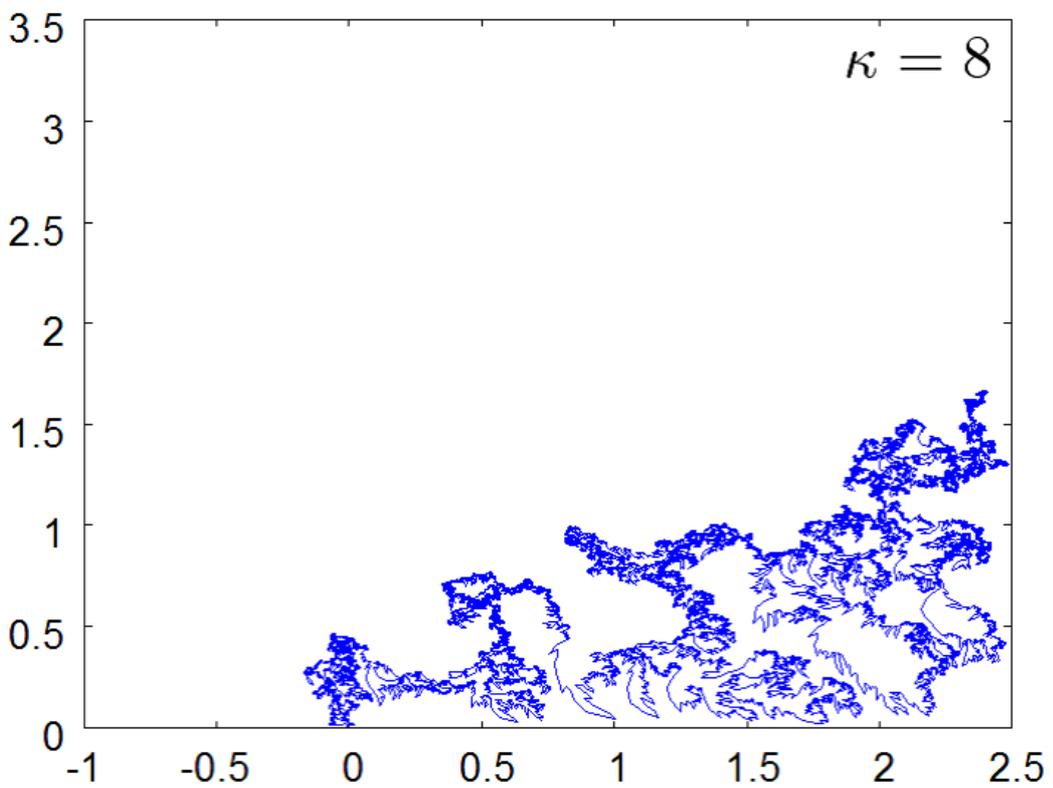
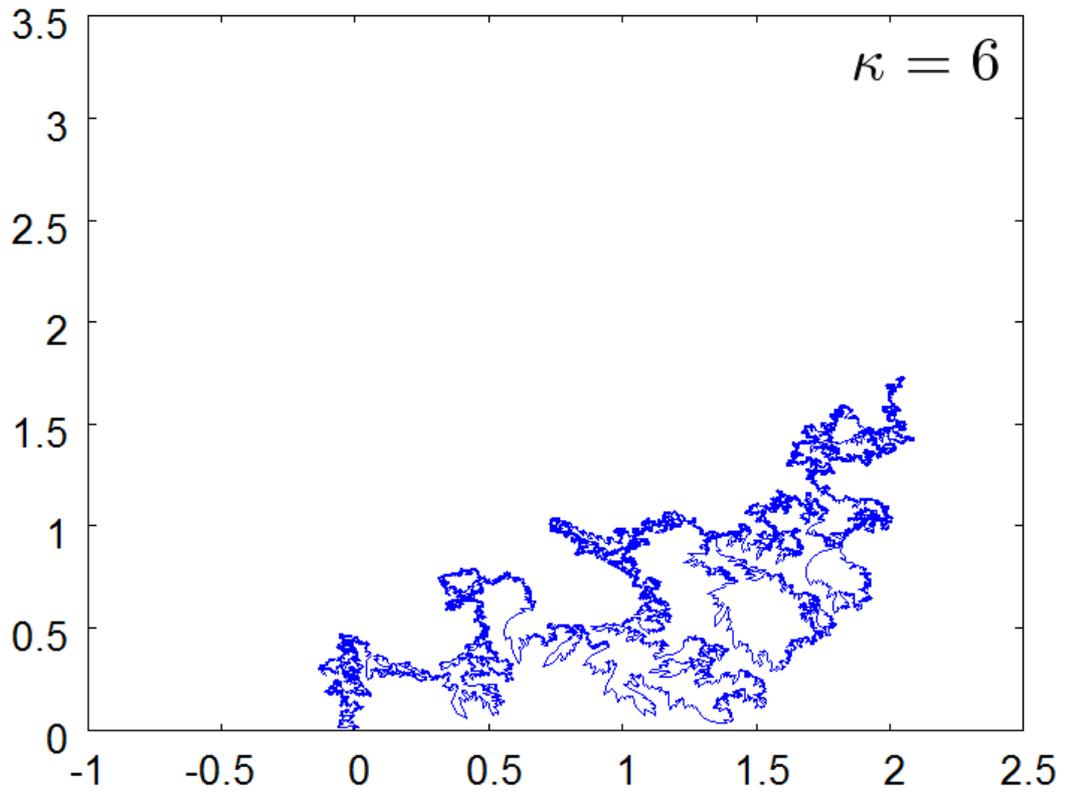


図 4.8: 図 4.6 で示された 5 万ステップのランダムウォーク経路で駆動された反復 Schwarz-Christoffel 変換による  $\mathbb{H}$  上の折れ線 .  $\kappa$  が 6 と 8 の場合 .

## 4.2 フラクタル次元解析

この節では計算機シミュレーションにより求めた折れ線のフラクタル次元のパラメータ  $\kappa$  による依存性について述べる．シミュレーションは各ステップ数のランダムウォークを 20 回生成しそのランダムウォークで生成された折れ線それぞれに対し，ボックス・カウント法によってフラクタル次元を求め，その平均値と最大値，最小値を求めた．ただし使用した折れ線は得られた点列に対して  $1/\sqrt{\text{ステップ数}}$  を乗じたものである．これは時刻  $t$  の範囲が  $[0, 1]$  で規格化されたことになるので生成した折れ線がステップ数が増えるにつれ離散系から連続系に近づくことになる．なおボックス・カウント法は，折れ線を白黒の画像データとしたものに対して適応した．図 4.9 はボックス・カウント法によりフラクタル次元となるべき指数を求めるためにボックスサイズに対してカウント数を両対数プロットしたものである．関係である． $\kappa$  の値に依らずすべて，ボックスサイズとカウント数の関係がべき関数でよくフィッティングされていることがわかる．

図 4.10 はフラクタル次元のステップ数依存性である．エラーバーは最大値と最小値であり，直線は平均値に対してフィッティングしたものである．一般的にステップ数が増加するにつれフラクタル次元が高くなっていることがわかった．特にパラメータ  $\kappa$  が大きいほうがその傾向が強い．

次に，得られた各ステップ数ごとにおけるフラクタル次元の平均値に対して直線によるフィッティングを施しその切片を求め，それをステップ数が無限大となるときにフラクタル次元として，そのパラメータ  $\kappa$  依存性プロットした（図 4.11）．連続での  $\text{SEL}_\kappa$  のフラクタル次元（Hausdorff 次元）が解析的に

$$d_f = \min\left(1 + \frac{\kappa}{8}, 2\right) \quad (4.1)$$

と求められている [8]．このフラクタル次元を連続系の理論値とすると， $\text{SLE}_\kappa$  の離散化として対応させた反復 Schwarz-Christoffel 変換で生成される折れ線のフラクタル次元はパラメータ  $\kappa$  が大きいほどステップ数による理論値のフラクタル次元への収束性が遅いということがわかった．この理由として，定性的には  $\kappa$  の値が小さいときに生成される折れ線は単純曲線であり，ステップ数の大小に関わらずその形は大きく変化しない．しかし  $\kappa$  が大きい場合その折れ線によってつくられる曲線は複雑であり，ステップ数が増すほど隙間が埋め尽くされていくが，平面を埋め尽くすにはステップ数を無限大にする必要があるからだと考えられる．

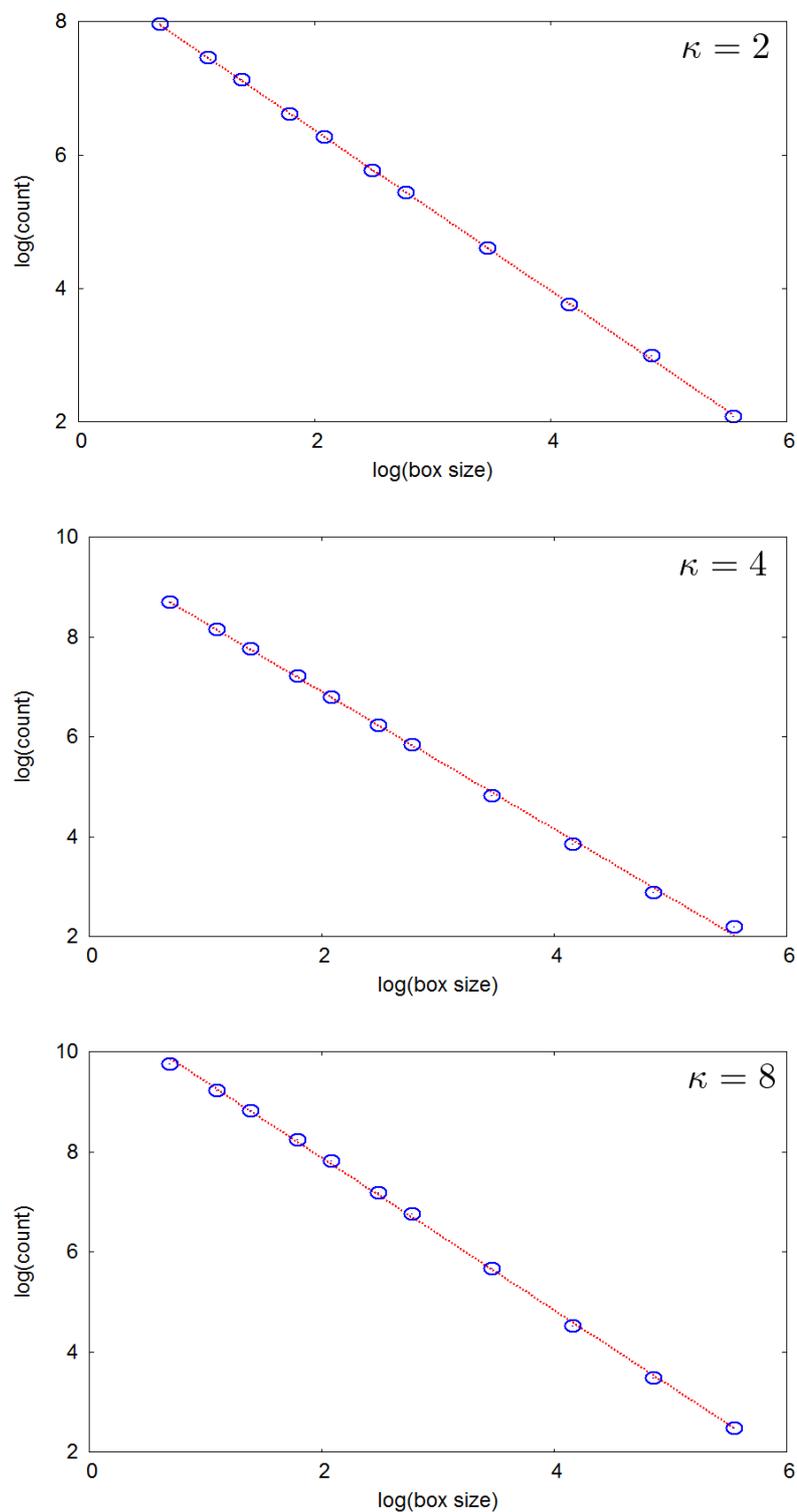


図 4.9: ボックス・カウント法におけるボックスサイズとボックスカウント数の両対数プロット. 上から  $\kappa = 2, 4, 8$  の場合 .

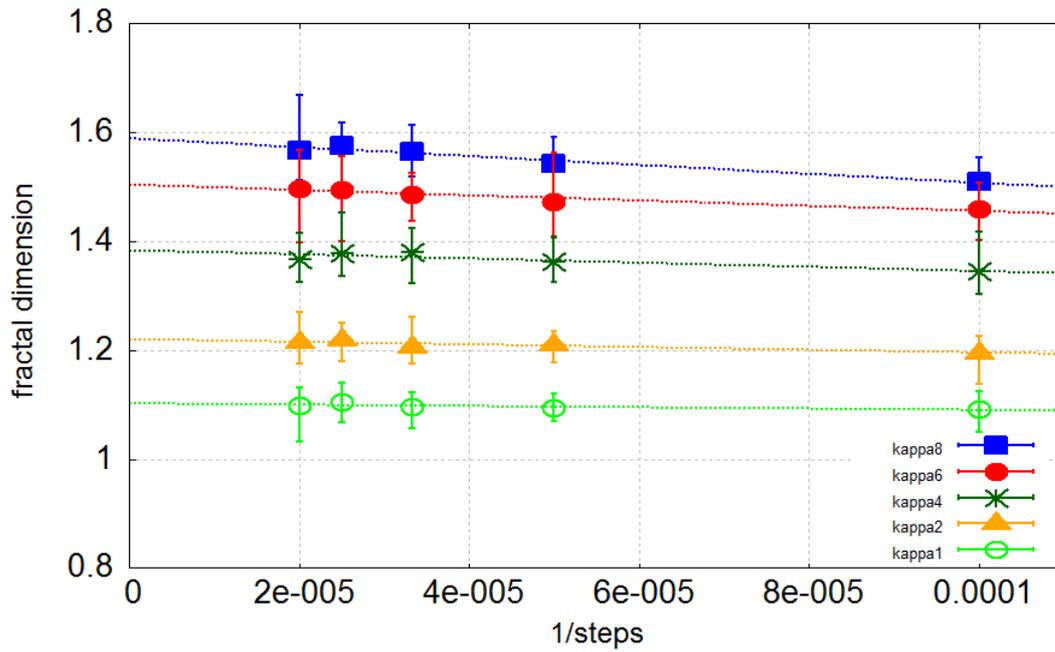


図 4.10: ステップ数によるフラクタル次元の変化.

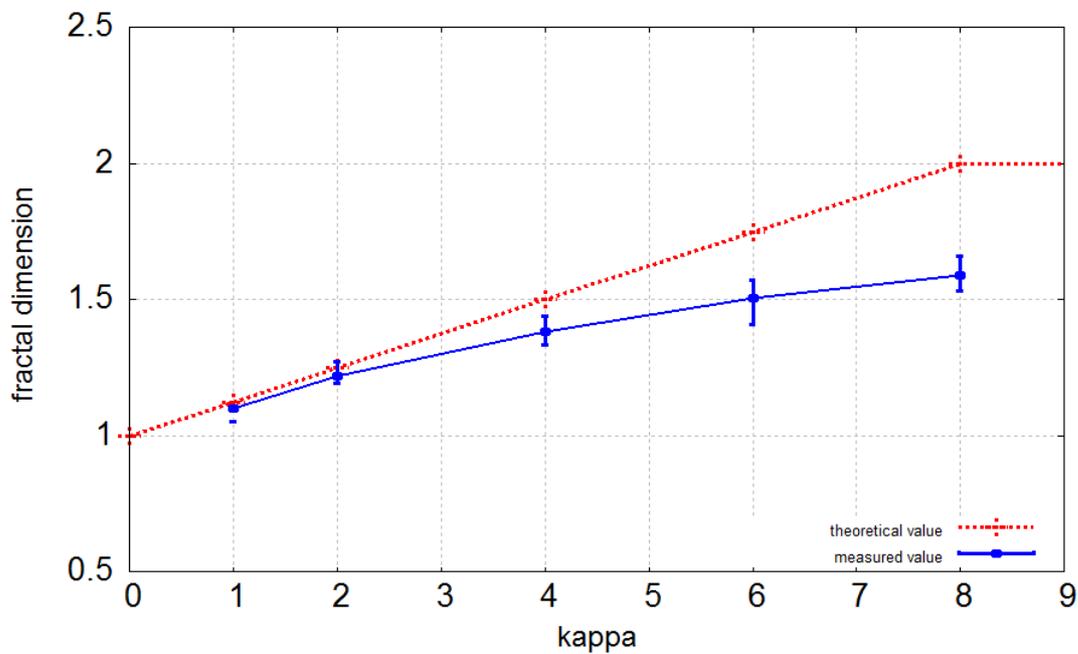


図 4.11: フラクタル次元の  $\kappa$  依存性.

### 4.3 高さ分布の解析

図 4.7, 図 4.8 を見てわかるように, 生成される折れ線はパラメータ  $\kappa$  が小さいときは単純な曲線として発展していったが,  $\kappa$  が大きくなるにつれて上下左右に大きく振れていることがわかる. 特に  $\kappa$  が 6 以上になると, 実軸により近づいている回数が増えていることがわかる. よってここでは複素平面上で生成される折れ線の各頂点の実軸からの高さの分布を調べた. シミュレーションは, フラクタル次元の解析のときと同様に折れ線は  $1/\sqrt{\text{ステップ数}}$  を乗じたものである. 折れ線の頂点の実軸からの高さを刻み 0.01 として累積分布をとりそれを 400 回試行し平均値を求めた. 高さの累積度数分布は  $\kappa$  が大きくなるほど高さの低い部分での度数が増しているのがわかる (図 4.12). 特に実軸に近い部分での振る舞いを見るため高さが 0.01 から 0.1 までの範囲でベキ関数によりフィッティングしその指数と係数を調べた.

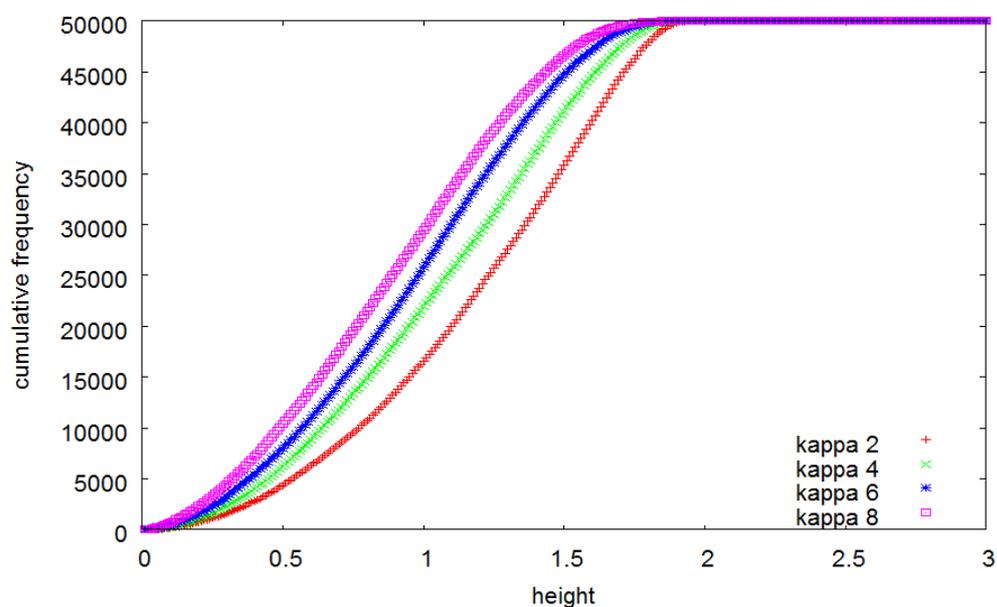


図 4.12: 高さの累積度数分布.

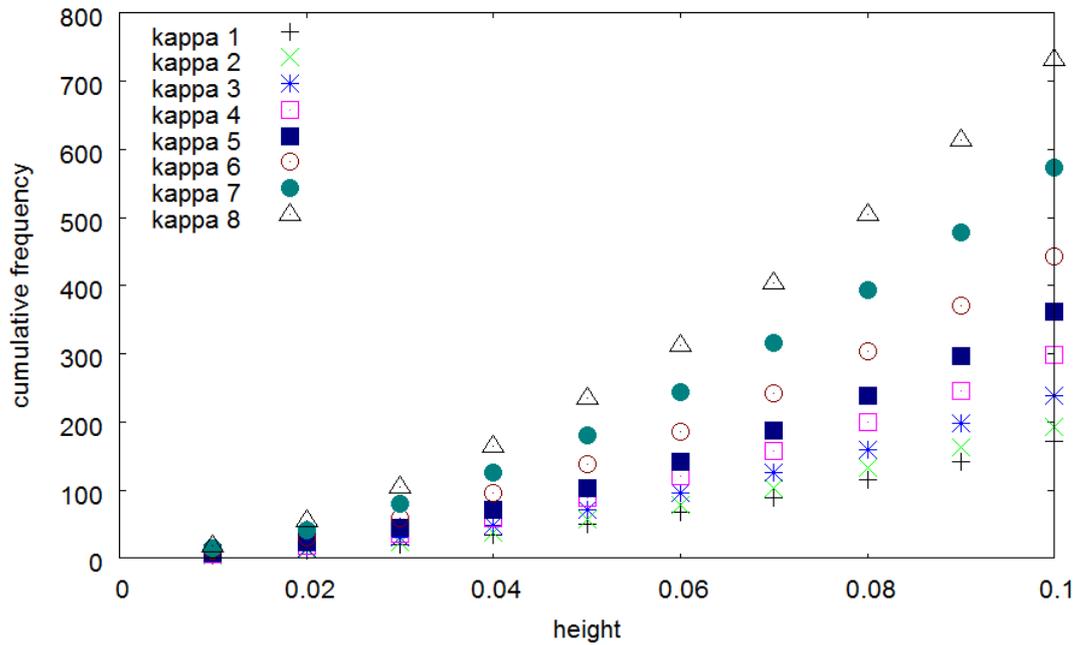


図 4.13: 高さの累積度数分布の実軸付近の様子.

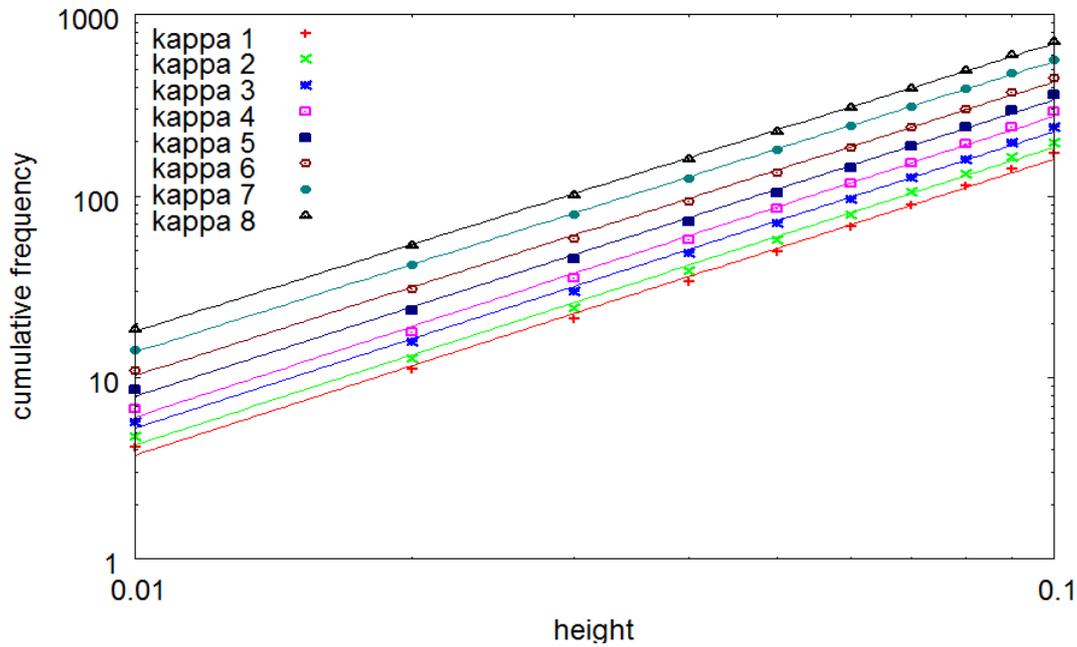


図 4.14: 両対数によるプロットとベキ関数によるフィッティング.

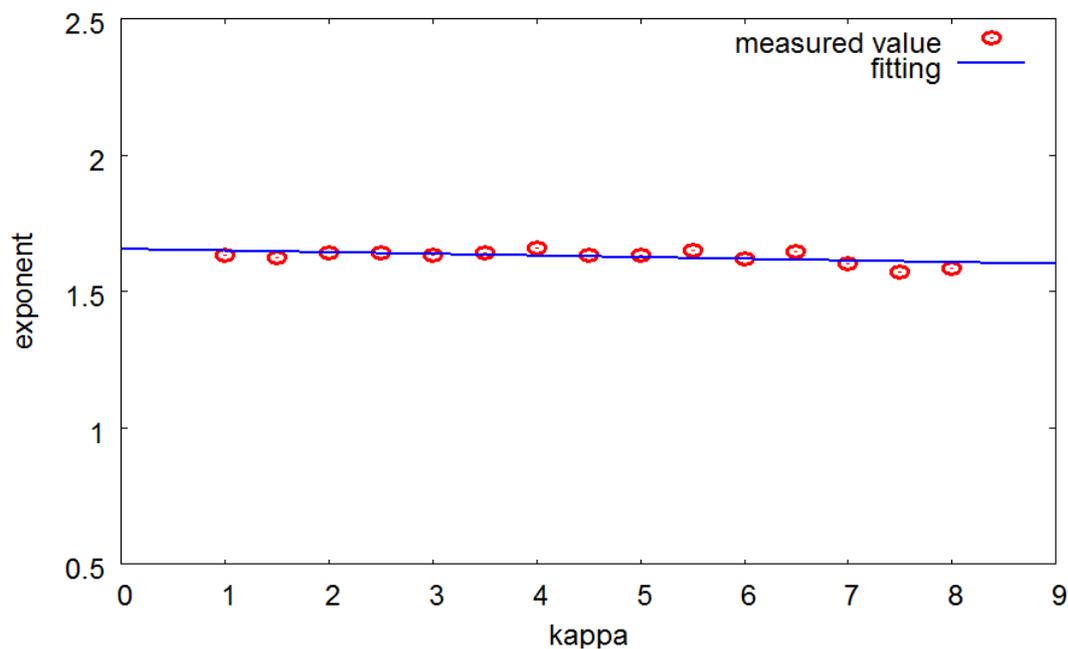


図 4.15: ベキ指数と  $\kappa$  依存性.

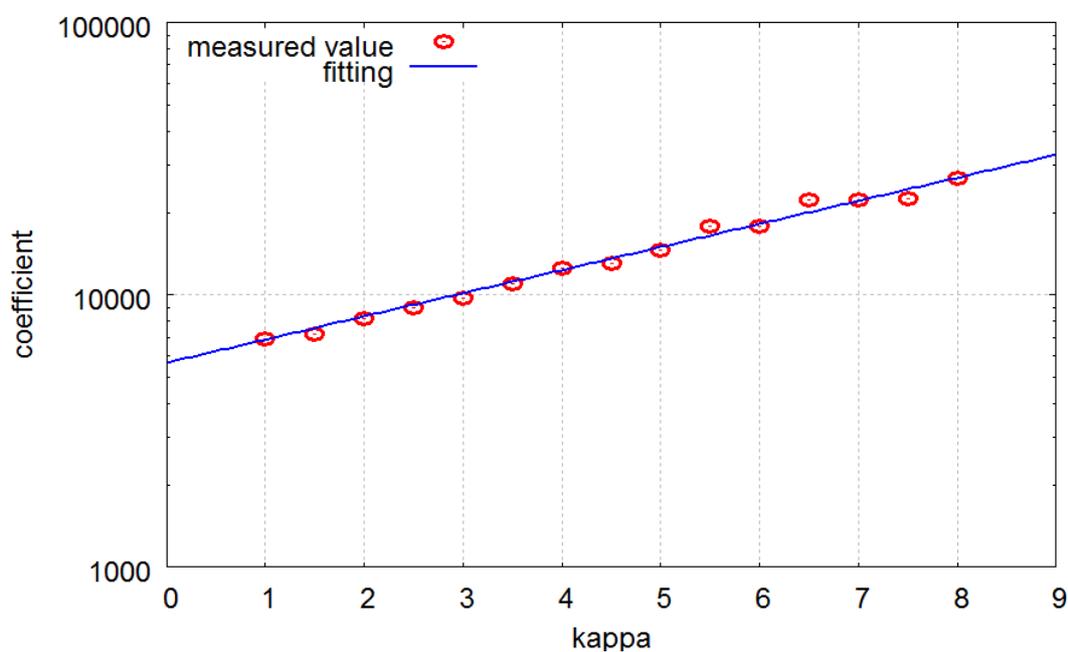


図 4.16: フィッティングを行ったベキ関数の係数と  $\kappa$  依存性 (方対数によるプロット)

ベキ指数と  $\kappa$  の関係として  $\kappa$  の変化に対してベキ指数は  $1.63 \pm 0.02$  とほぼ一定であった (図 4.15). それに対してベキ関数の係数と  $\kappa$  の関係は, おおよそ  $\kappa$  と係数の間に指数

関数の関係がみられる．つまり高さ  $h$  に対して累積分布関数  $P(\text{height} < h)$  は

$$P(\text{height} < h) \simeq c(\kappa)h^\alpha, \quad 0 < h \ll 1$$

と表せ，その指数値  $\alpha$  と  $\kappa$  の関数である  $c(\kappa)$  はそれぞれ

$$\alpha = 1.63 \pm 0.02$$

$$c(\kappa) = \exp[8.61 + 0.20\kappa]$$

である．

## 謝辞

本研究を進めるにあたり、指導教官の香取眞理教授には3年間ご多忙の中多くの助言や議論の時間を与えて頂きました。また先生からは研究テーマそのものに関することはもちろんのこと、研究に取り組む姿勢や進め方、成果のまとめ方など様々なことを学ばせて頂きました。深く感謝いたします。

松下貢教授には多くの研究者との交流の場を与えて頂きました。また進路の相談なども乗って頂いたり、その他にも様々なお話を下さり、いろいろと学ばせて頂きました。深く感謝いたします。

量子ウォーク模型の研究や論文の投稿を進めるにあたり、有益な助言や最新の研究報告などを数多く頂いた横浜国立大学の今野紀雄教授、東京工業大学の瀬川悦生氏に深く感謝いたします。

香取研究室の小林奈央樹氏には研究についての助言や計算機やプログラムの使い方等丁寧に教えて頂きました。深く感謝いたします。

香取研究室の先輩である渡部恭平氏、佐藤充規氏、和泉南氏には研究話題について教えて頂いたり、相談に乗って頂きました。深く感謝いたします。

同期である香取研究室の山崎純一君、松下研究室の殿村幸彦君、吉野哲雄君、久保陽平君、若林研究室の佐野朋哉君、甘楽雅和君には常に刺激を受けることができ研究を根気よく進めることができました。また互いに切磋琢磨することもできました。感謝いたします。

香取研究室の Andraus, Sergio さん、深澤朋広君、佐藤真喜子さん、副島佳緒里さんにはお世話になりました。感謝いたします。



## 参考文献

- [1] 香取眞理, 日本物理学会誌, **62**, 527-531 (2007).
- [2] O.Schramm, Israel J.Math. **118**, 221-228 (2000).
- [3] 田崎晴明, 数理科学, **546** 13-19,(2008年12月), サイエンス社.
- [4] G. Lawler, O. Schramm, and W. Werner, Ann. Probab. **32**, 939-995 (2004).
- [5] S. Smirnov, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I. Math. **333**, 239-244 (2001).
- [6] T. Kennedy, J. Stat. Phys. **128**, 1125-1137 (2007).
- [7] T. Kennedy, J. Stat. Phys. **137**, 839-856 (2009).
- [8] V. Beffara, Ann. Probab. **36**, 1421-1452 (2008).