

偏微分方程式を用いた
Schramm-Loewner 発展の解析

Analysis of the Schramm-Loewner evolution
using partial differential equations

2022年2月28日

中央大学大学院理工学研究科物理学専攻
博士課程前期課程2年

高山大河

概要

Schramm-Loewner 発展 (Schramm-Loewner evolution, SLE_κ) は、ランダムな平面フラクタル曲線の 1 パラメータ族であり、複素関数論の Loewner 微分方程式の駆動関数にブラウン運動を用いることで Schramm[1] によって提案された。 SLE_κ はパラメータ $\kappa > 0$ を持っており、 SLE_κ 曲線の振る舞いは $0 < \kappa \leq 4$, $4 < \kappa < 8$, $\kappa \geq 8$ の 3 相で異なる特徴を持つ。また、 SLE_κ は 2 次元統計物理学の幾つかの離散モデルに対する連続極限を記述できることが知られている。

先行研究である Lyons-Margarint-Nejad[2] では、複素上半平面 \mathbb{H} での backward chordal SLE_κ に対して、ランダム時間変換を行うことで得られる 1 次元確率微分方程式の定常分布を、偏微分方程式を用いて導いた。その定常密度関数は、 $\kappa = 8$ において可積分から非可積分へと相転移する。これは、 $\kappa = 8$ において非空間充填曲線から空間充填曲線となる SLE_κ 曲線の振る舞いの変化に対応している。

本研究では、同様の偏微分方程式から密度関数の時間依存性を調べることを目的とした。結果として、 $\kappa = 4, 8$ での相転移を動的に捉えることはできなかった。しかし、偏微分方程式に対して Liouville 変換を行うことで、 $\kappa = 2$ でポテンシャルの挙動に変化があることを確認した。ここで、 $\kappa = 2$ において SLE_κ は loop-erased random walk の連続極限に対応している。loop-erased random walk は Schramm が SLE_κ を導入したきっかけとなった確率モデルであり、 SLE_κ 理論の研究において重要なモデルの 1 つである。そのことから、 $\kappa = 2$ においてポテンシャルの挙動に変化が起こったことには、特別な意味があると予想される。

目次

1	Introduction	3
1.1	Schramm-Loewner 発展	3
1.2	先行研究	5
2	確率過程 T_u の確率微分方程式に対する Kolmogorov 前進方程式	12
2.1	随伴演算子 \mathcal{G}^* に対する固有値問題	12
2.2	固有値方程式に対する Liouville 変換	12
2.3	Schrödinger 型の固有値方程式の $\lambda = 0$ での解	14
2.4	ポテンシャル $q(s)$ の κ 依存性	16
2.5	変数変換したポテンシャル $\tilde{q}(\theta)$ の κ 依存性	18
3	まとめ	23

1 Introduction

1.1 Schramm-Loewner 発展

複素上半平面を $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}z > 0\}$ と書く. ただし, \mathbb{C} は複素平面を表す. 曲線 γ を原点を出発点として時間 $t \in [0, \infty)$ と共に単調に伸びていく単純曲線

$$\gamma = \gamma[0, t], \quad t \in [0, \infty) \quad (1.1)$$

とする. ただし, $\gamma(0, \infty) \in \mathbb{H}$ である. ここで, g_t を $\mathbb{H} \setminus \gamma(0, t] \rightarrow \mathbb{H}$ の共形変換とすると, $g_t(z)$ は次の Loewner 微分方程式に従う.

$$\frac{\partial}{\partial t} g_t(z) = \frac{2}{g_t(z) - U_t}, \quad g_0(z) = z. \quad (1.2)$$

ただし, U_t は Loewner 微分方程式の駆動関数であり, $U_t = g_t(\gamma(t))$ である.

Schramm は, Loewner 微分方程式 (1.2) の駆動関数を,

$$U_t = \sqrt{\kappa} B_t, \quad \kappa > 0 \quad (1.3)$$

とした. ただし, B_t は 1 次元標準ブラウン運動である. つまり,

$$\frac{\partial}{\partial t} g_t(z) = \frac{2}{g_t(z) - \sqrt{\kappa} B_t}, \quad g_0(z) = z, \quad z \in \mathbb{H}. \quad (1.4)$$

この初期値問題の解として得られる共形変換の族 $\{g_t\}_{t \geq 0}$ を chordal Schramm-Loewner 発展 (Schramm-Loewner evolution) と呼び, パラメータ κ を付して SLE_κ と略記する. また, (1.4) を複素上半平面 \mathbb{H} での chordal SLE_κ に対する前進微分方程式とする. この時, $\gamma(0) = 0$ とし, $t > 0$ に対して $\gamma(t)$ を

$$\sqrt{\kappa} B_t = g_t(\gamma(t)) \quad (1.5)$$

によって定義する. すると, $\gamma[0, t]$ は一般には単純曲線ではないが, t に関して連続曲線を与えることが証明されており, $\gamma[0, t]$ を SLE_κ 曲線と呼ぶ. また, SLE_κ 曲線の振る舞いは $0 < \kappa \leq 4$, $4 < \kappa < 8$, $\kappa \geq 8$ の 3 相で異なる特徴を持つ. この SLE_κ 曲線の 3 相は図 1 の通りである. まず, $0 < \kappa \leq 4$ の時, SLE_κ 曲線は単純曲線となる. 次に, $4 < \kappa < 8$ の時, SLE_κ 曲線は自分自身や実軸と接することはあるが交わることはない曲線となる. ただし, 曲線が伸びていくにつれ, 曲線で囲まれた領域は複素上半平面 \mathbb{H} を覆いつくしていき, 曲線自身で \mathbb{H} が埋めつくされることはない. そして, $\kappa \geq 8$ の時, 複素上半平面 \mathbb{H} を埋めつくしていく曲線となる.

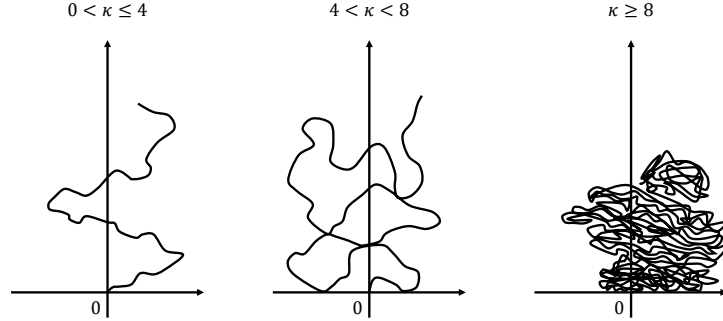


図 1: $0 < \kappa \leq 4$, $4 < \kappa < 8$, $\kappa \geq 8$ での SLE_κ 曲線の様子

また, SLE_κ は 2 次元格子上的統計物理モデルの連続極限と次の様に対応していることが知られている [6, 7].

$\kappa = 2$	\iff	loop-erased random walk
$\kappa = \frac{8}{3}$	\iff	self-avoiding walk
$\kappa = 3$	\iff	臨界 Ising 界面曲線
$\kappa = 4$	\iff	臨界 4 状態 Potts 模型
$\kappa = \frac{24}{5}$	\iff	臨界 3 状態 Potts 模型
$\kappa = \frac{16}{3}$	\iff	臨界 Ising 模型
$\kappa = 6$	\iff	臨界浸透探索過程
$\kappa = 8$	\iff	uniform spanning tree

ここで, q 状態 Potts 模型は, $q = 2$ が Ising 模型, $q = 1$ が浸透探索過程, $q = 0$ が uniform spanning tree にそれぞれ対応する. ただし, κ と q の対応は,

$$q = 2 + 2 \cos\left(\frac{8\pi}{\kappa}\right), \quad 4 \leq \kappa \leq 8 \quad (1.6)$$

とされている [6].

また, (1.4) に対して時間反転を行うことで, 複素上半平面 \mathbb{H} での chordal $SLE_\kappa \{h_t\}_{t \geq 0}$

に対する後進微分方程式

$$\frac{\partial}{\partial t} h_t(z) = \frac{-2}{h_t(z) - \sqrt{\kappa} B_t}, \quad h_0(z) = z, \quad z \in \mathbb{H} \quad (1.7)$$

を得る.

1.2 先行研究

先行研究である Lyons-Margarint-Nejad[2] について簡単にまとめる. Lyons-Margarint-Nejad は, chordal SLE $_{\kappa}$ に対する後進微分方程式 (1.7) から, ある 1 次元拡散過程に対する確率微分方程式を得て, 偏微分方程式を用いてその定常密度関数を導いた. そして, その定常密度関数の $\kappa = 4, 8$ での相転移について議論した.

まず, (1.7) に対して,

$$z_t = x_t + \sqrt{-1}y_t = h_t(z) - \sqrt{\kappa}B_t, \quad z_0 = \sqrt{-1} \quad (1.8)$$

とおく. これを用いて (1.7) を次の様書き直す.

$$dz_t = \partial_t h_t(z) dt - \sqrt{\kappa} dB_t \quad (1.9)$$

$$= \frac{-2}{z_t} dt - \sqrt{\kappa} dB_t. \quad (1.10)$$

次に, 上式の両辺を実部と虚部に分けると,

$$dx_t + \sqrt{-1}dy_t = \left(\frac{-2x_t}{x_t^2 + y_t^2} dt - \sqrt{\kappa} dB_t \right) + \sqrt{-1} \frac{2y_t}{x_t^2 + y_t^2} dt. \quad (1.11)$$

よって, 両辺の実部と虚部を比較することで,

$$dx_t = \frac{-2x_t}{x_t^2 + y_t^2} dt - \sqrt{\kappa} dB_t, \quad dy_t = \frac{2y_t}{x_t^2 + y_t^2} dt \quad (1.12)$$

を得る.

ここで, 関数 $f(x, y) = \frac{x}{y}$ を考え, これに次の様に伊藤の公式を用いる.

$$df(x_t, y_t) = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial x_t} dx_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_t^2} (dx_t)^2 + \frac{\partial f}{\partial y_t} dy_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y_t^2} (dy_t)^2 \quad (1.13)$$

$$= -\frac{4x_t/y_t}{x_t^2 + y_t^2} dt - \frac{\sqrt{\kappa}}{y_t} dB_t. \quad (1.14)$$

ただし, 途中 $(dB_t)^2 = dt$ を用いた. この時, $D_t = \frac{x_t}{y_t}$ とおくと, この確率過程 D_t に対して次の確率微分方程式を得る.

$$dD_t = -\frac{4D_t}{x_t^2 + y_t^2} dt - \frac{\sqrt{\kappa}}{y_t} dB_t, \quad D_0 = 0. \quad (1.15)$$

ここで定義した D_t は $z_t = h_t(z) - \sqrt{\kappa}B_t$ の偏角の cotangent に相当する.

次に, ランダム時間変換を

$$\tilde{u}(s) = \int_0^s \frac{dt}{y_t^2} \quad (1.16)$$

と定義し,

$$c(u) = \inf\{s \geq 0 \mid \tilde{u}(s) \geq u\} \quad (1.17)$$

とする. この時, $c(u)$ の定義から,

$$\tilde{u}(c(u)) = \int_0^{c(u)} \frac{dt}{y_t^2} = u. \quad (1.18)$$

上式の真ん中の辺と右辺を u について微分すると,

$$\frac{d}{du} \int_0^{c(u)} \frac{dt}{y_t^2} = \frac{du}{du} \quad (1.19)$$

$$\implies \frac{dc(u)}{du} \frac{d}{dc(u)} \int_0^{c(u)} \frac{dt}{y_t^2} = 1 \quad (1.20)$$

$$\implies \frac{dc(u)}{du} \frac{1}{y_{c(u)}^2} = 1 \quad (1.21)$$

$$\implies dc(u) = y_{c(u)}^2 du. \quad (1.22)$$

また, ブラウン運動 B_t に対して,

$$\tilde{B}_u = \int_0^u \frac{dB_{c(r)}}{y_{c(r)}} \quad (1.23)$$

とする. ここで, \tilde{B}_u は 2 次変分 u のブラウン運動となる. よって, (1.15) にランダム時間変換 (1.16) を行うと,

$$dD_{c(u)} = -\frac{4D_{c(u)}}{x_{c(u)}^2 + y_{c(u)}^2} dc(u) - \frac{\sqrt{\kappa}}{y_{c(u)}} dB_{c(u)} \quad (1.24)$$

$$\implies \frac{dD_{c(u)}}{\sqrt{\kappa}} = -\frac{4D_{c(u)}/\sqrt{\kappa}}{1 + \kappa(D_{c(u)}/\sqrt{\kappa})^2} du - d\tilde{B}_u. \quad (1.25)$$

従って, 確率過程 $T_u := D_{c(u)}/\sqrt{\kappa}$, $u \geq 0$ が満たす確率微分方程式として,

$$dT_u = -\frac{4T_u}{1 + \kappa T_u^2} du + d\tilde{B}_u, \quad T_0 = 0 \quad (1.26)$$

を得る. ただし, ブラウン運動は左右対称であること, つまり $\tilde{B}_u = -\tilde{B}_u$ を用いた.

一方，確率微分方程式

$$dX_t = a(X_t)dB_t + b(X_t)dt \quad (1.27)$$

に対して，生成子 \mathcal{G} は

$$\mathcal{G}_x = \frac{1}{2}a(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2} + b(x)\frac{\partial}{\partial x} \quad (1.28)$$

で与えられる．ここで，時間間隔 t の間に x から y に遷移する確率密度関数を $p_t(x, y)$ と書くとする，Kolmogorov 後進方程式は

$$\frac{\partial}{\partial t}p_t(x, y) = \mathcal{G}_x p_t(x, y) \quad (1.29)$$

$$= \frac{1}{2}a(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}p_t(x, y) + b(x)\frac{\partial}{\partial x}p_t(x, y) \quad (1.30)$$

と書ける．この時，遷移確率密度関数 $p_t(x, y)$ は初期条件

$$\lim_{t \downarrow 0} p_t(x, y) = \delta(x - y) \quad (1.31)$$

を満たす解として与えられる．

また，生成子 \mathcal{G} の随伴演算子 \mathcal{G}^* は

$$\mathcal{G}_y^* = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}a(y) + \frac{\partial}{\partial y}b(y) \quad (1.32)$$

で与えられる．これに対して，Kolmogorov 前進方程式は

$$\frac{\partial}{\partial t}p_t(x, y) = \mathcal{G}_y^* p_t(x, y) \quad (1.33)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}[a(y)p_t(x, y)] + \frac{\partial}{\partial y}[b(y)p_t(x, y)] \quad (1.34)$$

と書ける．

よって，確率微分方程式 (1.26) に対する Kolmogorov 後進方程式および Kolmogorov 前進方程式はそれぞれ次の様に与えられる．

$$\frac{\partial}{\partial t}p_t(x, y) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}p_t(x, y) - \frac{4x}{1 + \kappa x^2}\frac{\partial}{\partial x}p_t(x, y), \quad (1.35)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}p_t(x, y) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}p_t(x, y) - \frac{\partial}{\partial y}\left[-\frac{4y}{1 + \kappa y^2}p_t(x, y)\right] \quad (1.36)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}p_t(x, y) + \frac{4y}{1 + \kappa y^2}\frac{\partial}{\partial y}p_t(x, y) + \frac{4(1 - \kappa y^2)}{(1 + \kappa y^2)^2}p_t(x, y). \quad (1.37)$$

ただし、初期条件はそれぞれ

$$\lim_{t \downarrow 0} p_t(x, y) = \delta(x) = \delta(y) \quad (1.38)$$

とする。ここで、Kolmogorov 前進方程式 (1.37) の定常解について考える。つまり、(1.37) において

$$\frac{\partial}{\partial t} p_t(x, y) = 0 \quad (1.39)$$

とした

$$\frac{1}{2} \frac{d^2}{dT^2} \rho(T) + \frac{4T}{1 + \kappa T^2} \frac{d}{dT} \rho(T) + \frac{4(1 - \kappa T^2)}{(1 + \kappa T^2)^2} \rho(T) = 0 \quad (1.40)$$

の解を求める。ただし、 $\rho(T)$ は確率過程 T_u に対する定常確率密度関数とする。ここで、 α, β, γ を複素定数として、Gamma 関数 $\Gamma(\cdot)$ 、Pochhammer 記号 $(\cdot)_k$ および超幾何関数 ${}_2F_1(\alpha, \beta, \gamma; z)$ をそれぞれ次のように定義する。

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt, \quad \operatorname{Re} z > 0, \quad (1.41)$$

$$(\cdot)_k = \begin{cases} 1, & k = 0, \\ \frac{\Gamma(\cdot+k)}{\Gamma(\cdot)}, & k > 0, \end{cases} \quad (1.42)$$

$${}_2F_1(\alpha, \beta, \gamma; z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\alpha)_k (\beta)_k}{(\gamma)_k k!} z^k. \quad (1.43)$$

これを用いて、微分方程式 (1.40) の $T = 0$ まわりでの解は、

$$\rho(T) = c_1 T (1 + \kappa T^2)^{-\frac{4}{\kappa}} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, -\frac{4}{\kappa}, \frac{3}{2}; -\kappa T^2\right) + c_2 (1 + \kappa T^2)^{-\frac{4}{\kappa}} \quad (1.44)$$

と書ける。一方、 $\rho(T)$ は定常確率密度関数であるため、非負である必要がある。しかし、一般解 (1.44) の第一項は奇関数であり、非負条件を満足しない。そのため、 $c_1 \equiv 0$ として確率過程 T_u に対する定常確率密度関数 $\rho(T)$ は次の通り得られる。

$$\rho(T) = C (1 + \kappa T^2)^{-\frac{4}{\kappa}}. \quad (1.45)$$

ただし、 C は規格化定数であり、次式で定まる。

$$C = \left(\int_{-\infty}^{\infty} (1 + \kappa T^2)^{-\frac{4}{\kappa}} dT \right)^{-1}. \quad (1.46)$$

次に、定常確率密度関数 (1.40) に対して、

$$T = -\frac{1}{\sqrt{\kappa} \tan \theta}, \quad \tilde{\rho}(\theta) = \rho\left(-\frac{1}{\sqrt{\kappa} \tan \theta}\right) \quad (1.47)$$

として、変数変換 $T \rightarrow \theta$ を行う。すると、

$$d\tilde{\rho}(\theta) = \rho\left(-\frac{1}{\sqrt{\kappa} \tan \theta}\right) d\left(-\frac{1}{\sqrt{\kappa} \tan \theta}\right) \quad (1.48)$$

$$= \frac{C}{\sqrt{\kappa}} \sin^{\frac{8}{\kappa}-2} \theta d\theta. \quad (1.49)$$

よって、 $z_t = h_t(z) - \sqrt{\kappa} B_t$ の偏角 θ を独立変数とする定常確率密度関数

$$\tilde{\rho}(\theta) = \tilde{C} \sin^{\frac{8}{\kappa}-2} \theta \quad (1.50)$$

を得る。ただし、 \tilde{C} は規格化定数であり、次式によって定まる。

$$\tilde{C} = \left(\int_0^\pi \sin^{\frac{8}{\kappa}-2} \theta d\theta \right)^{-1}. \quad (1.51)$$

ここで、 $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 < \kappa < 8$ に対して $\tilde{\rho}(\theta)$ をプロットすると、図2の通りとなる。また、 $\kappa = 1, 4, 7$ に対して $\tilde{\rho}(\theta)$, $\theta \in [0, \pi]$ をプロットすると、図3, 4, 5の通りとなる。

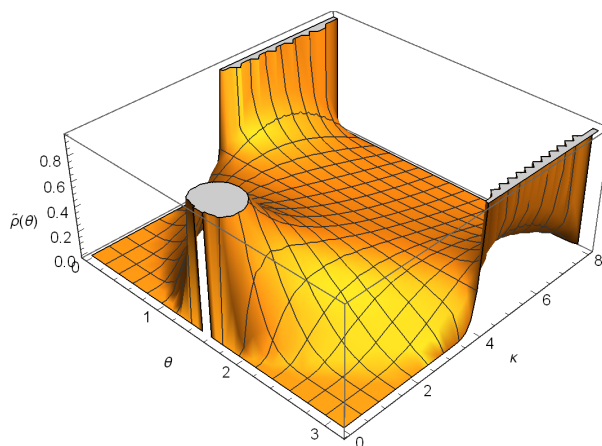


図 2: 定常確率密度関数 $\tilde{\rho}(\theta)$, $\theta \in [0, \pi]$, $\kappa \in (0, 8)$

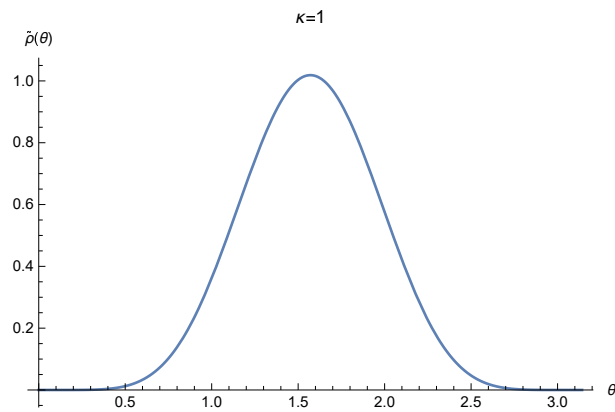


図 3: $\kappa = 1$ での定常確率密度関数 $\tilde{\rho}(\theta)$, $\theta \in [0, \pi]$

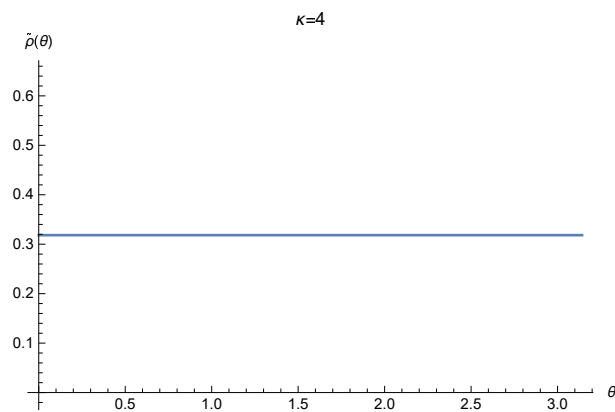


図 4: $\kappa = 4$ での定常確率密度関数 $\tilde{\rho}(\theta)$, $\theta \in [0, \pi]$

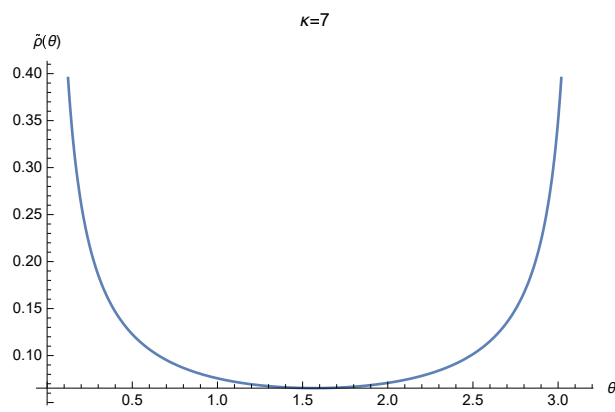


図 5: $\kappa = 7$ での定常確率密度関数 $\tilde{\rho}(\theta)$, $\theta \in [0, \pi]$

まず，図2, 3の通り， $0 < \kappa < 4$ の時， $\theta = 0, \pi$ で $\tilde{\rho}(\theta) = 0$ となり， $\tilde{\rho}(\theta)$ は $\theta = \frac{\pi}{2}$ にピークを持つ．次に，図4の通り， $\kappa = 4$ の時， $\tilde{\rho}(\theta)$ は θ に対して一様な分布となる．次に，図2, 5の通り， $4 < \kappa < 8$ の時， $\theta = 0, \pi$ で $\tilde{\rho}(\theta)$ は発散し， $\theta = \frac{\pi}{2}$ で最小値 $\tilde{\rho}(\theta) = 0$ をとる．そして， $8 \leq \kappa$ の時，規格化定数 \tilde{C} の逆数 \tilde{C}^{-1} は発散するため， $\tilde{\rho}(\theta)$ は規格化不可能である．つまり，定常密度関数 $\tilde{\rho}(\theta)$ は $[0, \pi]$ において， $0 < \kappa < 8$ では可積分， $8 \leq \kappa$ では非可積分となる．

ここで， SLE_κ 曲線の挙動は図1の様に $\kappa = 4, 8$ のそれぞれで相転移を起こすのであった．上の結果は，この SLE_κ 曲線の挙動の $\kappa = 4, 8$ での変化が，定常密度関数 $\tilde{\rho}(\theta)$ の $\kappa = 4$ での空間依存性の変化，および $\kappa = 8$ での可積分性の変化によって表されたことを意味する．

2 確率過程 T_u の確率微分方程式に対する Kolmogorov 前進方程式

2.1 随伴演算子 \mathcal{G}^* に対する固有値問題

随伴演算子 \mathcal{G}^* に対する次の固有値問題を考える.

$$\mathcal{G}^* u(y; \lambda) = -\lambda u(y; \lambda) \quad (2.1)$$

$$\implies \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} u(y; \lambda) + \frac{4y}{1 + \kappa y^2} \frac{\partial}{\partial y} u(y; \lambda) + \frac{4 - 4\kappa y^2}{(1 + \kappa y^2)^2} u(y; \lambda) = -\lambda u(y; \lambda). \quad (2.2)$$

これを満たす対 $(\lambda, u(y; \lambda))$ によって得られる

$$U(t, y; \lambda) = e^{-\lambda t} u(y; \lambda) \quad (2.3)$$

は確率過程 T_u の確率微分方程式に対する Kolmogorov 前進方程式 (1.37) を満たす. ここで, 対 $(\lambda, u(y; \lambda))$ が全て求まり, 固有値 λ が正に連続で分布していると仮定すると, それらを適当な重み関数 $\Lambda(\lambda)$ で積分したものの

$$q(t, y; \Lambda) = \int_0^\infty U(t, y; \lambda) \Lambda(\lambda) d\lambda \quad (2.4)$$

が確率過程 T_u の確率微分方程式に対する Kolmogorov 前進方程式 (1.37) の解となる. ただし, 重み関数 $\Lambda(\lambda)$ は初期条件

$$\lim_{t \rightarrow 0} q(t, y; \Lambda) = \int_0^\infty u(y; \lambda) \Lambda(\lambda) d\lambda = \delta(y) \quad (2.5)$$

を満たす様に定める.

2.2 固有値方程式に対する Liouville 変換

まず, 2階常微分作用素 L_f を次の通り定義する.

$$L_f = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dy^2} + \frac{4y}{1 + \kappa y^2} \frac{d}{dy} + \frac{4 - 4\kappa y^2}{(1 + \kappa y^2)^2} + \lambda. \quad (2.6)$$

この時, 解くべき固有値方程式 (2.2) は

$$L_f u(y; \lambda) = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dy^2} u(y; \lambda) + \frac{4y}{1 + \kappa y^2} \frac{d}{dy} u(y; \lambda) + \left[\frac{4 - 4\kappa y^2}{(1 + \kappa y^2)^2} + \lambda \right] u(y; \lambda) = 0 \quad (2.7)$$

と表せる．ここで， y の関数 $s(y)$ を

$$s(y) = \int_0^y \left(\frac{1}{2}\right)^{-1/2} dx = \sqrt{2}y \quad (2.8)$$

とおく．これにより y から $s(y)$ へと変数変換すると L_f は次で示す \tilde{L}_f へと変換される．

$$(\tilde{L}_f \tilde{u})(s(y); \lambda) = L_f(\tilde{u}(s(y); \lambda)) \quad (2.9)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{d^2}{dy^2} \tilde{u}(s(y); \lambda) + \frac{4y}{1 + \kappa y^2} \frac{d}{dy} \tilde{u}(s(y); \lambda) + \left[\frac{4 - 4\kappa y^2}{(1 + \kappa y^2)^2} + \lambda \right] \tilde{u}(s(y); \lambda) \quad (2.10)$$

$$= \frac{d^2}{ds^2} \tilde{u}(s(y); \lambda) + \frac{8s}{2 + \kappa s^2} \frac{d}{ds} \tilde{u}(s(y); \lambda) + \left[\frac{16 - 8\kappa s^2}{(2 + \kappa s^2)^2} + \lambda \right] \tilde{u}(s(y); \lambda). \quad (2.11)$$

ただし，

$$\tilde{u}(s(y); \lambda) = u(y; \lambda) \quad (2.12)$$

とした．次に， s の関数 $r(s)$ を

$$r(s) = \exp\left\{-\int_0^s \frac{4t}{2 + \kappa t^2} dt\right\} \quad (2.13)$$

$$= \left(1 + \frac{\kappa}{2}s^2\right)^{-2/\kappa} \quad (2.14)$$

とおく．ここで， $r(s)$ の 1 階微分は

$$\frac{d}{ds} r(s) = -\frac{4s}{2 + \kappa s^2} r(s) \quad (2.15)$$

であり，2 階微分は

$$\frac{d^2}{ds^2} r(s) = \frac{-8 + (16 + 4\kappa)s^2}{(2 + \kappa s^2)^2} r(s) \quad (2.16)$$

である．これを用いて \tilde{L}_f に対する相似変換 $r^{-1}\tilde{L}_f r$ を行う．すると，

$$\begin{aligned} & \left(r^{-1}\tilde{L}_f(r r^{-1}\tilde{u})\right)(s; \lambda) \\ &= r(s)^{-1} \left\{ \frac{d^2}{ds^2} [r(s)r^{-1}(s)\tilde{u}(s; \lambda)] + \frac{8s}{2 + \kappa s^2} \frac{d}{ds} [r(s)r^{-1}(s)\tilde{u}(s; \lambda)] \right. \\ & \quad \left. + \left[\frac{16 - 8\kappa s^2}{(2 + \kappa s^2)^2} + \lambda \right] r(s)r^{-1}(s)\tilde{u}(s; \lambda) \right\} \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$= \frac{d^2}{ds^2} (r^{-1}\tilde{u}(s; \lambda)) - \left[\frac{(16 + 4\kappa)s^2 - 8}{(2 + \kappa s^2)^2} - \lambda \right] (r^{-1}\tilde{u}(s; \lambda)) \quad (2.18)$$

を得る．よって， L_f から $r^{-1}\tilde{L}_f r$ への変換によって (2.7) は，

$$\left(r^{-1}\tilde{L}_f(r r^{-1}\tilde{u})\right)(s; \lambda) = \frac{d^2}{ds^2} (r^{-1}\tilde{u}(s; \lambda)) - \left[\frac{(16 + 4\kappa)s^2 - 8}{(2 + \kappa s^2)^2} - \lambda \right] (r^{-1}\tilde{u}(s; \lambda)) = 0 \quad (2.19)$$

の様に Schrödinger 型へと書き換えられる．

2.3 Schrödinger 型の固有値方程式の $\lambda = 0$ での解

先行研究の結果 (1.45) より,

$$u(y; 0) = C(1 + \kappa y^2)^{-4/\kappa}. \quad (2.20)$$

これに対して, 上と同様の変換を行うことで, Schrödinger 型に変形した固有値方程式 (2.19) の $\lambda = 0$ での解

$$r^{-1}\tilde{u}(s; 0) = C\left(1 + \frac{\kappa}{2}s^2\right)^{-2/\kappa} \quad (2.21)$$

を得る.

次に, 固有値方程式の $\lambda = 0$ での解 $r^{-1}\tilde{u}(s; 0)$ に対して,

$$s = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\kappa} \tan \theta}, \quad \tilde{\rho}_{\text{Sch}}(\theta) = r^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\kappa} \tan \theta}\right)\tilde{u}\left(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\kappa} \tan \theta}; 0\right) \quad (2.22)$$

として, $s \rightarrow \theta$ の変数変換を行う. すると,

$$d\tilde{\rho}_{\text{Sch}}(\theta) = r^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\kappa} \tan \theta}\right)\tilde{u}\left(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\kappa} \tan \theta}; 0\right)d\left(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\kappa} \tan \theta}\right) \quad (2.23)$$

$$= C\left[1 + \frac{\kappa}{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\kappa} \tan \theta}\right)^2\right]^{-\frac{2}{\kappa}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\kappa} \sin^2 \theta} d\theta \quad (2.24)$$

$$= \tilde{C} \sin^{\frac{4}{\kappa}-2} \theta d\theta \quad (2.25)$$

を得る. ただし, \tilde{C} は規格化定数であり, 次式によって定まる.

$$\tilde{C} = \frac{C\sqrt{2}}{\sqrt{\kappa}} = \left(\int_0^\pi \sin^{\frac{4}{\kappa}-2} \theta d\theta\right)^{-1}. \quad (2.26)$$

ここで, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 < \kappa < 4$ に対して $\tilde{\rho}_{\text{Sch}}(\theta)$ をプロットすると, 図6の通りとなる. また, $\kappa = 0.5, 2, 3.5$ に対して $\tilde{\rho}_{\text{Sch}}(\theta)$, $\theta \in [0, \pi]$ をプロットすると, 図7, 8, 9の通りとなる.

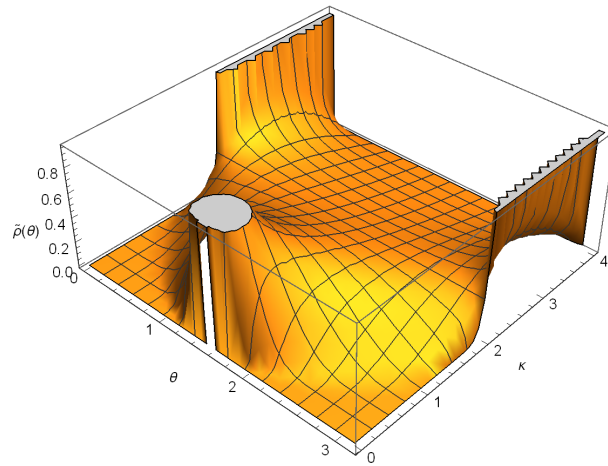


図 6: $\tilde{\rho}_{Sch}(\theta)$, $\theta \in [0, \pi]$, $\kappa \in (0, 4)$

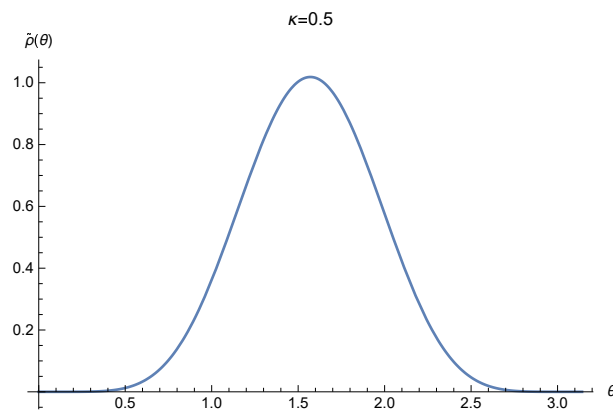


図 7: $\kappa = 0.5$ での $\tilde{\rho}_{Sch}(\theta)$, $\theta \in [0, \pi]$

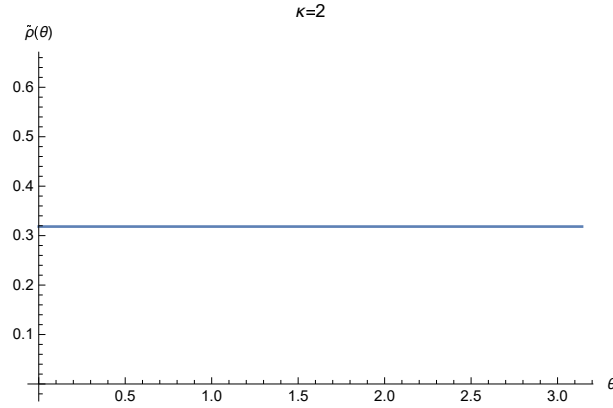


図 8: $\kappa = 2$ での $\tilde{\rho}_{\text{Sch}}(\theta)$, $\theta \in [0, \pi]$

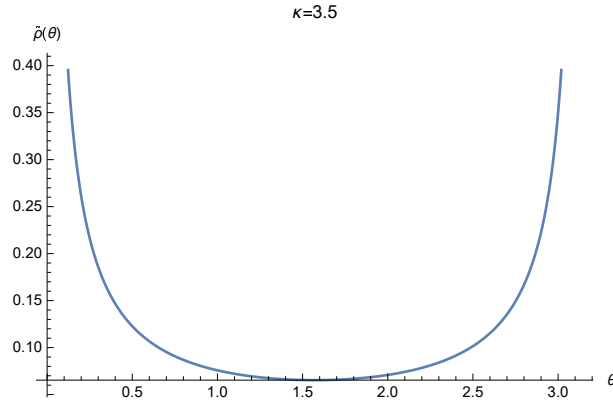


図 9: $\kappa = 3.5$ での $\tilde{\rho}_{\text{Sch}}(\theta)$, $\theta \in [0, \pi]$

まず, 図 6, 7 の通り, $0 < \kappa < 2$ の時, $\theta = 0, \pi$ で $\tilde{\rho}_{\text{Sch}}(\theta) = 0$ となり, $\tilde{\rho}_{\text{Sch}}(\theta)$ は $\theta = \frac{\pi}{2}$ にピークを持つ. 次に, 図 8 の通り, $\kappa = 2$ の時, $\tilde{\rho}_{\text{Sch}}(\theta)$ は θ に対して一様な分布となる. 次に, 図 6, 9 の通り, $2 < \kappa < 4$ の時, $\theta = 0, \pi$ で $\tilde{\rho}_{\text{Sch}}(\theta)$ は発散し, $\theta = \frac{\pi}{2}$ で最小値 $\tilde{\rho}_{\text{Sch}}(\theta) = 0$ をとる. そして, $4 \leq \kappa$ の時, 規格化定数 \tilde{C} の逆数 \tilde{C}^{-1} は発散するため, $\tilde{\rho}_{\text{Sch}}(\theta)$ は規格化不可能である. つまり, $\tilde{\rho}_{\text{Sch}}(\theta)$ は $[0, \pi]$ において, $0 < \kappa < 4$ では可積分, $4 \leq \kappa$ では非可積分となる.

2.4 ポテンシャル $q(s)$ の κ 依存性

Schrödinger 型に変形した固有値方程式 (2.19) のポテンシャル部分

$$q(s) = \frac{(16 + 4\kappa)s^2 - 8}{(2 + \kappa s^2)^2} \quad (2.27)$$

の κ 依存性を確認する. まず, $-5 \leq s \leq 5$, $0 < \kappa < 8$ に対して $q(s)$ をプロットすると, 図 10 の通りとなる. また, $\kappa = 1, 2, 7$ に対して $q(s)$, $s \in [-5, 5]$ をプロットすると, 図 11, 12, 13 の通りとなる.

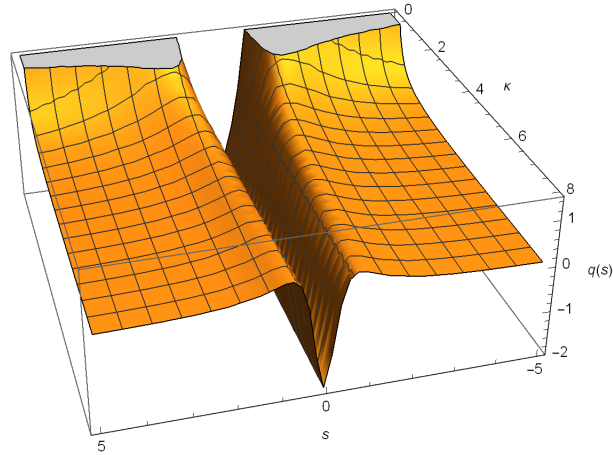


図 10: ポテンシャル $q(s)$, $s \in [-5, 5]$, $\kappa \in (0, 8)$

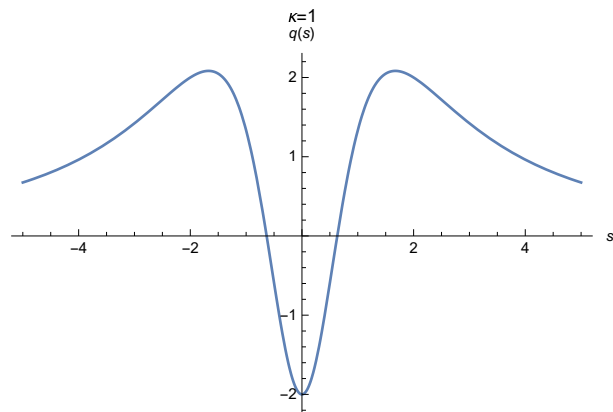


図 11: $\kappa = 1$ でのポテンシャル $q(s)$, $s \in [-5, 5]$

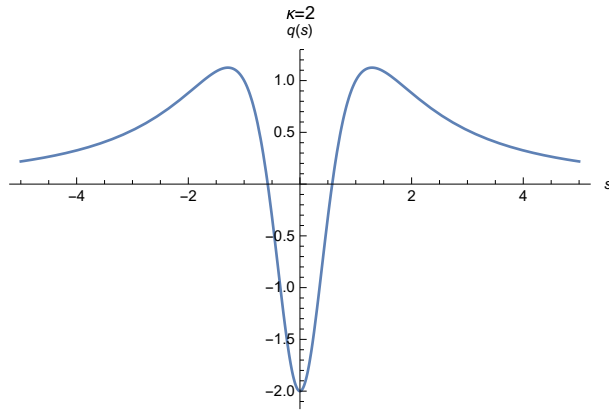


図 12: $\kappa = 2$ でのポテンシャル $q(s)$, $s \in [-5, 5]$

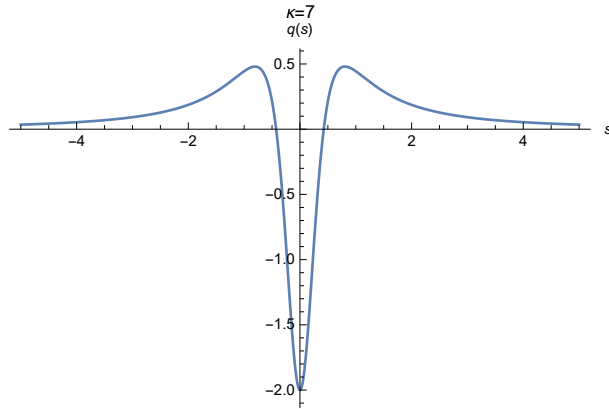


図 13: $\kappa = 7$ でのポテンシャル $q(s)$, $s \in [-5, 5]$

図 10, 11, 12, 13 の通り, いずれの κ に対しても最小値が $q(0) = -2$ であることと, 2つの山があることが確認できる. ただし, 最大値をとるのは $s = \pm \sqrt{\frac{2(4+3\kappa)}{\kappa(4+\kappa)}}$ の時で, その値は $\frac{(4+\kappa)^2}{4\kappa(2+\kappa)}$ である.

2.5 変数変換したポテンシャル $\tilde{q}(\theta)$ の κ 依存性

Schrödinger 型に変形した固有値方程式 (2.19) のポテンシャル部分 $q(s)$ に対して,

$$s = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\kappa} \tan \theta}, \quad \tilde{q}(\theta) = q\left(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\kappa} \tan \theta}\right) \quad (2.28)$$

として, $s \rightarrow \theta$ の変数変換を行う. すると,

$$\tilde{q}(\theta) = \left[(16 + 4\kappa) \left(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\kappa} \tan \theta} \right)^2 - 8 \right] \left[2 + \kappa \left(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\kappa} \tan \theta} \right)^2 \right]^{-2} \quad (2.29)$$

$$= \left(\frac{8}{\kappa} + 2 \right) \sin^2 \theta - \left(\frac{8}{\kappa} + 4 \right) \sin^4 \theta. \quad (2.30)$$

この κ 依存性を確認する. まず, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 < \kappa < 8$ に対して $\tilde{q}(\theta)$ をプロットすると, 図 14 の通りとなる. また, $\kappa = 1, 2, 7$ に対して $\tilde{q}(\theta)$, $\theta \in [0, \pi]$ をプロットすると, 図 15, 16, 17 の通りとなる.

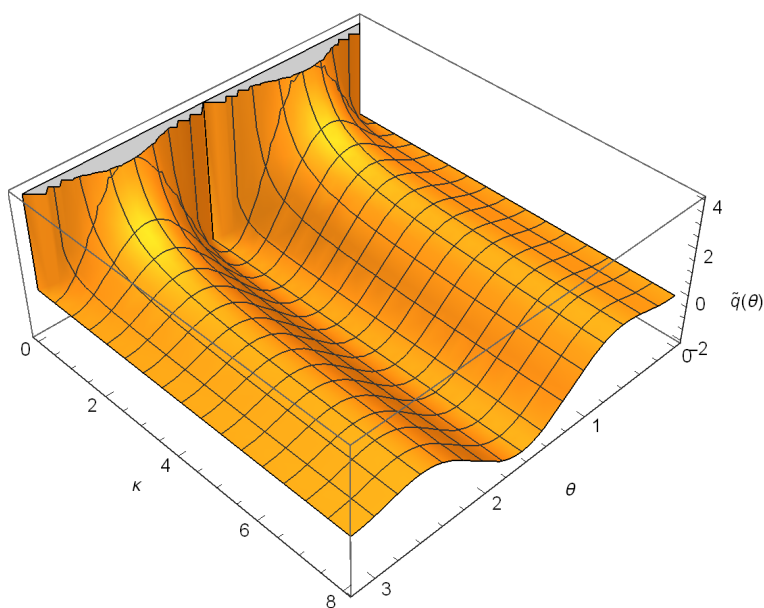


図 14: 変数変換したポテンシャル $\tilde{q}(\theta)$, $\theta \in [0, \pi]$, $\kappa \in (0, 8)$

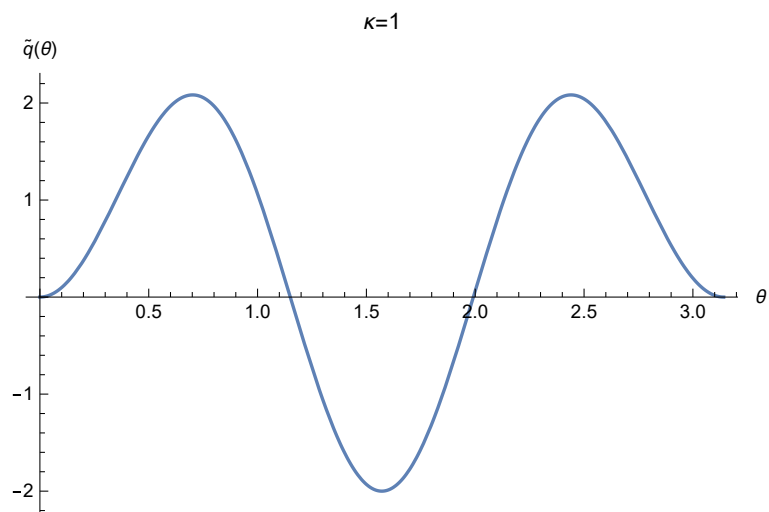


図 15: $\kappa = 1$ での変数変換したポテンシャル $\tilde{q}(\theta)$, $\theta \in [0, \pi]$

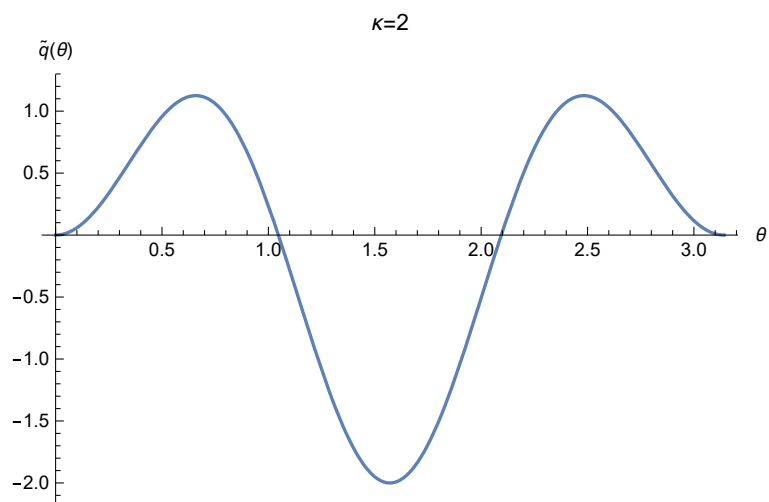


図 16: $\kappa = 2$ での変数変換したポテンシャル $\tilde{q}(\theta)$, $\theta \in [0, \pi]$

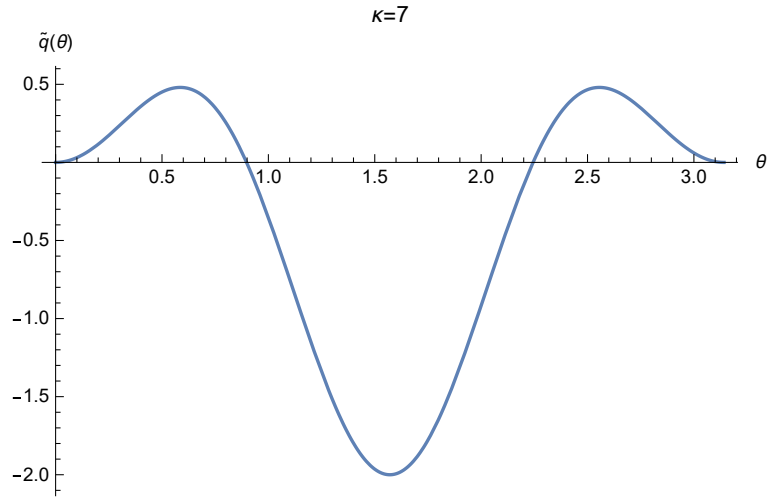


図 17: $\kappa = 7$ での変数変換したポテンシャル $\tilde{q}(\theta)$, $\theta \in [0, \pi]$

図 14, 15, 16, 17 の通り, いずれの κ に対しても最小値が

$$\tilde{q}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2 \quad (2.31)$$

であることと,

$$\tilde{q}(0) = \tilde{q}(\pi) = 0 \quad (2.32)$$

であることが確認できる. また, 各 κ に対して最大値は

$$\tilde{q}\left(\text{Arcsin}\left(\sqrt{\frac{4+\kappa}{8+4\kappa}}\right)\right) = \tilde{q}\left(\pi - \text{Arcsin}\left(\sqrt{\frac{4+\kappa}{8+4\kappa}}\right)\right) = \frac{(4+\kappa)^2}{4\kappa(2+\kappa)} \quad (2.33)$$

である.

一方, 変数変換したポテンシャル $\tilde{q}(\theta)$ の符号付き面積 $S(\kappa)$ は,

$$S(\kappa) = \int_0^\pi \tilde{q}(\theta) d\theta = \pi \left(\frac{1}{\kappa} - \frac{1}{2} \right) \quad (2.34)$$

と求まり, $0 < \kappa < 10$ に対して, 図 18 の様にプロットできる. ここで, 図 18 の通り, $\tilde{q}(\theta)$ の符号付き面積は, $0 < \kappa < 2$ で正, $\kappa = 2$ で 0, $2 < \kappa$ で負となることが分かる.

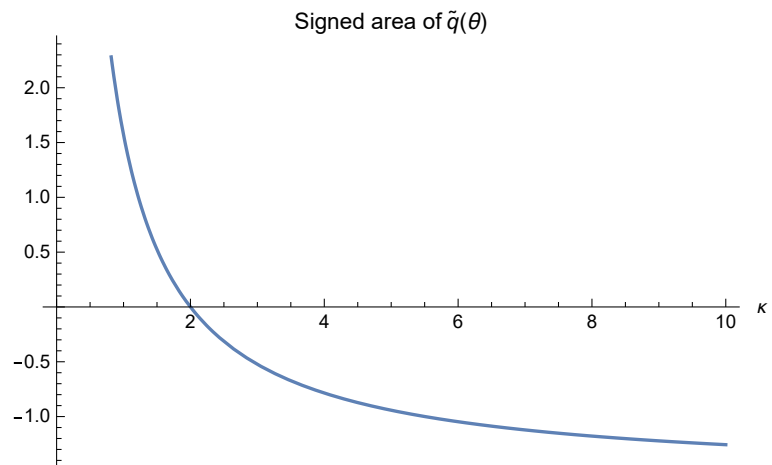


図 18: 変数変換したポテンシャル $\tilde{q}(\theta)$ の符号付き面積, $\kappa \in (0, 10)$

3 まとめ

まず、第1章に記述した先行研究の結果では、微分方程式の解として得られた定常密度関数 (1.50) は κ の値によって振る舞いを変え、相転移が起こるのは $\kappa = 4, 8$ の時であった。それに対して、第2章で導出した Schrödinger 型の固有値方程式の固有値 $\lambda = 0$ における解 (2.23) は、 $\kappa = 2, 4$ で相転移を起こした。この様に、Schrödinger 型への変形によって、相転移を起こす κ の値はそれぞれ $1/2$ 倍されてしまった。ここで、定常密度関数 $\rho(T)$ (1.45) と Schrödinger 型固有値方程式の零固有値解 $r^{-1}\tilde{u}(s; 0)$ (2.21) の指数を比較すると、その差異は $r^{-1}(s)$ を乗じた分に相当する。よって、変形によって κ の値が $1/2$ 倍となったのは、相似変換による影響だと考えられる。

次に、固有値方程式を Schrödinger 型へと変形することで、ポテンシャル $q(s)$ とその独立変数を θ に置き換えた $\tilde{q}(\theta)$ を得た。これらはそれぞれ $s = 0$ および $\theta = \frac{\pi}{2}$ で最小値 -2 をとり、その両脇に山を持つような形をしていた。そして、 $q(s)$ および $\tilde{q}(\theta)$ の最大値はともに

$$\frac{(4 + \kappa)^2}{4\kappa(2 + \kappa)} \quad (3.1)$$

であり、これは κ が増加するにつれ単調に減少する。よって、 κ が大きくなるに伴い、山は低くなっていくことが分かる。

また、変数変換したポテンシャル $\tilde{q}(\theta)$ の符号付き面積 $S(\kappa)$ は、 $0 < \kappa < 2$ で正、 $\kappa = 2$ で 0 、 $2 < \kappa$ で負であった。このことは、 $0 < \kappa < 2$ では谷に比べて山が大きく、 $2 < \kappa$ では谷に比べて山が小さく、そして $\kappa = 2$ では山と谷が均衡状態にあると解釈できる。

よって、Schrödinger 型の固有値方程式に対する $\tilde{\rho}_{\text{Sch}}(\theta)$ は、 $0 < \kappa < 2$ ではポテンシャルの山が大きいため $\theta = \frac{\pi}{2}$ にピークを持ち、 $\kappa = 2$ では山と谷が拮抗しているため一様となり、そして $2 < \kappa$ では山が小さいため $\theta = 0, \pi$ 付近で大きな値をとると考えられる。

本研究では、 $\kappa = 2$ において Schrödinger 型の固有値方程式のポテンシャルの挙動に変化があることを確認した。しかし、先行研究では相転移が起こるのは $\kappa = 4, 8$ であり、本研究で得られた $\kappa = 2$ という値と異なる。つまり、本研究の結果として、従来知られている $\kappa = 4, 8$ での相転移とは異なる、 $\kappa = 2$ での変化が見られたこととなる。

ここで、 $\kappa = 2$ において SLE_κ は loop-erased random walk の連続極限に対応している。loop-erased random walk は Schramm が SLE_κ を導入したきっかけとなった確率モデルであり、 SLE_κ 理論の研究において重要なモデルの1つである。そのことから、 $\kappa = 2$ においてポテンシャルの挙動に変化が起こったことと、loop-erased random walk には何かしらの関連があると予想される。

参考文献

- [1] Schramm, Oded : Scaling limits of loop-erased random walks and uniform spanning trees. *Israel J. Math.* 118 (2000), 221–288, arXiv:math.PR/9904022
- [2] Lyons, T. J., Margarint, V., Nejad, S. : Convergence to closed-form distribution for the backward SLE_κ at some random times and the phase transition at $\kappa = 8$. arXiv:math.PR/1910.05519v1
- [3] 稲見武夫 (1998) 「常微分方程式 理工系の基礎数学 3」 岩波書店
- [4] 小谷眞一, 俣野博 (2006) 「微分方程式と固有関数展開」 岩波書店
- [5] 松本裕行 (2004) 「応用のための確率論・確率過程」 サイエンス社
- [6] W. Kager and B. Nienhuis : A guide to stochastic Löwner evolution and its application. *J. Stat. Phys.* 115 (2004), 1149-1229, arXiv:math-ph/0312056v3
- [7] D. Chelkak, H. Duminil-Copin, C. Hongler, A. Kemppainen, and S. Smirnov : Convergence of Ising interfaces to Schramm’s SLE curves. *Comptes Rendus Mathématique. Académie des Sciences. Paris*, 352(2), (2014), 157–161, arXiv:1312.0533v2