格子経路模型とランダム・ウォークの 三角関数拡張および楕円関数拡張

Trigonometric and Elliptic Extensions of Lattice Path Models and Random Walks

2022年2月13日

中央大学大学院理工学研究科物理学専攻
博士課程前期課程2年

星 奈津子

概 要

数式や理論に q というパラメータを導入して拡張することを q–拡張あるいは q–類似という．ここでは，さらに a, b, c といったパラメータを導入した複数の拡張を三角関数拡張と総称する．適切な変数変換を施すと三角関数を用いて表すことができるためである．三角関数拡張された Pochhammer 記号の積で定義される変形 Jacobi テータ関数という関数がある．これは，三角関数のもつ周期性とともに，それとは別の擬周期性をもち，楕円関数を構成する際の基礎となる特殊関数である．変形 Jacobi テータ関数を用いて，三角関数拡張にさらに p というパラメータを導入した楕円関数拡張が行われる．これは最大の拡張といわれている．

Chaundy と Bullard によって示された恒等式がある．これは二項係数についての和の式で，さまざまな証明方法が存在する．その中に，組み合わせ論を用いた重み付き格子経路法という方法がある．格子模型上の経路に適切な重みを課すことで，全経路の重みの和を恒等式と一致させる方法である．

本研究では，上記の恒等式に三角関数拡張と楕円関数拡張を段階的に施し，それらの式を重み付き格子経路法によって証明することで，格子経路模型の三角関数拡張と楕円関数拡張を得た．ただし今回は，通過した点の座標に依存する形に重みを拡張しているため，全経路の重みの和の表記は明らかではない．ここに証明の工夫がある．また，重みは一般の複素数をとることができるが，作成した重み付き格子経路模型を確率論的に扱うことを目的として，重みを 1 より小さい正の実数に限定することを考えた．このとき，経路の重みはその経路を通る確率と見なせる．重みはパラメータに依存する形で得られたことから，確率解釈のためにパラメータに課すべき条件を調べた．その条件の下で変数変換を行い，2 次元平面上の経路問題を $(1+1)$ 次元時空間平面上のランダム・ウォークにおきかえれば，それぞれの拡張に対応したランダム・ウォークが考えられ，新たな確率過程を得ることとなる．

各ランダム・ウォークについて数値的な解析も行った．もとの恒等式は二項分布の書きかえに相当するものであるため，極大値を 1 つもつ単峰分布を描くことがわかっていた．ところが，拡張版のランダム・ウォークについて各時刻での確率分布を数値的に調べると，極大値を 2 つもつ複峰分布を描くパラメータの組が複数発見された．これはランダム・ウォークが 2 つの方向に進みやすい場合があることを意味する．このような性質を決定づける推移確率についても数値的に考察した．また，実際に数値実験を行い，典型的と思われる分布を描く数種類のパラメータの組について，ランダム・ウォークを走らせて特徴の再現を行った．

目 次

1 Introduction

1960 年，Chaundy と Bullard によって，二項係数の和に関する次のような恒等式が示された [1]．変数を x とし，$m, n \in \{0, 1, 2, \dots\}$ について

$$1 = (1-x)^{n+1} \sum_{k=0}^{m} \binom{n+k}{k} x^k + x^{m+1} \sum_{k=0}^{n} \binom{m+k}{k} (1-x)^k \tag{1.1}$$

が成り立つ．右辺は二項展開を 2 つに分解したような対称的な形になっている．文献 [2, 3] では，これを Chaundy–Bullard 恒等式と呼び，複数の証明方法を紹介している．その中で Gaußの超幾何級数や Krawtchouk 多項式との関係も与えられている．また，この恒等式を多変数に拡張した式を Beta 積分を用いて証明する方法も示されており，それが多変数版の恒等式を楕円関数拡張したものについて議論する足掛かりとなることがわかる．
本論文では，Chaundy–Bullard 恒等式を段階的に拡張し，それらを重み付き格子経路法によって証明することで，楕円関数拡張された恒等式とそれに対応した格子経路模型を得ることを 1 つの目的とする．重み付き格子経路法の詳細は後述する．まずは最も基本的な拡張である q–拡張を紹介する．複素数全体を $\mathbb{C}$ で表す．パラメータ $q \in \mathbb{C}$，$0 < |q| < 1$ を導入し，引数 $x \in \mathbb{C}$ に対して以下のように Pochhammer 記号の拡張がなされる，

$$(x; q)_\infty \coloneqq \prod_{\ell=0}^{\infty} (1 - xq^\ell), \tag{1.2}$$

$$(x; q)_k \coloneqq \frac{(x; q)_\infty}{(xq^k; q)_\infty}. \tag{1.3}$$

k が自然数のとき，(1.3) は

$$(x; q)_k = \prod_{\ell=0}^{k-1} (1 - xq^\ell), \quad k \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\} \tag{1.4}$$

とも書ける．これらを，基底 q の q–Pochhammer 記号とよぶ．
なお，q–Pochhammer 記号の積を多変数 $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{C}$ についての多変数関数と見なしたものを

$$(x_1, \dots, x_m; q)_\infty = \prod_{k=1}^{m} (x_k; q)_\infty,$$
$$(x_1, \dots, x_m; q)_n = \prod_{k=1}^{m} (x_k; q)_n$$

と表記する．
任意の $x \in \mathbb{C}$ に対する q–拡張は次で定義される，

$$[x]_q \coloneqq \frac{1 - q^x}{1 - q}. \tag{1.5}$$

これを q–数という．導入したパラメータ q を 1 に近づける極限によって，q–数はもとの数に戻る，

$$\lim_{q\to 1}[x]_q = x. \tag{1.6}$$

特に自然数 n に対する q–拡張は

$$[n]_q = \frac{1-q^n}{1-q} = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} \tag{1.7}$$

と変形できる．また，階乗の q–拡張は q–階乗とよばれ，

$$[n]_q! := [n]_q[n-1]_q \cdots [1]_q = \frac{(q;q)_n}{(1-q)^n} \tag{1.8}$$

と定義される．これを用いて，二項係数の q–拡張である q–二項係数が

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q := \frac{[n]_q!}{[k]_q![n-k]_q!} = \frac{(q;q)_n}{(q;q)_k(q;q)_{n-k}}, \quad k \in \{0, 1, \ldots, n\} \tag{1.9}$$

と定義される．
この拡張はパラメータ q を用いることから q–拡張あるいは q–類似と称されることが一般的だが，導入するパラメータの数によって数種類の拡張が存在するため，本論文ではそれらを総称して三角関数拡張とよんでいる．これは特に $q = e^{-2i\varphi}$，$x = e^{-2i\alpha}$ (ただし $i = \sqrt{-1}$，φ, $\alpha \in \mathbb{R}$) として変形したとき三角関数を用いて表せるからである．詳細は後述する．なお，実際に施した各拡張については，導入したパラメータを明示する形で名前をつけた．
ここで $p \in \mathbb{C}$, $0 < |p| < 1$ とする．引数 $x \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ について，ノーム p の変形 Jacobi テータ関数というものが次のように定義される，

$$\theta(x;p) := \left(x, \frac{p}{x}; p\right)_\infty = \prod_{\ell=0}^{\infty}(1 - xp^\ell)\left(1 - \frac{p^{\ell+1}}{x}\right). \tag{1.10}$$

また，以下のような性質がある．

$$\theta\left(\frac{1}{z};p\right) = -\frac{1}{z}\theta(z;p) \qquad \text{反転公式 (inversion formula)}, \tag{1.11}$$

$$\theta(pz;p) = -\frac{1}{z}\theta(z;p) \qquad \text{擬周期性 (quasi-periodicity)}. \tag{1.12}$$

なお，変形 Jacobi テータ関数の積を，多変数 $x_1, \ldots, x_m \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ についての多変数関数と見なしたものを

$$\theta(x_1, \ldots, x_m; p) = \prod_{k=1}^{m} \theta(x_k; p) \tag{1.13}$$

と表記する．変形 Jacobi テータ関数を用いて，楕円関数拡張された階乗 (あるいは (q,p)–拡張された階乗) が

$$(x;q,p)_k = \prod_{\ell=0}^{k-1} \theta(xq^\ell;p), \quad k \in \mathbb{N} \tag{1.14}$$

と書かれる．$p \to 0$ の極限をとると，

$$\lim_{p\to 0}(x;q,p)_k = \lim_{p\to 0} \prod_{\ell=0}^{k-1}\prod_{s=0}^{\infty}(1-xq^\ell p^s)\left(1-\frac{p^{s+1}}{xq^\ell}\right) = \prod_{\ell=0}^{k-1}(1-xq^\ell) \tag{1.15}$$

より q–Pochhammer 記号と一致することから，楕円関数拡張された階乗は q–Pochhammer 記号を一般化したものと考えられる．この一般化を楕円関数拡張とよんでいる．
ここで，楕円関数拡張された階乗に $q = e^{-2i\varphi}$，$x = e^{-2i\alpha}$ を代入する．

$$(x;q,p)_k\big|_{\substack{x=e^{-2i\alpha}\\ q=e^{-2i\varphi}}} = \prod_{\ell=0}^{k-1}\theta(xq^\ell;p)\big|_{\substack{x=e^{-2i\alpha}\\ q=e^{-2i\varphi}}} = \prod_{\ell=0}^{k-1}\theta(e^{-2i(\alpha+\ell\varphi)};p). \tag{1.16}$$

$p \to 0$ の極限をとると，

$$\begin{aligned}\lim_{p\to 0}(x;q,p)_k\big|_{\substack{x=e^{-2i\alpha}\\ q=e^{-2i\varphi}}} &= \prod_{\ell=0}^{k-1} 1 - e^{-2i(\alpha+\ell\varphi)} \\ &= \prod_{\ell=0}^{k-1} 2ie^{-i(\alpha+\ell\varphi)}\sin(\alpha+\ell\varphi).\end{aligned} \tag{1.17}$$

よって，q–Pochhammer 記号に $q = e^{-2i\varphi}$，$x = e^{-2i\alpha}$ を代入したものは，三角関数を用いて表すことができる．
q–拡張にさらに a, b, c などのパラメータを導入した拡張が存在する．本論文では，q–拡張，第 1 $(a,b;q)$–拡張，第 2 $(a,b;q)$–拡張，$(a,b,c;q)$–拡張，楕円関数拡張の 5 つの拡張を行う．第 2 章でこれらの拡張を施した恒等式を紹介するが，前述の通り楕円関数拡張はその他の拡張をより一般化したものとなっている．そのため，本来であれば，楕円関数拡張した恒等式をまず与え，その極限をとることで下位の拡張を簡単に紹介するといった構成にすべきと考えるが，本研究は下位のより単純な式から着手することによって証明のアプローチを確立し，徐々に複雑になる計算にも確実に対応できたという経緯がある．よって，本論文の構成も，下位のものから順に紹介する形をとりたい．第 3 章でそれぞれの恒等式の証明を行い，第 4 章でランダム・ウォークの拡張としての解釈について述べる．第 5 章では数値的な計算・実験の結果を示す [5].

2 Chaundy–Bullard 恒等式の拡張

$p,q \in \mathbb{C}$, $0 < |p| < 1$, $0 < |q| < 1$ として (1.1) 式を拡張する．

2.1 q–拡張

$$1=(x;q)_{n+1}\sum_{k=0}^{m}\begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_q x^k + x^{m+1}\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix} m+k \\ k \end{bmatrix}_q q^k (x;q)_k. \tag{2.1}$$

2.2 第 1 $(a,b;q)$–拡張

$a,b\in\mathbb{C}\backslash\{0\}$ とすると，$x\in\mathbb{C}$ について，

$$1=\frac{(bx;q)_{n+1}}{(b/a;q)_{n+1}}\sum_{k=0}^{m}\frac{(q^{n+1},ax;q)_k}{(q,aq/b;q)_k}q^k+\frac{(ax;q)_{m+1}}{(a/b;q)_{m+1}}\sum_{k=0}^{n}\frac{(q^{m+1},bx;q)_k}{(q,bq/a;q)_k}q^k. \tag{2.2}$$

2.3 第 2 $(a,b;q)$–拡張

$a,b\in\mathbb{C}\backslash\{0\}$ とすると，$x\in\mathbb{C}\backslash\{0\}$ について，

$$1=\frac{(bx,b/x;q)_{n+1}}{(ab,b/a;q)_{n+1}}\sum_{k=0}^{m}\frac{(q^{n+1},ax,a/x;q)_k}{(q,aq/b,abq^{n+1};q)_k}q^k+\frac{(ax,a/x;q)_{m+1}}{(ab,a/b;q)_{m+1}}\sum_{k=0}^{n}\frac{(q^{m+1},bx,b/x;q)_k}{(q,bq/a,abq^{m+1};q)_k}q^k. \tag{2.3}$$

2.4 $(a,b,c;q)$-拡張

$a,b,c\in\mathbb{C}\backslash\{0\}$ とすると，$x\in\mathbb{C}\backslash\{0\}$ について，

$$\begin{aligned}1=&\frac{(ac,c/a,bx,b/x;q)_{n+1}}{(ab,b/a,cx,c/x;q)_{n+1}}\sum_{k=0}^{m}\frac{(1-acq^{n+2k})(acq^n,bcq^n,c/b,q^{n+1},ax,a/x;q)_k}{(1-acq^n)(q,aq/b,abq^{n+1},ac,cq^{n+1}/x,cxq^{n+1};q)_k}q^k\\&+\frac{(bc,c/b,ax,a/x;q)_{m+1}}{(ab,a/b,cx,c/x;q)_{m+1}}\sum_{k=0}^{n}\frac{(1-bcq^{m+2k})(bcq^m,acq^m,c/a,q^{m+1},bx,b/x;q)_k}{(1-bcq^m)(q,bq/a,abq^{m+1},bc,cq^{m+1}/x,cxq^{m+1};q)_k}q^k.\end{aligned} \tag{2.4}$$

2.5 楕円関数拡張

$a,b,c\in\mathbb{C}\backslash\{0\}$ とすると，$x\in\mathbb{C}\backslash\{0\}$ について，

$$\begin{aligned}1=&\frac{(ac,c/a,bx,b/x;q,p)_{n+1}}{(ab,b/a,cx,c/x;q,p)_{n+1}}\sum_{k=0}^{m}\frac{\theta(acq^{n+2k};p)(acq^n,bcq^n,c/b,q^{n+1},ax,a/x;q,p)_k}{\theta(acq^n;p)(q,aq/b,abq^{n+1},ac,cq^{n+1}/x,cxq^{n+1};q,p)_k}q^k\\&+\frac{(bc,c/b,ax,a/x;q,p)_{m+1}}{(ab,a/b,cx,c/x;q,p)_{m+1}}\sum_{k=0}^{n}\frac{\theta(bcq^{m+2k};p)(bcq^m,acq^m,c/a,q^{m+1},bx,b/x;q,p)_k}{\theta(bcq^m;p)(q,bq/a,abq^{m+1},bc,cq^{m+1}/x,cxq^{m+1};q,p)_k}q^k.\end{aligned} \tag{2.5}$$

2.6 極限

楕円関数拡張された式 (2.5) において各パラメータの極限をとり，元の Chaundy–Bullard 恒等式に戻ることを確認する．
(2.5) 式の右辺第 1 項を $p_{m,n}(x;a,b,c;q,p)$ と書くことにすると，(2.5) 式は次のように書き直せる．

$$1 = p_{m,n}(x;a,b,c;q,p) + p_{n,m}(x;b,a,c;q,p). \tag{2.6}$$

ここで，変形 Jacobi テータ関数と楕円関数拡張された階乗について $\lim_{p\to 0}\theta(x;p) = 1-x$, $\lim_{p\to 0}(x;q,p)_k = (x;q)_k$, $k\in\mathbb{N}$ であることを利用して，

$$\begin{aligned}
&p_{m,n}(x;a,b,c;q,0)\\
&= \frac{(ac,c/a,bx,b/x;q)_{n+1}}{(ab,b/a,cx,c/x;q)_{n+1}}\sum_{k=0}^{m}\frac{(1-acq^{n+2k})(acq^n,bcq^n,c/b,q^{n+1},ax,a/x;q)_k}{(1-acq^n)(q,aq/b,abq^{n+1},ac,cq^{n+1}/x,cxq^{n+1};q)_k}q^k.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

これは $(a,b,c;q)$–拡張された恒等式 (2.4) の右辺第 1 項と一致する．第 2 項についても同様である．ここからさらに $c\to 0$ を考える．

$$p_{m,n}(x;a,b,0;q,0) = \frac{(bx,b/x;q)_{n+1}}{(ab,b/a;q)_{n+1}}\sum_{k=0}^{m}\frac{(q^{n+1},ax,a/x;q)_k}{(q,aq/b,abq^{n+1};q)_k}q^k. \tag{2.8}$$

これは第 2 $(a,b;q)$–拡張された恒等式 (2.3) の右辺第 1 項と一致する．第 2 項についても同様である．ここで，パラメータ a, b，変数 x を $a\to\delta a$, $b\to\delta b$, $x\to x/\delta$ とおき直し，$\delta\to 0$ をとる．

$$\begin{aligned}
\widetilde{p}_{m,n}(x;a,b,0;q,0) &:= \lim_{\delta\to 0} p_{m,n}(x/\delta;\delta a,\delta b,0;q,0)\\
&= \lim_{\delta\to 0}\frac{(bx,\delta^2 b/x;q)_{n+1}}{(\delta^2 ab,b/a;q)_{n+1}}\sum_{k=0}^{m}\frac{(q^{n+1},ax,\delta^2 a/x;q)_k}{(q,aq/b,\delta^2 abq^{n+1};q)_k}q^k\\
&= \frac{(bx;q)_{n+1}}{(b/a;q)_{n+1}}\sum_{k=0}^{m}\frac{(q^{n+1},ax;q)_k}{(q,aq/b;q)_k}q^k.
\end{aligned} \tag{2.9}$$

これは第 1 $(a,b;q)$–拡張された恒等式 (2.2) の右辺第 1 項と一致する．第 2 項についても同様である．さらに，変数 x を $x\to x/b$ とおき直して変形すると，

$$\begin{aligned}
\widetilde{p}_{m,n}(x/b;a,b,0;q,0) &= \frac{(x;q)_{n+1}}{(b/a;q)_{n+1}}\sum_{k=0}^{m}\frac{(q^{n+1},ax/b;q)_k}{(q,aq/b;q)_k}q^k\\
&= \frac{(x;q)_{n+1}}{(b/a;q)_{n+1}}\sum_{k=0}^{m}\frac{(q^{n+1};q)_k}{(q;q)_k}\frac{(ax/b;q)_k}{(aq/b;q)_k}q^k.
\end{aligned} \tag{2.10}$$

ここで,

$$\frac{(q^{n+1};q)_k}{(q;q)_k} = \frac{(q;q)_{n+k}}{(q;q)_n(q;q)_k} = \begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_q,$$

$$\frac{(ax/b;q)_k}{(aq/b;q)_k}q^k = \frac{(-a/b)^k\prod_{\ell=0}^{k-1}(xq^\ell - b/a)}{(-a/b)^k\prod_{s=1}^{k}(q^s - b/a)}q^k = \prod_{\ell=0}^{k-1}\frac{(xq^\ell - b/a)}{(q^{\ell+1} - b/a)}q^k$$

であるから，代入して $b\to 0$ をとると,

$$\begin{aligned}\lim_{b\to 0}\widetilde{p}_{m,n}(x/b;a,b,0;q,0) &= \lim_{b\to 0}\frac{(x;q)_{n+1}}{(b/a;q)_{n+1}}\sum_{k=0}^{m}\begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_q\prod_{\ell=0}^{k-1}\frac{(xq^\ell - b/a)}{(q^{\ell+1} - b/a)}q^k \\ &= (x;q)_{n+1}\sum_{k=0}^{m}\begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_q x^k. \end{aligned} \tag{2.11}$$

これは q–拡張された恒等式 (2.1) の右辺第 1 項と一致する．第 2 項についても同様である．さらに $q\to 1$ をとれば，もとの恒等式と一致する．

3 重み付き格子経路法による証明

まずは証明の手順を示す．5 つの恒等式は以下の手順に沿って証明することができ，その詳細は後述する．
m, n を自然数として，次のような正方格子上の矩形領域を考える,

$$\Lambda_{m+1,n+1} \coloneqq \{(i,j) : i\in\{0,1,\dots,m+1\}, j\in\{0,1,\dots,n+1\}\}. \tag{3.1}$$

この領域内の格子点を通り，$(0,0)$ から $(m+1,n+1)$ まで進む全ての経路の集合を $\Pi_{m+1,n+1}$ とおく．ただし進む方向は右 $(i,j)\to(i+1,j)$ もしくは上 $(i,j)\to(i,j+1)$ のみとする．経路 $\pi\in\Pi_{m+1,n+1}$ は，$m+n+2$ 歩の向きを持ったステップ s の集合として書くことができ,

$$\pi = \{s_t(\pi), t\in\{1,2,\dots,m+n+2\}\}. \tag{3.2}$$

この各ステップに重み $w(s)$ を課す.
出発点となる格子点の座標 $(i,j)\in\Lambda_{m+1,n+1}\backslash\{(m+1,n+1)\}$ を用いて関数 $h(i,j)$ を与え，ステップの重みを以下のように設定する,

$$\begin{aligned} w((i,j)\to(i+1,j)) &\coloneqq \begin{cases} h(i,j), & j\in\{0,1,\dots,n\}, \\ 1, & j=n+1, \end{cases} \quad i\in\{0,1,\dots,m\}, \\ w((i,j)\to(i,j+1)) &\coloneqq \begin{cases} 1-h(i,j), & i\in\{0,1,\dots,m\}, \\ 1, & i=m+1, \end{cases} \quad j\in\{0,1,\dots,n\}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

すなわち，座標 $(i, n+1)$ から右へ進むステップの重みを 1 とし，また座標 $(m+1, j)$ から上へ進むステップの重みも 1 とするが，その他の格子点では右と上のどちらにも進むことができるため，重みの和が 1 になるように $h(i,j)$ で分割する形をとる．これは後に確率論的解釈を行う上で重要となる．ただし，

$$h(i,0) \neq 0, \quad i \in \{0,1,\dots,m-1\}, \quad h(0,j) \neq 1, \quad j \in \{0,1,\dots,n-1\} \tag{3.4}$$

を仮定する．経路 π の重み $w(\pi)$ を，π を構成するステップの重みの積によって定義すると，$\pi \in \Pi_{m+1,n+1}$ について

$$w(\pi) \coloneqq \prod_{s \in \pi} w(s) = \prod_{t=1}^{m+n+2} w(s_t(\pi)). \tag{3.5}$$

ここで，$\tau \in \{1,2,\dots,m+n+2\}$ として，$\pi \in \Pi_{m+1,n+1}$ を τ ステップ目まででで打ち切った経路を π_τ と書くことにする．このとき特に $\pi_{m+n+2} = \pi$ である．経路 $\pi_{\tau-1}$ を与えたとき，とりうるすべての τ ステップ目について重みの和をとると，重みの定義 (3.3) より

$$\sum_{\pi_\tau : \pi_\tau \setminus s_\tau(\pi_\tau) = \pi_{\tau-1}} w(s_\tau(\pi_\tau)) = 1. \tag{3.6}$$

また，考えられるすべての π_τ について経路の重みの和をとると，帰納的に

$$\begin{aligned}\sum_{\pi_\tau} w(\pi_\tau) &= \sum_{\pi_\tau - 1} \left(w(\pi_{\tau-1}) \sum_{\pi_\tau : \pi_{\tau-1}} w(s_\tau(\pi_\tau)) \right) \\ &= \sum_{\pi_{\tau-1}} w(\pi_{\tau-1}) = \cdots = 1 \end{aligned} \tag{3.7}$$

となることから，$\tau = m+n+2$ を代入して

$$\sum_{\pi \in \Pi_{m+1,n+1}} w(\pi) = 1. \tag{3.8}$$

ここで，$k+\ell$ 歩進んだときを考える．点 $(0,0)$ から点 $(k,\ell) \in \Lambda_{m,n} \setminus \{(0,0)\}$ まで進む経路を $\pi : (0,0) \to (k,\ell)$ と表し，その重みの和を以下のように書くことにする，

$$\begin{aligned} A(k,\ell) &\coloneqq \sum_{\pi:(0,0)\to(k,\ell)} w(\pi), \quad (k,\ell) \in \Lambda_{m,n} \setminus \{(0,0)\}, \\ A(0,0) &\coloneqq 1. \end{aligned} \tag{3.9}$$

特に，$A(m+1,n+1) = \displaystyle\sum_{\pi \in \Pi_{m+1,n+1}} w(\pi) = 1$ である．点 (k,ℓ) に到達する経路は，点 $(k-1,\ell)$ を通るものと点 $(k,\ell-1)$ を通るものに分けられる．このことと重みの定義 (3.3) から，$k \in \{1,2,\dots,m\}$, $\ell \in \{1,2,\dots,n\}$ について

$$A(k,\ell) = h(k-1,\ell)A(k-1,\ell) + (1-h(k,\ell-1))A(k,\ell-1) \tag{3.10}$$

という漸化式が得られる．なお，境界条件は

$$
\begin{aligned}
A(k,0) &= \prod_{i=0}^{k-1} h(i,0), \quad k \in \{1,2,\ldots,m\}, \\
A(0,\ell) &= \prod_{j=0}^{\ell-1} (1-h(0,j)), \quad \ell \in \{1,2,\ldots,n\}
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

であり，これらは (3.4) より 0 でない．同様に，点 $(m+1,n+1)$ に到達する経路を点 $(m,n+1)$ を通るものと点 $(m+1,n)$ を通るものに分けたとき，

$$
\begin{aligned}
A(m+1,n+1) &= 1 \times A(m,n+1) + 1 \times A(m+1,n) \\
&= \sum_{k=0}^{m} (1-h(k,n))A(k,n) + \sum_{\ell=0}^{n} h(m,\ell)A(m,\ell).
\end{aligned}
\tag{3.12}
$$

点 $(m,n+1)$ に到達する経路は必ず $(k,n) \to (k,n+1)$, $k \in \{0,1,\ldots,m\}$ というステップを経るため，この重み $(1-h(k,n))$ と $A(k,n)$ の積をとることで，経路 $(0,0) \to (k,n) \to (k,n+1) \to (m,n+1)$ の重みが求まる．これを k について足し合わせたものが $A(m,n+1)$ となるため，上式の第 1 項が得られる．第 2 項も同様に変形した．これによって，$A(k,\ell)$ について以下の式を得る，

$$
1 = \sum_{k=0}^{m} (1-h(k,n))A(k,n) + \sum_{\ell=0}^{n} h(m,\ell)A(m,\ell).
\tag{3.13}
$$

それぞれの恒等式に対して，関数 $h(i,j)$ を適切に決める．そして漸化式から $A(k,\ell)$ を求め，(3.13) 式に代入する．これが恒等式と一致することが確認されれば，証明は完了する．
漸化式を解くにあたり，$A(k,\ell)$ を

$$
B(k,\ell) \coloneqq \frac{A(k,\ell)}{A(k,0)A(0,\ell)}, \quad (k,\ell) \in \Lambda_{m,n}
\tag{3.14}
$$

によって書きかえ，漸化式は $k \in \{1,2,\ldots,m\}$, $\ell \in \{1,2,\ldots,n\}$ について

$$
\frac{h(k-1,\ell)}{h(k-1,0)} B(k-1,\ell) + \frac{1-h(k,\ell-1)}{1-h(0,\ell-1)} B(k,\ell-1) = B(k,\ell),
\tag{3.15}
$$

境界条件は

$$
\begin{aligned}
B(k,0) &= 1, \quad k \in \{0,1,\ldots,m\}, \\
B(0,\ell) &= 1, \quad \ell \in \{0,1,\ldots,n\}
\end{aligned}
\tag{3.16}
$$

を用いることにする．

3.1 q–拡張の証明

q–拡張された恒等式に対しては，関数 $h(i,j)$ を

$$h(i,j) = xq^j \tag{3.17}$$

と設定する．このとき $k \in \{1,2,\ldots,m\}$, $\ell \in \{1,2,\ldots,n\}$ について

$$\begin{aligned} xq^\ell A(k-1,\ell) + (1-xq^\ell)A(k,\ell-1) &= A(k,\ell), \\ A(k,0) &= x^k, \\ A(0,\ell) &= \prod_{j=0}^{\ell-1}(1-xq^\ell) = (x;q)_\ell \end{aligned} \tag{3.18}$$

となる．ここで

$$A(k,\ell) = B(k,\ell)x^k(x;q)_\ell \tag{3.19}$$

であるから，漸化式は $k \in \{1,2,\ldots,m\}$, $\ell \in \{1,2,\ldots,n\}$ について

$$q^\ell B(k-1,\ell) + B(k,\ell-1) = B(k,\ell) \tag{3.20}$$

と書きかえられる．また，q–二項係数には以下のような関係式が知られている，

$$\begin{bmatrix} k+\ell \\ k \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} k+\ell-1 \\ k \end{bmatrix}_q + q^\ell \begin{bmatrix} k+\ell-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q . \tag{3.21}$$

これと

$$\begin{bmatrix} k \\ k \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} \ell \\ 0 \end{bmatrix}_q = 1 \tag{3.22}$$

から，$B(k,\ell)$ は

$$B(k,\ell) = \begin{bmatrix} k+\ell \\ k \end{bmatrix}_q \tag{3.23}$$

とわかり，$A(k,\ell)$ は (3.19) から

$$A(k,\ell) = \begin{bmatrix} k+\ell \\ k \end{bmatrix}_q x^k(x;q)_\ell \tag{3.24}$$

と求まる．$h(i,j)$, $A(k,\ell)$ を (3.13) 式に代入すれば,

$$\begin{aligned}1 &= \sum_{k=0}^{m}(1-xq^n)\begin{bmatrix} k+n \\ k \end{bmatrix}_q x^k(x;q)_n + \sum_{\ell=0}^{n} xq^\ell \begin{bmatrix} m+\ell \\ m \end{bmatrix}_q x^m(x;q)_\ell \\ &= (x;q)_{n+1}\sum_{k=0}^{m}\begin{bmatrix} k+n \\ k \end{bmatrix}_q x^k + x^{m+1}\sum_{\ell=0}^{n}\begin{bmatrix} m+\ell \\ \ell \end{bmatrix}_q q^\ell(x;q)_\ell. \end{aligned} \tag{3.25}$$

よって q–拡張された Chaundy–Bullard 恒等式 (2.1) が示された.

3.2 第 1 $(a,b;q)$–拡張の証明

第 1 $(a,b;q)$–拡張された恒等式に対しては，関数 $h(i,j)$ を

$$h(i,j) = \frac{1-axq^i}{1-(a/b)q^{i-j}} \tag{3.26}$$

と設定する．すると,

$$\begin{aligned}1-h(i,j) &= \frac{1-(a/b)q^{i-j}-1+axq^i}{1-(a/b)q^{i-j}} = \frac{-(a/b)q^{i-j}+axq^i}{1-(a/b)q^{i-j}} \\ &= \frac{-(a/b)q^{i-j}(1-bxq^j)}{-(a/b)q^{i-j}(1-(b/a)q^{j-i})} \\ &= \frac{1-bxq^j}{1-(b/a)q^{j-i}}. \end{aligned} \tag{3.27}$$

このとき $k \in \{1,2,\ldots,m\}$, $\ell \in \{1,2,\ldots,n\}$ について

$$\begin{gathered}\frac{1-axq^{k-1}}{1-(a/b)q^{k-\ell-1}}A(k-1,\ell) + \frac{1-bxq^{\ell-1}}{1-(b/a)q^{\ell-k-1}}A(k,\ell-1) = A(k,\ell), \\ A(k,0) = \prod_{i=0}^{k-1}\frac{1-axq^i}{1-(a/b)q^i} = \frac{(ax;q)_k}{(a/b;q)_k}, \\ A(0,\ell) = \prod_{j=0}^{\ell-1}\frac{1-bxq^j}{1-(b/a)q^j} = \frac{(bx;q)_\ell}{(b/a;q)_\ell} \end{gathered} \tag{3.28}$$

となる．ここで

$$A(k,\ell) = B(k,\ell)\frac{(ax;q)_k}{(a/b;q)_k}\frac{(bx;q)_\ell}{(b/a;q)_\ell} \tag{3.29}$$

であるから，漸化式は $k \in \{1,2,\dots,m\}$, $\ell \in \{1,2,\dots,n\}$ について

$$\frac{1-(a/b)q^{k-1}}{1-(a/b)q^{k-\ell-1}}B(k-1,\ell)+\frac{1-(b/a)q^{\ell-1}}{1-(b/a)q^{\ell-k-1}}B(k,\ell-1)=B(k,\ell) \tag{3.30}$$

と書きかえられる．これを解くと,

$$B(k,\ell)=\frac{(1-(a/b)q^{k-\ell})(1-(b/a))}{(1-(a/b)q^{k})(1-(b/a)q^{\ell})}q^{\ell}\frac{(q^{k+1};q)_\ell}{(q;q)_\ell}. \tag{3.31}$$

(3.31) が (3.30) 式の解になっていることを示す．左辺に代入して変形すると,

$$\begin{aligned}
&\frac{1-(a/b)q^{k-1}}{1-(a/b)q^{k-\ell-1}}\times\frac{(1-(a/b)q^{k-\ell-1})(1-(b/a))}{(1-(a/b)q^{k-1})(1-(b/a)q^{\ell})}q^{\ell}\frac{(q^{k};q)_\ell}{(q;q)_\ell}\\
&\qquad+\frac{1-(b/a)q^{\ell-1}}{1-(b/a)q^{\ell-k-1}}\times\frac{(1-(a/b)q^{k-\ell+1})(1-(b/a))}{(1-(a/b)q^{k})(1-(b/a)q^{\ell-1})}q^{\ell-1}\frac{(q^{k+1};q)_{\ell-1}}{(q;q)_{\ell-1}}\\
&=\frac{(1-(b/a))q^{\ell}(q^{k};q)_\ell}{(1-(b/a)q^{\ell})(q;q)_\ell}+\frac{(1-(a/b)q^{k-\ell+1})(1-(b/a))q^{\ell-1}(q^{k+1};q)_{\ell-1}}{(1-(b/a)q^{\ell-k-1})(1-(a/b)q^{k})(q;q)_{\ell-1}}\\
&=\frac{(1-(b/a))q^{\ell}(q^{k+1};q)_\ell}{(1-(a/b)q^{k})(1-(b/a)q^{\ell})(q;q)_\ell}\left(\frac{(1-(a/b)q^{k})(1-q^{k})}{1-q^{k+\ell}}-\frac{a}{b}q^{k-\ell}\frac{(1-(b/a)q^{\ell})(1-q^{\ell})}{1-q^{k+\ell}}\right)\\
&=\frac{(1-(b/a))q^{\ell}(q^{k+1};q)_\ell}{(1-(a/b)q^{k})(1-(b/a)q^{\ell})(q;q)_\ell}\left(1-\frac{a}{b}q^{k-\ell}\right)=B(k,\ell).
\end{aligned} \tag{3.32}$$

さらに，境界条件は

$$\begin{aligned}
B(k,0)&=\frac{(1-(a/b)q^{k})(1-(b/a))}{(1-(a/b)q^{k})(1-(b/a))}=1,\\
B(0,\ell)&=\frac{(1-(a/b)q^{-\ell})(1-(b/a))}{(1-(a/b))(1-(b/a)q^{\ell})}q^{\ell}\frac{(q;q)_\ell}{(q;q)_\ell}=\frac{(1-(a/b)q^{-\ell})(1-(b/a))q^{\ell}}{(1-(a/b))(1-(b/a)q^{\ell})}\\
&=\frac{-(a/b)q^{-\ell}(1-(b/a)q^{\ell})(1-(b/a))q^{\ell}}{-(a/b)(1-(b/a))(1-(b/a)q^{\ell})}=1.
\end{aligned} \tag{3.33}$$

よって (3.31) は漸化式を満たす.
$A(k,\ell)$ は (3.29)，(3.31) より

$$\begin{aligned}
A(k,\ell)&=\left(1-\frac{a}{b}q^{k-\ell}\right)\frac{1}{(1-(a/b)q^{k})(a/b;q)_k}\frac{(ax;q)_k(q^{k+1};q)_\ell(bx;q)_\ell}{(q;q)_\ell}\frac{1-(b/a)}{(1-(b/a)q^{\ell})(b/a;q)_\ell}\\
&=\left(1-\frac{a}{b}q^{k-\ell}\right)\frac{(ax;q)_k(q^{k+1};q)_\ell(bx;q)_\ell}{(a/b;q)_{k+1}(q;q)_\ell((b/a)q;q)_\ell}q^{\ell}.
\end{aligned} \tag{3.34}$$

$h(i,j)$, $A(k,\ell)$ を (3.13) 式に代入すると，

$$1=\sum_{k=0}^{m}\frac{1-bxq^n}{1-(b/a)q^{n-k}}\left(1-\frac{a}{b}q^{k-n}\right)\frac{(ax;q)_k(q^{k+1};q)_n(bx;q)_n}{(a/b;q)_{k+1}(q;q)_n((b/a)q;q)_n}q^n$$
$$+\sum_{\ell=0}^{n}\frac{1-axq^m}{1-(a/b)q^{m-\ell}}\left(1-\frac{a}{b}q^{m-\ell}\right)\frac{(ax;q)_m(q^{m+1};q)_\ell(bx;q)_\ell}{(a/b;q)_{m+1}(q;q)_\ell((b/a)q;q)_\ell}q^\ell. \tag{3.35}$$

ここで第 1 項について

$$\frac{1-(a/b)q^{k-n}}{1-(b/a)q^{n-k}}=-\frac{a}{b}q^{k-n},\quad (a/b;q)_{k+1}=((a/b)q;q)_k\left(1-\frac{a}{b}\right),$$
$$((b/a)q;q)_n=\frac{(b/a;q)_{n+1}}{1-b/a},\quad \frac{(q^{k+1};q)_n}{(q;q)_n}=\frac{(q;q)_{n+k}}{(q;q)_k(q;q)_n}=\frac{(q^{n+1};q)_k}{(q;q)_k} \tag{3.36}$$

のように変形すれば，

$$1=\frac{(bx;q)_{n+1}}{(b/a;q)_{n+1}}\sum_{k=0}^{m}\frac{(q^{n+1},ax;q)_k}{(q,(a/b)q;q)_k}q^k+\frac{(ax;q)_{m+1}}{(a/b;q)_{m+1}}\sum_{\ell=0}^{n}\frac{(q^{m+1},bx;q)_\ell}{(q,(b/a)q;q)_\ell}q^\ell. \tag{3.37}$$

よって第 1 $(a,b;q)$–拡張された Chaundy–Bullard 恒等式 (2.2) が示された．

なお，関数 $h(i,j)$ と $1-h(i,j)$，恒等式の第 1 項と第 2 項を見比べると，$i\leftrightarrow j$ の入れ替え (右 (k や m) と上 (ℓ や n) の入れ替え) によってパラメータ $a\leftrightarrow b$ の入れ替えが起こるような形になっていることがわかる．このことから，$A(k,\ell)$ は 2 通りの式で書くことができ，(3.34) に対して $k\leftrightarrow\ell$, $a\leftrightarrow b$ とした，

$$A(k,\ell)=\left(1-\frac{b}{a}q^{\ell-k}\right)\frac{(bx;q)_\ell(q^{\ell+1};q)_k(ax;q)_k}{(b/a;q)_{\ell+1}(q;q)_k((a/b)q;q)_k}q^k \tag{3.38}$$

も解となる．これを (3.13) 式に代入しても同様の恒等式が得られる．

3.3 第 2 $(a,b;q)$–拡張の証明

第 2 $(a,b;q)$–拡張された恒等式に対しては，関数 $h(i,j)$ を

$$h(i,j)=\frac{(1-axq^i)(1-(a/x)q^i)}{(1-abq^{i+j})(1-(a/b)q^{i-j})} \tag{3.39}$$

と設定する．すると，

$$
\begin{aligned}
1-h(i,j) &= \frac{(1-abq^{i+j})(1-(a/b)q^{i-j})-(1-axq^i)(1-(a/x)q^i)}{(1-abq^{i+j})(1-(a/b)q^{i-j})} \\
&= \frac{(a/x)q^i+axq^i-(a/b)q^{i-j}-abq^{i+j}}{(1-abq^{i+j})(1-(a/b)q^{i-j})} = \frac{-(a/b)q^{i-j}(1-(b/x)q^j-bxq^j+b^2q^{2j})}{-(a/b)q^{i-j}(1-abq^{i+j})(1-(b/a)q^{j-i})} \\
&= \frac{(1-bxq^j)(1-(b/x)q^j)}{(1-abq^{i+j})(1-(b/a)q^{j-i})}. \qquad (3.40)
\end{aligned}
$$

このとき $k\in\{1,2,\ldots,m\}$, $\ell\in\{1,2,\ldots,n\}$ について

$$
\frac{(1-axq^{k-1})(1-(a/x)q^{k-1})}{(1-abq^{k+\ell-1})(1-(a/b)q^{k-\ell-1})}A(k-1,\ell)+\frac{(1-bxq^{\ell-1})(1-(b/x)q^{\ell-1})}{(1-abq^{k+\ell-1})(1-(b/a)q^{\ell-k-1})}A(k,\ell-1)=A(k,\ell),
$$

$$
A(k,0)=\prod_{i=0}^{k-1}\frac{(1-axq^i)(1-(a/x)q^i)}{(1-abq^i)(1-(a/b)q^i)}=\frac{(ax,a/x;q)_k}{(ab,a/b;q)_k},
$$

$$
A(0,\ell)=\prod_{j=0}^{\ell-1}\frac{(1-bxq^j)(1-(b/x)q^j)}{(1-abq^j)(1-(b/a)q^j)}=\frac{(bx,b/x;q)_\ell}{(ab,b/a;q)_\ell} \qquad (3.41)
$$

となる．ここで

$$
A(k,\ell)=B(k,\ell)\frac{(ax,a/x;q)_k}{(ab,a/b;q)_k}\frac{(bx,b/x;q)_\ell}{(ab,b/a;q)_\ell} \qquad (3.42)
$$

であるから，漸化式は $k\in\{1,2,\ldots,m\}$, $\ell\in\{1,2,\ldots,n\}$ について

$$
\frac{(1-abq^{k-1})(1-(a/b)q^{k-1})}{(1-abq^{k+\ell-1})(1-(a/b)q^{k-\ell-1})}B(k-1,\ell)+\frac{(1-abq^{\ell-1})(1-(b/a)q^{\ell-1})}{(1-abq^{k+\ell-1})(1-(b/a)q^{\ell-k-1})}B(k,\ell-1)=B(k,\ell) \qquad (3.43)
$$

と書きかえられる．これを解くと，

$$
B(k,\ell)=\frac{(1-(a/b)q^{k-\ell})(1-(b/a))(ab;q)_\ell}{(1-(a/b)q^k)(1-(b/a)q^\ell)(abq^k;q)_\ell}q^\ell\frac{(q^{k+1};q)_\ell}{(q;q)_\ell}. \qquad (3.44)
$$

(3.44) が (3.43) 式の解になっていることを示す．左辺に代入して変形すると，

$$
\begin{aligned}
&\frac{(1-abq^{k-1})(1-(a/b)q^{k-1})}{(1-abq^{k+\ell-1})(1-(a/b)q^{k-\ell-1})}\times\frac{(1-(a/b)q^{k-\ell-1})(1-(b/a))(ab;q)_\ell}{(1-(a/b)q^{k-1})(1-(b/a)q^{\ell})(abq^{k-1};q)_\ell}q^\ell\frac{(q^k;q)_\ell}{(q;q)_\ell}\\
&+\frac{(1-abq^{\ell-1})(1-(b/a)q^{\ell-1})}{(1-abq^{k+\ell-1})(1-(b/a)q^{\ell-k-1})}\times\frac{(1-(a/b)q^{k-\ell+1})(1-(b/a))(ab;q)_{\ell-1}}{(1-(a/b)q^{k})(1-(b/a)q^{\ell-1})(abq^{k};q)_{\ell-1}}q^{\ell-1}\frac{(q^{k+1};q)_{\ell-1}}{(q;q)_{\ell-1}}\\
&=\frac{(1-(b/a))(ab;q)_\ell q^\ell(q^k;q)_\ell}{(1-(b/a)q^\ell)(abq^k;q)_\ell(q;q)_\ell}+\frac{(1-(a/b)q^{k-\ell+1})(1-(b/a))(ab;q)_\ell q^{\ell-1}(q^{k+1};q)_{\ell-1}}{(1-(b/a)q^{\ell-k-1})(1-(a/b)q^k)(abq^k;q)_\ell(q;q)_{\ell-1}}\\
&=\frac{(1-(b/a))(ab;q)_\ell q^\ell(q^{k+1};q)_\ell}{(1-(a/b)q^k)(1-(b/a)q^\ell)(abq^k;q)_\ell(q;q)_\ell}\left(\frac{(1-(a/b)q^k)(1-q^k)}{1-q^{k+\ell}}-\frac{a}{b}q^{k-\ell}\frac{(1-(b/a)q^\ell)(1-q^\ell)}{1-q^{k+\ell}}\right)\\
&=\frac{(1-(a/b)q^{k-\ell})(1-(b/a))(ab;q)_\ell q^\ell(q^{k+1};q)_\ell}{(1-(a/b)q^k)(1-(b/a)q^\ell)(abq^k;q)_\ell(q;q)_\ell}=B(k,\ell). \qquad (3.45)
\end{aligned}
$$

さらに，境界条件は

$$
\begin{aligned}
B(k,0)&=\frac{(1-(a/b)q^k)(1-(b/a))}{(1-(a/b)q^k)(1-(b/a))}=1,\\
B(0,\ell)&=\frac{(1-(a/b)q^{-\ell})(1-(b/a))(ab;q)_\ell q^\ell(q;q)_\ell}{(1-(a/b))(1-(b/a)q^\ell)(ab;q)_\ell(q;q)_\ell}\\
&=\frac{(1-(a/b)q^{-\ell})(1-(b/a))q^\ell}{(1-(a/b))(1-(b/a)q^\ell)}=1. \qquad (3.46)
\end{aligned}
$$

よって (3.44) は漸化式を満たす．
$A(k,\ell)$ は (3.42)，(3.44) より

$$
\begin{aligned}
A(k,\ell)=&\left(1-\frac{a}{b}q^{k-\ell}\right)\\
&\times\frac{(ax,a/x;q)_k}{(1-(a/b)q^k)(a/b;q)_k}\frac{1-b/a}{(1-(b/a)q^\ell)(b/a;q)_\ell}\frac{(bx,b/x;q)_\ell}{(abq^k;q)_\ell}\frac{(ab;q)_\ell}{(ab;q)_k(ab;q)_\ell}\frac{(q^{k+1};q)_\ell}{(q;q)_\ell}q^\ell\\
=&\left(1-\frac{a}{b}q^{k-\ell}\right)\frac{(ax,a/x;q)_k(q^{k+1};q)_\ell(bx,b/x;q)_\ell}{(a/b;q)_{k+1}(q;q)_\ell((b/a)q;q)_\ell(ab;q)_{k+\ell}}q^\ell. \qquad (3.47)
\end{aligned}
$$

$h(i,j)$, $A(k,\ell)$ を (3.13) 式に代入すると，

$$1=\sum_{k=0}^{m}\frac{(1-bxq^n)(1-(b/x)q^n)}{(1-abq^{k+n})(1-(b/a)q^{n-k})}\left(1-\frac{a}{b}q^{k-n}\right)\frac{(ax;q)_k(a/x;q)_k(q^{k+1};q)_n(bx;q)_n(b/x;q)_n}{(a/b;q)_{k+1}(q;q)_n((b/a)q;q)_n(ab;q)_{k+n}}q^n$$
$$+\sum_{\ell=0}^{n}\frac{(1-axq^m)(1-(a/x)q^m)}{(1-abq^{m+\ell})(1-(a/b)q^{m-\ell})}\left(1-\frac{a}{b}q^{m-\ell}\right)\frac{(ax;q)_m(a/x;q)_m(q^{m+1};q)_\ell(bx;q)_\ell(b/x;q)_\ell}{(a/b;q)_{m+1}(q;q)_\ell((b/a)q;q)_\ell(ab;q)_{m+\ell}}q^\ell. \tag{3.48}$$

ここで，

$$(1-abq^{k+n})(ab;q)_{k+n}=(ab;q)_{n+1}(abq^{n+1};q)_k \tag{3.49}$$

と (3.36) 等を用いて変形すれば

$$1=\frac{(bx,b/x;q)_{n+1}}{(ab,b/a;q)_{n+1}}\sum_{k=0}^{m}\frac{(q^{n+1},ax,a/x;q)_k}{(q,(a/b)q,abq^{n+1};q)_k}q^k+\frac{(ax,a/x;q)_{m+1}}{(ab,a/b;q)_{m+1}}\sum_{\ell=0}^{n}\frac{(q^{m+1},bx,b/x;q)_\ell}{(q,(b/a)q,abq^{m+1};q)_\ell}q^\ell. \tag{3.50}$$

よって第 2 $(a,b;q)$–拡張された Chaundy–Bullard 恒等式 (2.3) が示された．

なお，この拡張でも座標とパラメータの入れ替え対称性が存在しているため，(3.47) に対して $k\leftrightarrow\ell$, $a\leftrightarrow b$ とした，

$$A(k,\ell)=\left(1-\frac{b}{a}q^{\ell-k}\right)\frac{(bx,b/x;q)_\ell(q^{\ell+1};q)_k(ax,a/x;q)_k}{(b/a;q)_{\ell+1}(q;q)_k((a/b)q;q)_k(ab;q)_{k+\ell}}q^k. \tag{3.51}$$

も解となる．

3.4 $(a,b,c;q)$–拡張の証明

$(a,b,c;q)$–拡張された恒等式に対しては，関数 $h(i,j)$ を

$$h(i,j)=\frac{(1-bcq^{i+2j})(1-(c/b)q^i)(1-axq^i)(1-(a/x)q^i)}{(1-abq^{i+j})(1-(a/b)q^{i-j})(1-cxq^{i+j})(1-(c/x)q^{i+j})}. \tag{3.52}$$

と設定する．すると，

$$\begin{aligned}1-h(i,j)&=1+\frac{b}{a}q^{j-i}\frac{(1-bcq^{i+2j})(1-(c/b)q^i)(1-axq^i)(1-(a/x)q^i)}{(1-abq^{i+j})(1-(b/a)q^{j-i})(1-cxq^{i+j})(1-(c/x)q^{i+j})}\\&=\frac{(1-acq^{2i+j})(1-(c/a)q^j)(1-bxq^j)(1-(b/x)q^j)}{(1-abq^{i+j})(1-(b/a)q^{j-i})(1-cxq^{i+j})(1-(c/x)q^{i+j})}.\end{aligned} \tag{3.53}$$

このとき $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$, $\ell \in \{1, 2, \ldots, n\}$ について

$$\frac{(1-bcq^{k+2\ell-1})(1-(c/b)q^{k-1})(1-axq^{k-1})(1-(a/x)q^{k-1})}{(1-abq^{k+\ell-1})(1-(a/b)q^{k-\ell-1})(1-cxq^{k+\ell-1})(1-(c/x)q^{k+\ell-1})}A(k-1,\ell)$$
$$+\frac{(1-acq^{2k+\ell-1})(1-(c/a)q^{\ell-1})(1-bxq^{\ell-1})(1-(b/x)q^{\ell-1})}{(1-abq^{k+\ell-1})(1-(b/a)q^{\ell-k-1})(1-cxq^{k+\ell-1})(1-(c/x)q^{k+\ell-1})}A(k,\ell-1) = A(k,\ell),$$

$$A(k,0) = \prod_{i=0}^{k-1}\frac{(1-bcq^i)(1-(c/b)q^i)(1-axq^i)(1-(a/x)q^i)}{(1-abq^i)(1-(a/b)q^i)(1-cxq^i)(1-(c/x)q^i)} = \frac{(bc,c/b,ax,a/x;q)_k}{(ab,a/b,cx,c/x;q)_k},$$
$$A(0,\ell) = \prod_{j=0}^{\ell-1}\frac{(1-acq^j)(1-(c/a)q^j)(1-bxq^j)(1-(b/x)q^j)}{(1-abq^j)(1-(b/a)q^j)(1-cxq^j)(1-(c/x)q^j)} = \frac{(ac,c/a,bx,b/x;q)_\ell}{(ab,b/a,cx,c/x;q)_\ell} \quad (3.54)$$

となる．ここで

$$A(k,\ell) = B(k,\ell)\frac{(bc,c/b,ax,a/x;q)_k}{(ab,a/b,cx,c/x;q)_k}\frac{(ac,c/a,bx,b/x;q)_\ell}{(ab,b/a,cx,c/x;q)_\ell} \quad (3.55)$$

であるから，漸化式は $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$, $\ell \in \{1, 2, \ldots, n\}$ について

$$\frac{(1-bcq^{k+2\ell-1})(1-abq^{k-1})(1-(a/b)q^{k-1})(1-cxq^{k-1})(1-(c/x)q^{k-1})}{(1-abq^{k+\ell-1})(1-(a/b)q^{k-\ell-1})(1-cxq^{k+\ell-1})(1-(c/x)q^{k+\ell-1})(1-bcq^{k-1})}B(k-1,\ell)$$
$$+\frac{(1-acq^{2k+\ell-1})(1-abq^{\ell-1})(1-(b/a)q^{\ell-1})(1-cxq^{\ell-1})(1-(c/x)q^{\ell-1})}{(1-abq^{k+\ell-1})(1-(b/a)q^{\ell-k-1})(1-cxq^{k+\ell-1})(1-(c/x)q^{k+\ell-1})(1-acq^{\ell-1})}B(k,\ell-1)$$
$$= B(k,\ell) \quad (3.56)$$

と書きかえられる．これを解くと，

$$B(k,\ell) = \frac{(1-(a/b)q^{k-\ell})(1-(b/a))(bcq^\ell;q)_k(acq^k;q)_\ell(ab,cx,c/x;q)_\ell}{(1-(a/b)q^k)(1-(b/a)q^\ell)(bc;q)_k(ac;q)_\ell(abq^k,cxq^k,(c/x)q^k;q)_\ell}q^\ell\frac{(q^{k+1};q)_\ell}{(q;q)_\ell}. \quad (3.57)$$

(3.57) が (3.56) 式の解になっていることを示す．左辺に代入して変形すると，

$$
\begin{aligned}
&\frac{(1-bcq^{k+2\ell-1})(1-abq^{k-1})(1-(a/b)q^{k-1})(1-cxq^{k-1})(1-(c/x)q^{k-1})}{(1-abq^{k+\ell-1})(1-(a/b)q^{k-\ell-1})(1-cxq^{k+\ell-1})(1-(c/x)q^{k+\ell-1})(1-bcq^{k-1})}\\
&\qquad\times\frac{(1-(a/b)q^{k-\ell-1})(1-(b/a))(bcq^{\ell};q)_{k-1}(acq^{k-1};q)_{\ell}(ab,cx,c/x;q)_{\ell}}{(1-(a/b)q^{k-1})(1-(b/a)q^{\ell})(bc;q)_{k-1}(ac;q)_{\ell}(abq^{k-1},cxq^{k-1},(c/x)q^{k-1};q)_{\ell}}q^{\ell}\frac{(q^k;q)_{\ell}}{(q;q)_{\ell}}\\
&\quad+\frac{(1-acq^{2k+\ell-1})(1-abq^{\ell-1})(1-(b/a)q^{\ell-1})(1-cxq^{\ell-1})(1-(c/x)q^{\ell-1})}{(1-abq^{k+\ell-1})(1-(b/a)q^{\ell-k-1})(1-cxq^{k+\ell-1})(1-(c/x)q^{k+\ell-1})(1-acq^{\ell-1})}\\
&\qquad\times\frac{(1-(a/b)q^{k-\ell+1})(1-(b/a))(bcq^{\ell-1};q)_{k}(acq^{k};q)_{\ell-1}(ab,cx,c/x;q)_{\ell-1}}{(1-(a/b)q^{k})(1-(b/a)q^{\ell-1})(bc;q)_{k}(ac;q)_{\ell-1}(abq^{k},cxq^{k},(c/x)q^{k};q)_{\ell-1}}q^{\ell-1}\frac{(q^{k+1};q)_{\ell-1}}{(q;q)_{\ell-1}}\\
&=\frac{(1-bcq^{k+2\ell-1})(1-(b/a))(bcq^{\ell};q)_{k-1}(acq^{k-1};q)_{\ell}(ab,cx,c/x;q)_{\ell}q^{\ell}(q^k;q)_{\ell}}{(1-(b/a)q^{\ell})(bc;q)_{k}(ac;q)_{\ell}(abq^{k},cxq^{k},(c/x)q^{k};q)_{\ell}(q;q)_{\ell}}\\
&\quad-\frac{a}{b}q^{k-\ell+1}\frac{(1-acq^{2k+\ell-1})(1-(b/a))(bcq^{\ell-1};q)_{k}(acq^{k};q)_{\ell-1}(ab,cx,c/x;q)_{\ell}q^{\ell-1}(q^{k+1};q)_{\ell-1}}{(1-(a/b)q^{k})(bc;q)_{k}(ac;q)_{\ell}(abq^{k},cxq^{k},(c/x)q^{k};q)_{\ell}(q;q)_{\ell-1}}\\
&=\frac{(1-(b/a))(bcq^{\ell};q)_{k}(acq^{k};q)_{\ell}(ab,cx,c/x;q)_{\ell}q^{\ell}(q^{k+1};q)_{\ell}}{(1-(a/b)q^{k})(1-(b/a)q^{\ell})(bc;q)_{k}(ac;q)_{\ell}(abq^{k},cxq^{k},(c/x)q^{k};q)_{\ell}(q;q)_{\ell}}\\
&\qquad\times\Bigg(\frac{(1-bcq^{k+2\ell-1})(1-acq^{k-1})(1-q^{k})(1-(a/b)q^{k})}{(1-acq^{k+\ell-1})(1-bcq^{k+\ell-1})(1-q^{k+\ell})}\\
&\qquad\qquad-\frac{a}{b}q^{k-\ell}\frac{(1-acq^{2k+\ell-1})(1-bcq^{\ell-1})(1-q^{\ell})(1-(b/a)q^{\ell})}{(1-acq^{k+\ell-1})(1-bcq^{k+\ell-1})(1-q^{k+\ell})}\Bigg)\\
&=\frac{(1-(a/b)q^{k-\ell})(1-(b/a))(bcq^{\ell};q)_{k}(acq^{k};q)_{\ell}(ab,cx,c/x;q)_{\ell}}{(1-(a/b)q^{k})(1-(b/a)q^{\ell})(bc;q)_{k}(ac;q)_{\ell}(abq^{k},cxq^{k},(c/x)q^{k};q)_{\ell}}q^{\ell}\frac{(q^{k+1};q)_{\ell}}{(q;q)_{\ell}}=B(k,\ell).
\end{aligned}
\tag{3.58}
$$

さらに，境界条件は

$$
\begin{aligned}
B(k,0)&=\frac{(1-(a/b)q^{k})(1-(b/a))(bc;q)_{k}}{(1-(a/b)q^{k})(1-(b/a))(bc;q)_{k}}=1,\\
B(0,\ell)&=\frac{(1-(a/b)q^{-\ell})(1-(b/a))(ac;q)_{\ell}(ab,cx,c/x;q)_{\ell}(q;q)_{\ell}}{(1-(a/b))(1-(b/a)q^{\ell})(ac;q)_{\ell}(ab,cx,c/x;q)_{\ell}(q;q)_{\ell}}q^{\ell}\\
&=\frac{(1-(a/b)q^{-\ell})(1-(b/a))q^{\ell}}{(1-(a/b))(1-(b/a)q^{\ell})}=1.
\end{aligned}
\tag{3.59}
$$

よって (3.57) は漸化式を満たす.
$A(k,\ell)$ は (3.55), (3.57) より

$$A(k,\ell)=\frac{(1-(a/b)q^{k-\ell})(1-(b/a))(bcq^{\ell};q)_k(acq^k;q)_\ell(ab,cx,c/x;q)_\ell}{(1-(a/b)q^k)(1-(b/a)q^\ell)(bc;q)_k(ac;q)_\ell(abq^k,cxq^k,(c/x)q^k;q)_\ell}q^\ell\frac{(q^{k+1};q)_\ell}{(q;q)_\ell}$$
$$\times\frac{(bc,c/b,ax,a/x;q)_k}{(ab,a/b,cx,c/x;q)_k}\frac{(ac,c/a,bx,b/x;q)_\ell}{(ab,b/a,cx,c/x;q)_\ell}$$
$$=\left(1-\frac{a}{b}q^{k-\ell}\right)\frac{(1-(b/a))(bcq^\ell;q)_k(acq^k;q)_\ell}{(1-(a/b)q^k)(1-(b/a)q^\ell)(ab;q)_{k+\ell}(cxq^k,(c/x)q^k;q)_\ell}q^\ell\frac{(q^{k+1};q)_\ell}{(q;q)_\ell}$$
$$\times\frac{(c/b,ax,a/x;q)_k}{(a/b,cx,c/x;q)_k}\frac{(c/a,bx,b/x;q)_\ell}{(ab,b/a;q)_\ell}$$
$$=\left(1-\frac{a}{b}q^{k-\ell}\right)\frac{(bcq^\ell,c/b,ax,a/x;q)_k(q^{k+1};q)_\ell(acq^k,c/a,bx,b/x;q)_\ell}{(a/b;q)_{k+1}(q;q)_\ell((b/a)q;q)_\ell(ab,cx,c/x;q)_{k+\ell}}q^\ell. \tag{3.60}$$

$h(i,j)$, $A(k,\ell)$ を (3.13) 式に代入すると,

$$1=\sum_{k=0}^{m}\frac{(1-acq^{2k+n})(1-(c/a)q^n)(1-bxq^n)(1-(b/x)q^n)}{(1-abq^{k+n})(1-(b/a)q^{n-k})(1-cxq^{k+n})(1-(c/x)q^{k+n})}$$
$$\times\left(1-\frac{a}{b}q^{k-n}\right)\frac{(bcq^n,c/b,ax,a/x;q)_k(q^{k+1};q)_n(acq^k,c/a,bx,b/x;q)_n}{(a/b;q)_{k+1}(q;q)_n((b/a)q;q)_n(ab,cx,c/x;q)_{k+n}}q^n$$
$$+\sum_{\ell=0}^{n}\frac{(1-bcq^{m+2\ell})(1-(c/b)q^m)(1-axq^m)(1-(a/x)q^m)}{(1-abq^{m+\ell})(1-(a/b)q^{m-\ell})(1-cxq^{m+\ell})(1-(c/x)q^{m+\ell})}$$
$$\times\left(1-\frac{a}{b}q^{m-\ell}\right)\frac{(bcq^\ell,c/b,ax,a/x;q)_m(q^{m+1};q)_\ell(acq^m,c/a,bx,b/x;q)_\ell}{(a/b;q)_{m+1}(q;q)_\ell((b/a)q;q)_\ell(ab,cx,c/x;q)_{m+\ell}}q^\ell. \tag{3.61}$$

ここで,

$$(acq^k;q)_n=\frac{(ac;q)_{n+k+1}}{(ac;q)_k}=\frac{(ac;q)_{n+1}(acq^n;q)_k}{(1-acq^n)(ac;q)_k} \tag{3.62}$$

と (3.36), (3.49) 等を用いて変形すれば

$$1=\frac{(ac,c/a,bx,b/x;q)_{n+1}}{(ab,b/a,cx,c/x;q)_{n+1}}\sum_{k=0}^{m}\frac{(1-acq^{n+2k})(acq^n,bcq^n,c/b,q^{n+1},ax,a/x;q)_k}{(1-acq^n)(q,(a/b)q,abq^{n+1},ac,cxq^{n+1},(c/x)q^{n+1};q)_k}q^k$$
$$+\frac{(bc,c/b,ax,a/x;q)_{m+1}}{(ab,a/b,cx,c/x;q)_{m+1}}\sum_{\ell=0}^{n}\frac{(1-bcq^{m+2\ell})(bcq^m,acq^m,c/a,q^{m+1},bx,b/x;q)_\ell}{(1-bcq^m)(q,(b/a)q,abq^{m+1},bc,cxq^{m+1},(c/x)q^{m+1};q)_\ell}q^\ell. \tag{3.63}$$

よって $(a,b,c;q)$–拡張された Chaundy–Bullard 恒等式 (2.4) が示された.

なお，この拡張でも座標とパラメータの入れ替え対称性が存在しているため，(3.60) に対して $k \leftrightarrow \ell$, $a \leftrightarrow b$ とした,

$$A(k,\ell) = \left(1 - \frac{b}{a}q^{\ell-k}\right) \frac{(acq^k, c/a, bx, b/x; q)_\ell (q^{\ell+1}; q)_k (bcq^\ell, c/b, ax, a/x; q)_k}{(b/a; q)_{\ell+1}(q; q)_k((a/b)q; q)_k(ab, cx, c/x; q)_{k+\ell}} q^k \tag{3.64}$$

も解となる．

3.5 楕円関数拡張の証明

楕円関数拡張された恒等式に対しては，関数 $h(i,j)$ を

$$h(i,j) = \frac{\theta(bcq^{i+2j}, (c/b)q^i, axq^i, (a/x)q^i; p)}{\theta(abq^{i+j}, (a/b)q^{i-j}, cxq^{i+j}, (c/x)q^{i+j}; p)} \tag{3.65}$$

と設定する．すると,

$$1 - h(i,j) = 1 + \frac{b}{a}q^{j-i}\frac{\theta(bcq^{i+2j}, (c/b)q^i, axq^i, (a/x)q^i; p)}{\theta(abq^{i+j}, (b/a)q^{j-i}, cxq^{i+j}, (c/x)q^{i+j}; p)}. \tag{3.66}$$

変形 Jacobi テータ関数には，Weierstrass–Riemann の加法定理 [4] と呼ばれる以下の関係式がある,

$$\theta(zy, z/y, uv, u/v; p) - \theta(zv, z/v, uy, u/y; p) = \frac{u}{y}\theta(yv, y/v, zu, z/u; p). \tag{3.67}$$

今，$z \to cq^{i+j}$, $y \to aq^i$, $u \to bq^j$, $v \to x$ のようにおきかえて変形すると，(3.67) は

$$\begin{aligned} &\theta(abq^{i+j}, (b/a)q^{j-i}, cxq^{i+j}, (c/x)q^{i+j}; p) + \frac{b}{a}q^{j-i}\theta(bcq^{i+2j}, (c/b)q^i, axq^i, (a/x)q^i; p) \\ &= \theta(acq^{2i+j}, (c/a)q^j, bxq^j, (b/x)q^j; p) \end{aligned} \tag{3.68}$$

となる．これを用いて,

$$1 - h(i,j) = \frac{\theta(acq^{2i+j}, (c/a)q^j, bxq^j, (b/x)q^j; p)}{\theta(abq^{i+j}, (b/a)q^{j-i}, cxq^{i+j}, (c/x)q^{i+j}; p)}. \tag{3.69}$$

このとき $k \in \{1,2,\ldots,m\}$, $\ell \in \{1,2,\ldots,n\}$ について

$$\begin{aligned}
&\frac{\theta(bcq^{k+2\ell-1},(c/b)q^{k-1},axq^{k-1},(a/x)q^{k-1};p)}{\theta(abq^{k+\ell-1},(a/b)q^{k-\ell-1},cxq^{k+\ell-1},(c/x)q^{k+\ell-1};p)}A(k-1,\ell) \\
&\quad+\frac{\theta(acq^{2k+\ell-1},(c/a)q^{\ell-1},bxq^{\ell-1},(b/x)q^{\ell-1};p)}{\theta(abq^{k+\ell-1},(b/a)q^{\ell-k-1},cxq^{k+\ell-1},(c/x)q^{k+\ell-1};p)}A(k,\ell-1)=A(k,\ell), \\
&A(k,0)=\prod_{i=0}^{k-1}\frac{\theta(bcq^i,(c/b)q^i,axq^i,(a/x)q^i;p)}{\theta(abq^i,(a/b)q^i,cxq^i,(c/x)q^i;p)}=\frac{(bc,c/b,ax,a/x;q,p)_k}{(ab,a/b,cx,c/x;q,p)_k}, \\
&A(0,\ell)=\prod_{j=0}^{\ell-1}\frac{\theta(acq^j,(c/a)q^j,bxq^j,(b/x)q^j;p)}{\theta(abq^j,(b/a)q^j,cxq^j,(c/x)q^j;p)}=\frac{(ac,c/a,bx,b/x;q,p)_\ell}{(ab,b/a,cx,c/x;q,p)_\ell}.
\end{aligned} \tag{3.70}$$

ここで

$$A(k,\ell)=B(k,\ell)\frac{(bc,c/b,ax,a/x;q,p)_k}{(ab,a/b,cx,c/x;q,p)_k}\frac{(ac,c/a,bx,b/x;q,p)_\ell}{(ab,b/a,cx,c/x;q,p)_\ell} \tag{3.71}$$

であるから，漸化式は $k \in \{1,2,\ldots,m\}$, $\ell \in \{1,2,\ldots,n\}$ について

$$\begin{aligned}
&\frac{\theta(bcq^{k+2\ell-1},abq^{k-1},(a/b)q^{k-1},cxq^{k-1},(c/x)q^{k-1};p)}{\theta(abq^{k+\ell-1},(a/b)q^{k-\ell-1},cxq^{k+\ell-1},(c/x)q^{k+\ell-1},bcq^{k-1};p)}B(k-1,\ell) \\
&+\frac{\theta(acq^{2k+\ell-1},abq^{\ell-1},(b/a)q^{\ell-1},cxq^{\ell-1},(c/x)q^{\ell-1};p)}{\theta(abq^{k+\ell-1},(b/a)q^{\ell-k-1},cxq^{k+\ell-1},(c/x)q^{k+\ell-1},acq^{\ell-1};p)}B(k,\ell-1) \\
&=B(k,\ell)
\end{aligned} \tag{3.72}$$

と書きかえられる．これを解くと，

$$B(k,\ell)=\frac{\theta((a/b)q^{k-\ell},b/a;p)(bcq^\ell;q,p)_k(acq^k;q,p)_\ell(ab,cx,c/x;q,p)_\ell}{\theta((a/b)q^k,(b/a)q^\ell;p)(bc;q,p)_k(ac;q,p)_\ell(abq^k,cxq^k,(c/x)q^k;q,p)_\ell}q^\ell\frac{(q^{k+1};q,p)_\ell}{(q;q,p)_\ell}. \tag{3.73}$$

(3.73) が (3.72) 式の解になっていることを示す．左辺に代入して変形すると，

$$
\begin{aligned}
&\frac{\theta(bcq^{k+2\ell-1}, abq^{k-1}, (a/b)q^{k-1}, cxq^{k-1}, (c/x)q^{k-1}; p)}{\theta(abq^{k+\ell-1}, (a/b)q^{k-\ell-1}, cxq^{k+\ell-1}, (c/x)q^{k+\ell-1}, bcq^{k-1}; p)} \\
&\quad\times \frac{\theta((a/b)q^{k-\ell-1}, b/a; p)(bcq^{\ell}; q, p)_{k-1}(acq^{k-1}; q, p)_{\ell}(ab, cx, c/x; q, p)_{\ell}}{\theta((a/b)q^{k-1}, (b/a)q^{\ell}; p)(bc; q, p)_{k-1}(ac; q, p)_{\ell}(abq^{k-1}, cxq^{k-1}, (c/x)q^{k-1}; q, p)_{\ell}} q^{\ell} \frac{(q^k; q, p)_{\ell}}{(q; q, p)_{\ell}} \\
&\quad + \frac{\theta(acq^{2k+\ell-1}, abq^{\ell-1}, (b/a)q^{\ell-1}, cxq^{\ell-1}, (c/x)q^{\ell-1}; p)}{\theta(abq^{k+\ell-1}, (b/a)q^{\ell-k-1}, cxq^{k+\ell-1}, (c/x)q^{k+\ell-1}, acq^{\ell-1})} \\
&\quad\times \frac{\theta((a/b)q^{k-\ell+1}, b/a; p)(bcq^{\ell-1}; q, p)_{k}(acq^{k}; q, p)_{\ell-1}(ab, cx, c/x; q, p)_{\ell-1}}{\theta((a/b)q^{k}, (b/a)q^{\ell-1}; p)(bc; q, p)_{k}(ac; q, p)_{\ell-1}(abq^{k}, cxq^{k}, (c/x)q^{k}; q, p)_{\ell-1}} q^{\ell-1} \frac{(q^{k+1}; q, p)_{\ell-1}}{(q; q, p)_{\ell-1}} \\
&= \frac{\theta(bcq^{k+2\ell-1}, b/a; p)(bcq^{\ell}; q, p)_{k-1}(acq^{k-1}; q, p)_{\ell}(ab, cx, c/x; q, p)_{\ell} q^{\ell}(q^k; q, p)_{\ell}}{\theta((b/a)q^{\ell}; p)(bc; q, p)_{k}(ac; q, p)_{\ell}(abq^{k}, cxq^{k}, (c/x)q^{k}; q, p)_{\ell}(q; q, p)_{\ell}} \\
&\quad - \frac{a}{b}q^{k-\ell+1} \frac{\theta(acq^{2k+\ell-1}, b/a; p)(bcq^{\ell-1}; q, p)_{k}(acq^{k}; q, p)_{\ell-1}(ab, cx, c/x; q, p)_{\ell} q^{\ell-1}(q^{k+1}; q, p)_{\ell-1}}{\theta((a/b)q^{k}; p)(bc; q, p)_{k}(ac; q, p)_{\ell}(abq^{k}, cxq^{k}, (c/x)q^{k}; q, p)_{\ell}(q; q, p)_{\ell-1}} \\
&= \frac{\theta(b/a; p)(bcq^{\ell}; q, p)_{k}(acq^{k}; q, p)_{\ell}(ab, cx, c/x; q, p)_{\ell} q^{\ell}(q^{k+1}; q, p)_{\ell}}{\theta((a/b)q^{k}, (b/a)q^{\ell}; p)(bc; q, p)_{k}(ac; q, p)_{\ell}(abq^{k}, cxq^{k}, (c/x)q^{k}; q, p)_{\ell}(q; q, p)_{\ell}} \\
&\quad\times \left(\frac{\theta(bcq^{k+2\ell-1}, acq^{k-1}, q^k, (a/b)q^k; p)}{\theta(acq^{k+\ell-1}, bcq^{k+\ell-1}, q^{k+\ell}; p)} - \frac{a}{b}q^{k-\ell} \frac{\theta(acq^{2k+\ell-1}, bcq^{\ell-1}, q^{\ell}, (b/a)q^{\ell}; p)}{\theta(acq^{k+\ell-1}, bcq^{k+\ell-1}, q^{k+\ell}; p)} \right).
\end{aligned}
\tag{3.74}
$$

これを $B(k,\ell)$ と比較すると，

$$
\frac{\theta(bcq^{k+2\ell-1}, acq^{k-1}, q^k, (a/b)q^k; p) - (a/b)q^{k-\ell}\theta(acq^{2k+\ell-1}, bcq^{\ell-1}, q^{\ell}, (b/a)q^{\ell}; p)}{\theta(acq^{k+\ell-1}, bcq^{k+\ell-1}, q^{k+\ell}; p)} = \theta\left(\frac{a}{b}q^{k-\ell}; p\right)
$$

が成り立てばよいとわかる．ここで，(3.67) について
$z \to a^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{2}}q^{k+\ell-\frac{1}{2}}$, $y \to a^{-\frac{1}{2}}bc^{\frac{1}{2}}q^{\ell-\frac{1}{2}}$, $u \to a^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{2}}q^{k-\frac{1}{2}}$, $v \to a^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{2}}q^{-\frac{1}{2}}$ とすると，

$$
\begin{aligned}
&\theta(bcq^{k+2\ell-1}, (a/b)q^k, acq^{k-1}, q^k; p) - \frac{a}{b}q^{k-\ell}\theta(bcq^{\ell-1}, (b/a)q^{\ell}, acq^{2k+\ell-1}, q^{\ell}; p) \\
&= \theta(acq^{k+\ell-1}, q^{k+\ell}, bcq^{k+\ell-1}, (a/b)q^{k-\ell}; p).
\end{aligned}
\tag{3.75}
$$

よって

$$
\begin{aligned}
(3.74) &= \frac{\theta((a/b)q^{k-\ell}, b/a; p)(bcq^{\ell}; q, p)_{k}(acq^{k}; q, p)_{\ell}(ab, cx, c/x; q, p)_{\ell}}{\theta((a/b)q^{k}, (b/a)q^{\ell}; p)(bc; q, p)_{k}(ac; q, p)_{\ell}(abq^{k}, cxq^{k}, (c/x)q^{k}; q, p)_{\ell}} q^{\ell} \frac{(q^{k+1}; q, p)_{\ell}}{(q; q, p)_{\ell}} \\
&= B(k, \ell).
\end{aligned}
\tag{3.76}
$$

さらに，境界条件は

$$
\begin{aligned}
B(k,0) &= \frac{\theta((a/b)q^k, b/a;p)(bc;q,p)_k}{\theta((a/b)q^k, b/a;p)(bc;q,p)_k} = 1, \\
B(0,\ell) &= \frac{\theta((a/b)q^{-\ell}, b/a;p)(ac;q,p)_\ell(ab,cx,c/x;q,p)_\ell(q;q,p)_\ell}{\theta(a/b,(b/a)q^\ell;p)(ac;q,p)_\ell(ab,cx,c/x;q,p)_\ell(q;q,p)_\ell}q^\ell \\
&= \frac{\theta((a/b)q^{-\ell}, b/a;p)q^\ell}{\theta(a/b,(b/a)q^\ell;p)} = \frac{-(a/b)q^{-\ell}\theta((b/a)q^\ell, b/a;p)q^\ell}{-(a/b)\theta(b/a,(b/a)q^\ell;p)} = 1. \qquad (3.77)
\end{aligned}
$$

よって (3.73) は漸化式を満たす.
$A(k,\ell)$ は (3.71), (3.73) より

$$
\begin{aligned}
A(k,\ell) &= \frac{\theta((a/b)q^{k-\ell}, b/a;p)(bcq^\ell;q,p)_k(acq^k;q,p)_\ell(ab,cx,c/x;q,p)_\ell}{\theta((a/b)q^k,(b/a)q^\ell;p)(bc;q,p)_k(ac;q,p)_\ell(abq^k,cxq^k,(c/x)q^k;q,p)_\ell}q^\ell\frac{(q^{k+1};q,p)_\ell}{(q;q,p)_\ell} \\
&\quad\times\frac{(bc,c/b,ax,a/x;q,p)_k}{(ab,a/b,cx,c/x;q,p)_k}\frac{(ac,c/a,bx,b/x;q,p)_\ell}{(ab,b/a,cx,c/x;q,p)_\ell} \\
&= \frac{\theta((a/b)q^{k-\ell}, b/a;p)(bcq^\ell;q,p)_k(acq^k;q,p)_\ell}{\theta((a/b)q^k,(b/a)q^\ell;p)(abq^k,cxq^k,(c/x)q^k;q,p)_\ell}q^\ell\frac{(q^{k+1};q,p)_\ell}{(q;q,p)_\ell} \\
&\quad\times\frac{(c/b,ax,a/x;q,p)_k}{(ab,a/b,cx,c/x;q,p)_k}\frac{(c/a,bx,b/x;q,p)_\ell}{(b/a;q,p)_\ell} \\
&= \theta\left(\frac{a}{b}q^{k-\ell};p\right)\frac{(bcq^\ell,c/b,ax,a/x;q,p)_k(q^{k+1};q,p)_\ell(acq^k,c/a,bx,b/x;q,p)_\ell}{(a/b;q,p)_{k+1}(q;q,p)_\ell((b/a)q;q,p)_\ell(ab,cx,c/x;q,p)_{k+\ell}}q^\ell. \qquad (3.78)
\end{aligned}
$$

ただし，楕円関数拡張された階乗の定義から，以下のような変形を行った.

$$
\begin{aligned}
(abq^k;q,p)_\ell(ab;q,p)_k &= \prod_{s=0}^{\ell-1}\theta(abq^{k+s};p)\times\prod_{u=0}^{k-1}\theta(abq^u;p) = (ab;q,p)_{k+\ell}, \\
\frac{\theta(b/a;p)}{\theta((b/a)q^\ell;p)(b/a;q,p)_\ell} &= \frac{1}{((b/a)q;q,p)_\ell}. \qquad (3.79)
\end{aligned}
$$

$h(i,j)$, $A(k,\ell)$ を (3.13) 式に代入すると，

$$\begin{aligned}
1 &= \sum_{k=0}^{m} \frac{\theta(acq^{2k+n}, (c/a)q^n, bxq^n, (b/x)q^n; p)}{\theta(abq^{k+n}, (b/a)q^{n-k}, cxq^{k+n}, (c/x)q^{k+n}; p)} \\
&\quad \times \theta\left(\frac{a}{b}q^{k-n}; p\right) \frac{(bcq^n, c/b, ax, a/x; q,p)_k (q^{k+1}; q,p)_n (acq^k, c/a, bx, b/x; q,p)_n}{(a/b; q,p)_{k+1} (q; q,p)_n ((b/a)q; q,p)_n (ab, cx, c/x; q,p)_{k+n}} q^n \\
&\quad + \sum_{\ell=0}^{n} \frac{\theta(bcq^{m+2\ell}, (c/b)q^m, axq^m, (a/x)q^m; p)}{\theta(abq^{m+\ell}, (a/b)q^{m-\ell}, cxq^{m+\ell}, (c/x)q^{m+\ell}; p)} \\
&\quad \times \theta\left(\frac{a}{b}q^{m-\ell}; p\right) \frac{(bcq^\ell, c/b, ax, a/x; q,p)_m (q^{m+1}; q,p)_\ell (acq^m, c/a, bx, b/x; q,p)_\ell}{(a/b; q,p)_{m+1} (q; q,p)_\ell ((b/a)q; q,p)_\ell (ab, cx, c/x; q,p)_{m+\ell}} q^\ell.
\end{aligned} \tag{3.80}$$

ここで

$$\begin{aligned}
(ab; q,p)_{k+n} \theta(abq^{k+n}; p) &= (ab; q,p)_{n+1} (abq^{n+1}; q,p)_k, \\
\theta((a/b)q^{k-n}; p) &= -\frac{a}{b} q^{k-n} \theta((b/a)q^{n-k}; p), \\
\frac{(q^{k+1}; q,p)_n}{(q; q,p)_n} &= \frac{(q; q,p)_{n+k}}{(q; q,p)_n (q; q,p)_k} = \frac{(q^{n+1}; q,p)_k}{(q; q,p)_k}, \\
(acq^k; q,p)_n &= \frac{(ac; q,p)_{n+1} (acq^n; q,p)_k}{(ac; q,p)_k \theta(acq^n; p)}, \\
(a/b; q,p)_{k+1} ((b/a)q; q,p)_n &= \theta(a/b; p) ((a/b)q; q,p)_k \frac{(b/a; q,p)_{n+1}}{\theta(b/a; p)} \\
&= -\frac{a}{b} ((a/b)q; q,p)_k (b/a; q,p)_{n+1}
\end{aligned} \tag{3.81}$$

等の変形を行うことで，

$$\begin{aligned}
1 &= \frac{(ac, c/a, bx, b/x; q,p)_{n+1}}{(ab, b/a, cx, c/x; q,p)_{n+1}} \sum_{k=0}^{m} \frac{\theta(acq^{n+2k}; p)(acq^n, bcq^n, c/b, q^{n+1}, ax, a/x; q,p)_k}{\theta(acq^n; p)(q, (a/b)q, abq^{n+1}, ac, cxq^{n+1}, (c/x)q^{n+1}; q,p)_k} q^k \\
&\quad + \frac{(bc, c/b, ax, a/x; q,p)_{m+1}}{(ab, a/b, cx, c/x; q,p)_{m+1}} \sum_{\ell=0}^{n} \frac{\theta(bcq^{m+2\ell}; p)(bcq^m, acq^m, c/a, q^{m+1}, bx, b/x; q,p)_\ell}{\theta(bcq^m; p)(q, (b/a)q, abq^{m+1}, bc, cxq^{m+1}, (c/x)q^{m+1}; q,p)_\ell} q^\ell.
\end{aligned} \tag{3.82}$$

よって楕円関数拡張された Chaundy–Bullard 恒等式 (2.5) が示された．

なお，この拡張でも座標とパラメータの入れ替え対称性が存在しているため，(3.78) に対して $k \leftrightarrow \ell$, $a \leftrightarrow b$ とした，

$$A(k,\ell) = \theta\left(\frac{b}{a}q^{\ell-k};p\right)\frac{(acq^k, c/a, bx, b/x;q,p)_\ell(q^{\ell+1};q,p)_k(bcq^\ell, c/b, ax, a/x;q,p)_k}{(b/a;q,p)_{\ell+1}(q;q,p)_k((a/b)q;q,p)_k(ab, cx, c/x;q,p)_{k+\ell}}q^k \quad (3.83)$$

も解となる．

4　確率解釈

第 3 章にて定義した関数 $h(i,j)$ は，その式の形からわかるように複素数の値をとることができる．しかしここからは特に $0 < h(i,j) < 1$, $h(i,j) \in \mathbb{R}$ の条件を課し，ステップの重みをその点から右または上へ進む確率と解釈することを考えた．このとき，ステップの重みの積によって定義していた経路 $\pi \in \Pi_{m+1,n+1}$ の重みは，集合 $\Pi_{m+1,n+1}$ からある 1 つの経路 π を選ぶ確率と見なすことができる．

4.1　確率的重率の十分条件

各拡張で与えた $h(i,j)$ を実数にするため，パラメータと変数について a, b, c, q, p, $x \in \mathbb{R}$ とし，さらに $0 < h(i,j) < 1$ となるための十分条件を調べる．ただし，基底 q，ノーム p については $0 < |q| < 1$，$0 < |p| < 1$ を仮定していたため，ここでも $0 < q < 1$，$0 < p < 1$ の条件を要求する．なお，以降は各拡張の h について，引数を明示的に書いた $h(i,j;x;a,b,c;q,p)$ などの表記を用いることとする．

4.1.1　q–拡張における条件

q–拡張では，重みを

$$h(i,j;x;q) = xq^j$$

と与えていた．よって

$$0 < x < 1 \quad (4.1)$$

を満たすならば，各ステップを通る確率 $\mathrm{p}(s)$ は

$$\mathrm{p}((i,j)\to(i+1,j)) = \begin{cases} xq^j, & j \in \{0,1,\ldots,n\}, \\ 1, & j = n+1, \end{cases} \qquad i \in \{0,1,\ldots,m\},$$

$$\mathrm{p}((i,j)\to(i,j+1)) = \begin{cases} 1-xq^j, & i \in \{0,1,\ldots,m\}, \\ 1, & i = m+1, \end{cases} \qquad j \in \{0,1,\ldots,n\} \quad (4.2)$$

であるといえる．

4.1.2 第1 $(a,b;q)$–拡張における条件

第1 $(a,b;q)$–拡張では，重みを

$$h_1(i,j;x;a,b;q)=\frac{1-axq^i}{1-(a/b)q^{i-j}},\quad 1-h_1(i,j;x;a,b;q)=\frac{1-bxq^j}{1-(b/a)q^{j-i}}=h_1(j,i;x;b,a;q)$$

と与えていた．
$0<h_1(i,j;x;a,b;q)<1$ の代わりに，$0<h_1(i,j;x;a,b;q)$ かつ $0<h_1(j,i;x;b,a;q)$ を考える．まず，$i\in\{0,1,\dots,m\}$, $j\in\{0,1,\dots,n\}$ より $\max_{i,j}(q^{i-j})=q^{-n}$, $\max_{i,j}(q^{j-i})=q^{-m}$ だから，

$$ax<1,\quad \frac{a}{b}q^{-n}<1,\quad bx<1,\quad \frac{b}{a}q^{-m}<1$$

であればよいとわかる．さらに場合分けをする．

(i) $a>0$, $b>0$ のとき，

$$a<bq^n,\ b<aq^m \Longleftrightarrow a<aq^{m+n}.$$

これは $0<q<1$ に反する．

(ii) $a<0$, $b<0$ のとき，

$$a<bq^n,\ b<aq^m \Longleftrightarrow a>aq^{m+n}.$$

これは $0<q<1$ に反する．

(iii) $a>0$, $b<0$ のとき，
$(a/b)q^{-n}<1$, $(b/a)q^{-m}<1$ は満たすので，

$$x<\frac{1}{a},\quad \frac{1}{b}<x$$

であればよい．パラメータの入れ替え対称性から，$a\leftrightarrow b$ としても成り立つ．

以上より，

$$\begin{aligned}&(1)\quad a>0,\quad b<0,\quad \frac{1}{b}<x<\frac{1}{a},\\&(2)\quad a<0,\quad b>0,\quad \frac{1}{a}<x<\frac{1}{b}\end{aligned}\tag{4.3}$$

のどちらかを満たせばよい．

4.1.3 第 2 $(a,b;q)$–拡張における条件

第 2 $(a,b;q)$–拡張では，重みを

$$h_2(i,j;x;a,b;q) = \frac{(1-axq^i)(1-(a/x)q^i)}{(1-abq^{i+j})(1-(a/b)q^{i-j})},$$

$$1-h_2(i,j;x;a,b;q) = \frac{(1-bxq^j)(1-(b/x)q^j)}{(1-abq^{i+j})(1-(b/a)q^{j-i})} = h_2(j,i;x;b,a;q)$$

と与えていたので，

$$ax<1, \quad \frac{a}{b}q^{-n}<1, \quad bx<1, \quad \frac{b}{a}q^{-m}<1, \quad \frac{a}{x}<1, \quad ab<1, \quad \frac{b}{x}<1$$

であればよい．第 1 $(a,b;q)$–拡張の場合と同様に，$a>0,\ b>0$ のときと $a<0,\ b<0$ のときは成り立たない．

(i) $a>0,\ b<0$ のとき，

$ab<1$ は満たしている．
$x>0$ のとき，$b/x<1,\ bx<1$ を満たし，また

$$a<1,\ a<x \Longrightarrow a<x<\frac{1}{a} \Longrightarrow \frac{a}{x}<1,\ ax<1. \tag{4.4}$$

$x<0$ のとき，$a/x<1,\ ax<1$ を満たし，また

$$-1<b,\ x<b \Longrightarrow \frac{1}{b}<x<b \Longrightarrow \frac{b}{x}<1,\ bx<1. \tag{4.5}$$

パラメータの入れ替え対称性から，$a \leftrightarrow b$ としても成り立つ．

以上より，

$$\begin{aligned} &(1) \quad 0<a<1, \quad b<0, \quad a<x<\frac{1}{a}, \\ &(2) \quad 0<a, \quad -1<b<0, \quad \frac{1}{b}<x<b, \\ &(3) \quad 0<b<1, \quad a<0, \quad b<x<\frac{1}{b}, \\ &(4) \quad 0<b, \quad -1<a<0, \quad \frac{1}{a}<x<a \end{aligned} \tag{4.6}$$

のいずれかを満たせばよい．

4.1.4　$(a,b,c;q)$–拡張における条件

$(a,b,c;q)$–拡張では，重みを

$$h(i,j;x;a,b,c;q)=\frac{(1-bcq^{i+2j})(1-(c/b)q^{i})(1-axq^{i})(1-(a/x)q^{i})}{(1-abq^{i+j})(1-(a/b)q^{i-j})(1-cxq^{i+j})(1-(c/x)q^{i+j})},$$

$$1-h(i,j;x;a,b,c;q)=\frac{(1-acq^{2i+j})(1-(c/a)q^{j})(1-bxq^{j})(1-(b/x)q^{j})}{(1-abq^{i+j})(1-(b/a)q^{j-i})(1-cxq^{i+j})(1-(c/x)q^{i+j})}=h(j,i;x;b,a,c;q) \tag{4.7}$$

と与えていたので，第 2 $(a,b,;q)$–拡張のときの条件

$$ax<1,\quad \frac{a}{b}q^{-n}<1,\quad bx<1,\quad \frac{b}{a}q^{-m}<1,\quad \frac{a}{x}<1,\quad ab<1,\quad \frac{b}{x}<1$$

に加えて，

$$bc<1,\quad \frac{c}{b}<1,\quad cx<1,\quad \frac{c}{x}<1,\quad ac<1,\quad \frac{c}{a}<1$$

が成り立てばよい．

(i)　$0<a<1,\quad b<0,\quad a<x<1/a$ のとき，

$$\max\left\{b,\frac{1}{b}\right\}<c\Longrightarrow\frac{1}{b}<c,\ b<c\Longrightarrow bc<1,\ \frac{c}{b}<1, \tag{4.8}$$

$$c<\min\left\{a,\frac{1}{a}\right\}=a\Longrightarrow c<\frac{1}{a},\ c<a\Longrightarrow ac<1,\ \frac{c}{a}<1. \tag{4.9}$$

$c>0$ のとき，

$$c<x<\frac{1}{c}\Longrightarrow cx<1,\ \frac{c}{x}<1. \tag{4.10}$$

(4.8), (4.9) と合わせると

$$0<c<a<x<\frac{1}{a}<\frac{1}{c}\Longrightarrow bc<1,\ \frac{c}{b}<1,\ ac<1,\ \frac{c}{a}<1,\ cx<1,\ \frac{c}{x}<1. \tag{4.11}$$

$c<0$ のとき，$cx<1,\ c/x<1$ を満たすから，(4.8), (4.9) と合わせて

$$\max\left\{b,\frac{1}{b}\right\}<c<0\Longrightarrow bc<1,\ \frac{c}{b}<1,\ ac<1,\ \frac{c}{a}<1,\ cx<1,\ \frac{c}{x}<1. \tag{4.12}$$

(ii)　$0 < a, \quad -1 < b < 0, \quad 1/b < x < b$ のとき，

$$\max\left\{b, \frac{1}{b}\right\} = b < c \Longrightarrow \frac{1}{b} < c,\ b < c \Longrightarrow bc < 1,\ \frac{c}{b} < 1, \tag{4.13}$$

$$c < \min\left\{a, \frac{1}{a}\right\} \Longrightarrow c < \frac{1}{a},\ c < a \Longrightarrow ac < 1,\ \frac{c}{a} < 1. \tag{4.14}$$

$c > 0$ のとき，$cx < 1$, $c/x < 1$ を満たすから，(4.13), (4.14) と合わせて

$$0 < c < \min\left\{a, \frac{1}{a}\right\} \Longrightarrow bc < 1,\ \frac{c}{b} < 1,\ ac < 1,\ \frac{c}{a} < 1,\ cx < 1,\ \frac{c}{x} < 1. \tag{4.15}$$

$c < 0$ のとき，

$$\frac{1}{c} < x < c \Longrightarrow cx < 1,\ \frac{c}{x} < 1. \tag{4.16}$$

(4.13), (4.14) と合わせると，

$$\frac{1}{c} < \frac{1}{b} < x < b < c < 0 \Longrightarrow bc < 1,\ \frac{c}{b} < 1,\ ac < 1,\ \frac{c}{a} < 1,\ cx < 1,\ \frac{c}{x} < 1. \tag{4.17}$$

パラメータの入れ替え対称性から，(i), (ii) について $a \leftrightarrow b$ としても成り立つ．以上より，

$$\begin{aligned}
&(1)\quad 0 < c < a < 1, \quad b < 0, \quad a < x < \frac{1}{a},\\
&(2)\quad 0 < a < 1, \quad \max\left\{b, \frac{1}{b}\right\} < c < 0, \quad a < x < \frac{1}{a},\\
&(3)\quad 0 < c < \min\left\{a, \frac{1}{a}\right\}, \quad -1 < b < 0, \quad \frac{1}{b} < x < b,\\
&(4)\quad 0 < a, \quad -1 < b < c < 0, \quad \frac{1}{b} < x < b,\\
&(5)\quad 0 < c < b < 1, \quad a < 0, \quad b < x < \frac{1}{b},\\
&(6)\quad 0 < b < 1, \quad \max\left\{a, \frac{1}{a}\right\} < c < 0, \quad b < x < \frac{1}{b},\\
&(7)\quad 0 < c < \min\left\{b, \frac{1}{b}\right\}, \quad -1 < a < 0, \quad \frac{1}{a} < x < a,\\
&(8)\quad 0 < b, \quad -1 < a < c < 0, \quad \frac{1}{a} < x < a
\end{aligned} \tag{4.18}$$

のいずれかを満たせばよい．

4.1.5 楕円関数拡張における条件

楕円関数拡張では，重みを

$$
\begin{aligned}
h(i,j;x;a,b,c;q,p) &= \frac{\theta(bcq^{i+2j},(c/b)q^i,axq^i,(a/x)q^i;p)}{\theta(abq^{i+j},(a/b)q^{i-j},cxq^{i+j},(c/x)q^{i+j};p)},\\
1-h(i,j;x;a,b,c;q,p) &= \frac{\theta(acq^{2i+j},(c/a)q^j,bxq^j,(b/x)q^j;p)}{\theta(abq^{i+j},(b/a)q^{j-i},cxq^{i+j},(c/x)q^{i+j};p)} = h(j,i;x;b,a,c;q,p)
\end{aligned}
\tag{4.19}
$$

と与えていたので，

$$
\begin{gathered}
\theta(bcq^{i+2j};p)>0,\quad \theta((c/b)q^i;p)>0,\quad \theta(axq^i;p)>0,\\
\theta((a/x)q^i;p)>0,\quad \theta(abq^{i+j};p)>0,\quad \theta((a/b)q^{i-j};p)>0,\\
\theta(cxq^{i+j};p)>0,\quad \theta((c/x)q^{i+j};p)>0,\quad \theta(acq^{2i+j};p)>0,\\
\theta((c/a)q^j;p)>0,\quad \theta(bxq^j;p)>0,\quad \theta((b/x)q^j;p)>0,\quad \theta((b/a)q^{j-i};p)>0
\end{gathered}
\tag{4.20}
$$

となればよい．変形 Jacobi テータ関数が正となるための十分条件を考えると，
$0<p<1$ より，

$$
\begin{aligned}
p<x<1 &\Longrightarrow \theta(x;p)>0,\\
x<0 &\Longrightarrow \theta(x;p)>0.
\end{aligned}
\tag{4.21}
$$

このどちらかを満たせばよい．

(i) $0<c<a<1,\quad b<0,\quad a<x<1/a$ のとき，

まず，

$$
bc<0,\quad \frac{c}{b}<0,\quad ab<0,\quad \frac{a}{b}<0,\quad bx<0,\quad \frac{b}{x}<0,\quad \frac{b}{a}<0
$$

がいえる．これと $0<q<1$ から，

$$
\begin{gathered}
\theta(bcq^{i+2j};p)>0,\quad \theta((c/b)q^i;p)>0,\quad \theta(abq^{i+j};p)>0,\quad \theta((a/b)q^{i-j};p)>0,\\
\theta(bxq^j;p)>0,\quad \theta((b/x)q^j;p)>0,\quad \theta((b/a)q^{j-i};p)>0.
\end{gathered}
$$

続いて，$\min_i(axq^i) = axq^m$, $\max_i(axq^i) = ax$ のように考えると，

$$\begin{aligned} p < axq^m, &\quad ax < 1, \\ p < \frac{a}{x}q^m, &\quad \frac{a}{x} < 1, \\ p < cxq^{m+n}, &\quad cx < 1, \\ p < \frac{c}{x}q^{m+n}, &\quad \frac{c}{x} < 1, \\ p < acq^{2m+n}, &\quad ac < 1, \\ p < \frac{c}{a}q^n, &\quad \frac{c}{a} < 1 \end{aligned} \tag{4.22}$$

であればよい．ここで，
$0 < c < a < x$，$0 < q < 1$ より

$$cxq^{m+n} < axq^m, \quad \frac{c}{x}q^{m+n} < \frac{a}{x}q^m, \quad acq^{2m+n} < cxq^{m+n}, \quad \frac{c}{x}q^{m+n} < \frac{c}{a}q^n,$$

$0 < x < 1/a$，$0 < c$ より

$$acq^{2m+n} < \frac{c}{x}q^{m+n}$$

であるから，

$$p < acq^{2m+n} \tag{4.23}$$

を満たせばよいことがわかる．

(ii) $0 < a, \quad -1 < b < 0, \quad 1/b < x < b$ のとき，

$$ab < 0, \quad \frac{a}{b} < 0, \quad cx < 0, \quad \frac{c}{x} < 0, \quad ac < 0, \quad \frac{c}{a} < 0, \quad bx < 0, \quad \frac{b}{x} < 0, \quad \frac{b}{a} < 0 \tag{4.24}$$

より

$$\begin{aligned} &\theta(abq^{i+j}; p) > 0, \quad \theta((a/b)q^{i-j}; p) > 0, \quad \theta(cxq^{i+j}; p) > 0, \\ &\theta((c/x)q^{i+j}; p) > 0, \quad \theta(acq^{2i+j}; p) > 0, \quad \theta((c/a)q^j; p) > 0, \\ &\theta(bxq^j; p) > 0, \quad \theta((b/x)q^j; p) > 0, \quad \theta((b/a)q^{j-i}; p) > 0. \end{aligned}$$

また，(i) と同様に考えて

$$
\begin{aligned}
p < bcq^{m+2n}, &\quad bc < 1,\\
p < \frac{c}{b}q^{m}, &\quad \frac{c}{b} < 1,\\
p < axq^{m}, &\quad ax < 1,\\
p < \frac{a}{x}q^{m}, &\quad \frac{a}{x} < 1
\end{aligned} \tag{4.25}
$$

であればよいから，

$$
p < \min\left\{bcq^{m+2n}, \frac{c}{b}q^{m}, axq^{m}, \frac{a}{x}q^{m}\right\} \tag{4.26}
$$

を満たせばよいといえる．

(iii) $0 < c < \min\{a, 1/a\}, \quad -1 < b < 0, \quad 1/b < x < b$ のとき，

$$
bc < 0, \quad \frac{c}{b} < 0, \quad ax < 0, \quad \frac{a}{x} < 0, \quad ab < 0, \quad \frac{a}{b} < 0, \quad cx < 0, \quad \frac{c}{x} < 0, \quad \frac{b}{a} < 0
$$

より

$$
\begin{aligned}
&\theta(bcq^{i+2j};p) > 0, \quad \theta((c/b)q^{i};p) > 0, \quad \theta(axq^{i};p) > 0,\\
&\theta((a/x)q^{i};p) > 0, \quad \theta(abq^{i+j};p) > 0, \quad \theta((a/b)q^{i-j};p) > 0,\\
&\theta(cxq^{i+j};p) > 0, \quad \theta((c/x)q^{i+j};p) > 0, \quad \theta((b/a)q^{j-i};p) > 0.
\end{aligned}
$$

また，同様に考えて

$$
\begin{aligned}
p < acq^{2m+n}, &\quad ac < 1,\\
p < \frac{c}{a}q^{n}, &\quad \frac{c}{a} < 1,\\
p < bxq^{n}, &\quad bx < 1,\\
p < \frac{b}{x}q^{n}, &\quad \frac{b}{x} < 1
\end{aligned} \tag{4.27}
$$

であればよいから，

$$
p < \min\left\{acq^{2m+n}, \frac{c}{a}q^{n}, bxq^{n}, \frac{b}{x}q^{n}\right\} \tag{4.28}
$$

を満たせばよいといえる．

(iv)　$0 < a, \quad -1 < b < c < 0, \quad 1/b < x < b$ のとき

$$ax < 0, \quad \frac{a}{x} < 0, \quad ab < 0, \quad \frac{a}{b} < 0, \quad ac < 0, \quad \frac{c}{a} < 0, \quad \frac{b}{a} < 0$$

より

$$\theta(axq^i;p) > 0, \quad \theta((a/x)q^i;p) > 0, \quad \theta(abq^{i+j};p) > 0, \quad \theta((a/b)q^{i-j};p) > 0,$$
$$\theta(acq^{2i+j};p) > 0, \quad \theta((c/a)q^j;p) > 0, \quad \theta((b/a)q^{j-i};p) > 0.$$

また，同様に考えて

$$\begin{aligned} p < bcq^{m+2n}, &\quad bc < 1, \\ p < \frac{c}{b}q^m, &\quad \frac{c}{b} < 1, \\ p < cxq^{m+n}, &\quad cx < 1, \\ p < \frac{c}{x}q^{m+n}, &\quad \frac{c}{x} < 1, \\ p < bxq^n, &\quad bx < 1, \\ p < \frac{b}{x}q^n, &\quad \frac{b}{x} < 1 \end{aligned} \tag{4.29}$$

であればよい．ここで，
$x < b < c < 0$，$0 < q < 1$ より

$$cxq^{m+n} < bxq^n, \quad \frac{c}{x}q^{m+n} < \frac{b}{x}q^n, \quad bcq^{m+2n} < cxq^{m+n}, \quad \frac{c}{x}q^{m+n} < \frac{c}{b}q^m,$$

$1/b < x < 0$，$0 < c$ より

$$bcq^{m+2n} < \frac{c}{x}q^{m+n}$$

であるから，

$$p < bcq^{m+2n} \tag{4.30}$$

を満たせばよいことがわかる．

座標とパラメータの入れ替え対称性から，(i)〜(iv) について $m \leftrightarrow n$, $a \leftrightarrow b$ としても成り立つ．以上より，

$$
\begin{aligned}
&(1)\quad 0<c<a<1,\quad b<0,\quad a<x<\frac{1}{a},\quad p<acq^{2m+n},\\
&(2)\quad 0<a<1,\quad \max\left\{b,\frac{1}{b}\right\}<c<0,\quad a<x<\frac{1}{a},\quad p<\min\left\{bcq^{m+2n},\frac{c}{b}q^m,axq^m,\frac{a}{x}q^m\right\},\\
&(3)\quad 0<c<\min\left\{a,\frac{1}{a}\right\},\quad -1<b<0,\quad \frac{1}{b}<x<b,\quad p<\min\left\{acq^{2m+n},\frac{c}{a}q^n,bxq^n,\frac{b}{x}q^n\right\},\\
&(4)\quad 0<a,\quad -1<b<c<0,\quad \frac{1}{b}<x<b,\quad p<bcq^{m+2n},\\
&(5)\quad 0<c<b<1,\quad a<0,\quad b<x<\frac{1}{b},\quad p<bcq^{m+2n},\\
&(6)\quad 0<b<1,\quad \max\left\{a,\frac{1}{a}\right\}<c<0,\quad b<x<\frac{1}{b},\quad p<\min\left\{acq^{2m+n},\frac{c}{a}q^n,bxq^n,\frac{b}{x}q^n\right\},\\
&(7)\quad 0<c<\min\left\{b,\frac{1}{b}\right\},\quad -1<a<0,\quad \frac{1}{a}<x<a,\quad p<\min\left\{bcq^{m+2n},\frac{c}{b}q^m,axq^m,\frac{a}{x}q^m\right\},\\
&(8)\quad 0<b,\quad -1<a<c<0,\quad \frac{1}{a}<x<a,\quad p<acq^{2m+n}
\end{aligned}
\tag{4.31}
$$

のいずれかを満たせばよい．

4.2 変数変換

各パラメータが 4.1 節の条件を満たすとき，全ての $\pi : (0,0) \to (k,\ell)$ の重みの和として定義していた $A(k,\ell)$ は，$k+\ell$ ステップ進んだときに点 (k,ℓ) にいる確率となる．そこで，第 3 章で作成した格子経路模型について特に $m=n$ とし，n ステップ進むことを考えた．
変数変換

$$
i=\frac{t+\xi}{2},\qquad j=\frac{t-\xi}{2} \tag{4.32}
$$

を行うと，

$$
\begin{aligned}
(i,j)\to(i+1,j) \quad &\text{から} \quad (\xi,t)\to(\xi+1,t+1),\\
(i,j)\to(i,j+1) \quad &\text{から} \quad (\xi,t)\to(\xi-1,t+1)
\end{aligned}
$$

のように，正方格子上の右または上への推移を，斜めに軸を取り直した座標系での右上または左上への推移におきかえることができる．さらに，縦軸 t を時間と思うことで，2 次元平面上の格子経路模型における各経路は，$(1+1)$ 次元時空間平面上のランダム・ウォークと見

なせるようになる．以降はランダム・ウォークとして話を進めていく．
時刻の上限を T と書くことにする．s 秒後のランダム・ウォーカーは，必ず $t=s$ 上の点 (ξ,s), $\xi\in\{-s,-s+2,\ldots,s-2,s\}$ のいずれかにいる．各点における存在確率は，$A(k,\ell)$ を変数変換した $A(\xi,t)$ を用いて表せる．当然，$\sum_{\xi\in\mathscr{T}}A(\xi,t)=1$, $\mathscr{T}:=\{-t,-t+2,\ldots,t-2,t\}$ である．すなわち，時刻 t を固定して $A(\xi,t)$ をプロットすれば，その時刻での確率分布が得られることとなる．格子上を動くことを考えると ξ は離散だが，$A(\xi,t)$ 自体の表式は ξ についての連続関数となっているため，プロットは連続に行った．ただし，分布を極大値の数によって単峰分布と複峰分布に分類する際には，微分ではなく差分の計算を行った．ここでの分類の仕方は本来の定義とは異なり,「隣り合う点との値の差 (差分) を計算し，その正負が入れ替わる箇所が 2 つ以上存在する」場合を複峰とよんでいる．単峰は正負の入れ替わりが 0 回または 1 回のときである．0 回を単峰とよぶのは，格子点での値を比較しただけでは極大値の存在を発見できない場合があるためである．これは極大値を与える座標が $\xi=\pm t$ 付近のときに起こりやすい．また，本論文では極大値を 3 つ以上もつ複峰分布は登場しないため，以降は複峰分布とよんだ場合極大値が 2 つある分布と思ってよい．

5 ランダム・ウォークの数値的解析

5.1 確率分布のパラメータ依存性

4.1 節で求めた条件のうち (1) を満たすようにパラメータの値をそれぞれ決定し，$A(\xi,t)$ に代入してその様子を調べた．ただし，$0<q<1$ である．

5.1.1 q–拡張の分布

$A(k,\ell)$ を ξ，t で変数変換した式は,

$$\mathbf{P}(\Xi_t^{(0)}=\xi):=A(\xi,t)=\begin{bmatrix} t \\ (t+\xi)/2 \end{bmatrix}_q x^{(t+\xi)/2}(x;q)_{(t-\xi)/2}. \tag{5.1}$$

$t=30$ を固定し，$x=0.1$, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9 のグラフを重ねてプロットしたものを $q=0.1$, 0.5, 0.9 について作成すると，それぞれ図 1, 2, 3 のようになった．
右へ進む確率は

$$\mathbf{p}^{(0)}(\xi,t;x;q):=h(\xi,t;x;q)=xq^{(t-\xi)/2} \tag{5.2}$$

であるから，x, q が大きくなると右へ進みやすくなるが，グラフからもその様子がわかる．

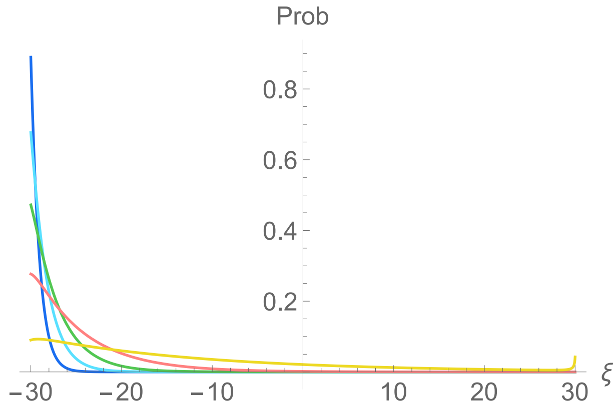


図 1: $t = 30$ での分布．$q = 0.1$ に対して，$x = 0.1$ (青), 0.3 (水色), 0.5 (緑), 0.7 (桃), 0.9 (黄) をプロット．q が小さいため左に寄っているが，x が大きくなるにつれて右にずれている．

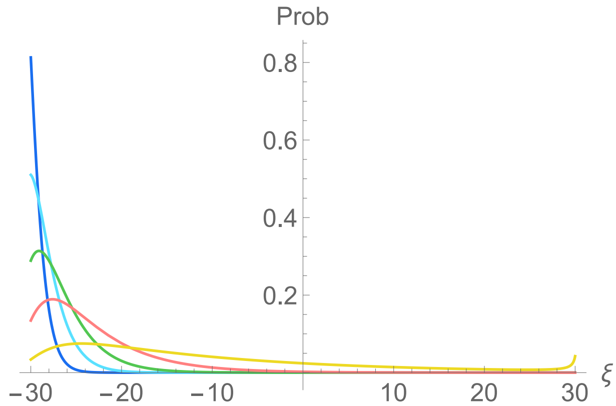


図 2: $t = 30$ での分布．$q = 0.5$ に対して，$x = 0.1$ (青), 0.3 (水色), 0.5 (緑), 0.7 (桃), 0.9 (黄) をプロット．図 1 よりも q が大きいため全体的に右にずれている．

なお，$q = 0.997$ を代入したときの $\mathbf{P}(\Xi_{30}^{(0)} = \xi)$ は，もとの恒等式に対する分布

$$\widetilde{\mathbf{P}}(\Xi_t^{(0)} = \xi) := \begin{pmatrix} t \\ (t+\xi)/2 \end{pmatrix} x^{(t+\xi)/2}(1-x)^{(t-\xi)/2} \tag{5.3}$$

と近い形になることから，$q \to 1$ の極限で元に戻る様子も確認できる (図 4)．

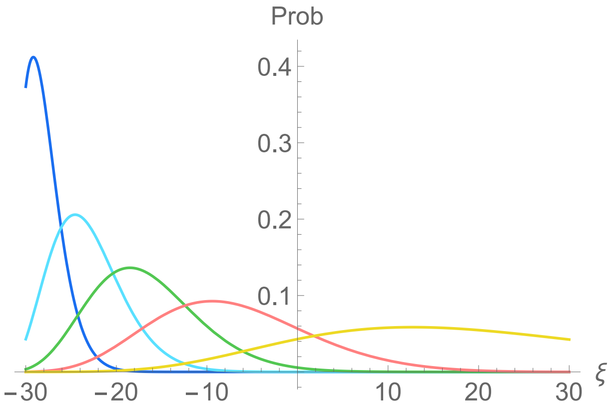
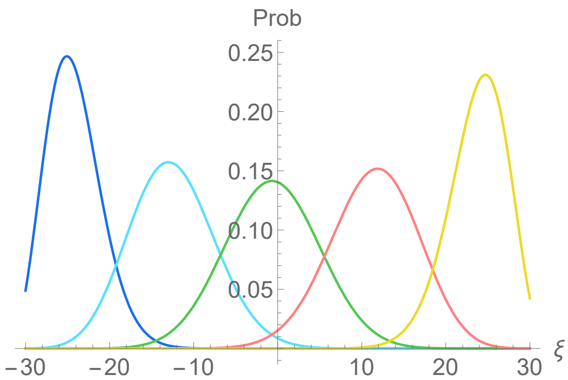
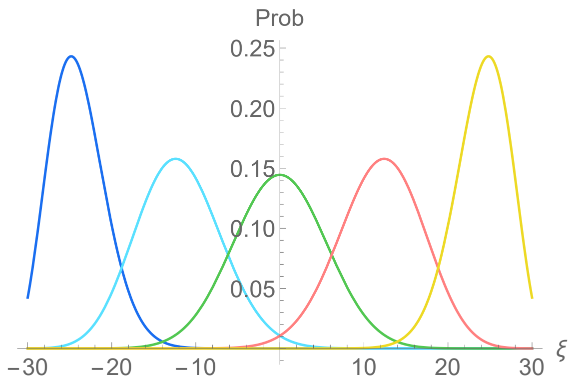


図 3: $t = 30$ での分布．$q = 0.9$ に対して，$x = 0.1$ (青), 0.3 (水色), 0.5 (緑), 0.7 (桃), 0.9 (黄) をプロット．図 2 よりもさらに右にずれている．



(a) q–拡張にて $q = 0.997$ とし，$x = 0.1$ (青), 0.3 (水色), 0.5 (緑), 0.7 (桃), 0.9 (黄) をプロット．



(b) もとの二項分布について，$x = 0.1$ (青), 0.3 (水色), 0.5 (緑), 0.7 (桃), 0.9 (黄) をプロット．

図 4: $t = 30$ での分布の比較．$q \to 1$ で一致する．

5.1.2　第 1 $(a, b; q)$–拡張の分布

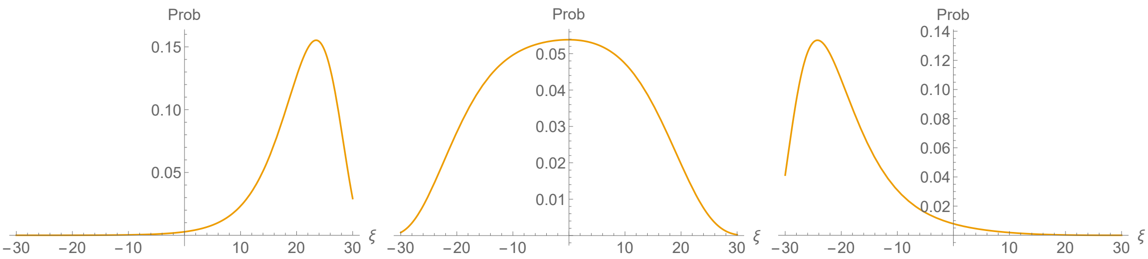
$A(k, \ell)$ を ξ, t で変数変換した式は，

$$\mathbf{P}(\Xi_t^{(1)} = \xi) := A(\xi, t) = \left(1 - \frac{a}{b} q^{\xi}\right) \frac{(ax; q)_{(t+\xi)/2} (q^{(t+\xi+2)/2}; q)_{(t-\xi)/2} (bx; q)_{(t-\xi)/2}}{(a/b; q)_{(t+\xi+2)/2} (q; q)_{(t-\xi)/2} ((b/a)q; q)_{(t-\xi)/2}} q^{(t-\xi)/2}. \tag{5.4}$$

確率解釈のための条件は $a > 0,\ b < 0,\ 1/b < x < 1/a$ であった．
もともと二項分布であったことを考慮すると，変数 x は最大値を与える位置を決める要因と考えられる．そこで，$x = 0.5$ を固定し，a, b, q などのパラメータ依存性，あるいは t による時間変化を見ることが重要であると考えた．まずは $t = 30$ について，a 以外のパラメータを

固定して分布の大まかな特徴を調べた結果を示す．

$q=0.9$，$b=-0.7$ として a を 0 から 1 の範囲で変化させると，常に単峰分布となり，a が大きくなるにつれ分布の最大値の位置は右から左へ移動した．図 5 では代表として $a=0.2$, 0.5, 0.9 のときを示す．なお，移動の途中に非ガウス的ななだらかな分布が見られた (図 5b)．これをブロード分布とよぶことにする．b の値を変えて同様に調べても，特徴に大きな変化はない．



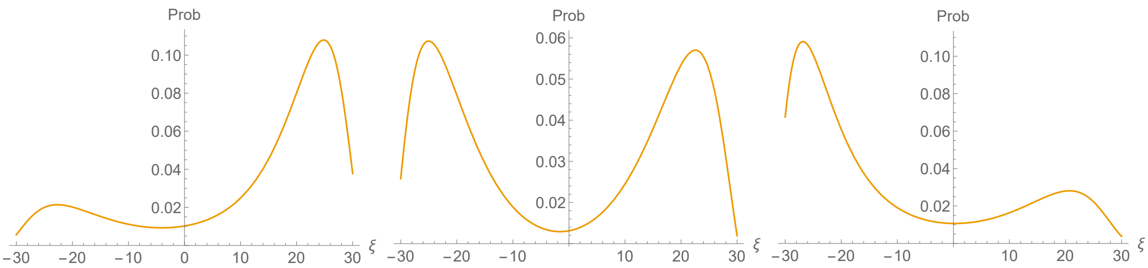
(a) $x=0.5$, $q=0.9$, $(a,b)=(0.2,-0.7)$ 右に寄った単峰.

(b) $x=0.5$, $q=0.9$, $(a,b)=(0.5,-0.7)$ ブロード.

(c) $x=0.5$, $q=0.9$, $(a,b)=(0.9,-0.7)$ 左に寄った単峰.

図 5: 単峰は, a を大きくすると, (a)→(b)→(c) のように変化する.

$q=0.8$，$b=-0.8$ について調べると複峰分布が現れた．分布が複峰になることは，ランダム・ウォークが $t=30$ までに 2 つの進みやすい方向を持つことを意味する．さらにこのとき，a の小 → 大の変化に対して最大値の位置が右から左へ移る様子も見られた．図 6 で $a=0.4$, 0.55, 0.7 のときを示す．$q=0.8$, $t=30$ では a，b のとり方によって複峰になるか単峰になるか決まるようである．



(a) $x=0.5$, $q=0.8$, $(a,b)=(0.4,-0.8)$ 右側に最大値をもつ複峰.

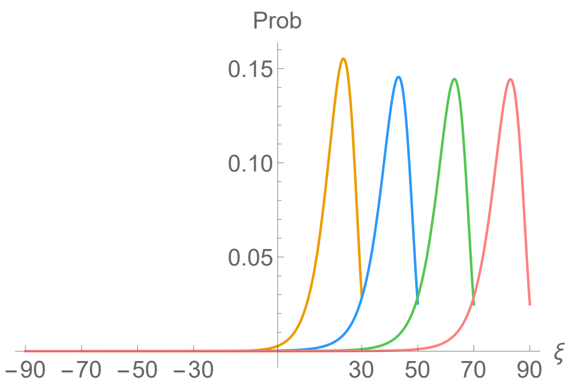
(b) $x=0.5$, $q=0.8$, $(a,b)=(0.55,-0.8)$ 対称に見える複峰.

(c) $x=0.5$, $q=0.8$, $(a,b)=(0.7,-0.8)$ 左側に最大値をもつ複峰.

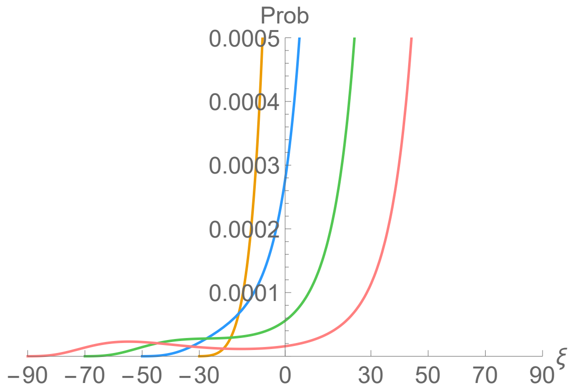
図 6: 複峰は, a を大きくすると, (a)→(b)→(c) のように変化する.

次に，右寄りの単峰，ブロード，左の大きな複峰，対称に近い複峰の分布を作るパラメータの組について，それぞれ $t=30$, 50, 70, 90 のときの分布を重ねてプロットし時間変化を見

た．
2 種類の単峰分布は，時間変化に伴い複峰へ変化していくことがわかった．図 7 を見ると，右寄りの単峰は $t = 90$ では複峰になっているとわかる (単複の判断は差分の計算から行っており，同じく複峰に見える $t = 70$ では正負の入れ替わりは 1 回である)．これは，低い確率で左に進んだランダム・ウォーク達が，時間経過である点に収束していくことを示唆している．図 8 ではブロード分布がはっきりと複峰へ変化している．これは，始めのうちは $\xi = 0$ 付近に集まっていたランダム・ウォーク達が，その後 2 つの方向に進みやすくなることを意味している．



(a) すべて単峰のまま端へ寄り鋭くなっていくように見える．



(b) 拡大すると，$t = 90$ では複峰になっている．

図 7: $x = 0.5$, $q = 0.9$, $(a, b) = (0.2, -0.7)$, $t = 30$(橙), 50(青), 70(緑), 90(桃). 時間発展で性質が変わる様子が見られる．より端へ寄って鋭くなり，また単峰から複峰になる．

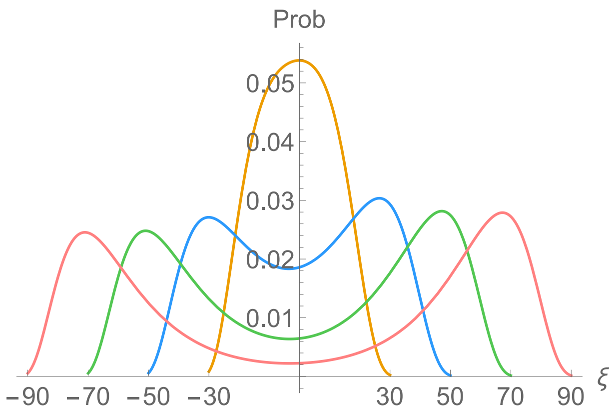
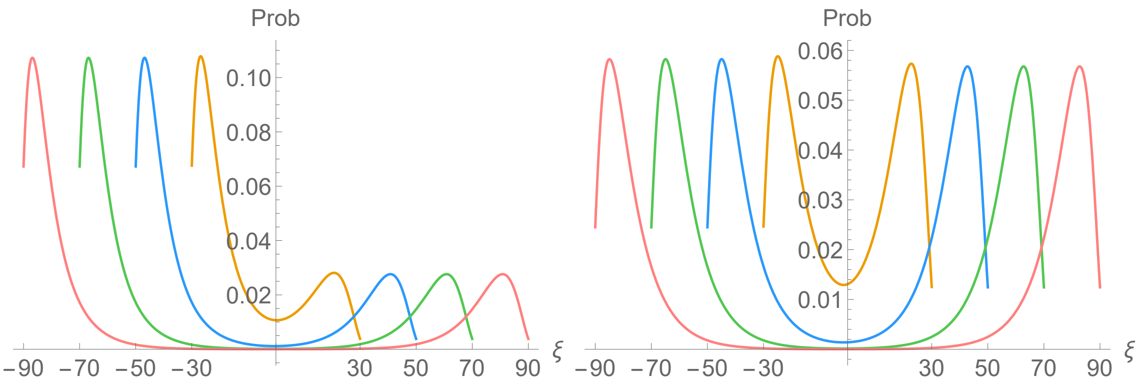


図 8: $x = 0.5$, $q = 0.9$, $(a, b) = (0.5, -0.7)$, $t = 30$(橙), 50(青), 70(緑), 90(桃). 時間発展で性質が変わる様子が見られる．徐々に複峰になり，端へ寄って鋭くなっていく．

続いて 2 種類の複峰分布について調べた (図 9)．どちらもその特徴を保ったまま両端へ寄り，鋭くなっていく．このまま $t \to \infty$ の極限で 2 つの点に収束し，デルタ関数の和で書かれる大数の法則が得られるだろうと予想している．



(a) $(a, b) = (0.7, -0.8)$　　(b) $(a, b) = (0.5, -0.7)$

図 9: $x = 0.5$, $q = 0.8$, $t = 30$(橙), 50(青), 70(緑), 90(桃)．形の特徴は変わらず，より端へ寄って鋭くなるとわかる．

以上をまとめると，第 1 $(a, b; q)$–拡張における大きな特徴は，

- 単峰と複峰の分布が現れる
  $\Longrightarrow$ 進みやすい方向を 1 つまたは 2 つ持つ．
- 片側に寄った単峰が時間の経過に伴って複峰になる
  $\Longrightarrow$ 偶然進みにくい方向へ進んだランダム・ウォークは時間の経過に伴って収束する．
- a：小 $\to$ 大で最大値の位置が右 $\to$ 左
  $\Longrightarrow$ a の値を大きくすると，より左へ進みやすくなる．
- ブロード分布が時間の経過に伴って複峰分布になる
  $\Longrightarrow$ 始め $\xi = 0$ 付近に留まっているランダム・ウォークも時間が経つとほぼ右や左へ押し流されていく．

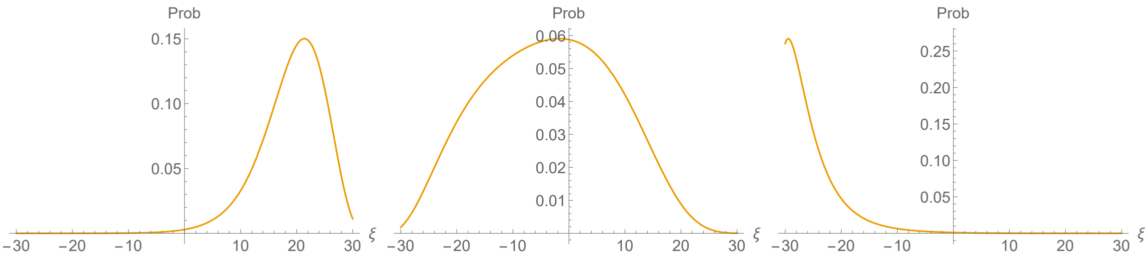
の 4 つとなる．

5.1.3 第 2 $(a, b; q)$–拡張の分布

$A(k, \ell)$ を ξ, t で変数変換した式は，

$$\mathbf{P}(\Xi_t^{(2)} = \xi) := A(\xi, t) = \left(1 - \frac{a}{b} q^{\xi}\right) \frac{(ax, a/x; q)_{(t+\xi)/2} (q^{(t+\xi+2)/2}, bx, b/x; q)_{(t-\xi)/2}}{(a/b; q)_{(t+\xi+2)/2} (q, q(b/a); q)_{(t-\xi)/2} (ab; q)_t} q^{(t-\xi)/2}. \tag{5.5}$$

確率解釈のための条件は $0 < a < 1,\ b < 0,\ a < x < 1/a$ であった．
第 1 $(a,b;q)$–拡張と同様に $x = 0.5$ についてプロットを行ったところ，この拡張でも 4 つの特徴が見られた．
第 1 $(a,b;q)$–拡張と比べると $a < x$ の条件より a のとりうる値の範囲は狭くなっているが，その範囲内で同じ変化が確認された．すなわち，パラメータに全く同じ値を代入すると，第 2 $(a,b;q)$–拡張の分布の方が最大値の位置がより左になることがわかった．よって，分布の様子を決めるのはパラメータそれぞれの値そのものではなく，相対的な値であり，第 1 $(a,b;q)$–拡張と第 2 $(a,b;q)$–拡張の分布は定性的に同じ振る舞いをするであろう，と判断できる．
$q = 0.9,\ b = -0.7$ について $a = 0.1,\ 0.23,\ 0.4$ としたときの様子を図 10 で示す．



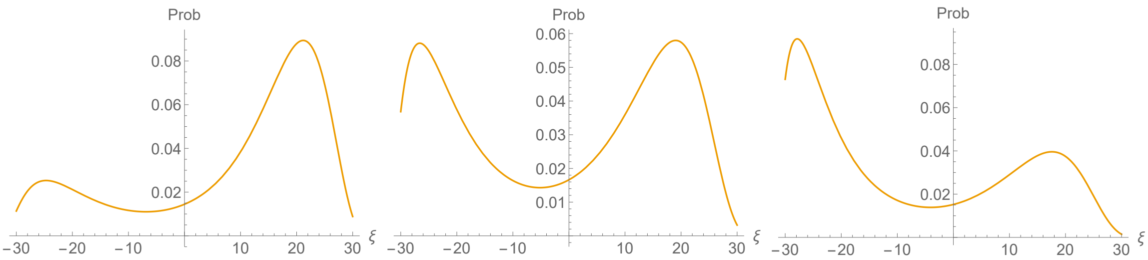
(a) $x = 0.5,\ q = 0.9,$ $(a,b) = (0.1, -0.7)$ 右に寄った単峰．

(b) $x = 0.5,\ q = 0.9,$ $(a,b) = (0.23, -0.7)$ ブロード．

(c) $x = 0.5,\ q = 0.9,$ $(a,b) = (0.4, -0.7)$ 左に寄った単峰．

図 10: 第 1 $(a,b;q)$–拡張と同様に，単峰は, a を大きくすると, (a)→(b)→(c) のように変化する．

$q = 0.8,\ b = -0.8$ について $a = 0.2,\ 0.24,\ 0.27$ としたとき，図 11 のようになる．
また，時間変化についても図 12〜14 のような分布が得られた．

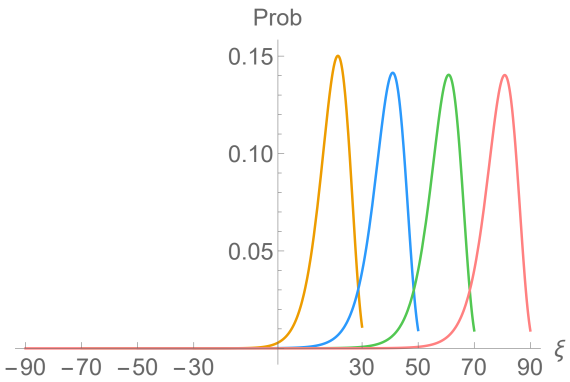


(a) $x = 0.5,\ q = 0.8,$ $(a,b) = (0.2, -0.8)$ 右側に最大値をもつ複峰．

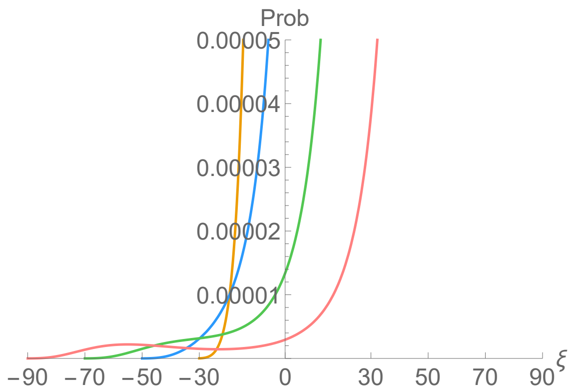
(b) $x = 0.5,\ q = 0.8,$ $(a,b) = (0.24, -0.8)$ 対称に見える複峰．

(c) $x = 0.5,\ q = 0.8,$ $(a,b) = (0.27, -0.8)$ 左側に最大値をもつ複峰．

図 11: 第 1 $(a,b;q)$–拡張と同様に，複峰は, a を大きくすると, (a)→(b)→(c) のように変化する．



(a) すべて単峰のまま端へ寄り鋭くなっていくように見える．



(b) 拡大すると，$t = 90$ では複峰になっている．

図 12: $x = 0.5$, $q = 0.9$, $(a, b) = (0.1, -0.7)$, $t = 30$(橙), 50(青), 70(緑), 90(桃). 第 1 $(a, b; q)$–拡張と同様に，時間発展で性質が変わる様子が見られる．より端へ寄って鋭くなり，また単峰から複峰になる．

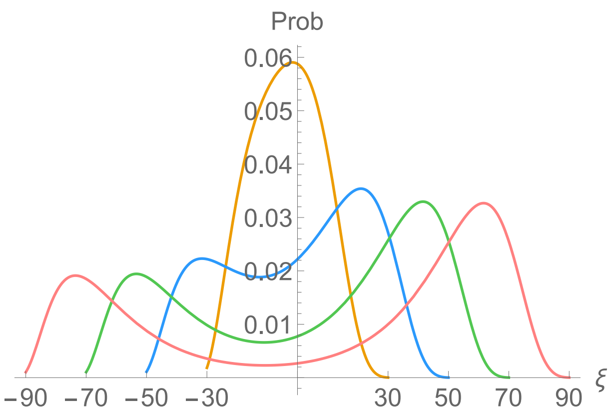
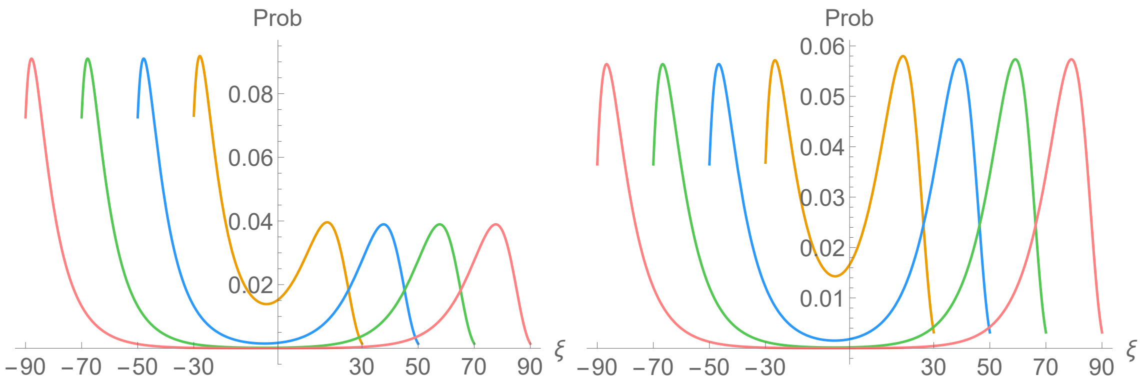


図 13: $x = 0.5$, $q = 0.9$, $(a, b) = (0.23, -0.7)$, $t = 30$(橙), 50(青), 70(緑), 90(桃). 第 1 $(a, b; q)$–拡張と同様に，時間発展で性質が変わる様子が見られる．徐々に複峰になり，端へ寄って鋭くなっていく．



(a) $(a, b) = (0.27, -0.8)$ (b) $(a, b) = (0.24, -0.8)$

図 14: $x = 0.5$, $q = 0.8$, $t = 30$(橙), 50(青), 70(緑), 90(桃). 第 1 $(a, b; q)$–拡張と同様に，形の特徴は変わらず，より端へ寄って鋭くなるとわかる.

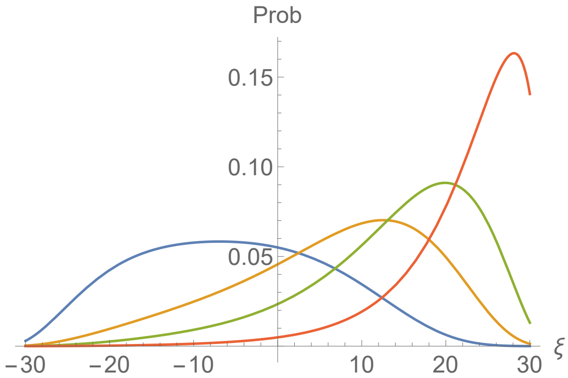
5.1.4 $(a, b, c; q)$–拡張の分布

$A(k, \ell)$ を ξ, t で変数変換した式は，

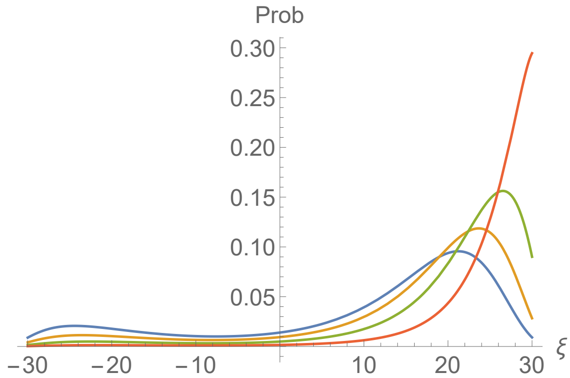
$$\mathbf{P}(\Xi_t^{(3)} = \xi) := A(\xi, t)$$

$$= \left(1 - \frac{a}{b} q^{\xi}\right) \frac{(bcq^{(t-\xi)/2}, c/b, ax, a/x; q)_{(t+\xi)/2} (q^{(t+\xi+2)/2}, acq^{(t+\xi)/2}, c/a, bx, b/x; q)_{(t-\xi)/2}}{(a/b; q)_{(t+\xi+2)/2} (q, q(b/a); q)_{(t-\xi)/2} (ab, cx, c/x; q)_t} q^{(t-\xi)/2}. \tag{5.6}$$

確率解釈のための条件は $0 < c < a < 1$, $b < 0$, $a < x < 1/a$ であった．
$(a, b, c; q)$–拡張においても同様に 4 つの特徴が見られた．なお，$c < a < x$ の条件から a の範囲はさらに狭くなっているが，やはり定性的に同じ振る舞いをすることがわかった．$t = 30$ のとき，$c \to 0$ で第 2 $(a, b; q)$–拡張に戻る様子が図 15 から確認できる．パラメータの組は
単峰：$q = 0.9$, $(a, b) = (0.24, -0.7)$, $c = 0.2$, 0.15, 0.1,
複峰：$q = 0.8$, $(a, b) = (0.2, -0.9)$, $c = 0.15$, 0.1, 0.05
である．どちらも，c の値が小さいほど同じパラメータの組でプロットした第 2 $(a, b; q)$–拡張の分布に近い形となっている．



(a) $t=30$, $q=0.9$, $(a,b)=(0.24,-0.7)$, $c=0.2$(赤), 0.15(緑), 0.1(黄) と第 2 $(a,b;q)$–拡張 (青) の比較.



(b) $t=30$, $q=0.8$, $(a,b)=(0.2,-0.9)$, $c=0.15$(赤), 0.1(緑), 0.05(黄) と第 2 $(a,b;q)$–拡張 (青) の比較.

図 15: $x=0.5$ のときの $(a,b,c;q)$–拡張と第 2 $(a,b;q)$–拡張の比較．c の値が小さいほど分布の形が似ている．

5.1.5　楕円関数拡張の分布

$A(k,\ell)$ を ξ, t で変数変換した式は，

$$\mathbf{P}(\Xi_t^{(4)}=\xi) \coloneqq A(\xi,t)$$

$$=\theta\left(\frac{a}{b}q^{\xi};p\right)\frac{(bcq^{(t-\xi)/2},c/b,ax,a/x;q,p)_{(t+\xi)/2}(q^{(t+\xi+2)/2},acq^{(t+\xi)/2},c/a,bx,b/x;q,p)_{(t-\xi)/2}}{(a/b;q,p)_{(t+\xi+2)/2}(q,q(b/a);q,p)_{(t-\xi)/2}(ab,cx,c/x;q,p)_t}q^{(t-\xi)/2}. \tag{5.7}$$

確率解釈のための条件は $0<c<a<1,\ b<0,\ a<x<1/a,\ p<acq^{3T}$ であった．
楕円関数拡張では，(変形 Jacobi テータ関数)>0 のために p に対して強い条件を課している．
$0<q<1$ について q^{3T} という因子がかかってしまうため，$t=5$ のときを調べることにした．
また，楕円関数拡張された階乗の式の形から，$\mathbf{P}(\Xi_t^{(4)}=\xi)$ は ξ について連続プロットが出来ないことがわかる．そのため各点での値をドットプロットした．
図 16 は $x=0.5$, $q=0.8$, $(a,b,c)=(0.4,-0.5,0.3)$, $p=0.004$, 0.001 のときの値を $(a,b,c;q)$–拡張のグラフと比較したものである．$p\to 0$ で $(a,b,c;q)$–拡張に近付く様子が確認できることから，この拡張においても定性的な振る舞いは同じになると考えられる．

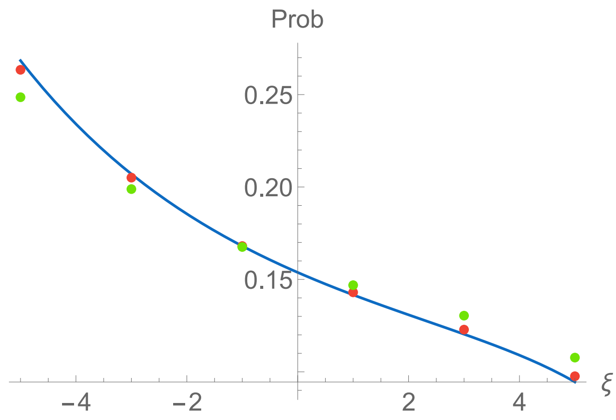


図 16: $t = 5,\ q = 0.8,\ x = 0.5,\ (a,b) = (0.4,-0.5), c = 0.3,\ p = 0.004$(緑), 0.001(赤) と $(a,b,c;q)$–拡張 (青) の比較．p の値が小さいほど近い値をとる．

5.2 推移確率

5.1 節より，全ての拡張で同じ特徴が得られることがわかったため，ここからは第 1 $(a,b;q)$–拡張について詳しく調べた結果を示す．前述の 4 つの特徴を生み出していたのはランダム・ウォークの推移確率であるから，この各点での値を時刻を固定して連続プロットした．推移確率 $\mathbf{p}^{(1)}(\xi,t)$ は

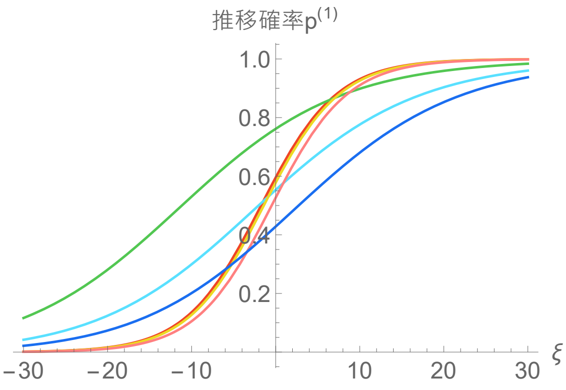
$$\mathbf{p}^{(1)}(\xi,t) \coloneqq h(\xi,t;x;a,b;q) = \frac{1-axq^{(t+\xi)/2}}{1-(a/b)q^{\xi}}. \tag{5.8}$$

$t = 30$ のとき，各分布を作る代表的なパラメータの組は表 1 の通りである．

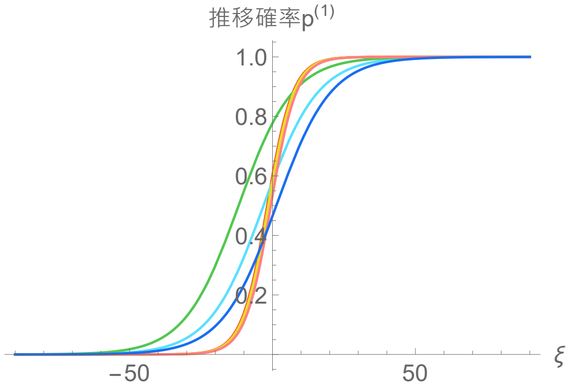
表 1: 典型的な分布を作る代表的なパラメータの組

分布の形	x	q	(a, b)	図 17 での色
右寄りの単峰	0.5	0.9	(0.2, -0.7)	緑
ブロード	0.5	0.9	(0.5, -0.7)	水色
左寄りの単峰	0.5	0.9	(0.8, -0.7)	青
右が大きい複峰	0.5	0.8	(0.4, -0.6)	赤
対称に近い複峰	0.5	0.8	(0.5, -0.7)	黄
左が大きい複峰	0.5	0.8	(0.7, -0.8)	桃

これらのパラメータの組について $t = 30,\ 90$ の場合を調べると図 17 のようになった．右寄りの単峰を作るパラメータでは $\mathbf{p}^{(1)}(\xi,t) > 0.5$ となる ξ の範囲が広くなっており，ブロードは右寄りの単峰と左寄りの単峰の間の値をとっている．複峰についても同様の関係性が見られる．

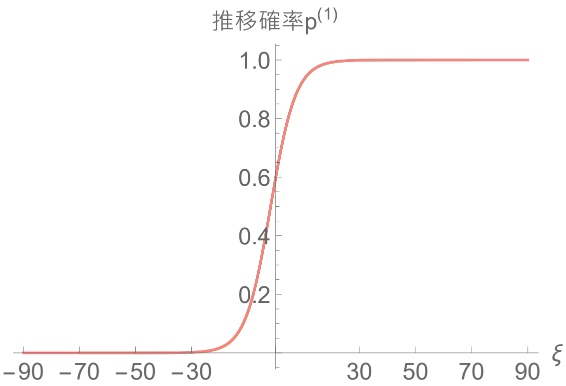


(a) $t=30$

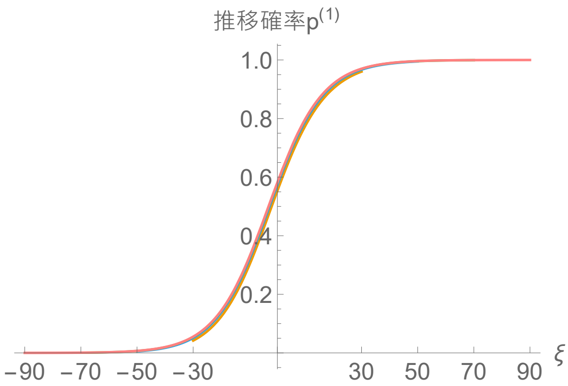


(b) $t=90$

図 17: 推移確率の値．パラメータは表 1 を参照．時間経過でほぼ変化しない．



(a) 右が大きい複峰分布を作る $q=0.8$, $(a,b)=(0.4,-0.6)$.



(b) ブロード分布を作る $q=0.9$, $(a,b)=(0.5,-0.7)$.

図 18: 推移確率について，$t=30$(橙), 50(青), 70(緑), 90(桃) を重ねたグラフ．

時間による変化は小さい．右が大きい複峰とブロードの場合について $t=30, 50, 70, 90$ のときをそれぞれ比較すると，図 18 のようになった．ブロードではグラフのずれが視認できる．そこで，それぞれの $(\mathbf{p}^{(1)}(\xi,90)-\mathbf{p}^{(1)}(\xi,30))$ を計算し重ねてプロットすると，図 19 のようになった．ブロード (水色) では比較的差が大きくなっている．この時間依存性がブロードから複峰への大きな変化を生んでいると考えられる．

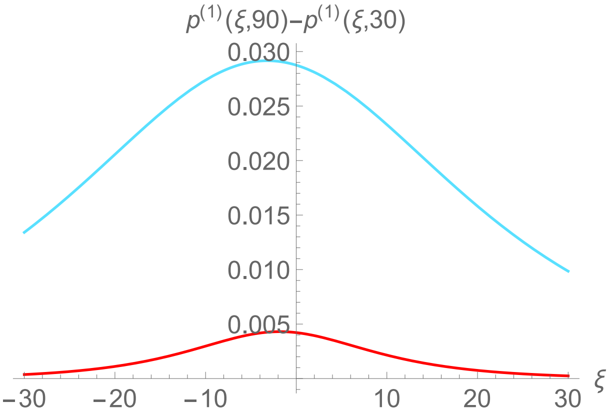
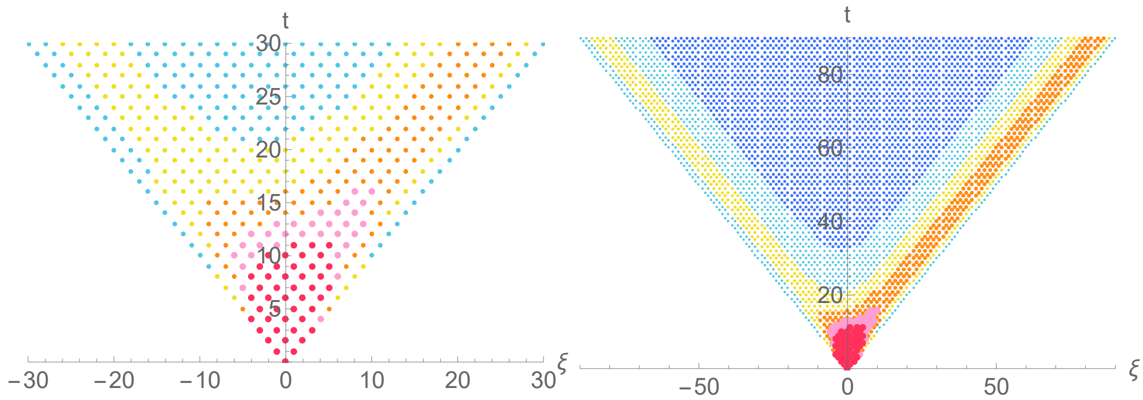


図 19: 図 18 のそれぞれについて $t = 90$ のときと $t = 30$ のときの値の差を比較した結果.
右が大きい複峰 (赤) とブロード (水色).

5.3 時空間平面上の分布

ここまで t を固定したときの確率分布を調べ比較していたが，ここからは時間変化やランダム・ウォークとしての振る舞いをより俯瞰するために，時空間平面上に $\mathbf{P}(\Xi_t^{(1)} = \xi)$ の値をプロットした「俯瞰図」を作成した.
まず右が大きい複峰分布を作るパラメータの組 $q = 0.8$, $(a, b) = (0.4, -0.6)$ を選んだ.



(a) 上限 $T = 30$.　(b) 上限 $T = 90$.

図 20: 右が大きい複峰分布を作る $q = 0.8$, $(a, b) = (0.4, -0.6)$. (5.9) のように色分けして $\mathbf{P}(\Xi_t^{(1)} = \xi)$ の値をドットプロットしたもの.

各点 (ξ, t) について $\mathbf{P}(\Xi_t^{(1)} = \xi)$ の値を計算し，以下の分類に沿って格子点上にその色をプロットすると，上限 $T = 30, 90$ で図 20 のようになった.

$$\begin{aligned} &0 \le (\text{青}) < 0.01,\ 0.01 \le (\text{水色}) < 0.035,\ 0.035 \le (\text{黄}) < 0.06, \\ &0.06 \le (\text{橙}) < 0.085,\ 0.085 \le (\text{桃}) < 0.11,\ 0.11 \le (\text{赤}) \le 1. \end{aligned} \tag{5.9}$$

暖色のうち特に橙色が進みやすい点 (あるいは道) を表している．左にも進みやすい道はあるが，右にはより進みやすい道があることがよくわかる．

続いて，$t = 30$ でブロード分布を作っていた $q = 0.9$, $(a, b) = (0.5, -0.7)$ について

$$\begin{aligned} 0 \le (\text{青}) < 0.01,\ 0.01 \le (\text{水色}) < 0.02,\ 0.02 \le (\text{黄}) < 0.03, \\ 0.03 \le (\text{橙}) < 0.04,\ 0.04 \le (\text{桃}) < 0.05,\ 0.05 \le (\text{赤}) \le 1. \end{aligned} \tag{5.10}$$

のような基準で色を置いたものが図 21 である．ランダム・ウォークの進みやすい道が，中央付近から 2 方向に分かれる様子が見られる．このパラメータの場合，黄色の領域は右の方がわずかに大きい．

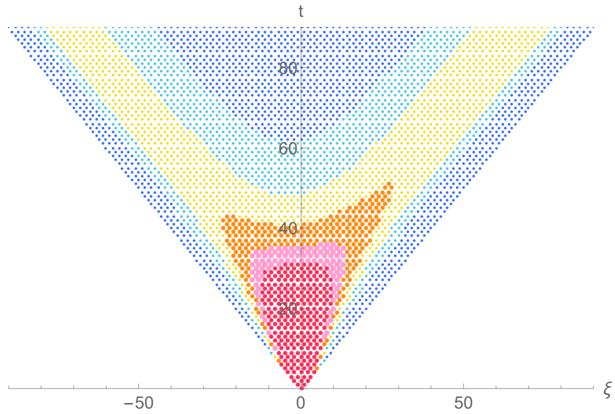


図 21: 上限 $T = 90$. ブロード分布を作っていた $q = 0.9$, $(a, b) = (0.5, -0.7)$．(5.10) のように色分けして $\mathbf{P}(\Xi_t^{(1)} = \xi)$ の値をドットプロットしたもの．

右寄りの単峰分布を作っていた $q = 0.9$, $(a, b) = (0.2, -0.7)$ についても調べると，

$$\begin{aligned} 0 \le (\text{青}) < 0.015,\ 0.015 \le (\text{水色}) < 0.05,\ 0.05 \le (\text{黄}) < 0.1, \\ 0.1 \le (\text{橙}) < 0.2,\ 0.2 \le (\text{桃}) < 0.3,\ 0.3 \le (\text{赤}) \le 1. \end{aligned} \tag{5.11}$$

としたとき図 22 のようになった．ただしこれは大まかな色分けとなっているため，$t = 90$ 付近で左側に見られた収束は反映されていない．

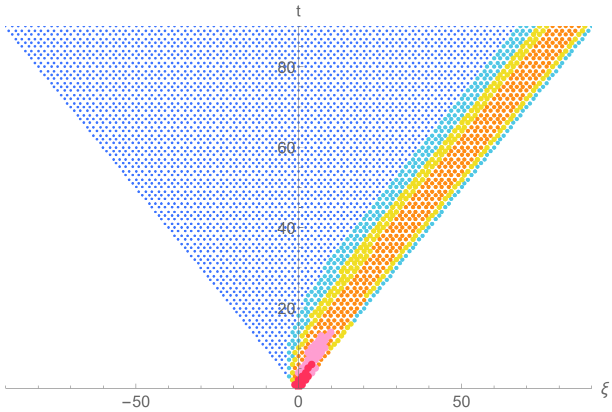


図 22: 上限 $T = 90$. 右寄りの単峰分布を作っていた $q = 0.9$, $(a, b) = (0.2, -0.7)$. (5.11) のように色分けして $\mathbf{P}(\Xi_t^{(1)} = \xi)$ の値をドットプロットしたもの.

5.4 ランダム・ウォークの再現

5.3 節で調べた 3 種類のパラメータの組について，ランダム・ウォークの計算機シミュレーションを行った．$T = 90$ とし，20 通り走らせたところ，右が大きい複峰分布では図 23 のような経路が得られた.

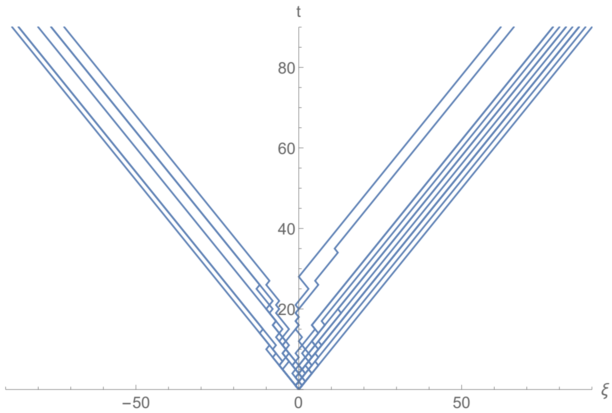
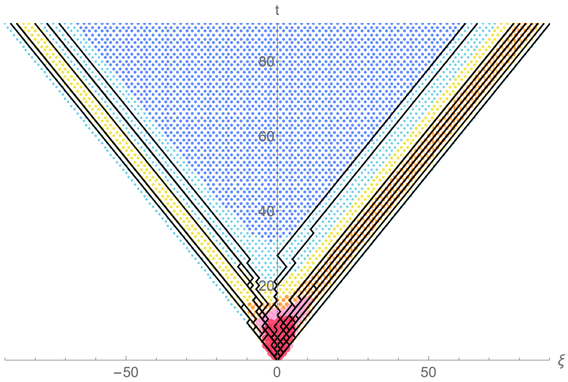


図 23: $T = 90$, $q = 0.8$, $x = 0.5$, $(a, b) = (0.4, -0.6)$ のときのランダム・ウォーク 20 本．右側に集まり，一部重なっている.

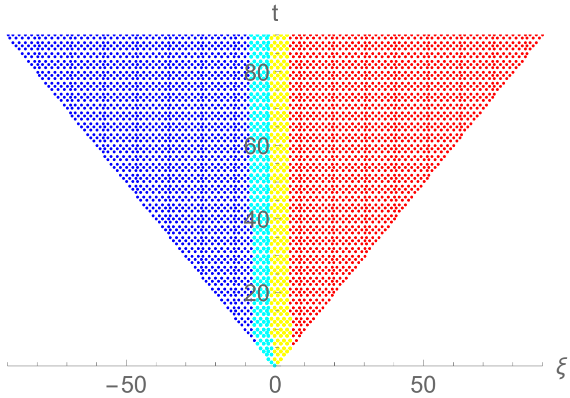
図 24 では，ランダム・ウォークと 5.3 節の俯瞰図を重ねてプロットしたものを，推移確率 $\mathbf{p}^{(1)}(\xi, t)$ の俯瞰図と並べている．ただし推移確率の色分けの基準は以下である,

$$0 \leq (\text{青}) < 0.2,\ 0.2 \leq (\text{水色}) < 0.5,\ 0.5 \leq (\text{黄}) < 0.8,\ 0.8 \leq (\text{赤}) \leq 1. \tag{5.12}$$

ランダム・ウォークは分布の俯瞰図の橙色の領域に集中していることが確認できる.



(a) ランダム・ウォークを確率分布の俯瞰図 20b に重ねたもの．



(b) 推移確率の俯瞰図．右に進む確率が 0.5 より大きい点が暖色になっている．

図 24: 上限 $T = 90$．右が大きい複峰を作る $q = 0.8$, $(a, b) = (0.4, -0.6)$.

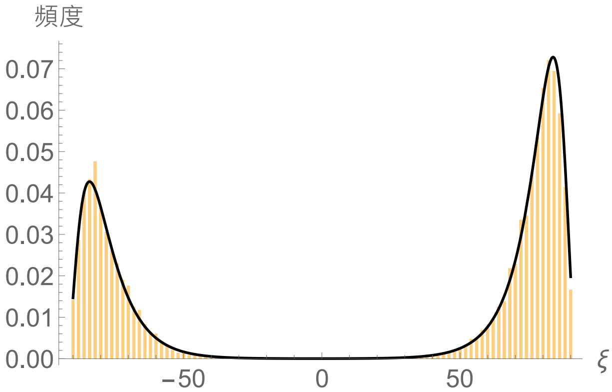


図 25: $T = 90$, $q = 0.8$, $x = 0.5$, $(a, b) = (0.4, -0.6)$．ランダム・ウォーク 10000 本の到達点についてのヒストグラム．黒の太線は確率分布 $\mathbf{P}(\Xi_{90}^{(1)} = \xi)$ であり，ほぼ一致する．

推移確率 $\mathbf{p}^{(1)}(\xi, t)$ の図は，暖色の点からは右へ進みやすく，寒色の点からは左へ進みやすい，というように見る．$t = 10$ 程度までは $\xi = 0$ を境にして進みやすい方向が分かれているが，その後は右に進みやすい点の方が多くなることがわかる．ランダム・ウォークと見比べると，$t = 20$ 付近で $\xi = -1$ にいる経路があるが，この点では $\mathbf{p}^{(1)}(\xi, t) > 0.5$ であることから右へ進み，その後 $\mathbf{p}^{(1)}(\xi, t)$ の値は 1 に近づいていく (5.2 節のグラフ参照) ことから決定論的に右へ進んだ，と解釈できる．
さらに，ランダム・ウォークを 10000 通り走らせ，その $t = 90$ での到達点についてヒストグラムを作成した．これを $\mathbf{P}(\Xi_{90}^{(1)} = \xi)$ のグラフと重ねると図 25 のようにほぼ一致した．

同様にブロード分布についても調べると，図 26〜28 のような結果が得られた．推移確率の色分けは同じである．分布の俯瞰図では右側の方が黄色の領域が大きかったが，シミュレーションの結果もそれと合っている．

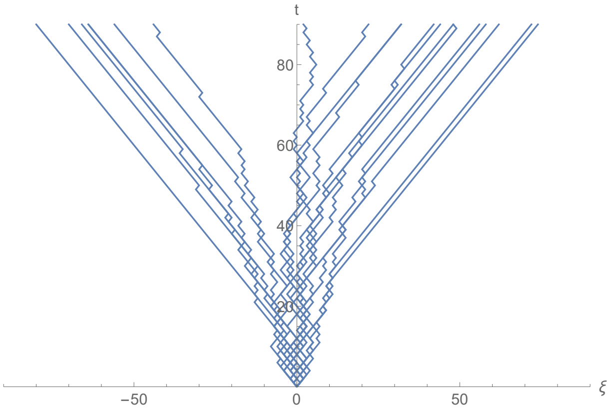
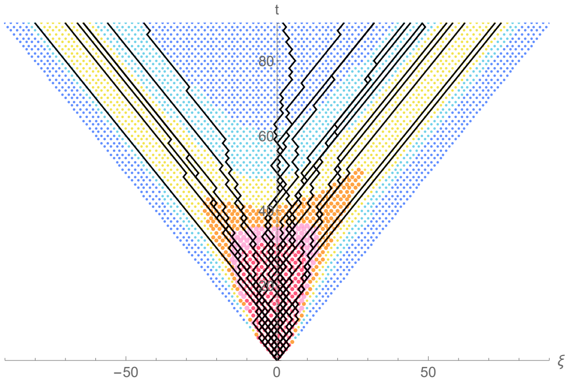
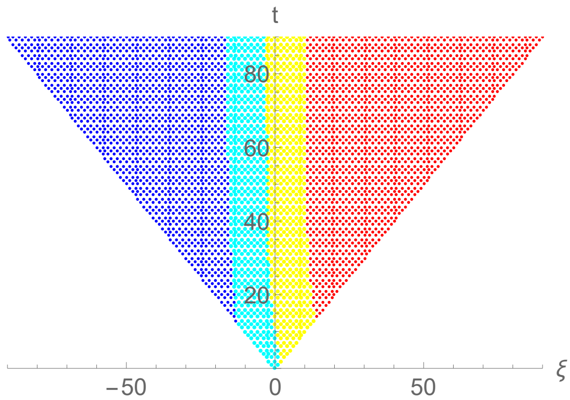


図 26: $T = 90$, $q = 0.9$, $x = 0.5$, $(a, b) = (0.5, -0.7)$ のときのランダム・ウォーク 20 本．中央付近に集まり，その後 2 方向に別れていく．



(a) ランダム・ウォークを確率分布の俯瞰図 21 に重ねたもの．



(b) 推移確率の俯瞰図．右に進む確率が 0.5 より大きい点が暖色になっている．

図 27: 上限 $T = 90$．ブロード分布から複峰へ変化する $q = 0.9$, $(a, b) = (0.5, -0.7)$．

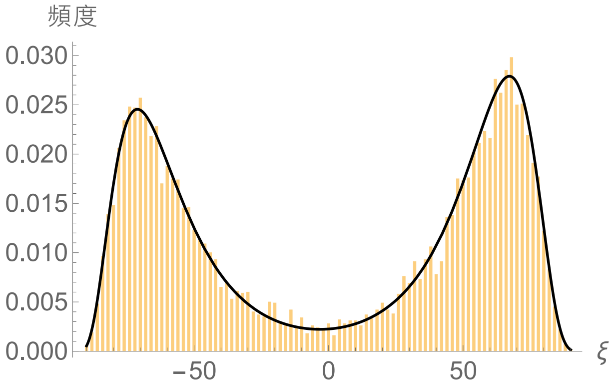


図 28: $T = 90$, $q = 0.9$, $x = 0.5$, $(a, b) = (0.5, -0.7)$．ランダム・ウォーク 10000 本の到達点についてのヒストグラム．黒の太線は確率分布 $\mathbf{P}(\Xi_{90}^{(1)} = \xi)$ であり，ほぼ一致する．

また同様に右寄りの単峰分布について調べると，図 29〜31 のような結果が得られた．こちらも推移確率の色分けは同じである．ランダム・ウォークはやはり橙色の領域に集中している．推移確率 $\mathbf{p}^{(1)}(\xi, t)$ の図 30b によると多くの点で右へ進みやすくなっており，図 29 のように偶然 $(-3, 3)$ まで進んだ経路もあるが，その後右へ押し流されている．20 本程度では左側へ進むランダム・ウォークは現れなかったが，ヒストグラムを作るため 10000 通り走らせた際は，$10000 \times 0.0001 \times 3 = 3$ 本は左へ進んだ．数を増やせば収束も見られるはずである．

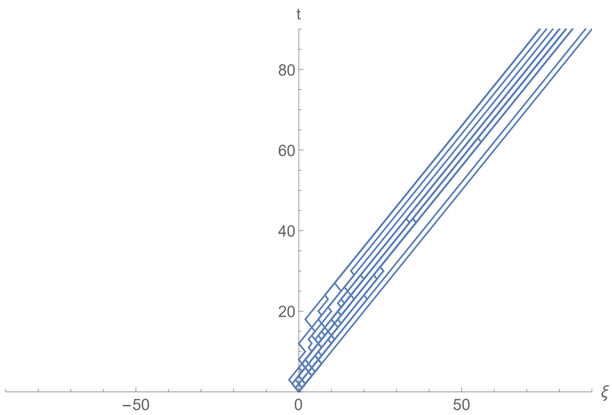
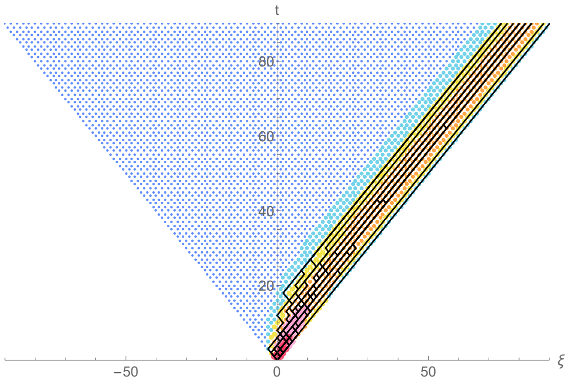
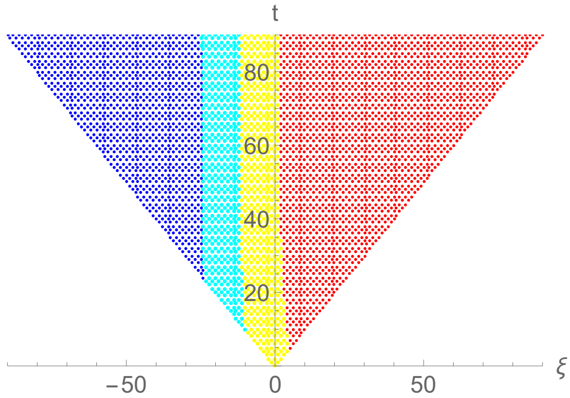


図 29: $T = 90$, $q = 0.9$, $x = 0.5$, $(a, b) = (0.2, -0.7)$ のときのランダム・ウォーク 20 本．決定論的に右へ進んでいる．



(a) ランダム・ウォークを確率分布の俯瞰図 22 に重ねたもの．

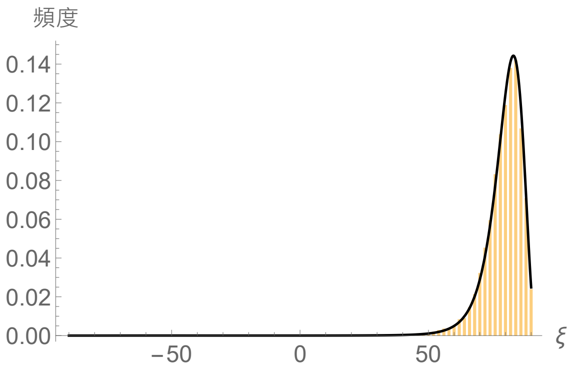


(b) 推移確率の俯瞰図．右に進む確率が 0.5 より大きい点が暖色になっている．

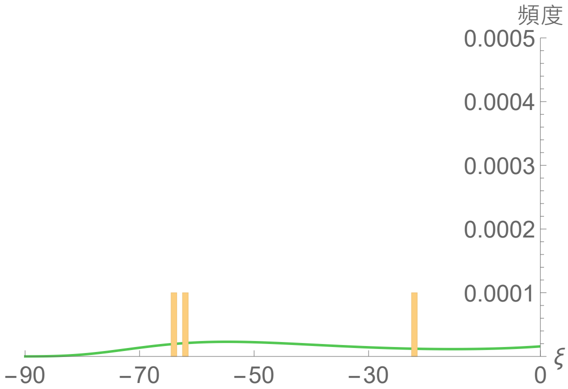
図 30: 上限 $T = 90$．右寄りの単峰を作る $q = 0.9$, $(a, b) = (0.2, -0.7)$．

6 展望

今回新たに得られた各時刻における確率分布は，時間経過によって全て複峰へ変化することが予想される．その転移の時刻はパラメータの値によって異なっていたことから，各拡張について，パラメータに依存した形で単峰から複峰へ転移する臨界値 $t_c(a, b, c; q, p)$ のようなものが得られると考えられる．本研究では，q の値を固定し，「(a, b) に条件の範囲内のどのような値をとっても分布が複峰になる最小の t」の目安を知るための数値計算も試みた．しかしパラメータは連続的に値をとるため，正確な臨界値を得るためには，あるいは臨界値の導出が不可能だと判断するためには，数値計算ではなく数式の解析的な研究を行う必要があるだろう．また，5.1.2 節にて言及したが，適切なスケーリングの下で時刻 t (あるいは格子のサイズ)$\to \infty$ の極限をとることで，極限分布を導出することができると考えている．解析的なことが明らかになれば，空間的時間的に不均一なランダム・ウォークとして応用例も考えられるであろう．今回の数値計算では，「進みやすい方向が 2 つあり，初期にはそのどちらに進むかはランダムに決まるが，その後は決定論的にその方向へ進んでいく」,「1 つの進みやすい方向に始めから決定論的に進んでいく」などの性質が見られた．移動する粒子そのものがこういった性質をもっていると思うこともできるが，粒子の移動する空間がこのようなベクトル場を形成していると思うこともできる．前者の解釈をすれば，同じ空間にある複数の粒子が全く異なる性質をもつ (パラメータに異なる値をとる) 場合も考えられるだろう．後者の解釈では，空間の性質がある時刻や地点から変化していくような場合も検討できると考えている．また，このランダム・ウォークは自身の経路と衝突あるいは交差することがないため，ポリマーモデル (高分子の分子構造に関するモデル) としての応用も期待される．



(a) 全体を表示したもの．



(b) $\xi < 0$ について拡大したもの．3 本左へ進んでいる．グラフの線は緑にしている．

図 31: $T = 90$, $q = 0.9$, $x = 0.5$, $(a, b) = (0.2, -0.7)$．ランダム・ウォーク 10000 本の到達点についてのヒストグラム．黒の太線は確率分布 $\mathbf{P}(\Xi_{90}^{(1)} = \xi)$ であり，ほぼ一致する．

参考文献

[1] Chaundy, T. W., Bullard, J. E.: John Smith's problem. Math. Gazette **44**, 253–260 (1960)

[2] Koornwinder, T. H., Schlosser, M. J.: On an identity by Chaundy and Bullard. I. Indag. Mathem., N.S. **19** (2), 239–261 (2008)

[3] Koornwinder, T. H., Schlosser, M. J.: On an identity by Chaundy and Bullard. II. More history. Indag. Mathem., **24**, 174–180 (2013)

[4] Koornwinder, T.H.: On the equivalence of two fundamental theta identities. Anal. Appl. (Singap.) **12**, 711–725 (2014)

[5] Hoshi, N., Katori, M., Koornwinder, T. H., Schlosser, M. J.: Extensions of the Chaundy–Bullard identity. 投稿準備中

[6] Schlosser, M. J.: Elliptic enumeration of nonintersecting lattice paths. J. Combin. Theory Ser. A **114**, 505–521 (2007)

[7] Schlosser, M. J.: A noncommutative weight-dependent generalization of the binomial theorem. Sém. Lothar. Combin., **B81**j (2020), 24 pp