

楢関数組み合わせ論と  
ランダム行列理論に関連した  
確率過程の研究

平成31年2月25日

中央大学大学院理工学研究科物理学専攻  
博士課程前期課程2年

馬場裕哉

## 概要

本研究では、自然数の代数的拡張である  $q$ -拡張や楕円関数拡張を用いて二項係数や分布関数を表現し、その時間発展を考えることで確率過程を構築し、その解析を行う。  $q$ -拡張では、 $q$ -二項定理を定義することが可能であり、これにより  $q$ -二項分布や  $q$ -ポアソン分布などの多くの分布を  $q$ -拡張できることが知られている。楕円関数拡張は、自然数を Jacobi テータ関数を用いて表現したものであり、 $q$ -拡張にさらにいくつかのパラメータを導入した拡張である。数学の研究分野の一つに組み合わせ論がある。組み合わせ論とは、ある条件を満たすような経路を数え上げ、その総数を扱う数学分野である。組み合わせ論において、格子経路模型における経路の重みを楕円関数拡張した楕円関数組み合わせ論が研究されているが、本研究では確率分布が楕円関数で与えられる確率過程を構成し、その特性を報告する。ランダム行列の動的拡張についても研究を行う。ランダム行列とは、各行列の成分がなんらかの確率分布に従う確率変数で与えられた行列のことである。特に、行列要素の確率変数がガウス分布に従い、エルミート条件を課したランダム行列はガウス型統計集団 (GUE) とよばれる。ガウス分布に従う確率変数をブラウン運動に置き換えることで、GUE の動的拡張を考えることができる。その結果として得られる時間依存したランダム行列の固有値の時間発展は、 $\beta = 2$  の Dyson 模型に従うことが知られている。本研究では、エルミート行列をより一般化した正規ランダム行列を考え、その動的拡張の結果として得られる正規ランダム行列の固有値が満たす確率微分方程式について検討する。正規行列では固有値が一般に複素数となるため、固有値の時間発展は 2 次元上の点過程として実現される。しかし、正規行列の一般表示は知られていないため、まずは 2 次の正規行列に値をとるブラウン運動の固有値が従う確率微分方程式の導出を行った。

# 目次

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>非衝突 <math>q</math>-ランダムウォークの時空相関核</b>	<b>5</b>
2.1	$q$ -ランダムウォークと推移確率密度	5
2.2	一般の非衝突 $q$ -ランダムウォーク	10
2.2.1	離散的伊藤の公式	10
2.2.2	複素過程表現	12
2.3	初期配置 $\delta_{2a\mathbb{Z}}$ での無限粒子系の非衝突 $q$ -ランダムウォーク	12
2.3.1	平衡状態への緩和	12
2.3.2	2点相関関数 $\rho(s, x; t, y)$	18
2.3.3	相関関数の図示	19
<b>3</b>	<b>楕円関数組み合わせ論に関連した確率過程</b>	<b>21</b>
3.1	楕円関数組み合わせ論	21
3.2	周遊過程	24
3.3	周遊過程のパラメータ設定	25
3.4	三角関数測度, 古典的測度への還元	26
3.5	測度の非負条件	28
3.5.1	楕円関数型周遊過程	28
3.5.2	三角関数型周遊過程	30
3.5.3	簡略化された三角関数型周遊過程	30
3.6	軌跡の数値計算	30
3.6.1	簡略化された三角関数型周遊過程	31
3.6.2	簡略化された三角関数型周遊過程のパラメータ依存性	34
3.6.3	簡略化された三角関数型周遊過程の反対称性	35
3.6.4	三角関数型周遊過程	36
3.6.5	三角関数型周遊過程が対称となる条件	39
3.6.6	楕円関数型周遊過程	42
3.7	簡略化された三角関数型周遊過程の漸近的解析	44
3.7.1	大偏差原理とスケール極限での軌跡	44
3.7.2	$t = T$ での中心極限定理	49
<b>4</b>	<b>正規ランダム行列の動的拡張</b>	<b>50</b>
4.1	正規行列の定義	50
4.2	分解の不変性	53
4.3	正規行列のパラメータ表示	54
4.4	ブラウン運動による動的拡張	54

4.5	特性方程式の解 . . . . .	56
4.6	パラメータの入った固有値の確率微分方程式 . . . . .	59
<b>5</b>	<b>謝辞</b>	<b>64</b>

# 1 Introduction

近年, 自然数の  $q$ -拡張や楕円関数拡張が注目を集めており, 様々な研究が行われている.  $q$ -拡張は自然数の最も基本的な拡張であり, 各自然数  $n$  に対して

$$[n]_q \equiv 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q} \quad 0 < q < 1 \quad (1.1)$$

で定義される. パラメータ  $q$  に関して  $q \rightarrow 1$  の極限をとると, 古典的な数に還元される. また楕円関数拡張とは,  $p, a, b$  という3つのパラメータを導入したうえで, 各自然数  $n$  に対して

$$[n]_{a,b;q,p} \equiv \frac{\theta(q^n, aq^n, bq^2, a/b; p)}{\theta(q, aq, bq^{n+1}, aq^{n-1}/b; p)} \quad (1.2)$$

を対応づけるものである. ただし,

$$\theta(x; p) = \prod_{j=0}^{\infty} \{(1 - p^j x)(1 - p^{j+1}/x)\},$$

$$\theta(x_1, \dots, x_m; p) = \prod_{k=1}^m \theta(x_k; p)$$

であり,  $\theta(x; p)$  は変形 Jacobi テータ関数とよばれる. ここで (1.2) の右辺において,  $p \rightarrow 0$ ,  $b \rightarrow \infty$ ,  $a \rightarrow \infty$  の順番に極限をとれば, (1.1) に一致することが確かめられる. そのため, 楕円関数拡張は  $q$ -拡張をより一般化したものとみなすことができる. 文献 [2] では,  $q$ -拡張の例として  $q$ -二項分布などが紹介されており, 確率が  $q$ -拡張によって表される確率分布が導入されている. 本論文では, 対称単純ランダムウォークの推移確率や付随するマルチンゲール多項式を  $q$ -拡張することにより,  $q$ -ランダムウォークの系を定義し解析する. 文献 [5] では, 楕円関数組み合わせ論が研究されている. そこでは特に, 2次元正方格子上的経路の数え上げ問題が研究されており, 各経路の重み関数が楕円関数拡張されている. 本論文では, この2次元平面上的格子経路モデルを変換することによって, (1+1)次元の時空平面での確率過程を構成する. これによって得られる推移確率密度関数は, 時間的にも空間的にも不均一な関数であるため, 新しい確率過程が構築できたと考えられる.

確率過程は, ランダム行列理論とも関係がある. 例えば, ランダム行列理論の統計集団の一つであるガウス型統計集団 (GUE) では, エルミート行列の各成分がガウス分布に従う確率変数で与えられる. この確率変数をブラウン運動に置き換えるという動的拡張を行うことで, その固有値の時間発展が  $\beta = 2$  の Dyson モデルという確率過程に従うことが知られている. GUE で登場したエルミート行列のより一般的な行列として正規行列が挙げられる. これまで, 正規ランダム行列の固有値分布の研究は報告されているが [3], その動的拡張は知られていない. これは, 正規行列に対しては一般的なパラメータ表示が分かっていないためである. しかし, 正規ランダム行列が興味深いのは, エルミート行列の固有値が実数であったのに対し正規ランダム行列の固有値は一般に複素数となるため, 固有値の時間発展が2次元上の点過程と

なる点である. 本論文では,  $2 \times 2$  の正規ランダム行列についてその固有値がどのような確率微分方程式に従うのか検討することにする.

本論文の構成は以下のとおりである. 第2章ではまず  $q$ -拡張された確率分布を定義する. そしてそこから, 単純対称ランダムウォーク [4] の  $q$ -拡張を行う.  $q$ -拡張においても単純対称ランダムウォークと同様に推移確率を定義することが可能であるが, 時間的に不均一となっている点が異なる. 第3章では, 楕円関数組み合わせ論 [5] を変換することで (1+1) 次元の離散時空平面上の確率過程を構築する. ここでは特に周遊過程 (Excursion Processes) という確率過程を楕円関数拡張したモデルについて数値計算を用いて軌跡の概形や特徴を調べる. 本論文では, 3種類の拡張を考えるが, いずれも古典的な周遊過程での軌跡とは異なり, 非自明な曲線が得られることが明らかとなった. 軌跡の概形について, 3.6.2節と3.6.5節ではパラメータによって概形がどのように変化するかについて考察を行う. また, 3.7節では長時間極限での詳しい軌跡の解析を行う. 一つは, 大数の法則から軌跡の平均値がどのような曲線として近似できるか研究する. もう一つは, 分布が対称的になるときの軌跡の揺らぎがガウス分布に従うことを, 中心極限定理から示す. 第4章では正規行列の各成分がブラウン運動で与えられるランダム行列の動的拡張について考える. そして, 離散的伊藤の公式を使うことでその固有値が満たすべき確率微分方程式を導出する.

本研究では全体として新しい確率過程の構築を目指しており, その中でも第2, 3章は代数的な数の拡張を用いた確率過程であり, 第4章ではランダム行列理論を用いた確率過程となっている.

## 2 非衝突 $q$ -ランダムウォークの時空相関核

### 2.1 $q$ -ランダムウォークと推移確率密度

$j$  回目の試行での成功  $s_j$  が試行回数に依存して変わるような確率は

$$\Pr(\{s_j\}) = p_j, \quad 0 < p_j < 1, \quad j \in \mathbb{N} \equiv \{1, 2, \dots\} \quad (2.1)$$

と表せる. ここで

$$0 < q < 1 \quad \text{or} \quad 1 < q < \infty \quad (2.2)$$

を仮定する. 文献 [2] の 62 ページでは, 以下の場合が研究されている.

$$p_j = \frac{cq^{j-1}}{1+cq^{j-1}}, \quad j \in \mathbb{N}, \quad 0 < c < \infty. \quad (2.3)$$

つまり,  $j$  回目の試行で成功する確率が  $cq^{j-1}$  にある  $q$  の値によって幾何級数的に変わる場合である.

文献 [2] の 3 ページでは,  $q$ -二項係数が以下のように定義されている.

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{[n]_q!}{[k]_q! [n-k]_q!} \quad (2.4)$$

ここで

$$\begin{aligned} [0]_q &= 0, & [n]_q &= \frac{1-q^n}{1-q}, & n \in \mathbb{N}, \\ [0]_q! &= 1, & [n]_q! &= [n]_q[n-1]_q \cdots [1]_q, & n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

今、パラメータ  $c$  と  $q$  が  $0 < c < \infty$  と (2.2) を満たしているものとする。このとき時刻  $t \in \mathbb{N}$  で右隣の最隣接サイトに移動する確率が

$$p_t = \frac{cq^{t-1}}{1+cq^{t-1}} \quad (2.6)$$

で与えられ、 $t \in \mathbb{N}$  で左隣の最隣接サイトに移動する確率が

$$1 - p_t = \frac{1}{1+cq^{t-1}} \quad (2.7)$$

で与えられるような  $\mathbb{Z}$  上での単純ランダムウォークを、 $q$ -ランダムウォーク ( $qRW$ ) と定義する。ただし、時刻と空間については以下の条件を満たす。

$$\begin{aligned} 0 \leq s \leq t, & \quad x - (t-s) \leq y \leq x + (t-s), \\ (t-s) + (y-x) & \in \mathbb{Z}_e. \end{aligned} \quad (2.8)$$

**補題 2.1**  $0 < c < \infty$  と (2.2) を仮定する。  $p^{q,c}(s,x;t,y)$  をパラメータ  $c$  と  $q$  を持ち、時刻  $s \in \mathbb{N}_0$  で位置  $x \in \mathbb{Z}$  から時刻  $t \in \mathbb{N}_0$  で位置  $y \in \mathbb{Z}$  への  $q$ -ランダムウォークの推移確率であるとする。このとき  $p^{q,c}(s,x;t,y)$  は条件 (2.8) が満たされるとき

$$\begin{aligned} p^{q,c}(s,x;t,y) &= \frac{c^{\{(t-s)+(y-x)\}/2}}{\prod_{j=s+1}^t (1+cq^{j-1})} q^{s\{(t-s)+(y-x)\}/2 + \binom{\{(t-s)+(y-x)\}/2}{2}} \left[ \begin{matrix} t-s \\ \{(t-s)+(y-x)\}/2 \end{matrix} \right]_q, \end{aligned} \quad (2.9)$$

(2.8) を満たさない場合は  $p^{q,c}(s,x;t,y) = 0$  である。

**証明.** 文献 [2] の 63 ページにある議論に基づいて証明をする。まず、次のような時刻の増加列を考える。

$$T_0 = s, \quad T_1 = s+1, \dots, T_j = s+j, \quad \dots, T_{t-s} = t.$$

各時刻  $T_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, t-s$  において、 $R_j$  をランダムウォーカーが右に移動する事象、 $L_j$  をランダムウォーカーが左に移動する事象であるとする。  $0 \leq k \leq t-s$  とすると

$$\#\{R_j : 1 \leq j \leq t-s\} = k, \quad \#\{L_j : 1 \leq j \leq t-s\} = (t-s) - k.$$

ここで  $t-s$  個の正の整数  $\{1, 2, \dots, t-s\}$  の置換を  $(j_1, j_2, \dots, j_k, j_{k+1}, \dots, j_{t-s})$  とする. すると (2.6) より

$$p_{T_j} = \frac{cq^{T_j-1}}{1+cq^{T_j-1}} = \frac{cq^{s+j-1}}{1+cq^{s+j-1}}, \quad j = 1, 2, \dots, t-s$$

を得る. よって,

$$\prod_{j=1}^{t-s} (1+cq^{T_j-1}) = \prod_{j=1}^{t-s} (1+cq^{s+j-1}) = \prod_{j=s+1}^t (1+cq^{j-1})$$

であることを用いると

$$\begin{aligned} & \Pr(R_{j_1}, R_{j_2}, \dots, R_{j_k}, L_{j_{k+1}}, \dots, L_{j_{t-s}}) \\ &= \Pr(R_{j_1}) \Pr(R_{j_2}) \cdots \Pr(R_{j_k}) \Pr(L_{j_{k+1}}) \cdots \Pr(L_{j_{t-s}}) \\ &= \frac{1}{\prod_{j=s+1}^t (1+cq^{j-1})} c^k q^{(s+j_1-1)+(s+j_2-1)+\cdots+(s+j_k-1)} \\ &= \frac{1}{\prod_{j=s+1}^t (1+cq^{j-1})} c^k q^{j_1+j_2+\cdots+j_k+sk-k}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

最後に文献 [2] の (1.3)

$$\sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_k \leq t-s} q^{j_1+j_2+\cdots+j_k-k} = q^{\binom{k}{2}} \left[ \begin{matrix} t-s \\ k \end{matrix} \right]_q$$

を用いることで和をとることができる. また, 初期時刻  $s$  で位置  $x$  にいるランダムウォーカーは時刻  $t$  までに  $k$  ステップ右へ移動し,  $(t-s) - k$  ステップ左に移動しているため, 時刻  $t$  でのランダムウォーカーの位置は

$$x+k - \{(t-s) - k\} = x+2k - (t-s).$$

これが  $y$  に等しくなるため

$$k = \frac{1}{2} \{(t-s) + (y-x)\}$$

となり, (2.9) が得られる. ■

**注 2.1** (2.9) が規格化されていることは以下のように確かめることができる.

$$\begin{aligned} \sum_{y \in \mathbb{Z}} p^{q,c}(s,x;t,y) &= \frac{1}{\prod_{j=s+1}^t (1+cq^{j-1})} \\ &\times \sum_{y \in \mathbb{Z}} c^{\{(t-s)+(y-x)\}/2} q^{s\{(t-s)+(y-x)\}/2 + \binom{\{(t-s)+(y-x)\}/2}{2}} \left[ \begin{matrix} t-s \\ \{(t-s)+(y-x)\}/2 \end{matrix} \right]_q. \end{aligned}$$



上記の和は  $y$  が

$$\begin{aligned} & y \in \{x - (t - s), x - (t - s) + 2, \dots, x + (t - s) - 2, x + (t - s)\} \\ \iff & \frac{1}{2}\{(y - x) + (t - s)\} \in \{0, 1, 2, \dots, t - s\} \end{aligned}$$

の範囲にあるときのみ正となる. よって和の部分を実算すると

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{t-s} c^k q^{sk} q^{\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q &= \sum_{k=0}^{t-s} (cq^s)^k q^{\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q \\ &= \prod_{j=1}^{t-s} (1 + cq^s q^{j-1}) = \prod_{j=s+1}^t (1 + cq^{j-1}). \end{aligned}$$

ただし, 途中で文献 [2] の (1.14),

$$\prod_{j=1}^n (1 + uq^{j-1}) = \sum_{k=0}^n q^{\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q u^k, \quad (2.11)$$

$n \in \mathbb{N}, u, q \in \mathbb{R}, q \neq 1$  を用いた. 以上より

$$\sum_{y \in \mathbb{Z}} p^{q,c}(s, x; t, y) = 1, \quad 0 < s < t, \quad x \in \mathbb{Z}. \quad (2.12)$$

**注 2.2** (2.9) で与えられる  $p^{q,c}(s, x; t, y)$  は,  $t - s$  や  $y - x$  のみでなく,  $s$  にも依存していることに注意すべきである. このことから  $q$ -ランダムウォークは空間的には均一的 (つまり位置の差  $y - x$  のみに依存する) であるが, 時間的には不均一的 (つまり時刻の差  $t - s$  のみでなく初期時刻  $s$  にも依存する) である.

**注 2.3**  $q \rightarrow 1$  の極限で  $p^{q,c}(s, x; t, y)$  は

$$\lim_{q \rightarrow 1} p^{q,c}(s, x; t, y) = \frac{c^{\{(t-s)+(y-x)\}/2}}{(1+c)^{t-s}} \binom{t-s}{\{(t-s)+(y-x)\}/2} \quad (2.13)$$

となる. これを見ると, ランダムウォークは空間的にも時間的にも均一的になっていることが分かる. 特に  $c = 1$  では,  $p^{1,1}$  は (古典的な) 単純対称ランダムウォークの推移確率に一致する.  $c \neq 1$  ではランダムウォークは一般に非対称である.

以下の等式は文献 [2] の 12 ページに与えられており,  $q$ -Cauchy ( $q$ -binomial convolution) 公式とよばれており  $q$ -Vandermonde ( $q$ -factorial convolution) 公式の結果として導くことができる.  $\alpha, \beta, \gamma$  を正の整数とし  $q \in \mathbb{R}$  で  $q \neq 1$  とする. このとき

$$\begin{bmatrix} \alpha + \beta \\ \gamma \end{bmatrix}_q = \sum_{k=0}^{\gamma} q^{(\gamma-k)(\alpha-k)} \begin{bmatrix} \alpha \\ k \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} \beta \\ \gamma - k \end{bmatrix}_q \quad (2.14)$$

が成り立つ.  $0 < s < t < u$  に対して

$$\begin{aligned}\alpha &= t - s, & \beta &= u - t, \\ k &= \{(t - s) + (y - x)\}/2, & \gamma &= \{(u - s) + (z - x)\}/2\end{aligned}\quad (2.15)$$

とする. このとき

$$\gamma - k = \{(u - t) + (z - y)\}/2$$

となり

$$\begin{aligned}sk + \binom{k}{2} + t(\gamma - k) + \binom{\gamma - k}{2} &= k^2 + (s - t - \gamma)k + \frac{\gamma^2}{2} + t\gamma - \frac{\gamma}{2} \\ &= k^2 - (\alpha + \gamma)k + \frac{\gamma^2}{2} + t\gamma - \frac{\gamma}{2} \\ &= (\gamma - k)(\alpha - k) + \binom{\gamma}{2} + (t - \alpha)\gamma \\ &= (\gamma - k)(\alpha - k) + s\gamma + \binom{\gamma}{2}.\end{aligned}\quad (2.16)$$

よって (2.14) は

$$q^{s\gamma + \binom{\gamma}{2}} \begin{bmatrix} \alpha + \beta \\ \gamma \end{bmatrix}_q = \sum_{k=0}^{\gamma} q^{sk + \binom{k}{2}} \begin{bmatrix} \alpha \\ k \end{bmatrix}_q q^{t(\gamma - k) + \binom{\gamma - k}{2}} \begin{bmatrix} \beta \\ \gamma - k \end{bmatrix}_q. \quad (2.17)$$

ここで

$$w^q(s, x; t, y) = \begin{cases} q^{s\{(t-s)+(y-x)\}/2 + \binom{\{(t-s)+(y-x)\}/2}{2}} \begin{bmatrix} t - s \\ \{(t-s) + (y-x)\}/2 \end{bmatrix}_q, \\ 0, \end{cases} \quad \begin{array}{l} \{(t-s) + (y-x)\}/2 \in \{0, 1, 2, \dots, t-s\} \text{ の場合,} \\ \text{その他の場合} \end{array} \quad (2.18)$$

とおくと  $w^q(s, x; t, y)$  は

$$\sum_{y \in \mathbb{Z}} w^q(s, x; t, y) w^q(t, y; u, z) = w^q(s, x; u, z), \quad 0 < s < t < u, \quad x, z \in \mathbb{Z} \quad (2.19)$$

という関係式を満たす. さらに

$$w^{q,c}(s, x; t, y) = c^{\{(t-s)+(y-x)\}/2} w^q(s, x; t, y) \quad (2.20)$$

とおくと

$$c^{\{(t-s)+(y-x)\}/2} c^{\{(u-t)+(z-y)\}/2} = c^{\{(u-s)+(z-x)\}/2}$$

であることから

$$\sum_{y \in \mathbb{Z}} w^{q,c}(s,x;t,y) w^{q,c}(t,y;u,z) = w^{q,c}(s,x;u,z), \quad 0 < s < t < u, \quad x, z \in \mathbb{Z} \quad (2.21)$$

が成立する. ただし  $w^{q,c}$  は規格化されていないので (2.9) のように規格化を行えば

$$p^{q,c}(s,x,t,y) = \frac{w^{q,c}(s,x;t,y)}{\prod_{j=s+1}^t (1+cq^{j-1})} \quad (2.22)$$

となり (2.12) を満たす.

$$\prod_{j=s+1}^t (1+cq^{j-1}) \prod_{k=t+1}^u (1+cq^{k-1}) = \prod_{j=s+1}^u (1+cq^{j-1})$$

は当然成り立つので (2.21) から

$$\sum_{y \in \mathbb{Z}} p^{q,c}(s,x;t,y) p^{q,c}(t,y;u,z) = p^{q,c}(s,x;u,z), \quad 0 < s < t < u, \quad x, z \in \mathbb{Z} \quad (2.23)$$

が成り立つ. この関係式は Chapman-Kolmogorov 方程式と呼ばれており, このことから推移確率が  $p^{q,c}$  で与えられる過程はマルコフ性を持っているといえる.

## 2.2 一般の非衝突 $q$ -ランダムウォーク

### 2.2.1 離散的伊藤の公式

$c \in \mathbb{R}, 0 < q < 1$  として  $\xi_j (j = 1, 2, 3, \dots)$  を

$$P(\xi_j = 1) = p_j = \frac{cq^{j-1}}{1+cq^{j-1}} \quad (2.24)$$

$$P(\xi_j = -1) = 1 - p_j = \frac{1}{1+cq^{j-1}} \quad (2.25)$$

のように分布する確率変数とする.  $p_j$  は右隣に推移する確率を,  $1 - p_j$  は左隣に推移する確率を表している. ここで

$$S_t = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_t \quad (2.26)$$

を定義する. 離散的伊藤の公式によると以下の関係が成り立つ.

$$\begin{aligned} f(t+1, S_{t+1}) - f(t, S_t) &= \frac{f(t+1, S_t+1) - f(t+1, S_t-1)}{2} [S_{t+1} - S_t - (2p_{t+1} - 1)] \\ &\quad + \frac{f(t+1, S_t+1) - 2f(t+1, S_t) + f(t+1, S_t-1)}{2} \\ &\quad + \frac{(2p_{t+1} - 1)}{2} [f(t+1, S_t+1) - f(t+1, S_t-1)] \\ &\quad + f(t+1, S_t) - f(t, S_t). \end{aligned} \quad (2.27)$$

$f(t, S_t)$  がマルチンゲールになるための条件は以下の漸化式

$$\begin{aligned} & \frac{f(t+1, S_t+1) - 2f(t+1, S_t) + f(t+1, S_t-1)}{2} \\ & + \frac{(2p_{t+1}-1)}{2} [f(t+1, S_t+1) - f(t+1, S_t-1)] + f(t+1, S_t) - f(t, S_t) = 0, \end{aligned}$$

つまり

$$p_{t+1}f(t+1, S_t+1) + (1-p_{t+1})f(t+1, S_t-1) = f(t, S_t) \quad (2.28)$$

を満たすことである. ここで (2.28) の解は

$$G_{q,\alpha}(t, S_t) = \frac{e^{\alpha S_t}}{\prod_{i=1}^t [p_i e^\alpha + (1-p_i) e^{-\alpha}]} \quad t = 1, 2, 3, \dots \quad (2.29)$$

で与えられる. ただし  $p_i$  は (2.24) で定義した確率であり, 初期条件は  $f(0, 0) = 1$  とする. (2.29) を  $\alpha$  についてマクローリン展開すると

$$G_{q,\alpha}(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} m_{q,n}(t, x) \frac{\alpha^n}{n!} \quad (2.30)$$

となり, この時の展開係数から モニックな  $n$  次多項式が決定される.  $n$  が小さい場合を例として列挙すると

$$\begin{aligned} m_{q,0}(t, x) &= 1, \\ m_{q,1}(t, x) &= x + \sum_{j=1}^t \frac{1 - cq^{j-1}}{1 + cq^{j-1}}, \\ m_{q,2}(t, x) &= x^2 + 2x \sum_{j=1}^t \frac{1 - cq^{j-1}}{1 + cq^{j-1}} - \sum_{j=1}^t \frac{4cq^{j-1}}{(1 + cq^{j-1})^2} + \left( \sum_{j=1}^t \frac{1 - cq^{j-1}}{1 + cq^{j-1}} \right)^2, \dots \end{aligned}$$

ここで  $G_{q,\alpha}(t, x)$  がマルチンゲールであることから,  $m_{q,n}(t, x)$  は  $q$ -マルチンゲール多項式となっている. また  $G_{q,\alpha}(t, x)$  は (2.28) を満たすので  $f(t, x) = G_{q,\alpha}(t, x)$  とすれば (2.30) を使うことで  $m_{q,n}(t, x)$  についての漸化式

$$m_{q,n}(t, x) = p_{t+1}m_{q,n}(t+1, x+1) + (1-p_{t+1})m_{q,n}(t+1, x-1) \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (2.31)$$

が得られる.

## 2.2.2 複素過程表現

$q$ -ランダムウォークの複素化を考える.  $\tilde{\xi}$  を以下の分布に従う連続確率変数であるとする.

$$\tilde{P}[\tilde{\xi} \in dx] = \frac{1}{\sqrt{p_j(1-p_j)}} \left( \sqrt{\frac{1-p_j}{p_j}} \right)^{-ix} \frac{1}{4 \cosh \pi x/2}, \quad j \in \mathbb{N}. \quad (2.32)$$

ここで

$$\tilde{S}_t = \tilde{\xi}_1 + \tilde{\xi}_2 + \cdots + \tilde{\xi}_t \quad (2.33)$$

とすると

$$\tilde{E}[e^{i\alpha \tilde{S}_t}] = \prod_{j=1}^t \frac{1}{p_j e^{\alpha} + (1-p_j) e^{-\alpha}} \quad (2.34)$$

である. ただし  $p_j$  は (2.24) で与えられる確率である. ここで  $\alpha = i\lambda$  とすると (2.34) は

$$\tilde{E}[e^{i\alpha \tilde{S}_t}] = \prod_{j=1}^t \frac{1}{\cos \lambda - i(1-2p_j) \sin \lambda} \quad (2.35)$$

となる.

また,  $q$ -ランダムウォークの推移確率は,  $t \in \mathbb{N}_0, x, y \in \mathbb{Z}$ , 初期条件を  $p(0, y|x) \equiv \delta_{xy}$  とすると

$$p^{q,c}(s, x; t+1, y) = \frac{cq^{t-1}}{1+cq^{t-1}} p^{q,c}(s, x; t, y-1) + \frac{1}{1+cq^{t-1}} p^{q,c}(s, x; t, y+1)$$

を満たす一意の解であることから

$$p^{q,c}(s, x; t, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dk \exp(ik(y-x)) \prod_{j=1}^t (\cos k - i(1-2p_j) \sin k) \quad (2.36)$$

と書くことができる.

## 2.3 初期配置 $\delta_{2a\mathbb{Z}}$ での無限粒子系の非衝突 $q$ -ランダムウォーク

### 2.3.1 平衡状態への緩和

$a \in \{2, 3, \dots\}$  として, 無限粒子が格子間隔  $2a$  で等間隔に  $\mathbb{Z}_e$  上に配置されている状態, つまり

$$\delta_{2a\mathbb{Z}}(\cdot) \equiv \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_{2ak}(\cdot) \quad (2.37)$$

を考える. 文献 [4] の 34 ページでは, 次の関数が導入され

$$\Phi_{\delta_{2a\mathbb{Z}}}^{2ak}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\lambda e^{i\lambda(z/2a-k)}, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (2.38)$$

のような積分表示で書けることが知られている. ここで

$$\mathcal{M}_{\delta_{2a\mathbb{Z}}}^{2ak}(t, y) \equiv \tilde{\mathbf{E}}[\Phi_{\delta_{2a\mathbb{Z}}}^{2ak}(y + i\tilde{S}_t)] \quad (2.39)$$

を定義すると (2.39) は (2.35) と (2.38) を用いることで

$$\mathcal{M}_{\delta_{2a\mathbb{Z}}}^{2ak}(t, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\lambda \frac{e^{i\lambda(y/2a-k)}}{\prod_{j=1}^t [\cos(\lambda/2a) - i(1-2p_j)\sin(\lambda/2a)]} \quad (2.40)$$

と書ける.  $(s, x), (t, y) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{Z}, s+x, t+y \in \mathbb{Z}_e$  に対して

$$\mathbb{K}_{\delta_{2a\mathbb{Z}}}(s, x; t, y) + \mathbf{1}(s > t) p^{q,c}(t, y; s, x) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} p^{q,c}(0, 2al; s, x) \mathcal{M}_{\delta_{2a\mathbb{Z}}}^{2al}(t, y) \quad (2.41)$$

であるから, (2.41) の右辺は (2.36) と (2.40) より

$$\begin{aligned} & \frac{1}{8\pi^2 a} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \int_{-2a\pi}^{2a\pi} d\theta \int_{-\pi}^{\pi} d\lambda \exp \left[ i\theta \left( \frac{x}{2a} - l \right) + i\lambda \left( \frac{y}{2a} - l \right) \right] \\ & \quad \times \frac{\prod_{j=1}^s [\cos(\theta/2a) + i(1-2p_j)\sin(\theta/2a)]}{\prod_{j=1}^t [\cos(\lambda/2a) - i(1-2p_j)\sin(\lambda/2a)]} \end{aligned} \quad (2.42)$$

となる. 今,  $s < t$  である場合を考えると, (2.42) は

$$\begin{aligned} & \frac{1}{8\pi^2 a} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \int_{-2a\pi}^{2a\pi} d\theta \int_{-\pi}^{\pi} d\lambda \exp \left[ i\theta \left( \frac{x}{2a} - l \right) + i\lambda \left( \frac{y}{2a} - l \right) \right] \\ & \quad \times \prod_{j=s+1}^t \frac{1}{\cos\left(\frac{\lambda}{2a}\right) - i(1-2p_j)\sin\left(\frac{\lambda}{2a}\right)} \prod_{j=1}^s \frac{\cos\left(\frac{\theta}{2a}\right) + i(1-2p_j)\sin\left(\frac{\theta}{2a}\right)}{\cos\left(\frac{\lambda}{2a}\right) - i(1-2p_j)\sin\left(\frac{\lambda}{2a}\right)} \end{aligned} \quad (2.43)$$

と書き直すことができる. ここで (2.43) の積分を 5 つの部分,  $I_1, I_2, I_3, I_4, I_5$  に分割する. ただし

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{8\pi^2 a} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \int_{-2a\pi}^{-(2a-1)\pi} d\theta \int_{-\pi}^{\pi} d\lambda \exp \left[ i\theta \left( \frac{x}{2a} - l \right) + i\lambda \left( \frac{y}{2a} - l \right) \right] \\ & \quad \times \prod_{j=s+1}^t \frac{1}{\cos\left(\frac{\lambda}{2a}\right) - i(1-2p_j)\sin\left(\frac{\lambda}{2a}\right)} \prod_{j=1}^s \frac{\cos\left(\frac{\theta}{2a}\right) + i(1-2p_j)\sin\left(\frac{\theta}{2a}\right)}{\cos\left(\frac{\lambda}{2a}\right) - i(1-2p_j)\sin\left(\frac{\lambda}{2a}\right)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_2 &= \frac{1}{8\pi^2 a} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \int_{(2a-1)\pi}^{2a\pi} d\theta \int_{-\pi}^{\pi} d\lambda \exp \left[ i\theta \left( \frac{x}{2a} - l \right) + i\lambda \left( \frac{y}{2a} - l \right) \right] \\
&\quad \times \prod_{j=s+1}^t \frac{1}{\cos \left( \frac{\lambda}{2a} \right) - i(1-2p_j) \sin \left( \frac{\lambda}{2a} \right)} \prod_{j=1}^s \frac{\cos \left( \frac{\theta}{2a} \right) + i(1-2p_j) \sin \left( \frac{\theta}{2a} \right)}{\cos \left( \frac{\lambda}{2a} \right) - i(1-2p_j) \sin \left( \frac{\lambda}{2a} \right)}, \\
I_3 &= \frac{1}{8\pi^2 a} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_{-\pi}^{\pi} d\lambda \exp \left[ i\theta \left( \frac{x}{2a} - l \right) + i\lambda \left( \frac{y}{2a} - l \right) \right] \\
&\quad \times \prod_{j=s+1}^t \frac{1}{\cos \left( \frac{\lambda}{2a} \right) - i(1-2p_j) \sin \left( \frac{\lambda}{2a} \right)} \prod_{j=1}^s \frac{\cos \left( \frac{\theta}{2a} \right) + i(1-2p_j) \sin \left( \frac{\theta}{2a} \right)}{\cos \left( \frac{\lambda}{2a} \right) - i(1-2p_j) \sin \left( \frac{\lambda}{2a} \right)}, \\
I_4 &= \frac{1}{8\pi^2 a} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \int_{-(2a-1)\pi}^{-\pi} d\theta \int_{-\pi}^{\pi} d\lambda \exp \left[ i\theta \left( \frac{x}{2a} - l \right) + i\lambda \left( \frac{y}{2a} - l \right) \right] \\
&\quad \times \prod_{j=s+1}^t \frac{1}{\cos \left( \frac{\lambda}{2a} \right) - i(1-2p_j) \sin \left( \frac{\lambda}{2a} \right)} \prod_{j=1}^s \frac{\cos \left( \frac{\theta}{2a} \right) + i(1-2p_j) \sin \left( \frac{\theta}{2a} \right)}{\cos \left( \frac{\lambda}{2a} \right) - i(1-2p_j) \sin \left( \frac{\lambda}{2a} \right)}, \\
I_5 &= \frac{1}{8\pi^2 a} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \int_{\pi}^{(2a-1)\pi} d\theta \int_{-\pi}^{\pi} d\lambda \exp \left[ i\theta \left( \frac{x}{2a} - l \right) + i\lambda \left( \frac{y}{2a} - l \right) \right] \\
&\quad \times \prod_{j=s+1}^t \frac{1}{\cos \left( \frac{\lambda}{2a} \right) - i(1-2p_j) \sin \left( \frac{\lambda}{2a} \right)} \prod_{j=1}^s \frac{\cos \left( \frac{\theta}{2a} \right) + i(1-2p_j) \sin \left( \frac{\theta}{2a} \right)}{\cos \left( \frac{\lambda}{2a} \right) - i(1-2p_j) \sin \left( \frac{\lambda}{2a} \right)}.
\end{aligned}$$

そして  $I_1, I_2$  に対してそれぞれ  $\theta' = \theta + 2a\pi$ ,  $\theta' = \theta - 2a\pi$  という変数変換を行うと, 積分  $I_1, I_2, I_3$  は次のように纏めることができる.

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4\pi^2 a} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_{-\pi}^{\pi} d\lambda \exp \left[ i(\theta x + \lambda y) / 2a - i(\theta + \lambda) l \right] \\
&\quad \times \prod_{j=s+1}^t \frac{1}{\cos \left( \frac{\lambda}{2a} \right) - i(1-2p_j) \sin \left( \frac{\lambda}{2a} \right)} \prod_{j=1}^s \frac{\cos \left( \frac{\theta}{2a} \right) + i(1-2p_j) \sin \left( \frac{\theta}{2a} \right)}{\cos \left( \frac{\lambda}{2a} \right) - i(1-2p_j) \sin \left( \frac{\lambda}{2a} \right)}. \tag{2.44}
\end{aligned}$$

すると, (2.43) は

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{4\pi^2 a} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_{-\pi}^{\pi} d\lambda \exp \left[ i(\theta x + \lambda y) / 2a - i(\theta + \lambda) l \right] \\
& \times \prod_{j=s+1}^t \frac{1}{\cos\left(\frac{\lambda}{2a}\right) - i(1-2p_j)\sin\left(\frac{\lambda}{2a}\right)} \prod_{j=1}^s \frac{\cos\left(\frac{\theta}{2a}\right) + i(1-2p_j)\sin\left(\frac{\theta}{2a}\right)}{\cos\left(\frac{\lambda}{2a}\right) - i(1-2p_j)\sin\left(\frac{\lambda}{2a}\right)} \\
& + \frac{1}{8\pi^2 a} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \int_{\pi \leq |\theta| \leq (2a-1)\pi} d\theta \int_{|\lambda| \leq \pi} d\lambda \exp \left[ i\theta \left( \frac{x}{2a} - l \right) + i\lambda \left( \frac{y}{2a} - l \right) \right] \\
& \times \prod_{j=s+1}^t \frac{1}{\cos\left(\frac{\lambda}{2a}\right) - i(1-2p_j)\sin\left(\frac{\lambda}{2a}\right)} \prod_{j=1}^s \frac{\cos\left(\frac{\theta}{2a}\right) + i(1-2p_j)\sin\left(\frac{\theta}{2a}\right)}{\cos\left(\frac{\lambda}{2a}\right) - i(1-2p_j)\sin\left(\frac{\lambda}{2a}\right)}. \tag{2.45}
\end{aligned}$$

ここで, (2.45) の第1項目を

$$\begin{aligned}
G(s, x; t, y) & \equiv \frac{1}{4\pi^2 a} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_{-\pi}^{\pi} d\lambda \exp \left[ i(\theta x + \lambda y) / 2a - i(\theta + \lambda) l \right] \\
& \times \prod_{j=s+1}^t \frac{1}{\cos\left(\frac{\lambda}{2a}\right) - i(1-2p_j)\sin\left(\frac{\lambda}{2a}\right)} \prod_{j=1}^s \frac{\cos\left(\frac{\theta}{2a}\right) + i(1-2p_j)\sin\left(\frac{\theta}{2a}\right)}{\cos\left(\frac{\lambda}{2a}\right) - i(1-2p_j)\sin\left(\frac{\lambda}{2a}\right)},
\end{aligned}$$

第2項目を

$$\begin{aligned}
R(s, x; t, y) & \equiv \frac{1}{8\pi^2 a} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \int_{\pi \leq |\theta| \leq (2a-1)\pi} d\theta \int_{|\lambda| \leq \pi} d\lambda \exp \left[ i\theta \left( \frac{x}{2a} - l \right) + i\lambda \left( \frac{y}{2a} - l \right) \right] \\
& \times \prod_{j=s+1}^t \frac{1}{\cos\left(\frac{\lambda}{2a}\right) - i(1-2p_j)\sin\left(\frac{\lambda}{2a}\right)} \prod_{j=1}^s \frac{\cos\left(\frac{\theta}{2a}\right) + i(1-2p_j)\sin\left(\frac{\theta}{2a}\right)}{\cos\left(\frac{\lambda}{2a}\right) - i(1-2p_j)\sin\left(\frac{\lambda}{2a}\right)}
\end{aligned}$$

とおくと, (2.41) は

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}} p^{q,c}(0, 2al; s, x) \mathcal{M}_{\delta_{2a\mathbb{Z}}}^{2al}(t, y) = G(s, x; t, y) + R(s, x; t, y). \tag{2.46}$$

以下,  $n \rightarrow \infty$  での  $G(s+n, x; t+n, y)$  と  $R(s+n, x; t+n, y)$  の振る舞いを考察する.

$$\left| \frac{\cos\left(\frac{\theta}{2a}\right) + i(1-2p_j)\sin\left(\frac{\theta}{2a}\right)}{\cos\left(\frac{\lambda}{2a}\right) - i(1-2p_j)\sin\left(\frac{\lambda}{2a}\right)} \right| = \left[ \frac{4p_j(1-p_j)\cos^2\left(\frac{\theta}{2a}\right) + (1-2p_j)^2}{4p_j(1-p_j)\cos^2\left(\frac{\lambda}{2a}\right) + (1-2p_j)^2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

について,  $\pi < |\theta| < (2a-1)\pi$  かつ  $|\lambda| < \pi$  であるならば  $\cos^2(\theta/2a) < \cos^2(\lambda/2a)$  が成り立つので,  $j = 1, 2, \dots, s$  に対して

$$\left[ \frac{4p_j(1-p_j)\cos^2\left(\frac{\theta}{2a}\right) + (1-2p_j)^2}{4p_j(1-p_j)\cos^2\left(\frac{\lambda}{2a}\right) + (1-2p_j)^2} \right]^{\frac{1}{2}} < 1$$



となる. ゆえに,  $s, t \in \mathbb{N}$  を固定すると

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |R(s+n, x; t+n, y)| \rightarrow 0. \quad (2.47)$$

一方,  $\theta, \lambda \in [-\pi, \pi]$  の場合は,  $\sum_{l \in \mathbb{Z}} \exp[-i(\theta + \lambda)l] = 2\pi\delta(\theta + \lambda)$  を用いると

$$\begin{aligned} G(s, x; t, y) &= \frac{1}{4\pi^2 a} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_{-\pi}^{\pi} d\lambda \exp[i(\theta x + \lambda y)] \sum_{l \in \mathbb{Z}} \exp[-i(\theta + \lambda)l] \\ &\times \prod_{j=s+1}^t \frac{1}{\cos\left(\frac{\lambda}{2a}\right) - i(1-2p_j)\sin\left(\frac{\lambda}{2a}\right)} \prod_{j=1}^s \frac{\cos\left(\frac{\theta}{2a}\right) + i(1-2p_j)\sin\left(\frac{\theta}{2a}\right)}{\cos\left(\frac{\lambda}{2a}\right) - i(1-2p_j)\sin\left(\frac{\lambda}{2a}\right)} \\ &= \frac{1}{4\pi^2 a} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_{-\pi}^{\pi} d\lambda \exp[i(\theta x + \lambda y)] \times 2\pi\delta(\theta + \lambda) \\ &\times \prod_{j=s+1}^t \frac{1}{\cos\left(\frac{\lambda}{2a}\right) - i(1-2p_j)\sin\left(\frac{\lambda}{2a}\right)} \prod_{j=1}^s \frac{\cos\left(\frac{\theta}{2a}\right) + i(1-2p_j)\sin\left(\frac{\theta}{2a}\right)}{\cos\left(\frac{\lambda}{2a}\right) - i(1-2p_j)\sin\left(\frac{\lambda}{2a}\right)} \\ &= \frac{1}{2\pi a} \int_{-\pi}^{\pi} d\lambda \exp[i\lambda(y-x)/2a] \prod_{j=s+1}^t \frac{1}{\cos\left(\frac{\lambda}{2a}\right) - i(1-2p_j)\sin\left(\frac{\lambda}{2a}\right)} \end{aligned}$$

となるため,  $0 < q < 1$  であるならば

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} G(s+n, x; t+n, y) &\equiv \mathcal{G}(t-s, y-x) = \frac{1}{2\pi a} \int_{-\pi}^{\pi} d\lambda \exp[i\lambda(y-x)/2a + i\lambda(t-s)/2a] \\ &= \frac{2 \sin[\pi \{(y-x) + (t-s)\}/2a]}{\pi [(y-x) + (t-s)]} \end{aligned} \quad (2.48)$$

となる. (2.47) と (2.48) は  $n \rightarrow \infty$  において

$$\mathbb{K}_{\delta_{2a\mathbb{Z}}}(s+n, x; t+n, y) \rightarrow \mathbf{K}_\rho(t-s, y-x)$$

が成り立つことを示唆している. ただし,  $\mathbf{K}_\rho(t-s, y-x)$  は  $(s, x), (t, y) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{Z}$ ,  $s+x, t+y \in \mathbb{Z}_e$  を満たすとき

$$\mathbf{K}_\rho(t-s, y-x) = \mathcal{G}(t-s, y-x) \quad (s < t) \quad (2.49)$$

であり, それ以外の場合は  $\mathbf{K}_\rho(t-s, y-x) = 0$  である.

$s > t$  の場合, (2.42) は

$$\begin{aligned} &\frac{1}{8\pi^2 a} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \int_{-2a\pi}^{2a\pi} d\theta \int_{-\pi}^{\pi} d\lambda \exp\left[i\theta\left(\frac{x}{2a} - l\right) + i\lambda\left(\frac{y}{2a} - l\right)\right] \\ &\times \prod_{j=t+1}^s \left[ \cos\left(\frac{\theta}{2a}\right) + i(1-2p_j)\sin\left(\frac{\theta}{2a}\right) \right] \prod_{j=1}^t \frac{\cos\left(\frac{\theta}{2a}\right) + i(1-2p_j)\sin\left(\frac{\theta}{2a}\right)}{\cos\left(\frac{\lambda}{2a}\right) - i(1-2p_j)\sin\left(\frac{\lambda}{2a}\right)} \end{aligned} \quad (2.50)$$

となり, (2.50) を  $t > s$  の場合と同様にして変数変換などを行うことで, 結局 (2.41) は

$$\begin{aligned}
& \mathbb{K}_{\delta_{2a\mathbb{Z}}}(t, y; s, x) + p^{q,c}(t, y; s, x) \\
&= \frac{1}{2\pi a} \int_{-\pi}^{\pi} d\lambda \exp(i\lambda(y-x)/2a) \prod_{j=t+1}^s \left[ \cos\left(\frac{\lambda}{2a}\right) - i(1-2p_j) \sin\left(\frac{\lambda}{2a}\right) \right] \\
&+ \frac{1}{8\pi^2 a} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \int_{\pi \leq |\theta| \leq (2a-1)\pi} d\theta \int_{-\pi}^{\pi} d\lambda \exp \left[ i\theta \left( \frac{x}{2a} - l \right) + i\lambda \left( \frac{y}{2a} - l \right) \right] \\
&\times \prod_{j=t+1}^s \left[ \cos\left(\frac{\theta}{2a}\right) + i(1-2p_j) \sin\left(\frac{\theta}{2a}\right) \right] \prod_{j=1}^t \frac{\cos\left(\frac{\theta}{2a}\right) + i(1-2p_j) \sin\left(\frac{\theta}{2a}\right)}{\cos\left(\frac{\lambda}{2a}\right) - i(1-2p_j) \sin\left(\frac{\lambda}{2a}\right)} \quad (2.51)
\end{aligned}$$

となる. ただし, (2.36) で与えられる推移確率  $p^{q,c}(t, y; s, x)$  は

$$p^{q,c}(t, y; s, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dk \exp(ik(x-y)) \prod_{j=t+1}^s [\cos k - i(1-2p_j) \sin k] \quad (2.52)$$

となることに注意されたい.

よって  $t < s, 0 < q < 1$  の場合  $n \rightarrow \infty$  で推移確率は

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} p^{q,c}(t+n, y; s+n, x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dk \exp(ik(x-y)) \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{j=t+n+1}^{s+n} [\cos k - i(1-2p_j) \sin k] \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dk \exp(ik(x-y)) \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^{s-t} [\cos k - i(1-2p_{j+t+n}) \sin k] \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dk \exp(ik(x-y)) \prod_{j=1}^{s-t} (\cos k - i \sin k) \\
&= \frac{\sin[\pi((y-x) - (t-s))]}{\pi((y-x) - (t-s))} = \mathbb{1}((y-x) - (t-s) = 0). \quad (2.53)
\end{aligned}$$

また,  $t > s, 0 < q < 1$  の場合は

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} p^{q,c}(s+n, x; t+n, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dk \exp(ik(y-x)) \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{j=s+n+1}^{t+n} [\cos k - i(1-2p_j) \sin k] \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dk \exp(ik(y-x)) \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^{t-s} [\cos k - i(1-2p_{j+s+n}) \sin k] \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dk \exp(ik(y-x)) \prod_{j=1}^{t-s} (\cos k - i \sin k) \\
&= \frac{\sin[\pi((y-x) - (t-s))]}{\pi((y-x) - (t-s))} = \mathbb{1}((y-x) - (t-s) = 0). \quad (2.54)
\end{aligned}$$

結局  $t < s$  と  $t > s$  の両方の場合において推移確率は同じ式で書くことができる.

注 2.4  $1 < q < \infty$  の場合も, 推移確率は同様に計算することができ,  $t < s$  と  $t > s$  いずれの場合も

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p^{q,c}(s+n, x; t+n, y) = \frac{\sin[\pi((y-x) + (t-s))]}{\pi((y-x) + (t-s))} = \mathbb{1}((y-x) + (t-s) = 0)$$

となる.

(2.51) で,  $0 < q < 1$  の場合に  $n \rightarrow \infty$  とすると  $(s, x), (t, y) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{Z}$ ,  $s+x, t+y \in \mathbb{Z}_e$  を満たす場合

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_\rho(t-s, y-x) &\equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{K}_{\delta_{2a}\mathbb{Z}}(t+n, y; s+n, x) \\ &= \frac{2 \sin[\pi((y-x) + (t-s))/2a]}{\pi[(y-x) + (t-s)]} - \mathbb{1}((y-x) - (t-s) = 0) \quad (s > t) \end{aligned} \quad (2.55)$$

となり, それ以外の場合は  $\mathbf{K}_\rho(t-s, y-x) = 0$  である.

$t = s$  の場合は, 相関核は次のようにかくことできる.

$$\mathbf{K}_\rho(y-x) = \frac{2 \sin[\pi(y-x)/2a]}{\pi(y-x)}. \quad (s = t) \quad (2.56)$$

ただし

$$\mathbf{K}_\rho(y-x) \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{K}_{\delta_{2a}\mathbb{Z}}(s+n, x; s+n, y).$$

以上より, (2.49), (2.55), (2.56) の結果から, 相関核は  $n \rightarrow \infty$  で収束し,  $(s, x), (t, y) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{Z}$ ,  $s+x, t+y \in \mathbb{Z}_e$  であるとき

$$\mathbf{K}_\rho(t-s, y-x) = \begin{cases} \frac{2 \sin[\pi((y-x) + (t-s))/2a]}{\pi[(y-x) + (t-s)]} & (s \leq t) \\ \frac{2 \sin[\pi((y-x) + (t-s))/2a]}{\pi[(y-x) + (t-s)]} - \mathbb{1}((y-x) - (t-s) = 0) & (s > t) \end{cases}$$

となり, それ以外の場合は  $\mathbf{K}_\rho(t-s, y-x) = 0$  となる.

### 2.3.2 2点相関関数 $\rho(s, x; t, y)$

2点相関関数は以下の行列式で与えられる.

$$\rho(s, x; t, y) = \det \begin{pmatrix} \mathbf{K}_\rho(s, x; s, x) & \mathbf{K}_\rho(s, x; t, y) \\ \mathbf{K}_\rho(t, y; s, x) & \mathbf{K}_\rho(t, y; t, y) \end{pmatrix}. \quad (2.57)$$

よって,  $(s, x), (t, y) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{Z}, s+x, t+y \in \mathbb{Z}_e$  であるとき

$$\rho(s, x; t, y) = \begin{cases} \frac{1}{a^2} - \frac{4 \sin^2(\pi(y-x)/2a)}{\pi^2(y-x)^2} & (s=t) \\ \frac{1}{a^2} - \frac{4 \sin^2(\pi\{(y-x) + (t-s)\}/2a)}{\pi^2\{(y-x) + (t-s)\}^2} & \\ + 2 \times \mathbf{1}((y-x) + (t-s) = 0), & (s \neq t) \end{cases} \quad (2.58)$$

それ以外の場合は,  $\rho(s, x; t, y) = 0$  となる.

### 2.3.3 相関関数の図示

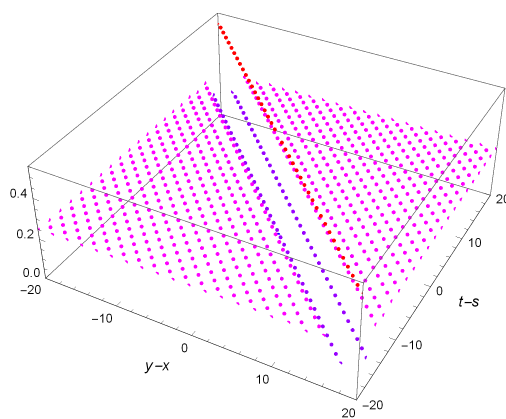


図 1:  $a = 2$  での  $q$ -ランダムウォークの相関関数  $\rho(t-s, y-x)$ .

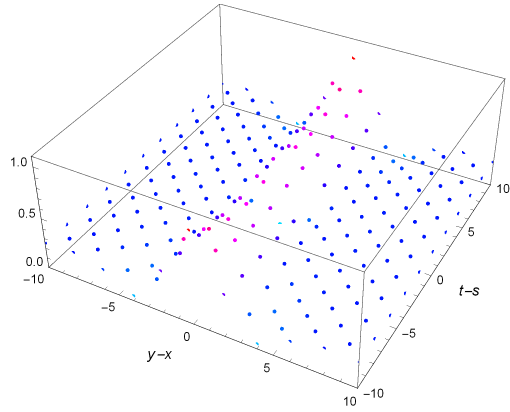


図 2:  $a = 2$  での単純対称ランダムウォークの相関関数  $\rho(t-s, y-x)$ .

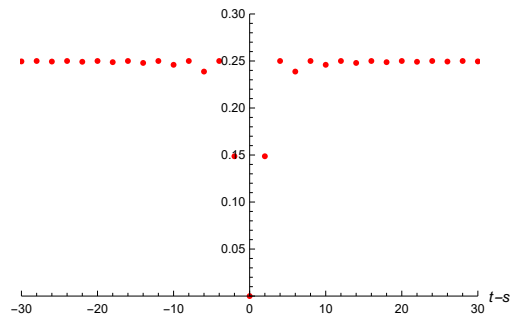


図 3:  $a = 2$  での  $q$ -ランダムウォークの相関関数  $\rho(t-s)$ .

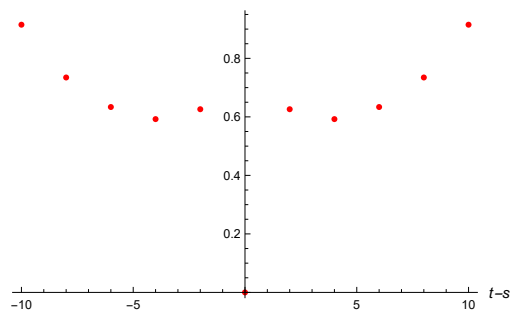


図 4:  $a = 2$  での単純対称ランダムウォークの相関関数  $\rho(t-s)$ .

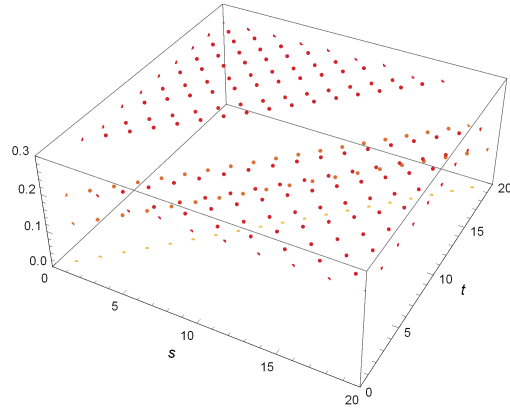


図 5:  $a = 2$  での  $q$ -ランダムウォークの相関関数  $\rho(t-s)$ .

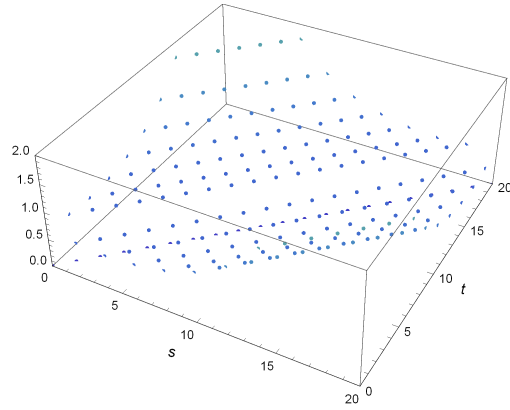


図 6:  $a = 2$  での単純対称ランダムウォークの相関関数  $\rho(t-s)$ .

### 3 楕円関数組み合わせ論に関連した確率過程

#### 3.1 楕円関数組み合わせ論

Schlosser は文献 [5] の中で次に述べるような 2 次元正方格子上的モデルを考えた。 $\mathbb{Z}^2$  上で, 座標  $(n-1, m) \rightarrow (n, m)$  への水平方向の重みは

$$\begin{aligned}
 w(n, m) = & \frac{\vartheta_1\left(\frac{\alpha+n+2m}{\pi r}; i\kappa\right) \vartheta_1\left(\frac{\beta+2n}{\pi r}; i\kappa\right) \vartheta_1\left(\frac{\beta+2n-1}{\pi r}; i\kappa\right)}{\vartheta_1\left(\frac{\alpha+n}{\pi r}; i\kappa\right) \vartheta_1\left(\frac{\beta+2n+m}{\pi r}; i\kappa\right) \vartheta_1\left(\frac{\beta+2n+m-1}{\pi r}; i\kappa\right)} \\
 & \times \frac{\vartheta_1\left(\frac{\alpha-\beta+1-n}{\pi r}; i\kappa\right) \vartheta_1\left(\frac{\alpha-\beta-n}{\pi r}; i\kappa\right)}{\vartheta_1\left(\frac{\alpha-\beta+1+m-n}{\pi r}; i\kappa\right) \vartheta_1\left(\frac{\alpha-\beta+m-n}{\pi r}; i\kappa\right)}
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

と記述されるとする。ただし,

$$\vartheta_1(v; \tau) = ie^{\pi i(\tau/4-v)} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - e^{2\pi i n \tau}) \theta(e^{2\pi i v}; e^{2\pi i \tau}) \quad (3.2)$$

( $i = \sqrt{-1}$ ,  $v, \tau \in \mathbb{C}$ ,  $\Im \tau > 0$ ) は Jacobi のテータ関数 とよばれる関数である。また, 垂直方向の重みは 1 であるとする。このとき, 2次元格子点を上述した重みに従って  $(\ell, k) \in \mathbb{Z}^2$  から  $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$  への経路全体で重みについての和をとった関数を  $w(\mathcal{P}((\ell, k) \rightarrow (n, m)))$  と書き, 経路の母関数とよぶことにする。このとき次の定理が成り立つ。

**定理 3.1 (Schlosser [5])** 経路の母関数は, (3.1) で与えられる重み関数を用いた以下の漸化式

$$\begin{aligned} & w(\mathcal{P}((\ell, k) \rightarrow (n, m))) \\ &= w(\mathcal{P}((\ell, k) \rightarrow (n, m-1))) + w(\mathcal{P}((\ell, k) \rightarrow (n-1, m)))w(n, m) \end{aligned} \quad (3.3)$$

を満たし, その解は

$$\begin{aligned} & w(\mathcal{P}((\ell, k) \rightarrow (n, m))) \\ &= \frac{\prod_{u=1}^{n-\ell+m-k} \vartheta_1\left(\frac{u}{\pi r}; i\kappa\right)}{\prod_{u=1}^{n-\ell} \vartheta_1\left(\frac{u}{\pi r}; i\kappa\right) \prod_{u=1}^{m-k} \vartheta_1\left(\frac{u}{\pi r}; i\kappa\right)} \prod_{u=\ell+1}^n \frac{\vartheta_1\left(\frac{\alpha+m+k+u}{\pi r}; i\kappa\right)}{\vartheta_1\left(\frac{\alpha+u}{\pi r}; i\kappa\right)} \\ & \quad \times \frac{\prod_{u=k+1}^m \vartheta_1\left(\frac{\beta+n+\ell+u}{\pi r}; i\kappa\right) \prod_{u=2\ell+1}^{2n} \vartheta_1\left(\frac{\beta+u}{\pi r}; i\kappa\right)}{\prod_{u=2\ell+k+1}^{2n+m} \vartheta_1\left(\frac{\beta+u}{\pi r}; i\kappa\right)} \\ & \quad \times \prod_{u=-n+1}^{-\ell} \frac{\vartheta_1\left(\frac{\alpha-\beta+u}{\pi r}; i\kappa\right) \vartheta_1\left(\frac{\alpha-\beta-1+u}{\pi r}; i\kappa\right)}{\vartheta_1\left(\frac{\alpha-\beta+m+u}{\pi r}; i\kappa\right) \vartheta_1\left(\frac{\alpha-\beta+k-1+u}{\pi r}; i\kappa\right)} \end{aligned} \quad (3.4)$$

で与えられる。

詳しい証明は文献 [1] で議論されているため, ここでは省略する。この結果から, 2次元正方格子を (1+1)次元の時空平面に変換することで (3.1) と (3.4) を書き換えることができる。すなわち

$$\begin{aligned} & q(t, x) = w((t+x)/2, (t-x)/2), \\ & Q(s, x; t, y) = w(\mathcal{P}(((s+x)/2, (s-x)/2) \rightarrow ((t+y)/2, (t-y)/2))) \end{aligned}$$

という変換を行うことで,  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}, r, \kappa > 0$  とすると

$$\begin{aligned}
q(t, x) &= q(t, x; r, \alpha, \beta, \kappa) \\
&= \frac{\vartheta_1\left(\frac{2\alpha+3t-x}{2\pi r}; i\kappa\right) \vartheta_1\left(\frac{\beta+t+x}{\pi r}; i\kappa\right) \vartheta_1\left(\frac{\beta+t+x-1}{\pi r}; i\kappa\right)}{\vartheta_1\left(\frac{2\alpha+t+x}{2\pi r}; i\kappa\right) \vartheta_1\left(\frac{2\beta+3t+x}{2\pi r}; i\kappa\right) \vartheta_1\left(\frac{2\beta+3t+x-2}{2\pi r}; i\kappa\right)} \\
&\quad \times \frac{\vartheta_1\left(\frac{2(\alpha-\beta)-t-x+2}{2\pi r}; i\kappa\right) \vartheta_1\left(\frac{2(\alpha-\beta)-t-x}{2\pi r}; i\kappa\right)}{\vartheta_1\left(\frac{\alpha-\beta-x+1}{\pi r}; i\kappa\right) \vartheta_1\left(\frac{\alpha-\beta-x}{\pi r}; i\kappa\right)}, \tag{3.5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q(s, x; t, y) &= Q(s, x; t, y; r, \alpha, \beta, \kappa) \\
&= \frac{\prod_{u=1}^{t-s} \vartheta_1\left(\frac{u}{\pi r}; i\kappa\right)}{\prod_{u=1}^{\{(t-s)+(y-x)\}/2} \vartheta_1\left(\frac{u}{\pi r}; i\kappa\right) \prod_{u=1}^{\{(t-s)-(y-x)\}/2} \vartheta_1\left(\frac{u}{\pi r}; i\kappa\right)} \\
&\quad \times \prod_{u=(s+x)/2+1}^{(t+y)/2} \frac{\vartheta_1\left(\frac{\alpha+\{(t-y)+(s-x)\}/2+u}{\pi r}; i\kappa\right)}{\vartheta_1\left(\frac{\alpha+u}{\pi r}; i\kappa\right)} \\
&\quad \times \frac{\prod_{u=(s-x)/2+1}^{(t-y)/2} \vartheta_1\left(\frac{\beta+\{(t+y)+(s+x)\}/2+u}{\pi r}; i\kappa\right) \prod_{u=(s+x)+1}^{t+y} \vartheta_1\left(\frac{\beta+u}{\pi r}; i\kappa\right)}{\prod_{u=(3s+x)/2+1}^{(3t+y)/2} \vartheta_1\left(\frac{\beta+u}{\pi r}; i\kappa\right)} \\
&\quad \times \prod_{u=-(t+y)/2+1}^{-(s+x)/2} \frac{\vartheta_1\left(\frac{\alpha-\beta+u}{\pi r}; i\kappa\right) \vartheta_1\left(\frac{\alpha-\beta-1+u}{\pi r}; i\kappa\right)}{\vartheta_1\left(\frac{\alpha-\beta+(t-y)/2+u}{\pi r}; i\kappa\right) \vartheta_1\left(\frac{\alpha-\beta+(s-x-2)/2+u}{\pi r}; i\kappa\right)} \tag{3.6}
\end{aligned}$$

を得る. 以後, (3.5) を重み関数, (3.6) を推移重み関数とよぶことにする. 実は, 推移重み関数は Chapman-Kolmogorov 方程式

$$Q(s, x; t, y) = \sum_{z \in \mathbb{Z}} Q(s, x; u, z) Q(u, z; t, y) \quad 0 < s < u < t, \quad x, y \in \mathbb{Z} \tag{3.7}$$

を満たす. 一方で規格化定数

$$c(s, x; t) = \sum_{y \in \mathbb{Z}} Q(s, x; t, y) \tag{3.8}$$

は初期時刻  $s, x, t$  に依存する. そこで単に推移確率を  $p(s, x; t, y) = Q(s, x; t, y)/c(s, x; t)$  と定義すると各時刻において規格化はされているが, 今度は Chapman-Kolmogorov 方程式を満たさなくなってしまう. この問題を解決するためにここでは, 次に述べるような周遊過程というモデルを考えることにする.



### 3.2 周遊過程

$$T \in \mathbb{N} \quad (3.9)$$

を仮定する.  $\mathbb{Z}$  上で, 時刻  $t = 0$  で原点を出発し時刻  $t = 2T$  で再び原点に戻ってくる周遊過程;  $X(t), t \in \{0, 1, \dots, 2T\}$  を考えることにする. この周遊過程の軌跡を与える測度を  $\mathbb{P}_{2T}^{0,0}$  と書くことにする. 任意の整数  $M \in \mathbb{N}$  と

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_M \leq 2T, \quad (3.10)$$

を満たす任意の強い意味での時刻の増加列  $\{t_m \in \mathbb{N}_0 : m = 0, 1, \dots, M\}$  に対して

$$x^{(m)} \in \mathbb{Z}, \quad t_m + x^{(m)} \in 2\mathbb{Z}, \quad \text{for } m = 1, 2, \dots, M \quad (3.11)$$

ならば,  $X(t), t \in \{0, 1, \dots, 2T\}$  の連結した測度は, (3.11) が満たされる場合

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}_{2T}^{0,0}(X(t_m) = x^{(m)}, m \in \{1, 2, \dots, M\}) \\ &= \prod_{m=1}^M Q(t_{m-1}, x^{(m-1)}; t_m, x^{(m)}) \frac{Q(t_M, x^{(M)}; 2T, 0)}{Q(0, 0; 2T, 0)} \end{aligned} \quad (3.12)$$

で与えられ, それ以外は

$$\mathbb{P}_{2T}^{0,0}(X(t_m) = x^{(m)}, m \in \{1, 2, \dots, M\}) = 0 \quad (3.13)$$

とする. (3.6) で与えられる推移重み関数は, 実は Chapman-Kolmogorov 方程式

$$Q(s, x; t, y) = \sum_{z \in \mathbb{Z}} Q(s, x; u, z) Q(u, z; t, y) \quad 0 < s < u < t, \quad x, y \in \mathbb{Z} \quad (3.14)$$

を満たす. この性質を用いると任意の  $m' \in \{1, 2, \dots, M\}$  に対して

$$\begin{aligned} & \sum_{x^{(m')} \in \mathbb{Z}} \mathbb{P}_{2T}^{0,0}(X(t_m) = x^{(m)}, m \in \{1, 2, \dots, M\}) \\ &= \mathbb{P}_{2T}^{0,0}(X(t_m) = x^{(m)}, m \in \{1, 2, \dots, M\} \setminus \{m'\}) \end{aligned}$$

が成り立つ. よって

$$\begin{aligned} & \sum_{x^{(2)} \in \mathbb{Z}} \dots \sum_{x^{(M)} \in \mathbb{Z}} \mathbb{P}_{2T}^{0,0}(X(t_m) = x^{(m)}, m \in \{1, 2, \dots, M\}) \\ &= \mathbb{P}_{2T}^{0,0}(X(t_1) = x^{(1)}) \\ &= Q(0, 0; t_1, x^{(1)}) \frac{Q(t_1, x^{(1)}; 2T, 0)}{Q(0, 0; 2T, 0)}. \end{aligned}$$

最後にもう一度 (3.14) を使うと

$$\sum_{x^{(1)} \in \mathbb{Z}} \mathbb{P}_{2T}^{0,0}(X(t_1) = x^{(1)}) = 1. \quad (3.15)$$

このことから,  $\mathbb{P}_{2T}^{0,0}$  は規格化されていることが分かる. また,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, r > 0, \kappa > 0$  であるときには  $\mathbb{P}_{2T}^{0,0}(\cdot) = \mathbb{P}_{2T}^{0,0}(\cdot; r, \alpha, \beta, \kappa)$  は実数の値を取るが, 一般には符号付測度であることに注意されたい.

### 3.3 周遊過程のパラメータ設定

1 時刻の測度の式は

$$\mathbb{P}_{2T}^{0,0}(X(t) = x) = Q(0, 0; t, x) \frac{Q(t, x; 2T, 0)}{Q(0, 0; 2T, 0)}, \quad t \in \{0, 1, \dots, 2T\} \quad (3.16)$$

に, (3.6) を適用することで得られる. パラメータ  $\alpha, \beta$  について

$$\alpha = \alpha_0 - \frac{1}{2}(3T + 1), \quad \beta = \beta_0 - \frac{1}{2}(3T + 1) \quad (3.17)$$

と設定することで表記をより簡略化できる. ただし,  $\alpha_0, \beta_0$  は任意のパラメータである.

$$\begin{aligned} \Lambda_{2T} = & \{(t, x) \in \Lambda : 0 \leq t \leq T, -t \leq x \leq t\} \\ & \cup \{(t, x) \in \Lambda : T + 1 \leq t \leq 2T, t - 2T \leq x \leq -t + 2T\} \end{aligned} \quad (3.18)$$

とすると, (3.16) は次のように書ける.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{2T}^{0,0}(X(t) = x) &= \mathbb{P}_{2T}^{0,0}(X(t) = x; r, \alpha_0, \beta_0, \kappa) \\ &= \begin{cases} c_1(t; T) \vartheta_1\left(\frac{\alpha_0 - \beta_0 - x}{\pi r}; i\kappa\right) \\ \quad \times \prod_{n=1}^{(t+x)/2} \frac{\vartheta_1\left(\frac{2\alpha_0 - (2n+3T-2t-1)}{2\pi r}; i\kappa\right)}{\vartheta_1\left(\frac{n}{\pi r}; i\kappa\right) \vartheta_1\left(\frac{\alpha_0 - \beta_0 - n}{\pi r}; i\kappa\right)} \prod_{n=1}^{(t-x)/2} \frac{\vartheta_1\left(\frac{2\beta_0 - (2n+3T-2t-1)}{2\pi r}; i\kappa\right)}{\vartheta_1\left(\frac{n}{\pi r}; i\kappa\right) \vartheta_1\left(\frac{\alpha_0 - \beta_0 + n}{\pi r}; i\kappa\right)} \\ \quad \times \prod_{n=1}^{\{(2T-t)-x\}/2} \frac{\vartheta_1\left(\frac{2\alpha_0 + (2n+2t-T-1)}{2\pi r}; i\kappa\right)}{\vartheta_1\left(\frac{n}{\pi r}; i\kappa\right) \vartheta_1\left(\frac{\alpha_0 - \beta_0 + n}{\pi r}; i\kappa\right)} \prod_{n=1}^{\{(2T-t)+x\}/2} \frac{\vartheta_1\left(\frac{2\beta_0 + (2n+2t-T-1)}{2\pi r}; i\kappa\right)}{\vartheta_1\left(\frac{n}{\pi r}; i\kappa\right) \vartheta_1\left(\frac{\alpha_0 - \beta_0 - n}{\pi r}; i\kappa\right)}, & (t, x) \in \Lambda_{2T} \text{ の場合,} \\ 0, & \text{その他の場合,} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.19)$$

ただし,

$$c_1(t; T) = \frac{\prod_{n=1}^t \vartheta_1\left(\frac{n}{\pi r}; i\kappa\right) \prod_{n=1}^{2T-t} \vartheta_1\left(\frac{n}{\pi r}; i\kappa\right)}{\vartheta_1\left(\frac{\alpha_0 - \beta_0}{\pi r}; i\kappa\right) \prod_{n=1}^{2T} \vartheta_1\left(\frac{n}{\pi r}; i\kappa\right)} \\ \times \prod_{n=1}^T \frac{\left\{\vartheta_1\left(\frac{n}{\pi r}; i\kappa\right)\right\}^2 \vartheta_1\left(\frac{\alpha_0 - \beta_0 - n}{\pi r}; i\kappa\right) \vartheta_1\left(\frac{\alpha_0 - \beta_0 + n}{\pi r}; i\kappa\right)}{\vartheta_1\left(\frac{2\alpha_0 + (2n - T - 1)}{2\pi r}; i\kappa\right) \vartheta_1\left(\frac{2\beta_0 + (2n - T - 1)}{2\pi r}; i\kappa\right)}. \quad (3.20)$$

以後, 符号付測度  $\mathbb{P}_{2T}^{0,0}(\cdot) = \mathbb{P}_{2T}^{0,0}(\cdot; r, \alpha_0, \beta_0, \kappa)$  について, パラメータは (3.17) で,  $\alpha_0, \beta_0 \in \mathbb{R}$ ,  $r, \kappa > 0$  を仮定する.

### 3.4 三角関数測度, 古典的測度への還元

(3.5) において, Jacobi テータ関数  $\vartheta_1$  の漸近展開

$$\vartheta_1(v; \tau) \sim 2e^{\pi i \tau / 4} \sin(\pi v) \quad (\Im \tau \rightarrow +\infty \text{ のとき}) \quad (3.21)$$

を用いると

$$\widehat{q}(t, x; r, \alpha_0, \beta_0) \equiv \lim_{\kappa \rightarrow \infty} q(t, x; r, \alpha_0, \beta_0, \kappa)$$

を定義することができる.  $\mathbb{P}_{2T}^{0,0}(\cdot; r, \alpha_0, \beta_0, \kappa)$  で  $\kappa \rightarrow \infty$  としたものを  $\widehat{\mathbb{P}}_{2T}^{0,0}(\cdot; r, \alpha_0, \beta_0)$  とすると, (3.19) は

$$\widehat{\mathbb{P}}_{2T}^{0,0}(X(t) = x) = \widehat{\mathbb{P}}_{2T}^{0,0}(X(t) = x; r, \alpha_0, \beta_0) \\ = \begin{cases} \widehat{c}_1(t; T) \sin\left(\frac{\alpha_0 - \beta_0 - x}{r}\right) \\ \times \prod_{n=1}^{(t+x)/2} \frac{\sin\left(\frac{2\alpha_0 - (2n + 3T - 2t - 1)}{2r}\right)}{\sin\left(\frac{n}{r}\right) \sin\left(\frac{\alpha_0 - \beta_0 - n}{r}\right)} \prod_{n=1}^{(t-x)/2} \frac{\sin\left(\frac{2\beta_0 - (2n + 3T - 2t - 1)}{2r}\right)}{\sin\left(\frac{n}{r}\right) \sin\left(\frac{\alpha_0 - \beta_0 + n}{r}\right)} \\ \times \prod_{n=1}^{\{(2T-t)-x\}/2} \frac{\sin\left(\frac{2\alpha_0 + (2n + 2t - T - 1)}{2r}\right)}{\sin\left(\frac{n}{r}\right) \sin\left(\frac{\alpha_0 - \beta_0 + n}{r}\right)} \prod_{n=1}^{\{(2T-t)+x\}/2} \frac{\sin\left(\frac{2\beta_0 + (2n + 2t - T - 1)}{2r}\right)}{\sin\left(\frac{n}{r}\right) \sin\left(\frac{\alpha_0 - \beta_0 - n}{r}\right)}, \\ 0, \end{cases} \quad (3.22)$$

$(t, x) \in \Lambda_{2T}$  の場合,  
 その他の場合,

ただし

$$\widehat{c}_1(t; T) = \frac{\prod_{n=1}^t \sin\left(\frac{n}{r}\right) \prod_{n=1}^{2T-t} \sin\left(\frac{n}{r}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha_0 - \beta_0}{r}\right) \prod_{n=1}^{2T} \sin\left(\frac{n}{r}\right)} \\ \times \prod_{n=1}^T \frac{\sin^2\left(\frac{n}{r}\right) \sin\left(\frac{\alpha_0 - \beta_0 - n}{r}\right) \sin\left(\frac{\alpha_0 - \beta_0 + n}{r}\right)}{\sin\left(\frac{2\alpha_0 + (2n - T - 1)}{2r}\right) \sin\left(\frac{2\beta_0 + (2n - T - 1)}{2r}\right)}. \quad (3.23)$$

ここで、さらに極限を考える.

$$\tilde{q}(t, x; r, \alpha_0) \equiv \lim_{\hat{\beta}_0 \rightarrow \infty} \hat{q}(t, x; r, \alpha_0, i\hat{\beta}_0) = \frac{\sin[\{2\alpha_0 - (3T + 1) + (3t - x)\}/2r]}{\sin[\{2\alpha_0 - (3T + 1) + (t + x)\}/2r]}$$

であることから、 $\hat{\beta}_0 \rightarrow \infty$ としたときの符号付測度を  $\tilde{\mathbb{P}}_{2T}^{0,0}(\cdot) = \tilde{\mathbb{P}}_{2T}^{0,0}(\cdot; r, \alpha_0)$  と書くことにすると (3.22) と (3.23) は

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{P}}_{2T}^{0,0}(X(t) = x) &= \tilde{\mathbb{P}}_{2T}^{0,0}(X(t) = x; r, \alpha_0) \\ &= \begin{cases} \tilde{c}_1(t; T) \prod_{n=1}^{(t+x)/2} \frac{\sin\left(\frac{2\alpha_0 - (2n + 3T - 2t - 1)}{2r}\right)}{\sin\left(\frac{n}{r}\right)} \prod_{n=1}^{(t-x)/2} \frac{1}{\sin\left(\frac{n}{r}\right)} \\ \quad \times \prod_{n=1}^{\{(2T-t)-x\}/2} \frac{\sin\left(\frac{2\alpha_0 + (2n + 2t - T - 1)}{2r}\right)}{\sin\left(\frac{n}{r}\right)} \prod_{n=1}^{\{(2T-t)+x\}/2} \frac{1}{\sin\left(\frac{n}{r}\right)}, & (t, x) \in \Lambda_{2T} \text{ の場合,} \\ 0, & \text{その他の場合,} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.24)$$

ただし

$$\tilde{c}_1(t; T) = \frac{\prod_{n=1}^t \sin\left(\frac{n}{r}\right) \prod_{n=1}^{2T-t} \sin\left(\frac{n}{r}\right)}{\prod_{n=1}^{2T} \sin\left(\frac{n}{r}\right)} \prod_{n=1}^T \frac{\sin^2\left(\frac{n}{r}\right)}{\sin\left(\frac{2\alpha_0 + (2n - T - 1)}{2r}\right)}. \quad (3.25)$$

仮に (3.22) と (3.23) で  $\alpha_0 = i\hat{\alpha}_0$  として  $\hat{\alpha}_0 \rightarrow \infty$  の極限をとると (3.24) と (3.25) で

$$\alpha_0 \rightarrow \beta_0, \quad x \rightarrow -x$$

のような置き換えをしたものが得られる.  $\hat{\mathbb{P}}_{2T}^{0,0}$  と  $\tilde{\mathbb{P}}_{2T}^{0,0}$  はどちらも三角関数を含んだ測度になっているが、さらに  $r \rightarrow \infty$  の極限をとると古典的な測度  $\mathbb{P}_{2T, \text{cl}}^{0,0}$  が

$$\mathbb{P}_{2T, \text{cl}}^{0,0}(X(t) = x) = \begin{cases} \frac{\binom{t}{(t+x)/2} \binom{2T-t}{\{(2T-t)+x\}/2}}{\binom{2T}{T}}, & (t, x) \in \Lambda_{2T} \text{ の場合,} \\ 0, & \text{その他の場合} \end{cases} \quad (3.26)$$

として得られる. これは、時間間隔  $2T$  で、原点を出発したウォーカーが再び原点に戻ってくる  $\mathbb{Z}^2$  上の古典ランダムウォーク (つまり、単純対称ランダムウォーク) の周遊過程の 1 時刻確率測度である.

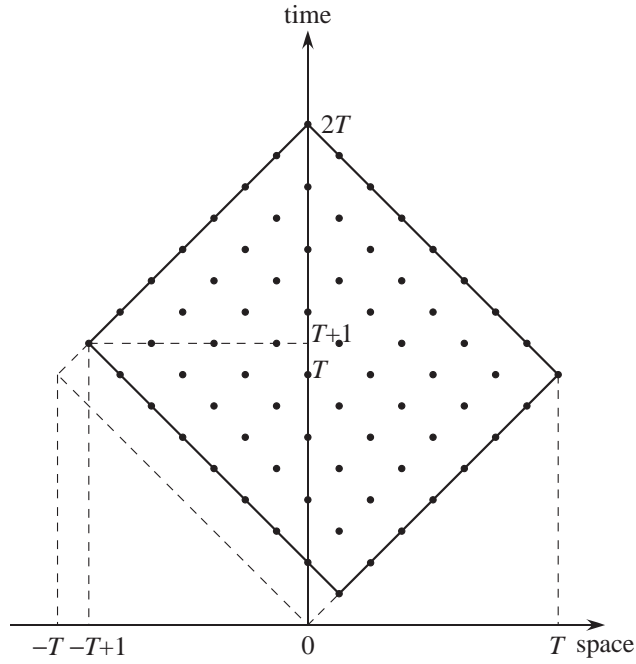


図 7:  $2T$  の間に  $0$  から  $0$  に戻ってくる周遊過程の軌跡が, 右方向への遷移  $(t-1, x-1) \rightarrow (t, x)$  を含んでいるような点  $(t, x)$  の集合.

### 3.5 測度の非負条件

#### 3.5.1 楕円関数型周遊過程

(3.17) のパラメータで, (3.5) で与えられる重み関数  $q(t, x)$  は

$$q(t, x) = q(t, x; r, \alpha_0, \beta_0, \kappa) = \prod_{j=1}^5 \frac{\vartheta_1(\zeta_j/\pi; i\kappa)}{\vartheta_1(\eta_j/\pi; i\kappa)}, \quad (3.27)$$

ただし

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= \frac{\alpha_0}{r} - \frac{3T+1}{2r} + \frac{3t-x}{2r}, \\ \zeta_2 &= \frac{\beta_0}{r} - \frac{3T+1}{2r} + \frac{t+x}{r}, & \zeta_3 &= \zeta_2 - \frac{1}{r}, \\ \zeta_4 &= \frac{\alpha_0 - \beta_0}{r} - \frac{t+x}{2r}, & \zeta_5 &= \zeta_4 + \frac{1}{r}, \end{aligned} \quad (3.28)$$

$$\begin{aligned}
\eta_1 &= \frac{\alpha_0}{r} - \frac{3T+1}{2r} + \frac{t+x}{2r}, \\
\eta_2 &= \frac{\beta_0}{r} - \frac{3T+1}{2r} + \frac{3t+x}{2r}, & \eta_3 &= \eta_2 - \frac{1}{r}, \\
\eta_4 &= \frac{\alpha_0 - \beta_0}{r} - \frac{x}{r}, & \eta_5 &= \eta_4 + \frac{1}{r}
\end{aligned} \tag{3.29}$$

と書ける. 時空平面上  $\Lambda = \{(t, x) : t \in \mathbb{N}_0, x \in \mathbb{Z}, t+x \in 2\mathbb{Z}\}$  で, 時刻  $2T$  の間に  $0$  から  $0$  に戻ってくる周遊過程の軌跡が (3.27) の重みに従う右方向への遷移  $(t-1, x-1) \rightarrow (t, x)$  を含んでいるような点の集合を  $\Lambda_{2T}^*$  と書くことにすると

$$\begin{aligned}
\Lambda_{2T}^* &= \{(t, x) \in \Lambda : 1 \leq t \leq T, -t+2 \leq x \leq t\} \\
&\cup \{(t, x) \in \Lambda : T+1 \leq t \leq 2T, t-2T \leq x \leq -t+2T\}.
\end{aligned} \tag{3.30}$$

図 7 に点の集合を示した. もし

$$q(t, x) \geq 0, \quad \forall (t, x) \in \Lambda_{2T}^* \tag{3.31}$$

ならば, 推移重み関数 (3.6) は非負となりこれらを連結させた測度である (3.12) も非負となる. この場合  $\mathbb{P}_{2T}^{0,0}$  は確率測度を与えることになり周遊過程  $(\{X(t)\}_{t \in \{0,1,\dots,2T\}}, \mathbb{P}_{2T}^{0,0})$  を定義することができる.

### 定理 3.2

$$\lambda = \frac{3T-1}{2\pi r} \tag{3.32}$$

とおく.  $\mathbb{P}_{2T}^{0,0}$  が非負となり, 周遊過程  $X(t), t \in \{0, 1, \dots, 2T\}$  の確率測度を与えるための十分条件は次で与えられる.

$$0 \leq \lambda < \frac{1}{2}, \tag{3.33}$$

$$\pi\lambda < \frac{\alpha_0}{r} < \pi(1-\lambda), \tag{3.34}$$

$$\pi\lambda < -\frac{\beta_0}{r} < \pi(1-\lambda), \tag{3.35}$$

$$\frac{\alpha_0 - \beta_0}{r} < \pi \left\{ 1 - \frac{2(T+1)}{3T-1} \lambda \right\}. \tag{3.36}$$

定理の証明は文献 [1] で述べられているためここでは省略する.

非負条件 (3.33)-(3.36) を満たした確率過程  $(\{X(t)\}_{t \in \{0,1,\dots,2T\}}, \mathbb{P}_{2T}^{0,0})$  を時刻  $2T$  の間の楕円関数型周遊過程とよぶことにする.

### 3.5.2 三角関数型周遊過程

(3.21) より, (3.28), (3.29) とすると

$$\begin{aligned}\widehat{q}(t, x) &= \widehat{q}(t, x; r, \alpha_0, \beta_0) \\ &\equiv \lim_{\kappa \rightarrow \infty} q(t, x; r, \alpha_0, \beta_0, i\kappa) = \prod_{j=1}^5 \frac{\sin \zeta_j}{\sin \eta_j}\end{aligned}\quad (3.37)$$

となる. このとき, 次の系が成り立つ.

**系 3.3** 非負条件 (3.33)-(3.36) が満たされているならば,  $\widehat{\mathbb{P}}_{2T}^{0,0}$  は周遊過程  $X(t), t \in \{0, 1, \dots, 2T\}$  の確率測度である.

非負条件 (3.33)-(3.36) を満たした確率過程  $(\{X(t)\}_{t \in \{0, 1, \dots, 2T\}}, \widehat{\mathbb{P}}_{2T}^{0,0})$  を時刻  $2T$  の間の三角関数型周遊過程とよぶことにする.

### 3.5.3 簡略化された三角関数型周遊過程

(3.37) より,  $\zeta_1$  と  $\eta_1$  が (3.28), (3.29) で与えられるとき

$$\begin{aligned}\widetilde{q}(t, x) &= \widetilde{q}(t, x; r, \alpha_0) \\ &\equiv \lim_{\widehat{\beta}_0 \rightarrow \infty} \widehat{q}(t, x; t, \alpha_0, i\widehat{\beta}_0) = \frac{\sin \zeta_1}{\sin \eta_1}\end{aligned}\quad (3.38)$$

である. このとき次の系が成り立つ.

**系 3.4** (3.33) と (3.34) が満たされているとする. このとき  $\widetilde{\mathbb{P}}_{2T}^{0,0}$  は周遊過程  $X(t), t \in \{0, 1, \dots, 2T\}$  の確率測度になっている.

非負条件 (3.33) と (3.34) を満たした確率過程  $(\{X(t)\}_{t \in \{0, 1, \dots, 2T\}}, \widetilde{\mathbb{P}}_{2T}^{0,0})$  を時刻  $2T$  の間の簡略化された三角関数型周遊過程とよぶことにする.

## 3.6 軌跡の数値計算

3.4 章の最後で示したように,  $T < \infty$  を固定して  $r \rightarrow \infty$  とすると楕円関数拡張された確率過程は古典的なランダムウォークの周遊過程になりその軌跡が (3.26) のように分布することを示した. 今,  $T \rightarrow \infty$  の長時間極限をとり同時に  $r \rightarrow \infty$  の極限もとる場合を考える. スターリングの公式  $n! \sim \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$  ( $n \rightarrow \infty$ ) を使うと次の関係が成り立つことが確認できる.

$$\begin{aligned}\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{T}}{2} \mathbb{P}_{2T, \text{cl}}^{0,0}(X(Ts) = \sqrt{T}\xi) \\ = \frac{1}{\sqrt{\pi s(2-s)}} e^{-\xi^2/\{s(2-s)\}}, \quad s \in (0, 2), \quad \xi \in \mathbb{R}.\end{aligned}\quad (3.39)$$

これは、時間間隔 2 の間で 0 から出発し 0 に戻ってくるブラウン橋 (Brownian bridge) の時刻  $s$  での確率密度関数である。

この章では、 $T \rightarrow \infty$  での楕円関数型及び三角関数型周遊過程の振る舞いを数値的に解析する。 $T \rightarrow \infty$  で古典的な振る舞いが実現しないためには (3.32) で導入したパラメータ  $\lambda$  が 0 でない必要がある。そのため  $r \rightarrow \infty, T \rightarrow \infty$  の極限をとる際には少なくとも近似的に  $r$  は  $T$  に比例している必要がある。そこで、この章では

$$\pi r = \sigma T \quad (3.40)$$

を仮定する。ただし  $\sigma$  は定数である。

$$\lambda < \frac{3T}{2\pi r} = \frac{3}{2\sigma} \quad (3.41)$$

であるから、

$$\sigma \geq 3 \quad (3.42)$$

であれば、定理 3.2 の条件を満たす。さらに、(3.41) と  $T \in \mathbb{N}$  に対して  $1/3 < (T+1)/(3T-1) \leq 1$  が成り立つことを使うと、もし

$$\frac{3}{2\sigma} \pi \leq \frac{\alpha_0}{r} \leq \left(1 - \frac{3}{2\sigma}\right) \pi, \quad (3.43)$$

$$\frac{3}{2\sigma} \pi \leq -\frac{\beta_0}{r} \leq \left(1 - \frac{3}{2\sigma}\right) \pi, \quad (3.44)$$

$$\frac{\alpha_0 - \beta_0}{r} \leq \left(1 - \frac{3}{\sigma}\right) \pi \quad (3.45)$$

ならば、定理 3.2 の (3.34)-(3.36) の条件は満たされることが分かる。

### 3.6.1 簡略化された三角関数型周遊過程

(3.42) と (3.43) を満たすならば系 3.4 の条件も満たされる。パラメータ  $\lambda$  は古典的な過程からのずれの度合いを表しており  $\lambda \rightarrow 0$  の極限は古典的な場合に対応する。ここでは、 $\lambda$  が最大の場合、すなわち  $\sigma$  が最小値  $\sigma = 3$  をとる場合を考える。すると、条件 (3.43) から  $\alpha_0/r$  の値は一意的に決まり

$$\sigma = 3, \quad \frac{\alpha_0}{r} = \frac{\pi}{2} \quad (3.46)$$

となる。図 8 は  $T = 100$  での  $\Lambda_{2T}^*$  を満たす点  $(t, x)$  の関数として重み関数  $\tilde{q}(t, x)$  を示したものである。 $(t, x)$  の依存性は非常に単純である。パラメータを特別な値として (3.24) と (3.25)



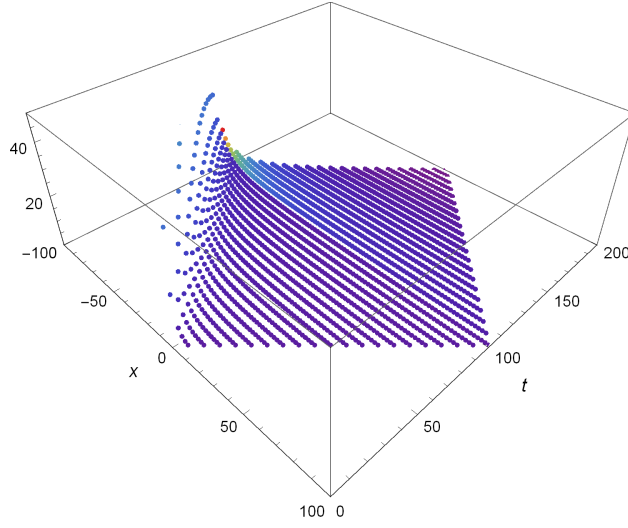


図 8:  $T = 100$  での  $\Lambda_{2T}^*$  を満たす  $(t, x)$  の関数として与えられる重み関数  $\tilde{q}(t, x)$ .  $(t, x)$  の依存性は非常に単純である.

を書き下すと

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{P}}_{2T}^{0,0}(X(t) = x) &= \tilde{\mathbb{P}}_{2T}^{0,0}(X(t) = x; r, \alpha_0) \Big|_{\pi r = 3T, \alpha_0/r = \pi/2} \\ &= \begin{cases} \tilde{c}_2(t; T) \prod_{n=1}^{(t+x)/2} \frac{\cos\left(\frac{(2n+3T-2t-1)\pi}{6T}\right)^{(t-x)/2}}{\sin\left(\frac{n\pi}{3T}\right)} \prod_{n=1}^{(t-x)/2} \frac{1}{\sin\left(\frac{n\pi}{3T}\right)} \\ \quad \times \prod_{n=1}^{\{(2T-t)-x\}/2} \frac{\cos\left(\frac{(2n+2t-T-1)\pi}{6T}\right)^{\{(2T-t)+x\}/2}}{\sin\left(\frac{n\pi}{3T}\right)} \prod_{n=1}^{\{(2T-t)+x\}/2} \frac{1}{\sin\left(\frac{n\pi}{3T}\right)}, & (t, x) \in \Lambda_{2T} \text{ の場合,} \\ 0, & \text{その他の場合,} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.47)$$

ただし

$$\tilde{c}_2(t; T) = \frac{\prod_{n=1}^t \sin\left(\frac{n\pi}{3T}\right) \prod_{n=1}^{2T-t} \sin\left(\frac{n\pi}{3T}\right)}{\prod_{n=1}^{2T} \sin\left(\frac{n\pi}{3T}\right)} \prod_{n=1}^T \frac{\sin^2\left(\frac{n\pi}{3T}\right)}{\cos\left(\frac{(2n-T-1)\pi}{6T}\right)}. \quad (3.48)$$

周遊過程の定義より

$$\tilde{\mathbb{P}}_{2T}^{0,0}(X(0) = x) = \tilde{\mathbb{P}}_{2T}^{0,0}(X(2T) = x) = \delta_{x,0}.$$

(3.47) を見ると, 次の対称性があることが分かる.

$$\tilde{\mathbb{P}}_{2T}^{0,0}(X(t) = x) = \tilde{\mathbb{P}}_{2T}^{0,0}(X(2T-t) = -x), \quad 0 \leq t \leq 2T, \quad x \in \mathbb{Z}. \quad (3.49)$$

よって, 時刻  $t = T$  では, 分布は

$$\tilde{\mathbb{P}}_{2T}^{0,0}(X(T) = x) = \tilde{\mathbb{P}}_{2T}^{0,0}(X(T) = -x), \quad x \in \mathbb{Z}$$

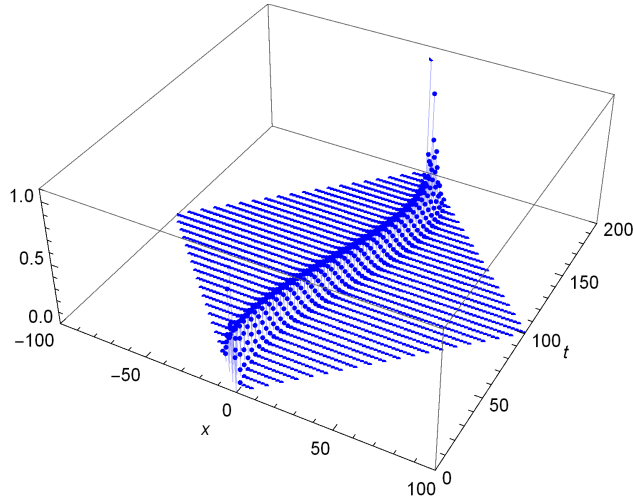


図 9:  $T = 100$  での 簡略化された三角関数型周遊過程の確率分布  $\tilde{\mathbb{P}}_{2T}^{0,0}(X(t) = x)$  の時間発展. 最大確率を与える軌跡は  $S$  字曲線になっている.

となり対称的になる. 図 9 は  $T = 100$  での (3.47) と (3.48) で与えられる  $\tilde{\mathbb{P}}_{2T}^{0,0}(X(t) = x)$  の時間依存性を示している. この図から, 分布は各時刻  $t \in \{0, 1, \dots, 2T\}$  において 1 つの最大値を持つ. この最大値を  $\tilde{x}_{2T}^{\max}(t)$  とすると

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{2T}^{\max}(t) &< 0 && \text{for } 1 \leq t \leq T-1, \\ \tilde{x}_{2T}^{\max}(t) &= 0 && \text{at } t = T, \\ \tilde{x}_{2T}^{\max}(t) &> 0 && \text{for } T+1 \leq t \leq 2T-1 \end{aligned}$$

であることが分かる.  $\{\tilde{x}_{2T}^{\max}(t) : 0 \leq t \leq 2T\}$  で表される曲線は簡略化された三角関数型周遊過程の最大確率を与える軌跡を表している. 図 9 から分かるように, その概形は  $S$  字カーブである.

図 10 は  $T = 100, 150, 200, 250$  での  $\{\tilde{x}_{2T}^{\max}(sT)/T : 0 \leq s \leq 2\}$  を表している. この図を見ると, 異なる  $T$  の曲線が 1 つの曲線上にのっているように見える. このようにスケーリングをした点をプロットすることを統計力学では **data-collapse** とよぶ. このことから,  $\tilde{x}_{2T}^{\max}(t)$  は  $T \rightarrow \infty$  で  $T$  に比例していることが示唆される. つまり, 次の極限

$$\{\tilde{v}(s) : s \in [0, 2]\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\tilde{x}_{2T}^{\max}(sT)}{T} : 0 \leq s \leq 2 \right\}$$

で与えられるような非自明な曲線が存在すると考えられる. この曲線は

$$\tilde{v}(t) = -\tilde{v}(2-t), \quad t \in [0, 2]$$

という対称性を持つことが確認でき, 特に  $\tilde{v}(1) = 0$  であることが言える.

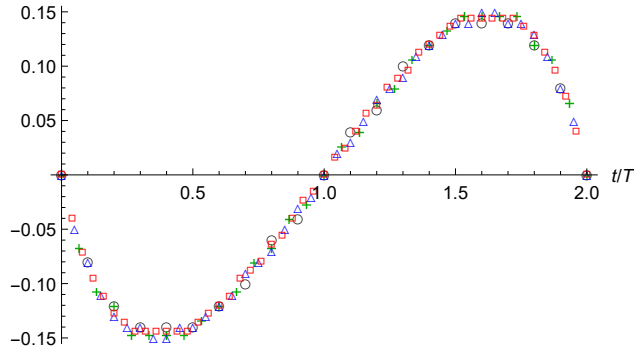


図 10:  $\tilde{x}_{2T}^{\max}(t)/T, t \in \{0, 1, \dots, 2T\}$  の数値計算結果が様々な時間間隔  $T$  についてプロットされている;  $T = 100$  (circles  $\circ$ ),  $150$  (crosses  $+$ ),  $200$  (triangles  $\triangle$ ),  $250$  (squares  $\square$ ) である. 得られた data-collapse は簡略化された三角関数型周遊過程において  $T \rightarrow \infty$  での極限として与えられる曲線  $\tilde{v}(t), t \in [0, 2]$  の存在を示唆している.

### 3.6.2 簡略化された三角関数型周遊過程のパラメータ依存性

3.6.1 節では  $\sigma = 3$  としていたため, パラメータ  $\alpha_0/r$  は一意的に決定されていた. しかし, 一般に  $\sigma > 3$  では  $\alpha_0/r$  は (3.43) の範囲内の値をとり得る. そのため, 簡略化された三角関数型周遊過程の軌跡もパラメータ  $\alpha_0/r$  に依存する. ここでは,  $\sigma = 4$  の場合について軌跡の概形を考察する.

(3.43) より,  $\sigma = 4$  では

$$\frac{3}{8}\pi \leq \frac{\alpha_0}{r} \leq \frac{5}{8}\pi \quad (3.50)$$

である. 図 11 は  $T = 200$  での  $\tilde{x}_{2T}^{\max}(t)/T$  の数値計算結果を  $\alpha_0/r = 3\pi/8$  (青い点),  $\alpha_0/r = \pi/2$  (赤い点),  $\alpha_0/r = 5\pi/8$  (紫色の点) の場合について示したものである. この図を見ると,  $\alpha_0/r$  が小さいときには負の方向に湾曲しており,  $\alpha_0/r$  が大きくなるほど正の方向に湾曲していくことが分かる.

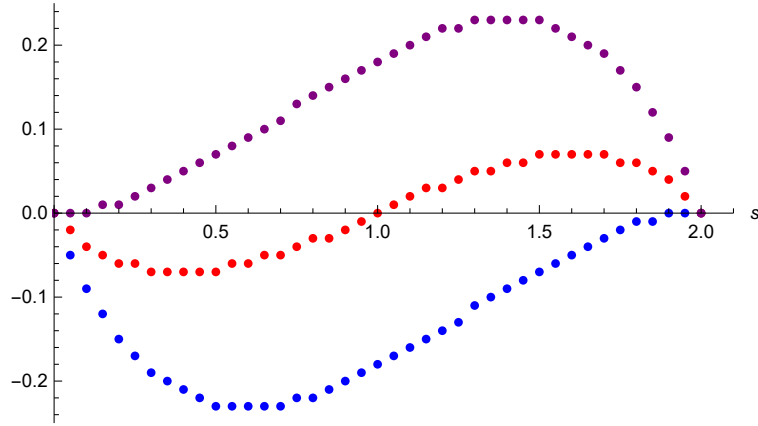


図 11:  $\sigma = 4$  として  $T = 200$  での  $\tilde{x}_{2T}^{max}(t)/T$  の数値計算結果が, 様々な  $\alpha_0/r$  についてプロットされている;  $\alpha_0/r = 3\pi/8$  は青い点,  $\alpha_0/r = \pi/2$  は赤い点,  $\alpha_0/r = 5\pi/8$  は紫色の点である. この概形から, パラメータ  $\alpha_0/r$  は概形の対称性に関係していることが分かる.

### 3.6.3 簡略化された三角関数型周遊過程の反対称性

簡略化された三角関数型周遊過程を与える確率測度は, 一般に (3.24), (3.25) と書くことができた. (3.24), (3.25) においてパラメータを  $t \rightarrow 2T - t, x \rightarrow -x$  の置き換えを行うと

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{P}}_{2T}^{0,0}(X(2T-t) = -x) &= \tilde{\mathbb{P}}_{2T}^{0,0}(X(2T-t) = -x; r, \alpha_0) \\ &= \begin{cases} \tilde{c}_1(2T-t; T) \prod_{n=1}^{\{(2T-t)-x\}/2} \frac{\sin\left(\frac{2\alpha_0 - (2n+3T-2(2T-t)-1)}{2r}\right)}{\sin\left(\frac{n}{r}\right)} \prod_{n=1}^{\{(2T-t)+x\}/2} \frac{1}{\sin\left(\frac{n}{r}\right)} \\ \quad \times \prod_{n=1}^{(t+x)/2} \frac{\sin\left(\frac{2\alpha_0 + (2n+2(2T-t)-T-1)}{2r}\right)}{\sin\left(\frac{n}{r}\right)} \prod_{n=1}^{(t-x)/2} \frac{1}{\sin\left(\frac{n}{r}\right)}, & (t, x) \in \Lambda_{2T} \text{ の場合,} \\ 0, & \text{その他の場合.} \end{cases} \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} 2n + 3T - 2(2T - t) - 1 &= 2n + 2t - T - 1, \\ 2n + 2(2T - t) - T - 1 &= 2n + 3T - 2t - 1, \\ \tilde{c}(2T - t; T) &= \tilde{c}(t; T) \end{aligned}$$

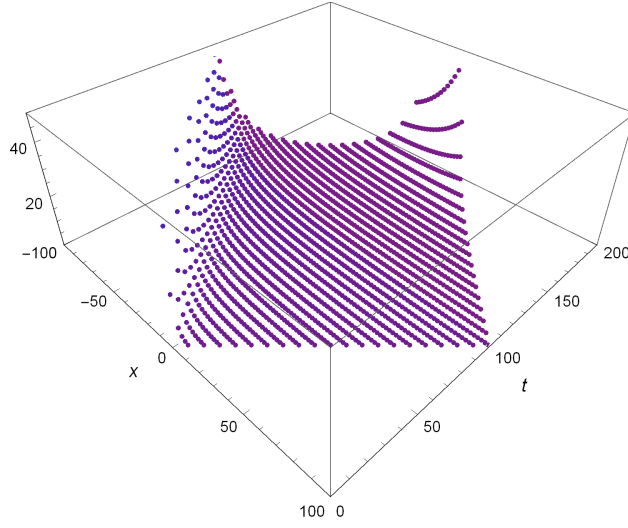


図 12: 重み関数  $\hat{q}(t, x)$  は,  $T = 100$  での  $\Lambda_{2T}^*$  内の  $(t, x)$  の関数として表される.  $(t, x)$  の依存性は非常に単純である.

であることから

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{P}}_{2T}^{0,0}(X(t) = x) &= \tilde{\mathbb{P}}_{2T}^{0,0}(X(t) = x; r, \alpha_0) \\ &= \begin{cases} \tilde{c}_1(t; T) \prod_{n=1}^{(t+x)/2} \frac{\sin\left(\frac{2\alpha_0 + (2n+3T-2t-1)}{2r}\right)}{\sin\left(\frac{n}{r}\right)} \prod_{n=1}^{(t-x)/2} \frac{1}{\sin\left(\frac{n}{r}\right)} \\ \quad \times \prod_{n=1}^{\{(2T-t)-x\}/2} \frac{\sin\left(\frac{2\alpha_0 - (2n+2t-T-1)}{2r}\right)}{\sin\left(\frac{n}{r}\right)} \prod_{n=1}^{\{(2T-t)+x\}/2} \frac{1}{\sin\left(\frac{n}{r}\right)}, & (t, x) \in \Lambda_{2T} \text{ の場合,} \\ 0, & \text{その他の場合.} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.51)$$

(3.24) と (3.51) はほとんど同じ形をしているが正弦関数の中身の符号が異なっていることに注意されたい. よって, 全ての  $n$  に対して (3.24) と (3.51) が一致するとき  $\alpha_0/r = \pi/2$  である. このことから,  $\alpha_0/r = \pi/2$  のとき簡略化された三角関数型周遊過程は時刻  $t = T$  に対して反対称的な概形になる.

図 11 の赤い点で示されるように,  $\alpha_0/r = \pi/2$  の時には反対称な概形になっている.

### 3.6.4 三角関数型周遊過程

三角関数型周遊過程  $(\{X(t)\}_{t \in \{0,1,\dots,2T\}}, \hat{\mathbb{P}}_{2T}^{0,0})$  に対して, 非負条件 (3.43)-(3.45) を満たすようにパラメータを選ぶ必要がある. (3.43) と (3.44) から導かれる  $3\pi/\sigma \leq (\alpha_0 - \beta_0)/r$  という

条件と (3.45) から

$$\frac{3}{\sigma}\pi \leq \left(1 - \frac{3}{\sigma}\right)\pi \iff \sigma \geq 6.$$

ここでは,  $\lambda$  が最大の場合, すなわち  $\sigma = 6$  の場合を考えることにする. この場合では, (3.43)-(3.45) から他のパラメータは一意的に定まり

$$\sigma = 6, \quad \frac{\alpha_0}{r} = -\frac{\beta_0}{r} = \frac{\pi}{4}. \quad (3.52)$$

図 12 は  $T = 100$  での  $\Lambda_{2T}^*$  内の  $(t, x)$  の関数として表される重み関数  $\hat{q}(t, x)$  を示している.  $(t, x)$  の依存性はとても単純である. 上記のパラメータ設定では, (3.22) と (3.23) は次のように書くことができる.

$$\begin{aligned} \hat{\mathbb{P}}_{2T}^{0,0}(X(t) = x) &= \hat{\mathbb{P}}_{2T}^{0,0}(X(t) = x; r, \alpha_0, \beta_0) \Big|_{\pi r = 6T, \alpha_0/r = \pi/4, \beta_0/r = -\pi/4} \\ &= \begin{cases} \hat{c}_2(t; T) \cos\left(\frac{x\pi}{6T}\right) \\ \times \prod_{n=1}^{(t+x)/2} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{(2n+3T-2t-1)\pi}{12T}\right)}{\sin\left(\frac{n\pi}{3T}\right)} \prod_{n=1}^{(t-x)/2} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{(2n+3T-2t-1)\pi}{12T}\right)}{\sin\left(\frac{n\pi}{3T}\right)} \\ \times \prod_{n=1}^{\{(2T-t)-x\}/2} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{(2n+2t-T-1)\pi}{12T}\right)}{\sin\left(\frac{n\pi}{3T}\right)} \prod_{n=1}^{\{(2T-t)+x\}/2} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{(2n+2t-T-1)\pi}{12T}\right)}{\sin\left(\frac{n\pi}{3T}\right)}, \\ 0, \end{cases} \quad (3.53) \\ &\quad (t, x) \in \Lambda_{2T} \text{ の場合,} \\ &\quad \text{その他の場合,} \end{aligned}$$

ただし

$$\hat{c}_2(t; T) = \frac{2^T \prod_{n=1}^t \sin\left(\frac{n\pi}{6T}\right) \prod_{n=1}^{2T-t} \sin\left(\frac{n\pi}{6T}\right)}{\prod_{n=1}^{2T} \sin\left(\frac{n\pi}{6T}\right)} \prod_{n=1}^T \frac{\sin^2\left(\frac{n\pi}{3T}\right)}{\cos\left(\frac{(2n-T-1)\pi}{6T}\right)}. \quad (3.54)$$

周遊過程の定義から

$$\hat{\mathbb{P}}_{2T}^{0,0}(X(0) = x) = \hat{\mathbb{P}}_{2T}^{0,0}(X(2T) = x) = \delta_{x,0}.$$

上記の式から, 次の対称性

$$\hat{\mathbb{P}}_{2T}^{0,0}(X(t) = x) = \hat{\mathbb{P}}_{2T}^{0,0}(X(2T-t) = x), \quad 0 \leq t \leq 2T, \quad x \in \mathbb{Z} \quad (3.55)$$

が言える.

図 13 は  $T = 100$  で (3.53) と (3.54) で与えられる  $\hat{\mathbb{P}}_{2T}^{0,0}(X(t) = x)$  の時間依存性を示している. この図から, 軌跡は各時刻  $t \in \{0, 1, \dots, 2T\}$  において  $x = \hat{x}_{2T}^{\max}(t)$  で 1 つの頂点を持ち

$$\hat{x}_{2T}^{\max}(t) < 0 \quad \text{for } 1 \leq t \leq 2T-1$$

となることが分かる. さらに, 曲線  $\{\hat{x}_{2T}^{\max}(t) : 0 \leq t \leq 2T\}$  は 三角関数型周遊過程の最大確率の軌跡を表しており, C 字の曲線を描く. 図 14 は,  $T = 100, 150, 200, 250$  での最大確率を与え

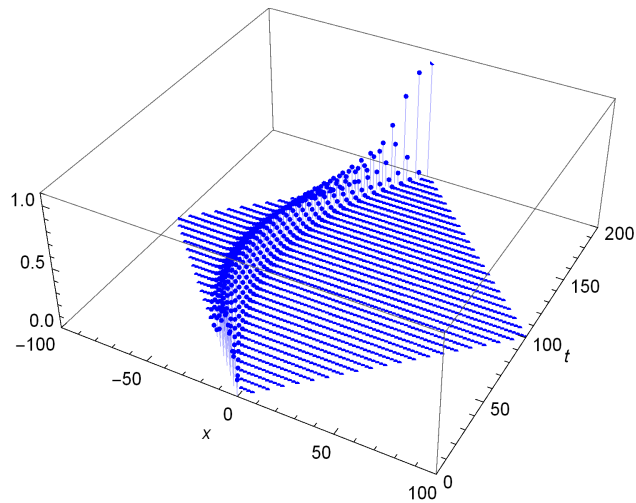


図 13:  $T = 100$  での三角関数型周遊過程の確率分布  $\widehat{\mathbb{P}}_{2T}^{0,0}(X(t) = x)$  の時間発展. 最大確率を与える軌跡は C 字の曲線である.

る位置座標  $\{\widehat{x}_{2T}^{\max}(sT)/T : 0 \leq s \leq 2\}$  を示している. data-collapse が見られ,  $\widehat{x}_{2T}^{\max}(t)$  は  $T \rightarrow \infty$  で  $T$  に比例すると考えられる. これより

$$\{\widehat{v}(t) : t \in [0, 2]\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\widehat{x}_{2T}^{\max}(sT)}{T} : 0 \leq s \leq 2 \right\}$$

が存在する. この極限的な軌跡は非自明な曲線を描いている. また (3.55) より,

$$\widehat{v}(t) = \widehat{v}(2-t), \quad t \in [0, 2]$$

という対称性があることも言える.

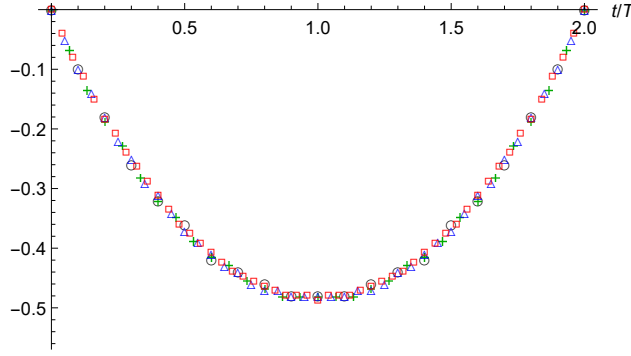


図 14:  $\hat{x}_{2T}^{\max}(t)/T, t \in \{0, 1, \dots, 2T\}$  の数値計算結果が様々な時間間隔  $T$  についてプロットされている;  $T = 100$  (circles  $\circ$ ),  $150$  (crosses  $+$ ),  $200$  (triangles  $\triangle$ ),  $250$  (squares  $\square$ ). 得られた data-collapse は三角関数型周遊過程において  $T \rightarrow \infty$  での極限として得られる曲線  $\hat{c}(t), t \in [0, 2]$  の存在を示唆している。

### 3.6.5 三角関数型周遊過程が対称となる条件

(3.22) と (3.23) は

$$\begin{aligned} \hat{\mathbb{P}}_{2T}^{0,0}(X(t) = x) &= \hat{\mathbb{P}}_{2T}^{0,0}(X(t) = x; r, \alpha_0, \beta_0) \\ &= \begin{cases} \hat{c}_1(t; T) \sin\left(\frac{\alpha_0 - \beta_0 - x}{r}\right) \\ \times \prod_{n=1}^{(t+x)/2} \frac{\sin\left(\frac{2\alpha_0 - (2n+3T-2t-1)}{2r}\right)}{\sin\left(\frac{n}{r}\right) \sin\left(\frac{\alpha_0 - \beta_0 - n}{r}\right)} \prod_{n=1}^{(t-x)/2} \frac{\sin\left(\frac{2\beta_0 - (2n+3T-2t-1)}{2r}\right)}{\sin\left(\frac{n}{r}\right) \sin\left(\frac{\alpha_0 - \beta_0 + n}{r}\right)} \\ \times \prod_{n=1}^{\{(2T-t)-x\}/2} \frac{\sin\left(\frac{2\alpha_0 + (2n+2t-T-1)}{2r}\right)}{\sin\left(\frac{n}{r}\right) \sin\left(\frac{\alpha_0 - \beta_0 + n}{r}\right)} \prod_{n=1}^{\{(2T-t)+x\}/2} \frac{\sin\left(\frac{2\beta_0 + (2n+2t-T-1)}{2r}\right)}{\sin\left(\frac{n}{r}\right) \sin\left(\frac{\alpha_0 - \beta_0 - n}{r}\right)}, & (t, x) \in \Lambda_{2T} \text{ の場合,} \\ 0, & \text{その他の場合,} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.56)$$

ただし

$$\begin{aligned} \hat{c}_1(t; T) &= \frac{\prod_{n=1}^t \sin\left(\frac{n}{r}\right) \prod_{n=1}^{2T-t} \sin\left(\frac{n}{r}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha_0 - \beta_0}{r}\right) \prod_{n=1}^{2T} \sin\left(\frac{n}{r}\right)} \\ &\times \prod_{n=1}^T \frac{\sin^2\left(\frac{n}{r}\right) \sin\left(\frac{\alpha_0 - \beta_0 - n}{r}\right) \sin\left(\frac{\alpha_0 - \beta_0 + n}{r}\right)}{\sin\left(\frac{2\alpha_0 + (2n-T-1)}{2r}\right) \sin\left(\frac{2\beta_0 + (2n-T-1)}{2r}\right)}. \end{aligned} \quad (3.57)$$



ここで, (3.56) と (3.57) において  $t \rightarrow 2T - t$  の変換を行うと

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbb{P}}_{2T}^{0,0}(X(2T-t) = x) &= \widehat{\mathbb{P}}_{2T}^{0,0}(X(2T-t) = x; r, \alpha_0, \beta_0) \\ &= \begin{cases} \widehat{c}_1(2T-t; T) \sin\left(\frac{\alpha_0 - \beta_0 - x}{r}\right) \\ \quad \times \prod_{n=1}^{\{(2T-t)+x\}/2} \frac{\sin\left(\frac{2\alpha_0 - (2n+3T-2(2T-t)-1)}{2r}\right)}{\sin\left(\frac{n}{r}\right) \sin\left(\frac{\alpha_0 - \beta_0 - n}{r}\right)} \prod_{n=1}^{\{(2T-t)-x\}/2} \frac{\sin\left(\frac{2\beta_0 - (2n+3T-2(2T-t)-1)}{2r}\right)}{\sin\left(\frac{n}{r}\right) \sin\left(\frac{\alpha_0 - \beta_0 + n}{r}\right)} \\ \quad \times \prod_{n=1}^{(t-x)/2} \frac{\sin\left(\frac{2\alpha_0 + (2n+2(2T-t)-T-1)}{2r}\right)}{\sin\left(\frac{n}{r}\right) \sin\left(\frac{\alpha_0 - \beta_0 + n}{r}\right)} \prod_{n=1}^{(t+x)/2} \frac{\sin\left(\frac{2\beta_0 + (2n+2(2T-t)-T-1)}{2r}\right)}{\sin\left(\frac{n}{r}\right) \sin\left(\frac{\alpha_0 - \beta_0 - n}{r}\right)}, \\ 0, \end{cases} \end{aligned}$$

$(t, x) \in \Lambda_{2T}$  の場合,  
 その他の場合.

よって

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbb{P}}_{2T}^{0,0}(X(2T-t) = x) &= \widehat{\mathbb{P}}_{2T}^{0,0}(X(2T-t) = x; r, \alpha_0, \beta_0) \\ &= \begin{cases} \widehat{c}_1(t; T) \sin\left(\frac{\alpha_0 - \beta_0 - x}{r}\right) \\ \quad \times \prod_{n=1}^{(t+x)/2} \frac{\sin\left(\frac{2\beta_0 + (2n+3T-2t-1)}{2r}\right)}{\sin\left(\frac{n}{r}\right) \sin\left(\frac{\alpha_0 - \beta_0 - n}{r}\right)} \prod_{n=1}^{(t-x)/2} \frac{\sin\left(\frac{2\alpha_0 + (2n+3T-2t-1)}{2r}\right)}{\sin\left(\frac{n}{r}\right) \sin\left(\frac{\alpha_0 - \beta_0 + n}{r}\right)} \\ \quad \times \prod_{n=1}^{\{(2T-t)-x\}/2} \frac{\sin\left(\frac{2\beta_0 - (2n+2t-T-1)}{2r}\right)}{\sin\left(\frac{n}{r}\right) \sin\left(\frac{\alpha_0 - \beta_0 + n}{r}\right)} \prod_{n=1}^{\{(2T-t)+x\}/2} \frac{\sin\left(\frac{2\alpha_0 - (2n+2t-T-1)}{2r}\right)}{\sin\left(\frac{n}{r}\right) \sin\left(\frac{\alpha_0 - \beta_0 - n}{r}\right)}, \\ 0, \end{cases} \end{aligned} \tag{3.58}$$

$(t, x) \in \Lambda_{2T}$  の場合,  
 その他の場合,

ただし

$$\widehat{c}_1(2T-t; T) = \widehat{c}_1(t; T) \tag{3.59}$$

であることを用いた. さらに, 非負条件

$$\begin{aligned} \sigma &\geq 6, \\ \frac{3}{2\sigma}\pi &\leq -\frac{\beta_0}{r} \leq \left(1 - \frac{3}{2\sigma}\right)\pi \end{aligned}$$

であることから  $\beta_0/r < 0$  である. そこで

$$-\frac{\beta_0}{r} =: \frac{b_0}{r} \tag{3.60}$$

とおく. (3.60) を使って (3.56) と (3.58) を書き直すと

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathbb{P}}_{2T}^{0,0}(X(t) = x) &= \widehat{\mathbb{P}}_{2T}^{0,0}(X(t) = x; r, \alpha_0, \beta_0) \\
&= \begin{cases} \widehat{c}_1(t; T) \sin\left(\frac{\alpha_0 + b_0 - x}{r}\right) \times (-1)^T \\ \times \prod_{n=1}^{(t+x)/2} \frac{\sin\left(\frac{2\alpha_0 - (2n+3T-2t-1)}{2r}\right)}{\sin\left(\frac{n}{r}\right) \sin\left(\frac{\alpha_0 + b_0 - n}{r}\right)} \prod_{n=1}^{(t-x)/2} \frac{\sin\left(\frac{2b_0 + (2n+3T-2t-1)}{2r}\right)}{\sin\left(\frac{n}{r}\right) \sin\left(\frac{\alpha_0 + b_0 + n}{r}\right)} \\ \times \prod_{n=1}^{\{(2T-t)-x\}/2} \frac{\sin\left(\frac{2\alpha_0 + (2n+2t-T-1)}{2r}\right)}{\sin\left(\frac{n}{r}\right) \sin\left(\frac{\alpha_0 + b_0 + n}{r}\right)} \prod_{n=1}^{\{(2T-t)+x\}/2} \frac{\sin\left(\frac{2b_0 - (2n+2t-T-1)}{2r}\right)}{\sin\left(\frac{n}{r}\right) \sin\left(\frac{\alpha_0 + b_0 - n}{r}\right)}, \\ 0, \end{cases} \quad (3.61) \\
&\quad (t, x) \in \Lambda_{2T} \text{ の場合,} \\
&\quad \text{その他の場合,}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathbb{P}}_{2T}^{0,0}(X(2T-t) = x) &= \widehat{\mathbb{P}}_{2T}^{0,0}(X(2T-t) = x; r, \alpha_0, \beta_0) \\
&= \begin{cases} \widehat{c}_1(t; T) \sin\left(\frac{\alpha_0 + b_0 - x}{r}\right) \times (-1)^T \\ \times \prod_{n=1}^{(t+x)/2} \frac{\sin\left(\frac{2b_0 - (2n+3T-2t-1)}{2r}\right)}{\sin\left(\frac{n}{r}\right) \sin\left(\frac{\alpha_0 + b_0 - n}{r}\right)} \prod_{n=1}^{(t-x)/2} \frac{\sin\left(\frac{2\alpha_0 + (2n+3T-2t-1)}{2r}\right)}{\sin\left(\frac{n}{r}\right) \sin\left(\frac{\alpha_0 + b_0 + n}{r}\right)} \\ \times \prod_{n=1}^{\{(2T-t)-x\}/2} \frac{\sin\left(\frac{2b_0 + (2n+2t-T-1)}{2r}\right)}{\sin\left(\frac{n}{r}\right) \sin\left(\frac{\alpha_0 + b_0 + n}{r}\right)} \prod_{n=1}^{\{(2T-t)+x\}/2} \frac{\sin\left(\frac{2\alpha_0 - (2n+2t-T-1)}{2r}\right)}{\sin\left(\frac{n}{r}\right) \sin\left(\frac{\alpha_0 + b_0 - n}{r}\right)}, \\ 0, \end{cases} \quad (3.62) \\
&\quad (t, x) \in \Lambda_{2T} \text{ の場合,} \\
&\quad \text{その他の場合.}
\end{aligned}$$

(3.61) と (3.62) を比較すると積の 1 行目と分母は一致しているが, 積の中の正弦関数の中身が異なる. このことから, 三角関数型周遊過程が  $t = T$  に関して対称的な分布となるためには, 例えば 1 番目の積の中の正弦関数について

$$\sin\left(\frac{2\alpha_0 - (2n+3T-2t-1)}{2r}\right) = \sin\left(\frac{2b_0 - (2n+3T-2t-1)}{2r}\right) \quad (3.63)$$

が成り立つ必要がある. ここで, 三角関数の関係式

$$\sin A - \sin B = 2 \cos\left(\frac{A+B}{2}\right) \sin\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

を用いると (3.63) は

$$\cos\left(\frac{\alpha_0 + b_0 - (2n+3T-2t-1)}{2r}\right) \sin\left(\frac{\alpha_0 - b_0}{2r}\right) = 0. \quad (3.64)$$

上式が  $0 \leq n \leq (t+x)/2$  を満たす任意の  $n$  に対して成り立つためには

$$\sin\left(\frac{\alpha_0 - b_0}{2r}\right) = 0. \quad (3.65)$$

よって、パラメータ、 $\alpha_0/r, \beta_0/r$  が

$$\frac{\alpha_0}{r} = \frac{b_0}{r} = -\frac{\beta_0}{r} \quad (3.66)$$

を満たすとき三角関数型周遊過程は  $t = T$  に対して対称的な概形となる。

図 15 では、 $\sigma = 12$  で  $\beta_0/r = -\pi/8$  を固定して  $T = 200$  での  $\hat{x}_{2T}^{\max}(t)/T$  の数値を様々な  $\alpha_0/r$  の場合を示している。青い点は  $\alpha_0/r = \pi/8$ , 赤い点は  $\alpha_0/r = \pi/4$ , 紫の点は  $\alpha_0/r = \pi/2$  を表している。この図から、 $\alpha_0/r$  の値が大きくなるにつれて軌跡の最小値が右上にシフトしていることが分かる。また、図 16 は  $\sigma = 12$  において  $\alpha_0/r = \pi/8$  を固定して  $T = 200$  での  $\hat{x}_{2T}^{\max}(t)/T$  の数値を様々な  $\beta_0/r$  について示している。青い点が  $\beta_0/r = -\pi/8$ , 赤い点が  $\beta_0/r = -\pi/4$ , 紫の点が  $\beta_0/r = -\pi/2$  を表している。この図から、 $\beta_0/r$  の値が小さくなるにつれて、軌跡の最小値は左上にシフトしていることが分かる。

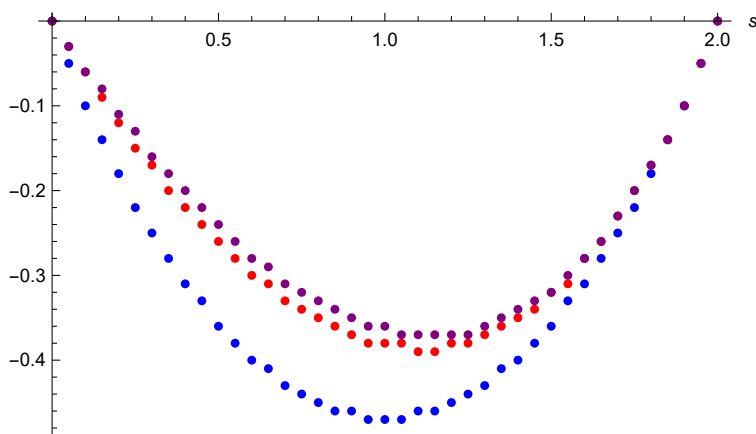


図 15:  $\sigma = 12$  において様々な  $\alpha_0/r$  について、 $T = 200$  での  $\hat{x}_{2T}^{\max}(t)/T$  の数値を示している。青い点、赤い点、紫の点はそれぞれ、 $\alpha_0/r = \pi/8, \alpha_0/r = \pi/4, \alpha_0/r = \pi/2$  を表しており、 $\beta_0/r = -\pi/8$  は固定である。このプロットから、 $\alpha_0/r$  の値が大きくなるにつれて、軌跡の最小値が右上にシフトしていることが分かる。また、青い点は (3.66) を満たしており  $s = 1$  に対して左右対称的な概形となっている。

### 3.6.6 楕円関数型周遊過程

楕円関数型周遊過程 ( $\{X(t)\}_{t \in \{0,1,\dots,2T\}}, \mathbb{P}_{2T}^{0,0}$ ) に対して、(3.52) と同様のパラメータ設定を考える。  $\Lambda_{2T}^*$  上での重み関数  $q(t,x)$  は図 12 で示される三角関数型周遊過程の  $\hat{q}(t,x)$  とほとんど

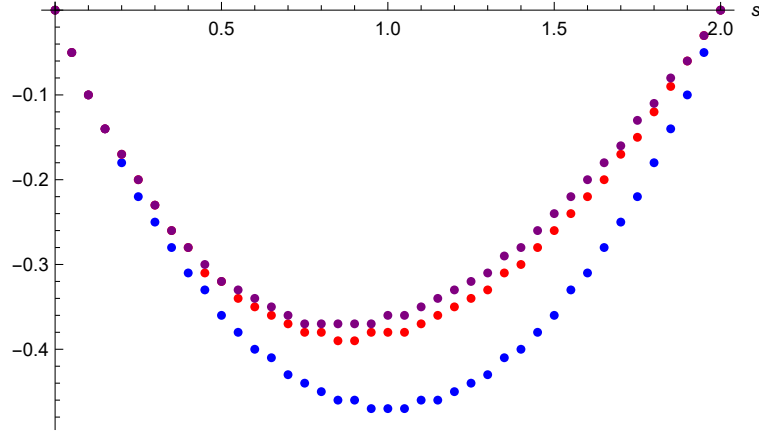


図 16:  $\sigma = 12$  において様々な  $\beta_0/r$  について,  $T = 200$  での  $x_{2T}^{max}(t)/T$  の数値を示している. 青い点, 赤い点, 紫の点はそれぞれ,  $\beta_0/r = -\pi/8$ ,  $\beta_0/r = -\pi/4$ ,  $\beta_0/r = -\pi/2$  を表しており,  $\alpha_0/r = \pi/8$  は固定である. このプロットから,  $\beta_0/r$  の値が小さくなるにつれて, 軌跡の最小値が左上にシフトしていることが分かる. また, 青い点は (3.66) を満たしており  $s = 1$  に対して左右対称的な概形となっている.

同じ概形であるが, パラメータ  $\kappa$  に依存してわずかに補正される. 以下のような特別なパラメータ設定の場合, (3.19) と (3.20) は次のようになる.

$$\mathbb{P}_{2T}^{0,0}(X(t) = x) = \mathbb{P}_{2T}^{0,0}(X(t) = x; r, \alpha_0, \beta_0, \kappa) \Big|_{\pi r = 6T, \alpha_0/r = \pi/4, \beta_0/r = -\pi/4}$$

$$= \begin{cases} c_2(t; T) \vartheta_1\left(\frac{x}{6T}; i\kappa\right) \\ \times \prod_{n=1}^{(t+x)/2} \frac{\vartheta_1\left(\frac{1}{4} - \frac{2n+3T-2t-1}{12T}; i\kappa\right)}{\vartheta_1\left(\frac{n}{6T}; i\kappa\right) \vartheta_2\left(\frac{n}{6T}; i\kappa\right)} \prod_{n=1}^{(t-x)/2} \frac{\vartheta_1\left(\frac{1}{4} + \frac{2n+3T-2t-1}{12T}; i\kappa\right)}{\vartheta_1\left(\frac{n}{6T}; i\kappa\right) \vartheta_2\left(\frac{n}{6T}; i\kappa\right)} \\ \times \prod_{n=1}^{\{(2T-t)-x\}/2} \frac{\vartheta_1\left(\frac{1}{4} + \frac{2n+2t-T-1}{12T}; i\kappa\right)}{\vartheta_1\left(\frac{n}{6T}; i\kappa\right) \vartheta_2\left(\frac{n}{6T}; i\kappa\right)} \prod_{n=1}^{\{(2T-t)+x\}/2} \frac{\vartheta_1\left(\frac{1}{4} - \frac{2n+2t-T-1}{12T}; i\kappa\right)}{\vartheta_1\left(\frac{n}{6T}; i\kappa\right) \vartheta_1\left(\frac{n}{6T}; i\kappa\right)}, & (t, x) \in \Lambda_{2T} \text{ の場合,} \\ 0, & \text{その他の場合,} \end{cases} \quad (3.67)$$

ただし

$$c_2(t; T) = \frac{\prod_{n=1}^t \vartheta_1\left(\frac{n}{6T}; i\kappa\right) \prod_{n=1}^{2T-t} \vartheta_1\left(\frac{n}{6T}; i\kappa\right)}{\vartheta_2(0; i\kappa) \prod_{n=1}^{2T} \vartheta_1\left(\frac{n}{6T}; i\kappa\right)}$$

$$\times \prod_{n=1}^T \frac{\left\{ \vartheta_1\left(\frac{n}{6T}; i\kappa\right) \vartheta_2\left(\frac{n}{6T}; i\kappa\right) \right\}^2}{\vartheta_1\left(\frac{1}{4} + \frac{2n-T-1}{12T}; i\kappa\right) \vartheta_1\left(\frac{1}{4} - \frac{2n-T-1}{12T}; i\kappa\right)}, \quad (3.68)$$

$$\vartheta_2(v; \tau) \equiv \vartheta_1(v + 1/2; \tau).$$

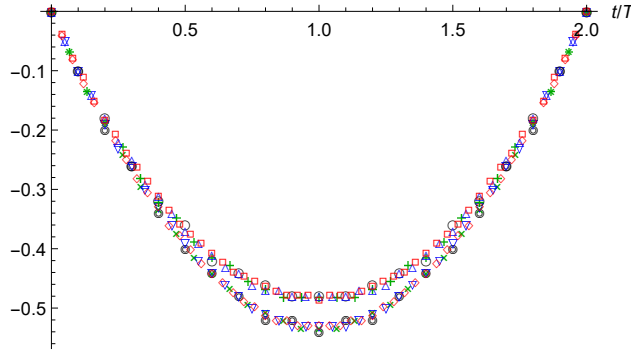


図 17:  $x_{2T}^{\max}(t; \kappa)/T, t \in \{0, 1, \dots, 2T\}$  の数値計算結果が様々な時間間隔  $T$  についてプロットされている;  $\kappa = 10$  の場合には,  $T = 100$  (circles  $\circ$ ),  $150$  (crosses  $+$ ),  $200$  (triangles  $\triangle$ ),  $250$  (squares  $\square$ ),  $\kappa = 0.5$  の場合には,  $T = 100$  (double circles  $\odot$ ),  $150$  (crosses  $\times$ ),  $200$  (reverse triangles  $\nabla$ ),  $250$  (diamonds  $\diamond$ ) である.  $\kappa = 10$  でのプロットは図 14 で示した三角関数型周遊過程のそれと非常によく一致している. また, data-collapse から  $\kappa > 0$  に対して楕円関数型周遊過程での  $T \rightarrow \infty$  のスケール極限をとった曲線  $v(t, \kappa), t \in [0, 2]$  の存在が示唆される. さらに,  $v(t, \kappa), t \in [0, 2]$  の直線的な軌跡からのずれは  $\kappa \rightarrow 0+$  となるにつれて大きくなる.

$\kappa > 0$  が十分大きなとき, 楕円関数型周遊過程  $(\{X(t)\}_{t \in \{0, 1, \dots, 2T\}}, \mathbb{P}_{2T}^{0,0})$  は三角関数型周遊過程  $(\{X(t)\}_{t \in \{0, 1, \dots, 2T\}}, \widehat{\mathbb{P}}_{2T}^{0,0})$  と非常によく似た概形となる.  $x_{2T}^{\max}(t; \kappa)$  が楕円関数型周遊過程での最大確率を与える軌跡を表すとする. 図 17 は  $T = 100, 150, 200, 250$  における  $\kappa = 0.5$  と  $\kappa = 10$  の  $\{x_{2T}^{\max}(sT; \kappa)/T : 0 \leq s \leq 2\}$  を示したものである. data-collapse は,  $\widehat{x}_{2T}^{\max}(t)$  が  $T \rightarrow \infty$  で  $T$  に比例することを示しており

$$\{v(s; \kappa) : s \in [0, 2]\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \frac{x_{2T}^{\max}(sT; \kappa)}{T} : 0 \leq s \leq 2 \right\}$$

が存在する. 極限的な曲線  $v(t, \kappa), t \in [0, 2]$  の直線的な軌跡からのずれは,  $\kappa \rightarrow 0+$  となるにしたがって大きくなっていく.

### 3.7 簡略化された三角関数型周遊過程の漸近的解析

この章では,  $T \rightarrow \infty$  での確率法則  $\widehat{\mathbb{P}}_{2T}^{0,0}$  の漸近的解析を行う.

#### 3.7.1 大偏差原理とスケール極限での軌跡

時空座標  $(t, x) \in \Lambda_{2T}$  を  $T$  を単位としてスケールすると

$$t = sT, \quad x = vT.$$

今, 非負の関数  $I(s, v)$  を仮定し, 次の漸近式が成り立つとする.

$$\tilde{\mathbb{P}}_{2T}^{0,0}(X(sT) = vT) \simeq e^{-TI(s,v)} \quad \text{in } T \rightarrow \infty, \quad (3.69)$$

ただし

$$\begin{aligned} \bar{\Lambda}_2 = & \{(s, v) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq s \leq 1, -s \leq v \leq s\} \\ & \cup \{(s, v) \in \mathbb{R}^2 : 1 < s \leq 2, -(2-s) \leq v \leq 2-s\} \end{aligned}$$

の範囲で考える. (3.69) が成り立つとき, 大偏差原理が構築されたということができ, この時の関数  $I$  を rate 関数とよぶ. このことから, 前の章で言及したスケール極限をとった軌跡  $v = \tilde{v}(s), s \in [0, 2]$  は

$$I(s, \tilde{v}(s)) = 0, \quad s \in [0, 2] \quad (3.70)$$

のように  $I$  の零点によって決定される. (3.69) と (3.70) から

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \tilde{\mathbb{P}}_{2T}^{0,0}(X(sT) = \tilde{v}(s)T) = 1, \quad s \in [0, 2]. \quad (3.71)$$

これは, 大数の法則と考えることができる. (3.47) にあるように  $\tilde{\mathbb{P}}_{2T}^{0,0}(X(sT) = vT)$  は三角関数のいくつかの積で表現されている. 例として

$$B_{2T}^{(1)}(s, v) = \prod_{n=1}^{(s+v)T/2} \cos\left(\frac{\{2n + (3-2s)T - 1\}\pi}{6T}\right)$$

という積に注目する. この積の対数をとると

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{3T} \log B_{2T}^{(1)}(s, v) &= \frac{\pi}{3T} \sum_{n=1}^{(s+v)T/2} \log \cos\left(\frac{\{2n + (3-2s)T - 1\}\pi}{6T}\right) \\ &\rightarrow \int_{(3-2s)\pi/6}^{(3-s+v)\pi/6} \log \cos u \, du \quad \text{in } T \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

上記の積分を評価するには, 次のフーリエ展開の公式を使うと良い.

$$\int dx \log \sin x = -x \log 2 - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2nx)}{n^2}, \quad 0 \leq x < \pi, \quad (3.72)$$

$$\int dx \log \cos x = -x \log 2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin(2nx)}{n^2}, \quad |x| < \frac{\pi}{2}. \quad (3.73)$$

このような変形をほかの積についても行うことで, rate 関数について次の積分表示を得ることができる.

補題 3.5 (3.46) のパラメータ設定とした簡略化された三角関数型周遊過程  $(\{X(t)\}_{t \in \{0,1,\dots,2T\}}, \tilde{\mathbb{P}}_{2T}^{0,0})$  において, 大偏差原理 (3.69) が構築され, この時 rate 関数  $I$  は次のように与えられる.

$$I(s, v) = 3 \int_0^{(1-s-v)/6} \log \frac{\sin(\pi(\varphi + 1/6))}{\sin(\pi(-\varphi + 1/6))} d\varphi + 6 \int_0^{(1-s+v)/6} \log \frac{\sin(\pi(\varphi + 1/6))}{\sin(\pi(-\varphi + 1/6))} d\varphi \\ + 6 \int_0^{(1-s)/3} \log \frac{\cos(\pi(\varphi + 1/6))}{\cos(\pi(-\varphi + 1/6))} d\varphi \quad \text{for } (s, v) \in \bar{\Lambda}_2. \quad (3.74)$$

(3.70) を  $s$  で微分することで,  $dI(s, \tilde{v}(s))/ds = 0$  となるので

$$\frac{d\tilde{v}(s)}{ds} = -\frac{\partial_s I(s, \tilde{v}(s))}{\partial_v I(s, \tilde{v}(s))},$$

ただし

$$\partial_s I(s, v) = \frac{\partial I(s, v)}{\partial s}, \quad \partial_v I(s, v) = \frac{\partial I(s, v)}{\partial v}.$$

補題 3.5 から

$$\frac{d\tilde{v}(s)}{ds} = -\frac{\log \left[ \frac{\sin(\pi(s + \tilde{v}(s))/6) \sin^2(\pi(s - \tilde{v}(s))/6) \cos^4(\pi(2s - 1)/6)}{\sin(\pi(2 - s - \tilde{v}(s))/6) \sin^2(\pi(2 - s + \tilde{v}(s))/6) \cos^4(\pi(3 - 2s)/6)} \right]}{\log \left[ \frac{\sin(\pi(s + \tilde{v}(s))/6) \sin^2(\pi(2 - s + \tilde{v}(s))/6)}{\sin^2(\pi(s - \tilde{v}(s))/6) \sin(\pi(2 - s - \tilde{v}(s))/6)} \right]}$$

という微分方程式を得ることができる.

定理 3.6 (3.46) のパラメータ設定での簡略化された三角関数型周遊過程を考える. スケール極限をとった軌跡  $v = \tilde{v}(s), s \in [0, 2]$  は  $\tilde{v}(1) = 0$  を満たす, つまり  $s = 1$  で原点を通り,  $s = 1$  の時刻近傍で

$$\tilde{v}(s) = \frac{1}{3}(s - 1) - \frac{2^4 \pi^2}{36}(s - 1)^3 + O((s - 1)^5) \quad (3.75)$$

のように振る舞う.

証明 (3.74) で,  $|s - 1| \ll 1$  と  $|v| \ll 1$  を仮定する.  $|\varphi| \ll 1$  に対して

$$\sin(\pi(\varphi + 1/6)) = \frac{1}{2} \left( 1 + \sqrt{3}\pi\varphi - \frac{\pi^2}{2}\varphi^2 - \frac{\sqrt{3}\pi^3}{6}\varphi^3 + \frac{\pi^4}{24}\varphi^4 + \frac{\sqrt{3}\pi^5}{120}\varphi^5 \right) + O(\varphi^6), \\ \cos(\pi(\varphi + 1/6)) = \frac{\sqrt{3}}{2} \left( 1 - \frac{\sqrt{3}\pi}{3}\varphi - \frac{\pi^2}{2}\varphi^2 + \frac{\sqrt{3}\pi^3}{18}\varphi^3 + \frac{\pi^4}{24}\varphi^4 - \frac{\sqrt{3}\pi^5}{360}\varphi^5 \right) + O(\varphi^6).$$

これより

$$\begin{aligned}
& \int_0^{(1-s\pm v)/6} \log \frac{\sin(\pi(\varphi + 1/6))}{\sin(\pi(-\varphi + 1/6))} d\varphi \\
&= \int_0^{(1-s\pm v)/6} \log \sin(\pi(\varphi + 1/6)) d\varphi - \int_{-(1-s\pm v)/6}^0 \log \sin(\pi(\varphi + 1/6)) d\varphi \\
&= \frac{\sqrt{3}\pi}{2^2 \times 3^2} (1-s\pm v)^2 + \frac{2\sqrt{3}\pi^3}{2^4 \times 3^5} (1-s\pm v)^4 \\
&\quad + \frac{11\sqrt{3}\pi^5}{2^4 \times 3^8 \times 5} (1-s\pm v)^6 + O(|1-s\pm v|^8).
\end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned}
& \int_0^{(1-s)/3} \log \frac{\cos(\pi(\varphi + 1/6))}{\cos(\pi(-\varphi + 1/6))} d\varphi \\
&= \int_0^{(1-s)/3} \log \cos(\pi(\varphi + 1/6)) d\varphi - \int_{-(1-s)/3}^0 \log \cos(\pi(\varphi + 1/6)) d\varphi \\
&= -\frac{\sqrt{3}\pi}{3^3} (1-s)^2 - \frac{2\sqrt{3}\pi^3}{3^7} (1-s)^4 - \frac{2^2\sqrt{3}\pi^5}{3^9 \times 5} (1-s)^6 + O(|1-s|^8).
\end{aligned}$$

これらより

$$\begin{aligned}
I(s, v) &= \frac{\sqrt{3}\pi}{2^2 \times 3^2} (s-1-3v)^2 \\
&\quad - \frac{\sqrt{3}\pi^3}{2^3 \times 3^6} \left\{ 5(s-1)^4 + 36v(s-1)^3 - 162v^2(s-1)^2 + 36v^3(s-1) - 27v^4 \right\} \\
&\quad - \frac{\sqrt{3}\pi^5}{2^4 \times 3^8 \times 5} \left\{ 29(s-1)^6 + 198v(s-1)^5 - 1485v^2(s-1)^4 \right. \\
&\quad \quad \left. + 660v^3(s-1)^3 - 1485v^4(s-1)^2 + 198v^5(s-1) - 99v^6 \right\} \\
&\quad + O(|s-1|^8, |v|^8). \tag{3.76}
\end{aligned}$$

(3.76) の 1 行目は  $v = (s-1)/3$  とおくと消える. そこで, 未知定数を  $c$  として

$$v = \frac{1}{3}(s-1) + c(s-1)^3 + O((s-1)^5)$$

を仮定する. このように仮定すると, (3.76) は

$$I(s, v) = \frac{\sqrt{3}\pi}{2^2} \left( c + \frac{2^4\pi^2}{3^6} \right)^2 (s-1)^6 + O((s-1)^8)$$

となり,  $I(s, \tilde{v}(s)) = O((s-1)^8)$  であることから (3.75) のように未知定数  $c$  が決まる. ■



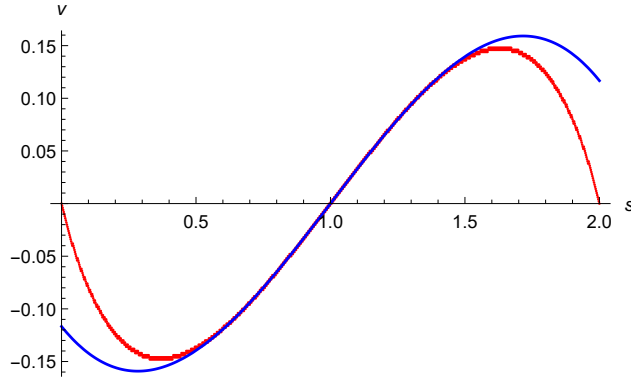


図 18:  $T = 500$  での  $\tilde{x}_{2T}^{\max}(t)/T, t \in \{0, 1, \dots, 2T\}$  の数値計算結果が横軸を  $s = t/T$  として赤い点でプロットされている.  $s = 1$  の近傍では, 赤い点は,  $(0, -v_0)$  から始まり  $(2, v_0)$  に達する (ただし  $v_0 = 1/3 - 2^4 \pi^2 / 3^6 = 0.116 \dots$ ) 3 次曲線 (3.77) によってよく近似されている.

図 18 では,  $T = 500$  での  $\tilde{x}_{2T}^{\max}(t)/T, t \in \{0, 1, \dots, 2T\}$  の数値計算結果が, 横軸を  $s = t/T$  として赤色で離散プロットされている.  $T = 500$  は十分に大きな時間間隔でありこのプロットは  $T \rightarrow \infty$  のスケール極限をとった軌跡  $v = \tilde{v}(s), s \in [0, 2]$  をよく再現している. 青色で示されている 3 次曲線

$$v = \frac{1}{3}(s-1) - \frac{2^4 \pi^2}{3^6}(s-1)^3 \quad s \in [0, 2] \quad (3.77)$$

も重ねてプロットされており,  $(0, -v_0)$  からスタートし  $(2, v_0)$  に達している. ただし,  $v_0 = 1/3 - 2^4 \pi^2 / 3^6 = 0.116 \dots$ .  $s = 1$  の近傍では近似曲線は赤い点で示されるスケール極限をとった軌跡と非常によく一致していることが分かる.

上記のような計算を繰り返し行うことで近似曲線の精度を高めることができる. 定理 3.6 を 27 次まで展開したものは以下の非自明な係数を持った式によって表現される.

$$\begin{aligned} \tilde{v}(s) = & \frac{1}{3}(s-1) - \frac{2^4 \pi^2}{3^6}(s-1)^3 - \frac{2^4 \pi^4}{3^9}(s-1)^5 - \frac{2^5 \times 7 \times \pi^6}{3^{13} \times 5}(s-1)^7 - \frac{2^4 \times 443 \times \pi^8}{3^{19} \times 7}(s-1)^9 \\ & - \frac{2^5 \times 1291 \times \pi^{10}}{3^{21} \times 5^2 \times 7}(s-1)^{11} - \frac{2^5 \times 547 \times \pi^{12}}{3^{25} \times 5 \times 11}(s-1)^{13} + \frac{2^6 \times 37 \times 392569 \times \pi^{14}}{3^{30} \times 5^3 \times 7^2 \times 11 \times 13}(s-1)^{15} \\ & + \frac{2^4 \times 61 \times 35281 \times \pi^{16}}{3^{33} \times 7^2 \times 11 \times 13}(s-1)^{17} + \frac{2^5 \times 19^2 \times 97 \times 167 \times 277 \times \pi^{18}}{3^{37} \times 5^3 \times 7 \times 11 \times 13 \times 17}(s-1)^{19} \\ & + \frac{2^5 \times 195971 \times 7837981 \times \pi^{20}}{3^{42} \times 5^3 \times 7^3 \times 13 \times 17 \times 19}(s-1)^{21} + \frac{2^6 \times 239 \times 64319 \times 31090571 \times \pi^{22}}{3^{45} \times 5^4 \times 7^3 \times 11^2 \times 13 \times 17 \times 19}(s-1)^{23} \\ & + \frac{2^5 \times 36289973 \times 83631011 \times \pi^{24}}{3^{49} \times 5^5 \times 7^2 \times 11^2 \times 17 \times 19 \times 23}(s-1)^{25} \\ & + \frac{2^6 \times 44453 \times 42744277 \times 222095911 \times \pi^{26}}{3^{56} \times 5^6 \times 7^3 \times 11^2 \times 13^2 \times 17 \times 19 \times 23}(s-1)^{27} + O((s-1)^{29}). \quad (3.78) \end{aligned}$$

図 19 は, 定理 3.6 の近似を 27 次まで計算したものが青い曲線で示されている. これを見る

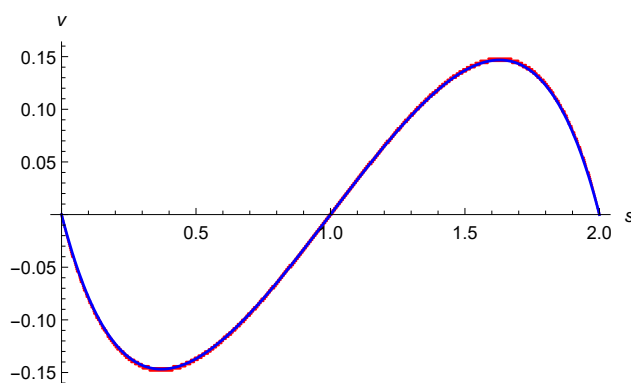


図 19:  $T = 500$  での  $\tilde{x}_{2T}^{\max}(t)/T, t \in \{0, 1, \dots, 2T\}$  の数値計算結果が横軸を  $s = t/T$  として赤い点でプロットされている. 赤い点は,  $(0, -v_0)$  から始まり  $(2, v_0)$  に達する (ただし  $v_0 \simeq 2.09012 \times 10^{-7}$ ) 曲線 (3.78) によって非常によく近似されている.

と赤い点で表されるスケール極限での軌跡と,  $(0, -v_0)$  から始まり  $(2, v_0)$  に達する (ただし  $v_0 \simeq 2.09012 \times 10^{-7}$ ) の青色の近似曲線はほとんど一致していることが分かる.

### 3.7.2 $t = T$ での中心極限定理

定理 3.6 では,  $\tilde{v}(1) = 0$  であることを示した. これは (3.71) にあるように  $T \rightarrow \infty$  のとき, 時間間隔  $2T$  の間に  $t = T$  で, 軌跡が原点を確率 1 で通ることを意味する. この章では,  $t = T$  での 0 近傍での軌跡の揺らぎについて解析する.

**命題 3.7** (3.46) のパラメータ設定である簡略化された三角関数型周遊過程  $(\{X(t)\}_{t \in \{0, 1, \dots, 2T\}}, \tilde{\mathbb{P}}_{2T}^{0,0})$  について,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{T}}{2} \tilde{\mathbb{P}}_{2T}^{0,0}(X(T) = \sqrt{T}\xi) = f(\xi) \quad (3.79)$$

ただし

$$f(\xi) = \frac{3^{1/4}}{2} \exp\left(-\frac{\sqrt{3}\pi}{4}\xi^2\right), \quad \xi \in \mathbb{R} \quad (3.80)$$

が成り立つ. つまり,  $T \rightarrow \infty$  の極限では  $t = T$  で揺らぎは  $\sqrt{T}$  に比例し, その係数は分散  $\sigma^2 = 2/(\sqrt{3}\pi)$  の正規分布に従う.

この証明は [1] で述べられている. 図 20 は  $T = 100$  でパラメータが (3.46) である  $(\sqrt{T}/2)\tilde{\mathbb{P}}_{2T}^{0,0}(X(T) = \sqrt{T}\xi)$  の数値プロットである.  $T = 100$  程度でも, 正規分布に一致していることが分かる. この結果を (3.39) の古典的ランダムウォークの周遊過程がブラウン橋に収束していくことと比較すると, 現在のプロセスの分散  $\sigma^2 = 2/(\sqrt{3}\pi) = 0.367\dots$  のほうが  $s = 1$  での古典的な分散  $\sigma_{cl} = 1/2$  に比べて小さいことが分かる.

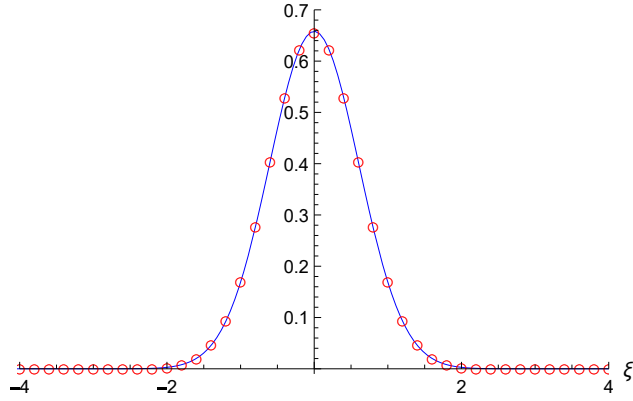


図 20:  $T = 100$  でパラメータが (3.46) である  $(\sqrt{T}/2)\tilde{\mathbb{P}}_{2T}^{0,0}(X(T) = \sqrt{T}\xi)$  の数値計算計算が赤丸でプロットされている. また, (3.80) で与えられる正規分布である確率密度関数  $f(\xi)$  は青い曲線で描かれている.

## 4 正規ランダム行列の動的拡張

### 4.1 正規行列の定義

文献 [3] によると, 正規行列は以下のように定義することができる.

定理 4.1 行列  $M, U, D$  をそれぞれ正規行列, ユニタリ-行列, 対角行列とする. このとき

$$[M, M^\dagger] = 0 \Leftrightarrow D = U^\dagger M U \quad (4.1)$$

が成り立つ. ただし  $A^\dagger$  は  $A$  の随伴行列である.

証明. まず右辺から左辺が成り立つことを示す. 仮定から  $M = U D U^\dagger$  と  $M^\dagger = U D^\dagger U^\dagger$  が成り立つ. すると

$$\begin{aligned} M M^\dagger - M^\dagger M &= U D U^\dagger U D^\dagger U^\dagger - U D^\dagger U^\dagger U D U^\dagger \\ &= U D D^\dagger U^\dagger - U D^\dagger D U^\dagger \\ &= U D^\dagger D U^\dagger - U D^\dagger D U^\dagger \\ &= 0. \end{aligned}$$

よって,  $[M, M^\dagger] = 0$ .

次に左辺から右辺が成り立つことを示す. 任意の正規行列は適当なユニタリ-行列によって

上三角行列にできることから行列  $T$  を以下のように定義する.

$$T \equiv U^\dagger M U = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1N} \\ & t_{22} & \cdots & t_{2N} \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & t_{NN} \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

$$T^\dagger \equiv U^\dagger M^\dagger U = \begin{pmatrix} \bar{t}_{11} & & & 0 \\ \bar{t}_{12} & \bar{t}_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \bar{t}_{1N} & \bar{t}_{2N} & \cdots & \bar{t}_{NN} \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

ここで  $MM^\dagger = M^\dagger M$  であることを用いると

$$\begin{aligned} TT^\dagger - T^\dagger T &= U^\dagger M U U^\dagger M^\dagger U - U^\dagger M^\dagger U U^\dagger M U \\ &= U^\dagger M M^\dagger U - U^\dagger M^\dagger M U \\ &= U^\dagger M^\dagger M U - U^\dagger M^\dagger M U \\ &= 0 \end{aligned}$$

となる. つまり

$$TT^\dagger = T^\dagger T. \quad (4.4)$$

今,  $T_n$  ( $1 \leq n \leq N-1$ ) を次のような  $N \times N$  行列として定義する.

$$T_n \equiv \begin{pmatrix} t_{11} & 0 & & \cdots & & 0 \\ & t_{22} & & \cdots & & 0 \\ & & \ddots & & & \vdots \\ & & & t_{nn} & 0 & \cdots & 0 \\ & & & & t_{n+1n+1} & \cdots & t_{n+1N} \\ 0 & & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & & t_{NN} \end{pmatrix}. \quad (4.5)$$

つまり, 行列  $T_n$  の上三角の成分は

$$t_{ij} = 0, \quad \text{for } 1 \leq i \leq n, \quad i+1 \leq j \leq N \quad (4.6)$$

を満たしている. このような設定を考えると,  $T = T_{N-1}$  が成り立つことを示すことができ, 実は  $T$  が対角行列であることを証明できる. 以下では, この事実を数学的帰納法により証明す

る. まず,  $T = T_1$  が成立することを確認する. (4.2) と (4.3) を使い (4.4) の (1,1) 成分を比較すると

$$\sum_{j=1}^N |t_{1j}|^2 = |t_{11}|^2$$

$$\sum_{j=2}^N |t_{1j}|^2 = 0.$$

$|t_{1j}| \geq 0$  であることから

$$t_{1j} = 0 \quad \text{for } 2 \leq j \leq N \quad (4.7)$$

が成り立つ. よって  $T = T_1$ .

$T = T_n$  の成立を仮定する. (4.4) の  $(n+1, n+1)$  成分を比較することで

$$\sum_{j=n+1}^N |t_{n+1j}|^2 = \sum_{i=1}^{n+1} |t_{in+1}|^2$$

を得る. (4.6) より,  $1 \leq i \leq n$  に対して  $t_{in+1} = 0$  がいえる. よって

$$\sum_{j=n+1}^N |t_{n+1j}|^2 = |t_{n+1n+1}|^2$$

$$\sum_{j=n+2}^N |t_{n+1j}|^2 = 0$$

となり

$$t_{n+1j} = 0 \quad \text{for } n+2 \leq j \leq N. \quad (4.8)$$

(4.6) と (4.8) の結果から

$$t_{ij} = 0 \quad \text{for } 1 \leq i \leq n+1, \quad i+1 \leq j \leq N \quad (4.9)$$

が成り立つため  $T = T_{n+1}$  であることが示された. したがって  $T = T_{N-1}$  が成り立つ.  $T_{N-1}$  が対角行列であることに注意すると (4.2) は  $D = U^\dagger M U$  のように書くことができるので, 題意は示された. ■

定理 4.1 から,  $M = U D U^\dagger$  を正規行列の定義とすることができる.

## 4.2 分解の不変性

正規行列の分解  $M = UDU^\dagger$  は,  $U$  に対角ユニタリ行列  $V$  を右から掛ける変換に対して不変である. ここで,  $V$  を

$$V = \begin{pmatrix} v_1 & & 0 \\ & v_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & v_N \end{pmatrix}$$

とすると, ユニタリ行列であるという条件  $VV^\dagger = I$  から  $\{v_i\}_{i=1}^N$  は

$$|v_i|^2 = 1 \quad \text{for } i = 1, \dots, N \quad (4.10)$$

を満たす. (4.10) から, 一般に  $v_i = e^{\sqrt{-1}\theta_i}$  ( $1 \leq i \leq N$ ) とおくことができる. ここで対角行列の各成分を  $d_{ij} = (D)_{1 \leq i, j \leq N}$  とおくと

$$\begin{aligned} (UV)D(UV)^\dagger &= UVDV^\dagger U^\dagger \\ &= U \begin{pmatrix} e^{\sqrt{-1}\theta_1} & & 0 \\ & e^{\sqrt{-1}\theta_2} & \\ & & \ddots \\ 0 & & & e^{\sqrt{-1}\theta_N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & d_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & d_N \end{pmatrix} \\ &\quad \times \begin{pmatrix} e^{-\sqrt{-1}\theta_1} & & 0 \\ & e^{-\sqrt{-1}\theta_2} & \\ & & \ddots \\ 0 & & & e^{-\sqrt{-1}\theta_N} \end{pmatrix} U^\dagger \\ &= U \begin{pmatrix} e^{\sqrt{-1}\theta_1} d_1 e^{-\sqrt{-1}\theta_1} & & 0 \\ & e^{\sqrt{-1}\theta_2} d_2 e^{-\sqrt{-1}\theta_2} & \\ & & \ddots \\ 0 & & & e^{\sqrt{-1}\theta_N} d_N e^{-\sqrt{-1}\theta_N} \end{pmatrix} U^\dagger \\ &= UDU^\dagger = M. \end{aligned}$$

よって,  $U$  から  $UV$  への変換を行っても, 分解は不変である.

### 4.3 正規行列のパラメータ表示

$N = 2$  の場合に, 正規行列をいくつかのパラメータを用いて表現することを考える.  $M$  を  $2 \times 2$  の複素行列

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

とする.  $M$  が正規行列になるための条件は  $M^\dagger M = M M^\dagger$  が成り立つことなので, 具体的に計算を行うと以下の2つの条件式

$$|b|^2 = |c|^2 \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned} \bar{a}b + \bar{c}d &= a\bar{c} + b\bar{d} \\ \Leftrightarrow (\bar{a} - \bar{d})b &= (a - d)\bar{c} \end{aligned} \quad (4.12)$$

を満たす必要があることがわかる. この2つの条件, (4.11) と (4.12) を満たす表現の1つは

$$M = \begin{pmatrix} z & s(z-w) \\ \bar{s}(z-w) & w \end{pmatrix} \quad (4.13)$$

で与えられる. ただし  $z, w, s \in \mathbb{C}$  である. よって,  $2 \times 2$  の正規行列を表現するためには6つのパラメータが必要である. さらにこの正規行列の固有値は特性方程式を解くことで

$$\begin{vmatrix} z - \lambda & s(z-w) \\ \bar{s}(z-w) & w - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$\lambda = \frac{1}{2} \left( z + w \pm \sqrt{1 + 4|s|^2(z-w)} \right) \quad (4.14)$$

で与えられる.

### 4.4 ブラウン運動による動的拡張

$(B_j(t))_{j=1}^6, t \geq 0$  を独立同分布のブラウン運動であるとし

$$\begin{aligned} z(t) &= B_1(t) + \sqrt{-1}B_2(t) \\ w(t) &= B_3(t) + \sqrt{-1}B_4(t) \\ s(t) &= B_5(t) + \sqrt{-1}B_6(t) \end{aligned} \quad (4.15)$$

とする. すると, (4.14) は

$$\begin{aligned} \lambda_{\pm}((b_j(t))_{j=1}^6) &= \frac{1}{2} \left( b_1 + b_3 + \sqrt{-1}(b_2 + b_4) \right. \\ &\quad \left. \pm \sqrt{1 + 4(b_5^2 + b_6^2)} \left( b_1 - b_3 + \sqrt{-1}(b_2 - b_4) \right) \right) \end{aligned} \quad (4.16)$$

となる. ここで離散的伊藤の公式によると

$$d\lambda(B(t)) = \sum_{i=1}^6 \frac{\partial \lambda}{\partial b_i}(B(t)) dB_i(t) + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i, j \leq 6} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial b_i \partial b_j}(B(t)) d\langle B_i, B_j \rangle_t, \quad t \geq 0 \quad (4.17)$$

が成り立つ. (4.16) から

$$\frac{\partial \lambda_{\pm}}{\partial b_1} = \frac{1}{2} \left( 1 \pm \sqrt{1 + 4(b_5^2 + b_6^2)} \right), \quad (4.18)$$

$$\frac{\partial \lambda_{\pm}}{\partial b_2} = \frac{\sqrt{-1}}{2} \left( 1 \pm \sqrt{1 + 4(b_5^2 + b_6^2)} \right), \quad (4.19)$$

$$\frac{\partial \lambda_{\pm}}{\partial b_3} = \frac{1}{2} \left( 1 \mp \sqrt{1 + 4(b_5^2 + b_6^2)} \right) \quad (4.20)$$

$$\frac{\partial \lambda_{\pm}}{\partial b_4} = \frac{\sqrt{-1}}{2} \left( 1 \mp \sqrt{1 + 4(b_5^2 + b_6^2)} \right), \quad (4.21)$$

$$\frac{\partial \lambda_{\pm}}{\partial b_5} = \pm \frac{2b_5}{\sqrt{1 + 4(b_5^2 + b_6^2)}} \left( b_1 - b_3 + \sqrt{-1}(b_2 - b_4) \right), \quad (4.22)$$

$$\frac{\partial \lambda_{\pm}}{\partial b_6} = \pm \frac{2b_6}{\sqrt{1 + 4(b_5^2 + b_6^2)}} \left( b_1 - b_3 + \sqrt{-1}(b_2 - b_4) \right), \quad (4.23)$$

$$\frac{\partial^2 \lambda_{\pm}}{\partial b_j^2} = 0, \quad \text{for } 1 \leq j \leq 4, \quad (4.24)$$

$$\frac{\partial^2 \lambda_{\pm}}{\partial b_5^2} = \pm \frac{2(1 + 4b_6^2)}{(1 + 4(b_5^2 + b_6^2))^{3/2}} \left( b_1 - b_3 + \sqrt{-1}(b_2 - b_4) \right), \quad (4.25)$$

$$\frac{\partial^2 \lambda_{\pm}}{\partial b_6^2} = \pm \frac{2(1 + 4b_5^2)}{(1 + 4(b_5^2 + b_6^2))^{3/2}} \left( b_1 - b_3 + \sqrt{-1}(b_2 - b_4) \right), \quad (4.26)$$



であることを用いると, (4.17) より

$$\begin{aligned}
d\lambda_{\pm} = & \frac{1}{2} \left( 1 \pm \sqrt{1 + 4(b_5^2 + b_6^2)} \right) dB_1 + \frac{\sqrt{-1}}{2} \left( 1 \pm \sqrt{1 + 4(b_5^2 + b_6^2)} \right) dB_2 \\
& + \frac{1}{2} \left( 1 \mp \sqrt{1 + 4(b_5^2 + b_6^2)} \right) dB_3 + \frac{\sqrt{-1}}{2} \left( 1 \mp \sqrt{1 + 4(b_5^2 + b_6^2)} \right) dB_4 \\
& \pm \frac{2b_5}{\sqrt{1 + 4(b_5^2 + b_6^2)}} \left( b_1 - b_3 + \sqrt{-1}(b_2 - b_4) \right) dB_5 \\
& \pm \frac{2b_6}{\sqrt{1 + 4(b_5^2 + b_6^2)}} \left( b_1 - b_3 + \sqrt{-1}(b_2 - b_4) \right) dB_6 \\
& \pm \left[ \frac{(1 + 4b_6^2)}{(1 + 4(b_5^2 + b_6^2))^{3/2}} \left( b_1 - b_3 + \sqrt{-1}(b_2 - b_4) \right) \right. \\
& \left. + \frac{(1 + 4b_5^2)}{(1 + 4(b_5^2 + b_6^2))^{3/2}} \left( b_1 - b_3 + \sqrt{-1}(b_2 - b_4) \right) \right] dt
\end{aligned} \tag{4.27}$$

を得る. ただし  $\langle dB_i, dB_j \rangle_t = \delta_{ij} dt$  であることを用いた. ドリフト項を簡略化すると

$$\pm \frac{2 + 4|s|^2}{(1 + 4|s|^2)^{3/2}} (z - w) dt. \tag{4.28}$$

また

$$\lambda_+ - \lambda_- = \sqrt{1 + 4|s|^2} (z - w) \tag{4.29}$$

$$\lambda_+ + \lambda_- = z + w \tag{4.30}$$

が成り立つこともわかる.

## 4.5 特性方程式の解

$a \in \mathbb{R}_+ \equiv \{x | x > 0, x \in \mathbb{R}\}$  として

$$M = \begin{pmatrix} z & \frac{(z-w)s}{\sqrt{a}} \\ \frac{(z-w)\bar{s}}{\sqrt{a}} & w \end{pmatrix} \tag{4.31}$$

を考える. この行列の固有値を求めるためには以下の特性方程式

$$\begin{vmatrix} z - \lambda & \frac{(z-w)s}{\sqrt{a}} \\ \frac{(z-w)\bar{s}}{\sqrt{a}} & w - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

つまり,

$$a\lambda^2 - a(z+w)\lambda + azw - (z-w)^2|s|^2 = 0 \quad (4.32)$$

を解く必要がある. ここで (4.32) は, 係数が複素数である 2 次方程式のため, 実部と虚部に分けて考える必要がある.

$\alpha, \beta, z_r, z_i, w_r, w_i, s_r, s_i \in \mathbb{R}$  とし

$$\begin{aligned} \lambda &= \alpha + \sqrt{-1}\beta \\ z &= z_r + \sqrt{-1}z_i \\ w &= w_r + \sqrt{-1}w_i \\ s &= s_r + \sqrt{-1}s_i \end{aligned}$$

とおく. これらの変数を (4.32) に代入し実部と虚部に分けると, 2 つの式

$$\begin{aligned} a(\alpha - z_r)(\alpha - w_r) - a(\beta - z_i)(\beta - w_i) \\ - ((z_r - w_r)^2 - (z_i - w_i)^2)(s_r^2 + s_i^2) = 0, \end{aligned} \quad (4.33)$$

$$a(\alpha - z_r)(\beta - w_i) + a(\alpha - w_r)(\beta - z_i) - 2(z_r - w_r)(z_i - w_i)(s_r^2 + s_i^2) = 0 \quad (4.34)$$

を得る. 固有値  $\lambda$  を求めるには  $\alpha, \beta$  を求めることができればよい. そこで (4.33) を  $\alpha$  に関する 2 次方程式として解くと

$$\alpha_{\pm} = \frac{1}{2} \left\{ z_r + w_r \pm \frac{\sqrt{D}}{\sqrt{a}} \right\} \quad (4.35)$$

を得る. ただし

$$D = 4a(\beta - z_i)(\beta - w_i) + (a + 4|s|^2)(z_r - w_r)^2 - 4|s|^2(z_i - w_i)^2$$

とした. まず初めに,  $\alpha = \alpha_+$  の場合を考える. (4.34) に  $\alpha_+$  を代入すると,  $\beta$  に関して閉じた方程式

$$\sqrt{a}(2\beta - z_i - w_i)\sqrt{D} = (a + 4|s|^2)(z_r - w_r)(z_i - w_i) \quad (4.36)$$

が得られる. (4.36) の両辺を 2 乗し整理した式は,  $\beta$  について因数分解を行うことができ

$$\begin{aligned} 4(a\beta^2 - a(z_i + w_i)\beta + az_iw_i - (z_i - w_i)^2|s|^2) \\ \times (4a\beta^2 - 4a(z_i + w_i)\beta + (a + 4|s|^2)(z_r - w_r)^2 + a(z_i + w_i)^2) = 0 \end{aligned}$$

となる. これより4つの解は

$$\beta_{\pm} = \frac{1}{2} \left( z_i + w_i \pm \frac{\sqrt{a+4|s|^2}}{\sqrt{a}} |z_i - w_i| \right), \quad (4.37)$$

$$\beta'_{\pm} = \frac{1}{2} \left( z_i + w_i \pm \sqrt{-1} \frac{\sqrt{a+4|s|^2}}{\sqrt{a}} |z_r - w_r| \right). \quad (4.38)$$

しかし,  $\beta$  は実数であることに注意すると  $\beta_{\pm}$  が適切な解である.

ここからは,  $\beta_{\pm}$  が (4.36) を満たす解となっていることを確認する. (4.36) に  $\beta_{+}$  を代入すると

$$(a+4|s|^2) \{ (z_r - w_r)(z_i - w_i) - |z_r - w_r| |z_i - w_i| \} = 0. \quad (4.39)$$

一方で,  $\beta_{-}$  を代入すると

$$(a+4|s|^2) \{ (z_r - w_r)(z_i - w_i) + |z_r - w_r| |z_i - w_i| \} = 0. \quad (4.40)$$

$a+4|s|^2 > 0$  であるため, 等式を確認するためには以下の4つの場合を考えればよい.

(i)  $z_r - w_r > 0$  かつ  $z_i - w_i > 0$  の場合

この場合, (4.39) は成立するが (4.40) は成立しない. よって,

$$\beta_{+} = \frac{1}{2} \left( z_i + w_i + \frac{\sqrt{a+4|s|^2}}{\sqrt{a}} (z_i - w_i) \right) \equiv \beta_1$$

が適切な解となり, (4.35) より

$$\begin{aligned} \alpha_{+} &= \frac{1}{2} \left( z_r + w_r + \frac{\sqrt{a+4|s|^2}}{\sqrt{a}} |z_r - w_r| \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( z_r + w_r + \frac{\sqrt{a+4|s|^2}}{\sqrt{a}} (z_r - w_r) \right) \equiv \alpha_1. \end{aligned}$$

ゆえに,

$$(\alpha, \beta) = (\alpha_1, \beta_1). \quad (4.41)$$

他の場合も, (i) と同様の方法で適切な解を求めることができる.

(ii)  $z_r - w_r < 0$  かつ  $z_i - w_i < 0$  の場合

$$\begin{aligned} (\alpha, \beta) = (\alpha_2, \beta_2) &\equiv \left( \frac{1}{2} \left( z_r + w_r - \frac{\sqrt{a+4|s|^2}}{\sqrt{a}} (z_r - w_r) \right), \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{2} \left( z_i + w_i - \frac{\sqrt{a+4|s|^2}}{\sqrt{a}} (z_i - w_i) \right) \right). \end{aligned} \quad (4.42)$$

(iii)  $z_r - w_r > 0$  かつ  $z_i - w_i < 0$  の場合

$$(\alpha, \beta) = (\alpha_1, \beta_1). \quad (4.43)$$

(iv)  $z_r - w_r < 0$  かつ  $z_i - w_i > 0$  の場合

$$(\alpha, \beta) = (\alpha_2, \beta_2). \quad (4.44)$$

(i) から (iv) の結果から,  $\alpha$  と  $\beta$  の組み合わせは 2 パターンしか存在しないことが分かるため, これに応じて 2 つの固有値が解として存在する.  $\lambda = \alpha + \sqrt{-1}\beta$  であったので (4.41) と (4.43) から

$$\begin{aligned} \lambda &= \alpha_1 + \sqrt{-1}\beta_1 \\ &= \frac{1}{2} \left( z + w + \frac{\sqrt{a + 4|s|^2}(z - w)}{\sqrt{a}} \right). \end{aligned}$$

(4.42) と (4.44) からは

$$\begin{aligned} \lambda &= \alpha_2 + \sqrt{-1}\beta_2 \\ &= \frac{1}{2} \left( z + w - \frac{\sqrt{a + 4|s|^2}(z - w)}{\sqrt{a}} \right). \end{aligned}$$

$\alpha = \alpha_-$  の場合でも同様の議論を行うとまったく同じ 2 つの固有値が導かれる. 結果として (4.32) の解は

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2} \left( z + w \pm \frac{\sqrt{a + 4|s|^2}(z - w)}{\sqrt{a}} \right). \quad (4.45)$$

また, 固有値の差を計算すると

$$\lambda_+ - \lambda_- = \frac{(z - w)\sqrt{a + 4|s|^2}}{\sqrt{a}}. \quad (4.46)$$

## 4.6 パラメータの入った固有値の確率微分方程式

(4.15) のように,  $z, w, s$  を複素ブラウン運動とし, 離散的伊藤の公式

$$d\lambda(B(t)) = \sum_{i=1}^6 \frac{\partial \lambda}{\partial b_i}(B(t)) dB_i(t) + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i, j \leq 6} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial b_i \partial b_j}(B(t)) d\langle B_i, B_j \rangle_t \quad t \geq 0,$$

を (4.45) に適用すると

$$d\lambda_+ = dM_1(t) + dJ_1(t) \quad (4.47)$$

$$d\lambda_- = dM_2(t) + dJ_2(t) \quad t \geq 0, \quad (4.48)$$

ただし

$$\begin{aligned} dM_1(t) = & \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\sqrt{a+4(b_5^2+b_6^2)}}{\sqrt{a}} \right) db_1 + \frac{\sqrt{-1}}{2} \left( 1 + \frac{\sqrt{a+4(b_5^2+b_6^2)}}{\sqrt{a}} \right) db_2 \\ & + \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\sqrt{a+4(b_5^2+b_6^2)}}{\sqrt{a}} \right) db_3 + \frac{\sqrt{-1}}{2} \left( 1 - \frac{\sqrt{a+4(b_5^2+b_6^2)}}{\sqrt{a}} \right) db_4 \\ & + \frac{2b_5(b_1-b_3+\sqrt{-1}(b_2-b_4))}{\sqrt{a}\sqrt{a+4(b_5^2+b_6^2)}} db_5 \\ & + \frac{2b_6(b_1-b_3+\sqrt{-1}(b_2-b_4))}{\sqrt{a}\sqrt{a+4(b_5^2+b_6^2)}} db_6, \end{aligned} \quad (4.49)$$

$$\begin{aligned} dM_2(t) = & \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\sqrt{a+4(b_5^2+b_6^2)}}{\sqrt{a}} \right) db_1 + \frac{\sqrt{-1}}{2} \left( 1 - \frac{\sqrt{a+4(b_5^2+b_6^2)}}{\sqrt{a}} \right) db_2 \\ & + \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\sqrt{a+4(b_5^2+b_6^2)}}{\sqrt{a}} \right) db_3 + \frac{\sqrt{-1}}{2} \left( 1 + \frac{\sqrt{a+4(b_5^2+b_6^2)}}{\sqrt{a}} \right) db_4 \\ & - \frac{2b_5(b_1-b_3+\sqrt{-1}(b_2-b_4))}{\sqrt{a}\sqrt{a+4(b_5^2+b_6^2)}} db_5 \\ & - \frac{2b_6(b_1-b_3+\sqrt{-1}(b_2-b_4))}{\sqrt{a}\sqrt{a+4(b_5^2+b_6^2)}} db_6, \end{aligned} \quad (4.50)$$

$$dJ_1(t) = \frac{2(a+2|s|^2)}{\sqrt{a}(a+4|s|^2)^{3/2}} (z-w) dt, \quad (4.51)$$

$$dJ_2(t) = -\frac{2(a+2|s|^2)}{\sqrt{a}(a+4|s|^2)^{3/2}} (z-w) dt \quad (4.52)$$

と書ける. ここで,  $dM_1^r, dM_1^i, dM_2^r, dM_2^i \in \mathbb{R}$  として

$$dM_1(t) = dM_1^r(t) + \sqrt{-1}dM_1^i(t), \quad (4.53)$$

$$dM_2(t) = dM_2^r(t) + \sqrt{-1}dM_2^i(t) \quad (4.54)$$

と定義する. (4.49) と (4.50) から実部と虚部はそれぞれ

$$\begin{aligned} dM_1^r &= \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\sqrt{a+4|s|^2}}{\sqrt{a}} \right) db_1 + \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\sqrt{a+4|s|^2}}{\sqrt{a}} \right) db_3 \\ &\quad + \frac{2b_5}{\sqrt{a}\sqrt{a+4|s|^2}} (b_1 - b_3) db_5 + \frac{2b_6}{\sqrt{a}\sqrt{a+4|s|^2}} (b_1 - b_3) db_6, \end{aligned} \quad (4.55)$$

$$\begin{aligned} dM_1^i &= \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\sqrt{a+4|s|^2}}{\sqrt{a}} \right) db_2 + \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\sqrt{a+4|s|^2}}{\sqrt{a}} \right) db_4 \\ &\quad + \frac{2b_5}{\sqrt{a}\sqrt{a+4|s|^2}} (b_2 - b_4) db_5 + \frac{2b_6}{\sqrt{a}\sqrt{a+4|s|^2}} (b_2 - b_4) db_6, \end{aligned} \quad (4.56)$$

$$\begin{aligned} dM_2^r &= \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\sqrt{a+4|s|^2}}{\sqrt{a}} \right) db_1 + \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\sqrt{a+4|s|^2}}{\sqrt{a}} \right) db_3 \\ &\quad - \frac{2b_5}{\sqrt{a}\sqrt{a+4|s|^2}} (b_1 - b_3) db_5 - \frac{2b_6}{\sqrt{a}\sqrt{a+4|s|^2}} (b_1 - b_3) db_6, \end{aligned} \quad (4.57)$$

$$\begin{aligned} dM_2^i &= \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\sqrt{a+4|s|^2}}{\sqrt{a}} \right) db_2 + \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\sqrt{a+4|s|^2}}{\sqrt{a}} \right) db_4 \\ &\quad - \frac{2b_5}{\sqrt{a}\sqrt{a+4|s|^2}} (b_2 - b_4) db_5 - \frac{2b_6}{\sqrt{a}\sqrt{a+4|s|^2}} (b_2 - b_4) db_6. \end{aligned} \quad (4.58)$$

$(b_j(t))_{j=1}^6$  は互いに独立なので

$$\begin{aligned} \langle dM_1^r, dM_1^r \rangle_t &= \langle dM_2^r, dM_2^r \rangle_t \\ &= \left\{ \frac{1}{4} \left( 1 + \frac{a+4|s|^2}{a} \right) + \frac{4|s|^2}{a(a+4|s|^2)} (b_1 - b_3)^2 \right\} dt, \end{aligned} \quad (4.59)$$

$$\begin{aligned} \langle dM_1^i, dM_1^i \rangle_t &= \langle dM_2^i, dM_2^i \rangle_t \\ &= \left\{ \frac{1}{4} \left( 1 + \frac{a+4|s|^2}{a} \right) + \frac{4|s|^2}{a(a+4|s|^2)} (b_2 - b_4)^2 \right\} dt, \end{aligned} \quad (4.60)$$

$$\langle dM_1^r, dM_1^i \rangle_t = \langle dM_2^r, dM_2^i \rangle_t = \frac{4|s|^2}{a(a+4|s|^2)} (b_1 - b_3)(b_2 - b_4) dt, \quad (4.61)$$

$$\langle dM_1^r, dM_2^r \rangle_t = -\frac{2|s|^2}{a} \left\{ 1 + \frac{2(b_1 - b_3)^2}{a+4|s|^2} \right\} dt, \quad (4.62)$$

$$\langle dM_1^i, dM_2^i \rangle_t = -\frac{2|s|^2}{a} \left\{ 1 + \frac{2(b_2 - b_4)^2}{a + 4|s|^2} \right\} dt, \quad (4.63)$$

$$\langle dM_1^r, dM_2^i \rangle_t = \langle dM_1^i, dM_2^r \rangle_t = -\frac{4|s|^2}{a(a + 4|s|^2)} (b_1 - b_3)(b_2 - b_4) dt. \quad (4.64)$$

(4.59)-(4.61) の 2 次変分を使うと

$$\begin{aligned} \langle dM_1, dM_1 \rangle_t &= \left\langle dM_1^r + \sqrt{-1}dM_1^i, dM_1^r + \sqrt{-1}dM_1^i \right\rangle_t \\ &= \langle dM_1^r, dM_1^r \rangle_t - \langle dM_1^i, dM_1^i \rangle_t + 2\sqrt{-1} \langle dM_1^r, dM_1^i \rangle_t \\ &= \frac{4|s|^2}{a(a + 4|s|^2)} \left\{ (b_1 - b_3)^2 + 2\sqrt{-1}(b_1 - b_3)(b_2 - b_4) - (b_2 - b_4)^2 \right\} dt \\ &= \frac{4|s|^2}{a(a + 4|s|^2)} \left( (b_1 - b_3) + \sqrt{-1}(b_2 - b_4) \right)^2 dt \\ &= \frac{4|s|^2}{a(a + 4|s|^2)} (z - w)^2 dt. \end{aligned} \quad (4.65)$$

また  $\langle dM_2, dM_2 \rangle_t = \langle dM_1, dM_1 \rangle_t$ . 同様に, (4.62)-(4.64) の 2 次変分を使うことで

$$\langle dM_1, dM_2 \rangle_t = -\frac{4|s|^2}{a(a + 4|s|^2)} (z - w)^2 dt. \quad (4.66)$$

ここで

$$X(t) = \lambda_+(t) - \lambda_-(t)$$

を考える. また,  $X^r(t), X^i(t) \in \mathbb{R}$  として

$$X(t) = X^r(t) + \sqrt{-1}X^i(t)$$

とおく. このとき

$$\begin{aligned} dX^r(t) &= dM_1^r(t) - dM_2^r(t) + dJ_1^r(t) - dJ_2^r(t) \\ &= \frac{\sqrt{a + 4|s|^2}}{\sqrt{a}} db_1 - \frac{\sqrt{a + 4|s|^2}}{\sqrt{a}} db_3 \\ &\quad + \frac{4b_5}{\sqrt{a}\sqrt{a + 4|s|^2}} (b_1 - b_3) db_5 + \frac{4b_6}{\sqrt{a}\sqrt{a + 4|s|^2}} (b_1 - b_3) db_6 \\ &\quad + \frac{4(a + 2|s|^2)}{\sqrt{a}(a + 4|s|^2)^{3/2}} (b_1 - b_3) dt, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
dX^i(t) &= dM_1^i(t) - dM_2^i(t) + dJ_1^i(t) - dJ_2^i(t) \\
&= \frac{\sqrt{a+4|s|^2}}{\sqrt{a}} db_2 - \frac{\sqrt{a+4|s|^2}}{\sqrt{a}} db_4 \\
&\quad + \frac{4b_5}{\sqrt{a}\sqrt{a+4|s|^2}} (b_2 - b_4) db_5 + \frac{4b_6}{\sqrt{a}\sqrt{a+4|s|^2}} (b_2 - b_4) db_6 \\
&\quad + \frac{4(a+2|s|^2)}{\sqrt{a}(a+4|s|^2)^{3/2}} (b_2 - b_4) dt.
\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}
dX(t) &= \frac{\sqrt{a+4|s|^2}}{\sqrt{a}} db_1 + \sqrt{-1} \frac{\sqrt{a+4|s|^2}}{\sqrt{a}} db_2 \\
&\quad - \frac{\sqrt{a+4|s|^2}}{\sqrt{a}} db_3 - \sqrt{-1} \frac{\sqrt{a+4|s|^2}}{\sqrt{a}} db_4 \\
&\quad + \frac{4b_5}{\sqrt{a}\sqrt{a+4|s|^2}} (z-w) db_5 + \frac{4b_6}{\sqrt{a}\sqrt{a+4|s|^2}} (z-w) db_6 \\
&\quad + \frac{4(a+2|s|^2)}{\sqrt{a}(a+4|s|^2)^{3/2}} (z-w) dt.
\end{aligned} \tag{4.67}$$

$N^r(t), N^i(t) \in \mathbb{R}$  として

$$\begin{aligned}
N(t) &= M_1(t) - M_2(t), \\
N(t) &= N^r(t) + \sqrt{-1} N^i(t)
\end{aligned}$$

とおくと,  $N^r(t), N^i(t)$  の2次変分は

$$\langle dN^r(t), dN^r(t) \rangle_t = \left\{ \frac{2(a+4|s|^2)}{a} + \frac{16|s|^2}{a(a+4|s|^2)} (b_1 - b_3)^2 \right\} dt,$$

$$\langle dN^i(t), dN^i(t) \rangle_t = \left\{ \frac{2(a+4|s|^2)}{a} + \frac{16|s|^2}{a(a+4|s|^2)} (b_2 - b_4)^2 \right\} dt,$$

$$\langle dN^r(t), dN^i(t) \rangle_t = \frac{16|s|^2}{a(a+4|s|^2)} (b_1 - b_3)(b_2 - b_4) dt.$$

よって

$$\langle dN(t), dN(t) \rangle_t = \frac{16|s|^2}{a(a+4|s|^2)} (z-w)^2 dt. \tag{4.68}$$



## 5 謝辞

本研究を行うにあたって多くの方々のご協力をいただいたことに対し、感謝の意を表す。中央大学大学院理工学研究科物理学専攻教授の香取眞理先生には、指導教官として多くの研究課題に取り組む機会を与えてくださり丁寧かつ親身になってご指導いただいた。ここにその深謝の意を表す。

また、同専攻の助教, Sergio Andraus 先生には平素から研究に行き詰った際に的確な助言をいただき、さらには計算機の使い方についてもお力添えいただいた。Andraus 先生との議論は、非常に刺激的であり多くのことを学ぶことができた。ここに、深謝の意を表す。

この他にも、活発な議論の場を提供してくれた香取研究室のメンバーや友人、日々の生活を支えてくださった家族に、心より感謝の意を表す。

## 参考文献

- [1] Baba, H., Katori, M.:  
Excursion Processes Associated with Elliptic Combinatorics. *J. Stat. Phys.* **171** (2018), 1035-1066
- [2] Charalambides, C. A.:  
*Discrete q-Distributions*. Wiley, Hoboken (2016)
- [3] Chau, L.-L., Zaboronsky, O.: On the Structure of Correlation Functions in the Normal Matrix Model. *Commun. Math. Phys.* **196** (1998), 203-247
- [4] Katori, M.:  
Determinantal Martingales and Correlations of Noncolliding Random Walks. *J. Stat. Phys.* **159** (2015), 21-42
- [5] Schlosser, M.:  
Elliptic enumeration of nonintersecting lattice paths. *J. Combin. Theory Ser. A* **114** (2007), 505-521