2016 年度 修士論文

2 次元量子ウォークのボソン・フェルミオン模型
Bosonic and Fermionic Models of Two-Dimensional Quantum Walks

中央大学大学院 理工学研究科

博士課程前期課程 物理学専攻

星谷 友之

目 次

第 1 章　序論 **4**

1.1　1 次元量子ウォークと極限定理 4

1.2　フーリエ解析法 10

第 2 章　本論 **15**

2.1　方法 15

2.2　計算及び結果 21

第 3 章　結論 **41**

3.1　結果のまとめ 41

3.2　考察 45

謝辞

香取眞理教授には，研究発表や論文執筆に関する基礎的な技術から，統計物理・数理物理の研究に対する発展的なアプローチに至るまで，多岐に渡りご指導を戴きました．深謝申し上げます．杉本秀彦教授と中村真教授には本論文の副査をしていただきました．感謝申し上げます．また，香取研究室の Andraus Sergio 助教，脇田順一准教授や脇田研究室の本田良二郎さんにもお世話になりました．ありがとうございました．最後に，いつも支えてくれた家族に感謝致します．

はじめに

量子ウォークとは，古典ランダムウォークに対する量子力学的な拡張である [1, 2, 3]．両者の興味深い対比として，古典ランダムウォークの事象は一本一本の経路として独立に考えられたが，量子ウォークでは量子性による重ね合わせが生じるためにそれが不可能となることが挙げられる．それゆえ量子ウォークは，古典ランダムウォークでは見られない不思議な性質を持つことになる．

量子ウォークに関する研究の中心的な課題として，長時間極限における極限分布の導出がある．1 次元量子ウォークの極限分布は一般的に，古典ランダムウォークにおける正規分布とは形が全く異なる確率密度関数によって表されるということが，組み合わせ論的な手法 [4, 5] やフーリエ解析法 [6] によって示されている．また 2 次元量子ウォークでは，特殊な条件を課した模型について極限分布が提示されている [7]．

そこで本論文では，[7] とは異なる新しいタイプの 2 次元量子ウォーク模型の極限分布の導出について議論する．x 方向と y 方向に，互いに独立な 1 次元量子ウォークをそれぞれ一つずつ用意し，それらの確率振幅ベクトルの成分を組み合わせることで 2 次元量子ウォークの確率振幅を作る．その際にボソンとフェルミオンという 2 種類の組み合わせを考える．それが本論文の題目「2 次元量子ウォークのボソン・フェルミオン模型」が名付けられた所以である．そして，それぞれの模型について [6] の手法を応用して結合モーメントを計算する．その結果として導き出された極限分布の特徴を報告することが本論文の目的である．

本論文は以下のように構成されている．第 1 章の序論では，既に知られている一般的な 1 次元量子ウォークの性質と，主要な解析法であるフーリエ解析法を紹介する．第 2 章の本論では，新しい 2 次元量子ウォーク模型を具体的に構成し，確率密度関数を導出する計算過程を述べる．第 3 章の結論では，計算から得られた極限分布を表す確率密度関数を考察する．

第1章　序論

1.1　1次元量子ウォークと極限定理

量子ウォークの標準的な模型は，1次元格子上の離散時間量子ウォークである [1, 2]．最初に空間と時間を離散化する．

$$x \in \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}, \quad t \in \{0, 1, 2, \dots\}.$$

格子上には量子ウォーカーが1人だけ存在するが，量子力学における不確定性原理のため，各時刻での位置を確定することはできない．そこで，存在確率を考えることになる．時刻 t で格子点 x に量子ウォーカーが存在する確率振幅を

$$\boldsymbol{\psi}(x,t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x,t) \\ \varphi_2(x,t) \end{pmatrix} = \varphi_1(x,t) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \varphi_2(x,t) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 \tag{1.1}$$

で与える．このように確率振幅は，$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 及び $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ という2つの状態の重ね合わせとして表される．確率振幅の2乗ノルム

$$\|\boldsymbol{\psi}(x,t)\|^2 = |\varphi_1(x,t)|^2 + |\varphi_2(x,t)|^2 \tag{1.2}$$

は存在確率を与える．当然，存在確率は各時刻 t において規格化される．

$$\sum_{x=-\infty}^{\infty} \|\boldsymbol{\psi}(x,t)\|^2 = 1.$$

初期時刻 $t=0$ での量子ウォーカーの位置は原点とする．この初期状態を与える確率振幅は，量子ウォーカーが存在する原点に単位ベクトル $\boldsymbol{\phi}$ を置き，それ以外の位置には零ベクトルを置くことよって

$$\boldsymbol{\psi}(x,0) = \begin{cases} \boldsymbol{\phi} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \ |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1,\ \alpha, \beta \in \mathbb{C} & x = 0, \\ \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} & x \neq 0 \end{cases} \tag{1.3}$$

のように表す．単位ベクトル $\boldsymbol{\phi}$ を $t=0$ における量子ビットとよぶ．

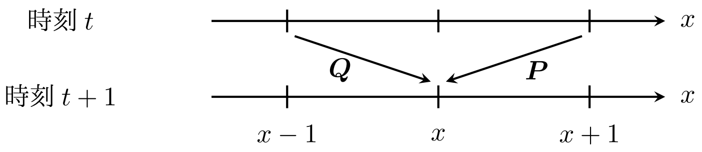


図 1.1: 一つ前の時刻の左右からの寄与を足し合わせる．

古典的な 1 次元最近接ランダムウォークでは左格子点に移動する確率を p，右格子点に移動する確率を $q=1-p$ とおくが，量子ウォークではこれらの代わりに 2×2 行列 $\boldsymbol{P}$，$\boldsymbol{Q}$ を考える．

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{pmatrix}, \quad a,b,c,d\in\mathbb{C}. \tag{1.4}$$

そして，$\boldsymbol{U}=\boldsymbol{P}+\boldsymbol{Q}$ を量子コインとよぶ．但し，$\boldsymbol{U}$ は 2×2 のユニタリ行列となるものとする．

$$\boldsymbol{U}=\boldsymbol{P}+\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in\boldsymbol{U}(2). \tag{1.5}$$

ここで，$\boldsymbol{U}(2)$ は 2×2 ユニタリ行列全体の集合を表す．これらの $\boldsymbol{P}$ と $\boldsymbol{Q}$ を用いて，全ての格子点 $x\in\{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\}$ 上において漸化式

$$\boldsymbol{\psi}(x,t+1)=\boldsymbol{Q}\,\boldsymbol{\psi}(x-1,t)+\boldsymbol{P}\,\boldsymbol{\psi}(x+1,t) \tag{1.6}$$

に従って，確率振幅を時間発展させていく．図 1.1 に (1.6) を図示した．また，$\Xi(x,t)$ という 2×2 行列を考える．この行列は，時間 t の間に原点から位置 x に至る量子ウォーカーの経路の重ね合わせを，$\boldsymbol{P}$ と $\boldsymbol{Q}$ の積の和を用いて表したものである．先程出てきた初期の量子ビット $\boldsymbol{\phi}$ に対し，この $\Xi(x,t)$ を掛けると，時空点 (x,t) における確率振幅 $\boldsymbol{\psi}(x,t)$ が求まる．ゆえに量子ウォーカーの時刻 t における格子点 x での存在確率は

$$\|\boldsymbol{\psi}(x,t)\|^2=\|\Xi(x,t)\boldsymbol{\phi}\|^2 \tag{1.7}$$

で与えられることになる．

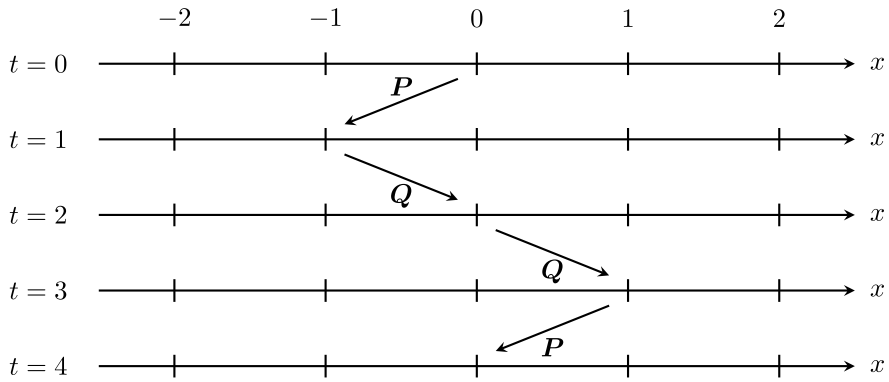


図 1.2: $t=0$ から $t=4$ に向かって $\boldsymbol{PQQP}=\boldsymbol{PQ}^2\boldsymbol{P}$.

以下，具体例として，初期の量子ビットが $\boldsymbol{\phi}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{\mathbf{i}}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$，量子コインが $\boldsymbol{U}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$ で与えられたときの，$t=4$，$x=0$ における量子ウォーカーの存在確率を計算してみることにする．但しここで，$\mathbf{i}$ は虚数単位を表すものとする．時間 $t=4$ の間に原点から原点に至る経路は，$\boldsymbol{P}^2\boldsymbol{Q}^2$，$\boldsymbol{PQPQ}$，$\boldsymbol{PQ}^2\boldsymbol{P}$，$\boldsymbol{QP}^2\boldsymbol{Q}$，$\boldsymbol{QPQP}$，$\boldsymbol{Q}^2\boldsymbol{P}^2$ の 6 種類がある．図 1.2 はその内の 1 つである $\boldsymbol{PQQP}$ を示している．ゆえに経路の重ね合わせ $\Xi(0,4)$ は

$$\Xi(0,4)=\boldsymbol{P}^2\boldsymbol{Q}^2+\boldsymbol{PQPQ}+\boldsymbol{PQ}^2\boldsymbol{P}+\boldsymbol{QP}^2\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{QPQP}+\boldsymbol{Q}^2\boldsymbol{P}^2 \tag{1.8}$$

となる．ここに行列の非可換性 $\boldsymbol{PQ}\neq\boldsymbol{QP}$ が現れることが特徴である．(1.7)，(1.8) より

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{\psi}(0,4)\|^2&=\|\boldsymbol{\Xi}(0,4)\boldsymbol{\phi}\|^2\\&=\left\|\left(\boldsymbol{P}^2\boldsymbol{Q}^2+\boldsymbol{PQPQ}+\boldsymbol{PQ}^2\boldsymbol{P}+\boldsymbol{QP}^2\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{QPQP}+\boldsymbol{Q}^2\boldsymbol{P}^2\right)\boldsymbol{\phi}\right\|^2\end{aligned} \tag{1.9}$$

である．具体的に $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & 0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\phi}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{\mathbf{i}}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$ を代入

することにより

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{\psi}(0,4)\|^2 &= \left\| \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{\mathbf{i}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right\|^2 \\ &= \left\| \frac{1}{4\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1-\mathbf{i} \\ 1-\mathbf{i} \end{pmatrix} \right\|^2 \\ &= \left| \frac{-1-\mathbf{i}}{4\sqrt{2}} \right|^2 + \left| \frac{1-\mathbf{i}}{4\sqrt{2}} \right|^2 \\ &= \frac{2}{16}\end{aligned} \tag{1.10}$$

と計算される．これが時刻 $t=4$ における原点 $x=0$ での量子ウォーカーの存在確率である．仮に (1.9) において一本一本の経路の出現確率を先に計算し，最後に足し合わせて存在確率を求めようとすると

$$\begin{aligned}&\|\boldsymbol{P}^2\boldsymbol{Q}^2\boldsymbol{\phi}\|^2 + \|\boldsymbol{PQPQ\phi}\|^2 + \|\boldsymbol{PQ}^2\boldsymbol{P\phi}\|^2 \\ &+ \|\boldsymbol{QP}^2\boldsymbol{Q\phi}\|^2 + \|\boldsymbol{QPQP\phi}\|^2 + \|\boldsymbol{Q}^2\boldsymbol{P}^2\boldsymbol{\phi}\|^2 \\ &= \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} \\ &= \frac{6}{16} \\ &\neq \frac{2}{16}\end{aligned} \tag{1.11}$$

となる．すなわち量子ウォークでは量子性による重ね合わせが生じるために，古典ランダムウォークのように一本一本の経路の出現確率を独立に考えて計算することはできないということを意味する．

$\boldsymbol{\phi} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{\mathbf{i}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ 及び $\boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ の場合の量子ウォークは，左右対称な古典ランダムウォーク $\left(p=q=\dfrac{1}{2}\text{の場合}\right)$ に対応することが知られているが [1, 2]，表 1.1 と表 1.2 を見比べると $t=4$ を境に，両者で異なる値をとるようになることがわかる．図 1.3 に示したように，経路の重ね合わせのために原点付近における量子ウォーカーの存在確率は古典ランダムウォークの場合に比べて低くなり，その確率分布は複雑に振動することがわかる．

表 1.1: 古典ランダムウォークの確率分布表.

$t \backslash x$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0
2	0	0	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{2}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	0	0	0
3	0	0	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{3}{8}$	0	$\frac{3}{8}$	0	$\frac{1}{8}$	0	0
4	0	$\frac{1}{16}$	0	$\frac{4}{16}$	0	$\frac{6}{16}$	0	$\frac{4}{16}$	0	$\frac{1}{16}$	0
5	$\frac{1}{32}$	0	$\frac{5}{32}$	0	$\frac{10}{32}$	0	$\frac{10}{32}$	0	$\frac{5}{32}$	0	$\frac{1}{32}$

表 1.2: 量子ウォークの確率分布表.

$t \backslash x$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0
2	0	0	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{2}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	0	0	0
3	0	0	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{3}{8}$	0	$\frac{3}{8}$	0	$\frac{1}{8}$	0	0
4	0	$\frac{1}{16}$	0	$\frac{6}{16}$	0	$\frac{2}{16}$	0	$\frac{6}{16}$	0	$\frac{1}{16}$	0
5	$\frac{1}{32}$	0	$\frac{11}{32}$	0	$\frac{4}{32}$	0	$\frac{4}{32}$	0	$\frac{11}{32}$	0	$\frac{1}{32}$

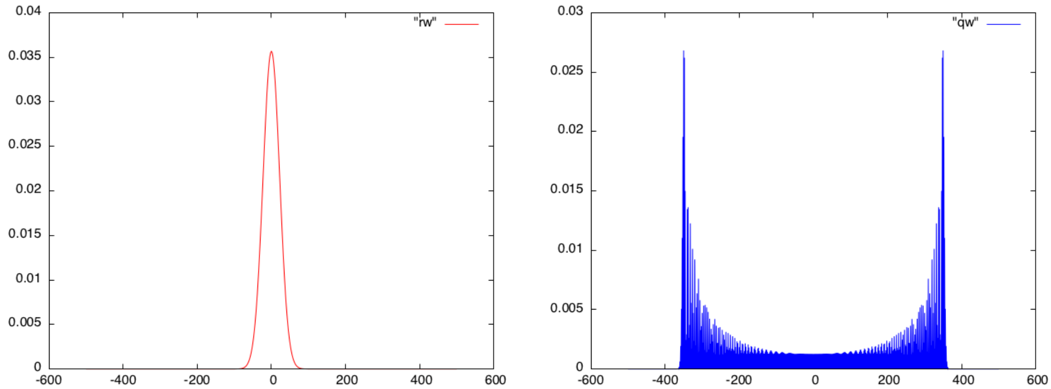


図 1.3: $t = 500$ における確率分布の比較．左が古典ランダムウォーク，右が量子ウォーク．

時刻 t における量子ウォーカーの位置を $X(t)$ とすると，$\dfrac{X(t)}{t}$ で定義される量子ウォーカーの擬速度の分布は長時間極限 $t \to \infty$ でモーメント収束することが，今野によって示されている [4, 5].

$$\lim_{t\to\infty} \left\langle \left(\frac{X(t)}{t} \right)^{\alpha} \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}v\, v^{\alpha} f(v), \qquad \alpha \in \{0, 1, 2, \ldots\}. \tag{1.12}$$

なお $f(v)$ は

$$\mu(v; s) = \frac{\sqrt{1-s^2}}{\pi(1-v^2)\sqrt{s^2-v^2}} \mathbb{1}\left(|v| < |s|\right), \qquad 0 < s < 1, \tag{1.13}$$

$$\mathcal{I}(v; a, b; \alpha, \beta) = 1 - \left(|\alpha|^2 - |\beta|^2 + \frac{ab^*\alpha\beta^* + a^*b\alpha^*\beta}{|a|^2} \right) v \tag{1.14}$$

を用いて

$$f(v) = \mu(v; |a|)\, \mathcal{I}(v; a, b; \alpha, \beta) \tag{1.15}$$

と表される．但し，$*$ は複素共役を表し，また

$$\mathbb{1}(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega\text{がみたされる場合}, \\ 0, & \text{それ以外の場合} \end{cases}$$

によって指示関数を定義した．すなわち 1 次元格子上の離散時間量子ウォークの極限分布は，(1.13)–(1.15) で定められる確率密度関数 $f(v)$ で与えられる．特に $\boldsymbol{\phi} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{\mathbf{i}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ の場合の量子ウォークの確率密度関数を $K(v)$ とすると，この場合には $\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$\beta = \dfrac{\mathbf{i}}{\sqrt{2}}$，$a = b = c = -d = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ であるから，$s = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$\mathcal{I}(v; a, b; \alpha, \beta) = 1$ となり

$$K(v) = \frac{1}{\pi(1-v^2)\sqrt{1-2v^2}} \mathbb{1}\left(|v| < \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \tag{1.16}$$

と定まる．これを発見者の名前にちなんで今野関数とよぶことにする．図 1.4 にそのグラフを示した．

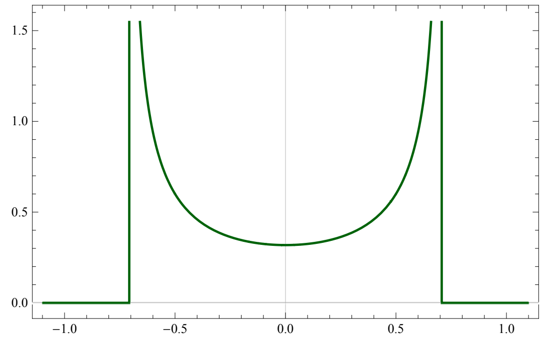


図 1.4: $K(v)$ のグラフ．

1.2 フーリエ解析法

1 次元量子ウォークに対する主要な解析法の一つとして，[6] に基づくフーリエ解析法がある．ここでは，この方法について説明する．最初に，実空間の確率振幅 $\boldsymbol{\psi}(x,t)$ に対応する波数空間の確率振幅を，$\hat{\boldsymbol{\psi}}(k,t)=\begin{pmatrix}\hat{\varphi}_1(k,t)\\ \hat{\varphi}_2(k,t)\end{pmatrix}$ で表す．フーリエ変換及び逆変換は次のように表される．

$$\hat{\boldsymbol{\psi}}(k,t)=\sum_{x\in\mathbb{Z}}\mathbf{e}^{-\mathbf{i}kx}\,\boldsymbol{\psi}(x,t), \tag{1.17}$$

$$\boldsymbol{\psi}(x,t)=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{d}k}{2\pi}\,\mathbf{e}^{\mathbf{i}kx}\hat{\boldsymbol{\psi}}(k,t). \tag{1.18}$$

(1.17) に時間発展の式 (1.6) を適用すると

$$\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{\psi}}(k,t+1)&=\sum_{x\in\mathbb{Z}}\mathbf{e}^{-\mathbf{i}kx}\boldsymbol{\psi}(x,t+1)\\
&=\sum_{x\in\mathbb{Z}}\mathbf{e}^{-\mathbf{i}kx}\,\{\boldsymbol{Q}\,\boldsymbol{\psi}(x-1,t)+\boldsymbol{P}\,\boldsymbol{\psi}(x+1,t)\}\\
&=\mathbf{e}^{-\mathbf{i}k}\boldsymbol{Q}\left[\sum_{x\in\mathbb{Z}}\mathbf{e}^{-\mathbf{i}k(x-1)}\,\boldsymbol{\psi}(x-1,t)\right]+\mathbf{e}^{\mathbf{i}k}\boldsymbol{P}\left[\sum_{x\in\mathbb{Z}}\mathbf{e}^{-\mathbf{i}k(x+1)}\,\boldsymbol{\psi}(x+1,t)\right]\\
&=(\mathbf{e}^{-\mathbf{i}k}\boldsymbol{Q}+\mathbf{e}^{\mathbf{i}k}\boldsymbol{P})\,\hat{\boldsymbol{\psi}}(k,t)\\
&=\begin{pmatrix}a\,\mathbf{e}^{\mathbf{i}k} & b\,\mathbf{e}^{\mathbf{i}k}\\ c\,\mathbf{e}^{-\mathbf{i}k} & d\,\mathbf{e}^{-\mathbf{i}k}\end{pmatrix}\hat{\boldsymbol{\psi}}(k,t)\\
&=\begin{pmatrix}\mathbf{e}^{\mathbf{i}k} & 0\\ 0 & \mathbf{e}^{-\mathbf{i}k}\end{pmatrix}\boldsymbol{U}\,\hat{\boldsymbol{\psi}}(k,t)
\end{aligned}$$

となる．このことから，$\boldsymbol{V}(k)=\begin{pmatrix} \mathbf{e}^{\mathbf{i}k} & 0 \\ 0 & \mathbf{e}^{-\mathbf{i}k} \end{pmatrix}\boldsymbol{U}$ と定義すると，波数空間では時間発展は

$$\hat{\boldsymbol{\psi}}(k,t+1)=\boldsymbol{V}(k)\,\hat{\boldsymbol{\psi}}(k,t) \tag{1.19}$$

で与えられることになる．これより

$$\hat{\boldsymbol{\psi}}(k,t)=\boldsymbol{V}(k)^t\,\hat{\boldsymbol{\psi}}(k,0)$$

となる．初期条件 (1.3) を (1.17) に代入すると

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{\psi}}(k,0)&=\sum_{x\in\mathbb{Z}}\mathbf{e}^{-\mathbf{i}kx}\,\boldsymbol{\psi}(x,0)\\&=\mathbf{e}^{-\mathbf{i}k0}\,\boldsymbol{\psi}(0,0)\\&=\boldsymbol{\phi}\end{aligned}$$

であるから

$$\hat{\boldsymbol{\psi}}(k,t)=\boldsymbol{V}(k)^t\,\boldsymbol{\phi} \tag{1.20}$$

となる．

$\boldsymbol{V}(k)$ の固有値を $\lambda(k)$ 及び $\mu(k)$ とし，対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{l}(k)=\begin{pmatrix} l_1(k) \\ l_2(k) \end{pmatrix}$ 及び $\boldsymbol{m}(k)=\begin{pmatrix} m_1(k) \\ m_2(k) \end{pmatrix}$ とする．$\boldsymbol{U}$ がユニタリ行列だから $\boldsymbol{V}(k)$ もユニタリ行列である．ゆえに 2 つの固有値 $\lambda(k)$ 及び $\mu(k)$ は絶対値が 1 の複素数となる．また $\boldsymbol{l}(k)$ 及び $\boldsymbol{m}(k)$ は正規直交性を持つように選ぶことができる．$\boldsymbol{l}(k)$ と $\boldsymbol{m}(k)$ を順番に並べて作られたユニタリ行列 $\boldsymbol{R}(k)=\begin{pmatrix} \boldsymbol{l}(k) & \boldsymbol{m}(k) \end{pmatrix}$ によって $\boldsymbol{V}(k)$ を対角化すると

$$\boldsymbol{R}(k)^\dagger\,\boldsymbol{V}(k)\,\boldsymbol{R}(k)=\begin{pmatrix} \lambda(k) & 0 \\ 0 & \mu(k) \end{pmatrix} \tag{1.21}$$

となる．但し $\dagger$ はエルミート共役を表す．これより

$$\boldsymbol{V}(k)=\boldsymbol{R}(k)\begin{pmatrix} \lambda(k) & 0 \\ 0 & \mu(k) \end{pmatrix}\boldsymbol{R}(k)^\dagger$$

であるから

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{V}(k)^t &= \boldsymbol{R}(k)\begin{pmatrix} \lambda(k) & 0 \\ 0 & \mu(k) \end{pmatrix}^t \boldsymbol{R}(k)^\dagger \\
&= \boldsymbol{R}(k)\begin{pmatrix} \lambda(k)^t & 0 \\ 0 & \mu(k)^t \end{pmatrix} \boldsymbol{R}(k)^\dagger \\
&= \begin{pmatrix} \boldsymbol{l}(k) & \boldsymbol{m}(k) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda(k)^t & 0 \\ 0 & \mu(k)^t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{l}(k)^\dagger \\ \boldsymbol{m}(k)^\dagger \end{pmatrix} \\
&= \lambda(k)^t\,\boldsymbol{l}(k)\,\boldsymbol{l}(k)^\dagger + \mu(k)^t\,\boldsymbol{m}(k)\,\boldsymbol{m}(k)^\dagger
\end{aligned}
$$

となる．(1.20) より

$$
\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{\psi}}(k,t) &= \lambda(k)^t\,\boldsymbol{l}(k)\,\boldsymbol{l}(k)^\dagger\boldsymbol{\phi} + \mu(k)^t\,\boldsymbol{m}(k)\,\boldsymbol{m}(k)^\dagger\boldsymbol{\phi} \\
&= \lambda(k)^t\,(\boldsymbol{l}(k)^\dagger\,\boldsymbol{\phi})\,\boldsymbol{l}(k) + \mu(k)^t\,(\boldsymbol{m}(k)^\dagger\,\boldsymbol{\phi})\,\boldsymbol{m}(k)
\end{aligned}
\tag{1.22}
$$

となる．すなわち波数空間の確率振幅は一般に，$\boldsymbol{V}(k)$ の固有値及び固有ベクトルと初期の量子ビットで表されることになる．

次に，擬速度 $\dfrac{X(t)}{t}$ に対し，α 次モーメントを

$$
\left\langle\left(\frac{X(t)}{t}\right)^\alpha\right\rangle = \sum_{x\in\mathbb{Z}}\left(\frac{x}{t}\right)^\alpha\|\boldsymbol{\psi}(x,t)\|^2, \quad \alpha\in\{0,1,2,\dots\} \tag{1.23}
$$

によって定義する．(1.18) より

$$
\begin{aligned}
\left\langle\left(\frac{X(t)}{t}\right)^\alpha\right\rangle &= \sum_{x\in\mathbb{Z}}\left(\frac{x}{t}\right)^\alpha\left\|\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{d}k}{2\pi}\,\mathbf{e}^{\mathbf{i}kx}\hat{\boldsymbol{\psi}}(k,t)\right\|^2 \\
&= \sum_{x\in\mathbb{Z}}\left(\frac{x}{t}\right)^\alpha\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{d}k'}{2\pi}\,\mathbf{e}^{-\mathbf{i}k'x}\hat{\boldsymbol{\psi}}(k',t)^\dagger\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{d}k}{2\pi}\,\mathbf{e}^{\mathbf{i}kx}\hat{\boldsymbol{\psi}}(k,t) \\
&= \sum_{x\in\mathbb{Z}}\left(\frac{1}{t}\right)^\alpha\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{d}k'}{2\pi}\,\mathbf{e}^{-\mathbf{i}k'x}\hat{\boldsymbol{\psi}}(k',t)^\dagger\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{d}k}{2\pi}\,x^\alpha\mathbf{e}^{\mathbf{i}kx}\hat{\boldsymbol{\psi}}(k,t) \\
&= \sum_{x\in\mathbb{Z}}\left(\frac{1}{t}\right)^\alpha\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{d}k'}{2\pi}\,\mathbf{e}^{-\mathbf{i}k'x}\hat{\boldsymbol{\psi}}(k',t)^\dagger\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{d}k}{2\pi}\left\{\left(-\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial k}\right)^\alpha\mathbf{e}^{\mathbf{i}kx}\right\}\hat{\boldsymbol{\psi}}(k,t)
\end{aligned}
$$

となる．部分積分を繰り返すと

$$
\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{d}k}{2\pi}\left\{\left(-\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial k}\right)^\alpha\mathbf{e}^{\mathbf{i}kx}\right\}\hat{\boldsymbol{\psi}}(k,t) = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{d}k}{2\pi}\,\mathbf{e}^{\mathbf{i}kx}\left\{\left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial k}\right)^\alpha\hat{\boldsymbol{\psi}}(k,t)\right\}
$$

となるから

$$
\begin{aligned}
\left\langle \left(\frac{X(t)}{t}\right)^{\alpha} \right\rangle &= \sum_{x\in\mathbb{Z}} \left(\frac{1}{t}\right)^{\alpha} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{d}k'}{2\pi}\, \mathbf{e}^{-\mathbf{i}k'x} \hat{\boldsymbol{\psi}}(k',t)^{\dagger} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{d}k}{2\pi}\, \mathbf{e}^{\mathbf{i}kx} \left\{ \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial k}\right)^{\alpha} \hat{\boldsymbol{\psi}}(k,t) \right\} \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{d}k}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{d}k'}{2\pi} \sum_{x\in\mathbb{Z}} \mathbf{e}^{\mathbf{i}(k-k')x}\, \hat{\boldsymbol{\psi}}(k',t)^{\dagger} \left\{ \left(\frac{\mathbf{i}}{t}\frac{\partial}{\partial k}\right)^{\alpha} \hat{\boldsymbol{\psi}}(k,t) \right\} \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{d}k}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{d}k'}{2\pi}\, 2\pi\, \delta(k-k')\, \hat{\boldsymbol{\psi}}(k',t)^{\dagger} \left\{ \left(\frac{\mathbf{i}}{t}\frac{\partial}{\partial k}\right)^{\alpha} \hat{\boldsymbol{\psi}}(k,t) \right\} \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{d}k}{2\pi}\, \hat{\boldsymbol{\psi}}(k,t)^{\dagger} \left(\frac{\mathbf{i}}{t}\frac{\partial}{\partial k}\right)^{\alpha} \hat{\boldsymbol{\psi}}(k,t)
\end{aligned}
\tag{1.24}
$$

となる．(1.22) より，長時間 $t \to \infty$ において

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\mathbf{i}}{t}\frac{\partial}{\partial k}\right)^{\alpha} \hat{\boldsymbol{\psi}}(k,t) &= \left(\frac{\mathbf{i}}{t}\frac{\partial}{\partial k}\right)^{\alpha} \left\{ \lambda(k)^{t}\, (\boldsymbol{l}(k)^{\dagger}\boldsymbol{\phi})\, \boldsymbol{l}(k) + \mu(k)^{t}\, (\boldsymbol{m}(k)^{\dagger}\boldsymbol{\phi})\, \boldsymbol{m}(k) \right\} \\
&= \left(\frac{\mathbf{i}}{t}\right)^{\alpha} \left\{ t^{\alpha}\, \lambda(k)^{t-\alpha} \left(\frac{\mathrm{d}\lambda(k)}{\mathrm{d}k}\right)^{\alpha} (\boldsymbol{l}(k)^{\dagger}\boldsymbol{\phi})\, \boldsymbol{l}(k) \right. \\
&\quad \left. + \, t^{\alpha}\, \mu(k)^{t-\alpha} \left(\frac{\mathrm{d}\mu(k)}{\mathrm{d}k}\right)^{\alpha} (\boldsymbol{m}(k)^{\dagger}\boldsymbol{\phi})\, \boldsymbol{m}(k) + \mathcal{O}(t^{\alpha-1}) \right\} \\
&= \lambda(k)^{t-\alpha} \left(\mathbf{i}\,\frac{\mathrm{d}\lambda(k)}{\mathrm{d}k}\right)^{\alpha} (\boldsymbol{l}(k)^{\dagger}\boldsymbol{\phi})\, \boldsymbol{l}(k) \\
&\quad + \mu(k)^{t-\alpha} \left(\mathbf{i}\,\frac{\mathrm{d}\mu(k)}{\mathrm{d}k}\right)^{\alpha} (\boldsymbol{m}(k)^{\dagger}\boldsymbol{\phi})\, \boldsymbol{m}(k) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{t}\right)
\end{aligned}
$$

と評価できる．他方

$$
\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{\psi}}(k,t)^{\dagger} &= (\lambda(k)^{t})^{*}\, (\boldsymbol{l}(k)^{\dagger}\boldsymbol{\phi})^{*}\, \boldsymbol{l}(k)^{\dagger} + (\mu(k)^{t})^{*}\, (\boldsymbol{m}(k)^{\dagger}\boldsymbol{\phi})^{*}\, \boldsymbol{m}(k)^{\dagger} \\
&= (\lambda(k)^{*})^{t}\, (\boldsymbol{l}(k)^{\dagger}\boldsymbol{\phi})^{*}\, \boldsymbol{l}(k)^{\dagger} + (\mu(k)^{*})^{t}\, (\boldsymbol{m}(k)^{\dagger}\boldsymbol{\phi})^{*}\, \boldsymbol{m}(k)^{\dagger}
\end{aligned}
$$

であるので両者を掛け合わせることにより

$$
\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{\psi}}(k,t)^{\dagger} \left(\frac{\mathbf{i}}{t}\frac{\partial}{\partial k}\right)^{\alpha} \hat{\boldsymbol{\psi}}(k,t) &= \left\{ (\lambda(k)^{*})^{t}\, (\boldsymbol{l}(k)^{\dagger}\boldsymbol{\phi})^{*}\, \boldsymbol{l}(k)^{\dagger} + (\mu(k)^{*})^{t}\, (\boldsymbol{m}(k)^{\dagger}\boldsymbol{\phi})^{*}\, \boldsymbol{m}(k)^{\dagger} \right\} \\
&\quad \times \left\{ \lambda(k)^{t-\alpha} \left(\mathbf{i}\,\frac{\mathrm{d}\lambda(k)}{\mathrm{d}k}\right)^{\alpha} (\boldsymbol{l}(k)^{\dagger}\boldsymbol{\phi})\, \boldsymbol{l}(k) \right. \\
&\quad \left. + \, \mu(k)^{t-\alpha} \left(\mathbf{i}\,\frac{\mathrm{d}\mu(k)}{\mathrm{d}k}\right)^{\alpha} (\boldsymbol{m}(k)^{\dagger}\boldsymbol{\phi})\, \boldsymbol{m}(k) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{t}\right) \right\}
\end{aligned}
$$

という長時間評価が得られる．$\lambda(k)$ 及び $\mu(k)$ は絶対値が 1 の複素数であり，$\boldsymbol{l}(k)$ 及び $\boldsymbol{m}(k)$ は正規直交性を持つから

$$
\begin{aligned}
&\hat{\boldsymbol{\psi}}(k,t)^{\dagger} \left(\frac{\mathbf{i}}{t}\frac{\partial}{\partial k}\right)^{\alpha} \hat{\boldsymbol{\psi}}(k,t) \\
&= \left|\boldsymbol{l}(k)^{\dagger}\boldsymbol{\phi}\right|^{2} \left(\frac{\mathbf{i}}{\lambda(k)}\,\frac{\mathrm{d}\lambda(k)}{\mathrm{d}k}\right)^{\alpha} + \left|\boldsymbol{m}(k)^{\dagger}\boldsymbol{\phi}\right|^{2} \left(\frac{\mathbf{i}}{\mu(k)}\,\frac{\mathrm{d}\mu(k)}{\mathrm{d}k}\right)^{\alpha} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{t}\right)
\end{aligned}
\tag{1.25}
$$

となる．(1.24)，(1.25) より

$$\left\langle \left(\frac{X(t)}{t} \right)^{\alpha} \right\rangle$$
$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{d}k}{2\pi} \left\{ \left| \boldsymbol{l}(k)^{\dagger} \boldsymbol{\phi} \right|^2 \left(\frac{\mathbf{i}}{\lambda(k)} \frac{\mathrm{d}\lambda(k)}{\mathrm{d}k} \right)^{\alpha} + \left| \boldsymbol{m}(k)^{\dagger} \boldsymbol{\phi} \right|^2 \left(\frac{\mathbf{i}}{\mu(k)} \frac{\mathrm{d}\mu(k)}{\mathrm{d}k} \right)^{\alpha} \right\} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{t} \right)$$

である．よって

$$\begin{aligned} &\lim_{t \to \infty} \left\langle \left(\frac{X(t)}{t} \right)^{\alpha} \right\rangle \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{d}k}{2\pi} \left\{ \left| \boldsymbol{l}(k)^{\dagger} \boldsymbol{\phi} \right|^2 \left(\frac{\mathbf{i}}{\lambda(k)} \frac{\mathrm{d}\lambda(k)}{\mathrm{d}k} \right)^{\alpha} + \left| \boldsymbol{m}(k)^{\dagger} \boldsymbol{\phi} \right|^2 \left(\frac{\mathbf{i}}{\mu(k)} \frac{\mathrm{d}\mu(k)}{\mathrm{d}k} \right)^{\alpha} \right\} \end{aligned} \tag{1.26}$$

となり，右辺に時間依存性が無くなる．後は $k \mapsto v$ へ変数変換することによって，(1.12)–(1.15) を導くことができる [1, 2, 6]．

第2章　本論

2.1　方法

ボソンとフェルミオンという 2 種類の 2 次元量子ウォークの長時間極限分布を導出する．まず x 方向と y 方向に，互いに独立な 1 次元量子ウォークをそれぞれ一つずつ用意する．この二つの量子ウォークに対して，共通の量子ビット $\boldsymbol{\phi}$ 及び量子コイン $\boldsymbol{U}$ を用いるものとする．その結果，確率振幅 $\boldsymbol{\psi}$ も共通となる．つまり，我々が考える 2 次元上の量子ウォーカーは，x 方向と y 方向という互いに独立な成分に分けて考えると，同種 2 粒子系とみなすことができるのである．次に

$$\boldsymbol{\psi}(x,t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x,t) \\ \varphi_2(x,t) \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\psi}(y,t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(y,t) \\ \varphi_2(y,t) \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

という二つの確率振幅の成分同士を組み合わせとして，次のような 2 種類（$\mathbf{P} = \mathbf{B}, \mathbf{F}$）の方法を考えることにする．

$$\Psi_{\mathbf{P}}(x,y,t) = \varphi_1(x,t)\,\varphi_2(y,t) \pm \varphi_2(x,t)\,\varphi_1(y,t). \tag{2.2}$$

但し $\mathbf{P} = \mathbf{B}$ のとき複号の上側を，$\mathbf{P} = \mathbf{F}$ のとき複号の下側を採るものとする．x と y の交換に対し $\Psi_{\mathbf{B}}(x,y,t)$ の符号は不変となる．対称性を示すこの確率振幅を用いた量子ウォークをボソン模型とする．一方で x と y の交換に対し $\Psi_{\mathbf{F}}(x,y,t)$ の符号は変化する．反対称性を示すこの確率振幅を用いた量子ウォークをフェルミオン模型とする．図 2.1 に数値計算による $|\Psi_{\mathbf{P}}(x,y,t)|^2$ の確率分布をプロットした．

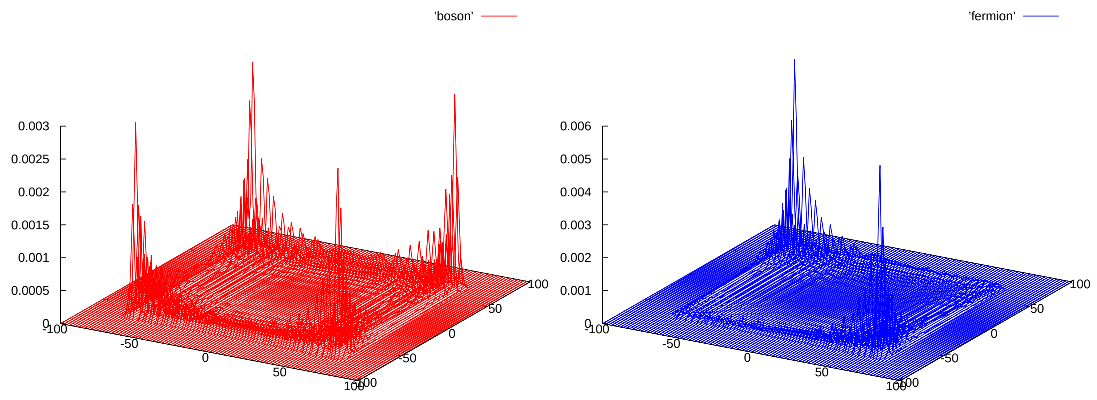


図 2.1: $t = 100$ における確率分布の比較．左がボソン模型，右がフェルミオン模型．

ここからは 1.2 節で解説した 1 次元量子ウォークに対するフーリエ解析法を，ボソン模型とフェルミオン模型という 2 種類の 2 次元量子ウォークに応用する．まず x 方向の擬速度 $\dfrac{X_{\mathbf{P}}(t)}{t}$ と y 方向の擬速度 $\dfrac{Y_{\mathbf{P}}(t)}{t}$ に対し，結合 (α,β) 次モーメントを

$$\begin{aligned}&\left\langle \left(\frac{X_{\mathbf{P}}(t)}{t}\right)^{\alpha}\left(\frac{Y_{\mathbf{P}}(t)}{t}\right)^{\beta}+\left(\frac{X_{\mathbf{P}}(t)}{t}\right)^{\beta}\left(\frac{Y_{\mathbf{P}}(t)}{t}\right)^{\alpha}\right\rangle\\ &=\sum_{(x,y)\in\mathbb{Z}^2}\left\{\left(\frac{x}{t}\right)^{\alpha}\left(\frac{y}{t}\right)^{\beta}+\left(\frac{x}{t}\right)^{\beta}\left(\frac{y}{t}\right)^{\alpha}\right\}\left|\Psi_{\mathbf{P}}(x,y,t)\right|^2, \qquad (2.3)\\ &\qquad\qquad \alpha,\beta\in\{0,1,2,\dots\}\end{aligned}$$

によって定義する．但しここでは同種 2 粒子系を考えているため，オブザーバブルである結合モーメントは粒子の入れ替えに対して不変となるように定義した．(2.2) より

$$\begin{aligned}&\left\langle \left(\frac{X_{\mathbf{P}}(t)}{t}\right)^{\alpha}\left(\frac{Y_{\mathbf{P}}(t)}{t}\right)^{\beta}+\left(\frac{X_{\mathbf{P}}(t)}{t}\right)^{\beta}\left(\frac{Y_{\mathbf{P}}(t)}{t}\right)^{\alpha}\right\rangle\\
&=\sum_{(x,y)\in\mathbb{Z}^2}\left\{\left(\frac{x}{t}\right)^{\alpha}\left(\frac{y}{t}\right)^{\beta}+\left(\frac{x}{t}\right)^{\beta}\left(\frac{y}{t}\right)^{\alpha}\right\}\left|\varphi_1(x,t)\,\varphi_2(y,t)\pm\varphi_2(x,t)\,\varphi_1(y,t)\right|^2\\
&=\sum_{(x,y)\in\mathbb{Z}^2}\left(\frac{x}{t}\right)^{\alpha}\left(\frac{y}{t}\right)^{\beta}\varphi_1(x,t)^*\varphi_2(y,t)^*\varphi_1(x,t)\varphi_2(y,t)\\
&\qquad\qquad+\sum_{(x,y)\in\mathbb{Z}^2}\left(\frac{x}{t}\right)^{\beta}\left(\frac{y}{t}\right)^{\alpha}\varphi_1(x,t)^*\varphi_2(y,t)^*\varphi_1(x,t)\varphi_2(y,t)\\
&\pm\sum_{(x,y)\in\mathbb{Z}^2}\left(\frac{x}{t}\right)^{\alpha}\left(\frac{y}{t}\right)^{\beta}\varphi_1(x,t)^*\varphi_2(y,t)^*\varphi_2(x,t)\varphi_1(y,t)\\
&\qquad\qquad\pm\sum_{(x,y)\in\mathbb{Z}^2}\left(\frac{x}{t}\right)^{\beta}\left(\frac{y}{t}\right)^{\alpha}\varphi_1(x,t)^*\varphi_2(y,t)^*\varphi_2(x,t)\varphi_1(y,t)\\
&\pm\sum_{(x,y)\in\mathbb{Z}^2}\left(\frac{x}{t}\right)^{\alpha}\left(\frac{y}{t}\right)^{\beta}\varphi_2(x,t)^*\varphi_1(y,t)^*\varphi_1(x,t)\varphi_2(y,t)\\
&\qquad\qquad\pm\sum_{(x,y)\in\mathbb{Z}^2}\left(\frac{x}{t}\right)^{\beta}\left(\frac{y}{t}\right)^{\alpha}\varphi_2(x,t)^*\varphi_1(y,t)^*\varphi_1(x,t)\varphi_2(y,t)\\
&+\sum_{(x,y)\in\mathbb{Z}^2}\left(\frac{x}{t}\right)^{\alpha}\left(\frac{y}{t}\right)^{\beta}\varphi_2(x,t)^*\varphi_1(y,t)^*\varphi_2(x,t)\varphi_1(y,t)\\
&\qquad\qquad+\sum_{(x,y)\in\mathbb{Z}^2}\left(\frac{x}{t}\right)^{\beta}\left(\frac{y}{t}\right)^{\alpha}\varphi_2(x,t)^*\varphi_1(y,t)^*\varphi_2(x,t)\varphi_1(y,t)\end{aligned}$$

となる．フーリエ逆変換 (1.18) を x 方向及び y 方向に適用すると

$$\boldsymbol{\psi}(x,t)=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{d}k_x}{2\pi}\,\mathbf{e}^{\mathbf{i}k_x x}\hat{\boldsymbol{\psi}}(k_x,t), \tag{2.4}$$

$$\boldsymbol{\psi}(y,t)=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{d}k_y}{2\pi}\,\mathbf{e}^{\mathbf{i}k_y y}\hat{\boldsymbol{\psi}}(k_y,t) \tag{2.5}$$

となる．但し $x\leftrightarrow k_x$，$y\leftrightarrow k_y$ という対応をとっている．(2.4)，(2.5) を成分に分けると

$$\begin{aligned}\varphi_1(x,t)&=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{d}k_x}{2\pi}\,\mathbf{e}^{\mathbf{i}k_x x}\hat{\varphi}_1(k_x,t),\\ \varphi_2(x,t)&=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{d}k_x}{2\pi}\,\mathbf{e}^{\mathbf{i}k_x x}\hat{\varphi}_2(k_x,t),\\ \varphi_1(y,t)&=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{d}k_y}{2\pi}\,\mathbf{e}^{\mathbf{i}k_y y}\hat{\varphi}_1(k_y,t),\\ \varphi_2(y,t)&=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{d}k_y}{2\pi}\,\mathbf{e}^{\mathbf{i}k_y y}\hat{\varphi}_2(k_y,t)\end{aligned}$$

となる．これらを用いると結合モーメントは

$$\begin{aligned}&\left\langle\left(\frac{X_{\mathbf{P}}(t)}{t}\right)^{\alpha}\left(\frac{Y_{\mathbf{P}}(t)}{t}\right)^{\beta}+\left(\frac{X_{\mathbf{P}}(t)}{t}\right)^{\beta}\left(\frac{Y_{\mathbf{P}}(t)}{t}\right)^{\alpha}\right\rangle\\ &=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{d}k_x}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{d}k_y}{2\pi}\left\{\hat{\varphi}_1(k_x,t)^*\hat{\varphi}_2(k_y,t)^*\pm\hat{\varphi}_2(k_x,t)^*\hat{\varphi}_1(k_y,t)^*\right\}\\ &\quad\times\left[\left\{\left(\frac{\mathbf{i}}{t}\frac{\partial}{\partial k_x}\right)^{\alpha}\left(\frac{\mathbf{i}}{t}\frac{\partial}{\partial k_y}\right)^{\beta}+\left(\frac{\mathbf{i}}{t}\frac{\partial}{\partial k_x}\right)^{\beta}\left(\frac{\mathbf{i}}{t}\frac{\partial}{\partial k_y}\right)^{\alpha}\right\}\right.\\ &\quad\left.\times\left\{\hat{\varphi}_1(k_x,t)\hat{\varphi}_2(k_y,t)\pm\hat{\varphi}_2(k_x,t)\hat{\varphi}_1(k_y,t)\right\}\right]\end{aligned} \tag{2.6}$$

と書き直せる．(1.22) の表現を x 方向及び y 方向に適用すると

$$\hat{\boldsymbol{\psi}}(k_x,t)=\lambda(k_x)^t\,(\boldsymbol{l}(k_x)^{\dagger}\,\boldsymbol{\phi})\,\boldsymbol{l}(k_x)\,+\mu(k_x)^t\,(\boldsymbol{m}(k_x)^{\dagger}\,\boldsymbol{\phi})\,\boldsymbol{m}(k_x), \tag{2.7}$$

$$\hat{\boldsymbol{\psi}}(k_y,t)=\lambda(k_y)^t\,(\boldsymbol{l}(k_y)^{\dagger}\,\boldsymbol{\phi})\,\boldsymbol{l}(k_y)\,+\mu(k_y)^t\,(\boldsymbol{m}(k_y)^{\dagger}\,\boldsymbol{\phi})\,\boldsymbol{m}(k_y) \tag{2.8}$$

となる．(2.7)，(2.8) を成分に分けると

$$\begin{aligned}\hat{\varphi}_1(k_x,t)&=\lambda(k_x)^t\,(\boldsymbol{l}(k_x)^{\dagger}\,\boldsymbol{\phi})\,l_1(k_x)\,+\mu(k_x)^t\,(\boldsymbol{m}(k_x)^{\dagger}\,\boldsymbol{\phi})\,m_1(k_x),\\ \hat{\varphi}_2(k_x,t)&=\lambda(k_x)^t\,(\boldsymbol{l}(k_x)^{\dagger}\,\boldsymbol{\phi})\,l_2(k_x)\,+\mu(k_x)^t\,(\boldsymbol{m}(k_x)^{\dagger}\,\boldsymbol{\phi})\,m_2(k_x),\\ \hat{\varphi}_1(k_y,t)&=\lambda(k_y)^t\,(\boldsymbol{l}(k_y)^{\dagger}\,\boldsymbol{\phi})\,l_1(k_y)\,+\mu(k_y)^t\,(\boldsymbol{m}(k_y)^{\dagger}\,\boldsymbol{\phi})\,m_1(k_y),\\ \hat{\varphi}_2(k_y,t)&=\lambda(k_y)^t\,(\boldsymbol{l}(k_y)^{\dagger}\,\boldsymbol{\phi})\,l_2(k_y)\,+\mu(k_y)^t\,(\boldsymbol{m}(k_y)^{\dagger}\,\boldsymbol{\phi})\,m_2(k_y)\end{aligned}$$

となる．これらを用いると (2.6) の被積分関数は

$$
\begin{aligned}
&\left\{\left(\frac{\mathbf{i}}{t}\frac{\partial}{\partial k_x}\right)^{\alpha}\left(\frac{\mathbf{i}}{t}\frac{\partial}{\partial k_y}\right)^{\beta}+\left(\frac{\mathbf{i}}{t}\frac{\partial}{\partial k_x}\right)^{\beta}\left(\frac{\mathbf{i}}{t}\frac{\partial}{\partial k_y}\right)^{\alpha}\right\}\{\hat{\varphi}_1(k_x,t)\hat{\varphi}_2(k_y,t)\pm\hat{\varphi}_2(k_x,t)\hat{\varphi}_1(k_y,t)\}\\
&=\lambda(k_x)^t\lambda(k_y)^t\left\{\left(\frac{\mathbf{i}}{\lambda(k_x)}\frac{\mathrm{d}\lambda(k_x)}{\mathrm{d}k_x}\right)^{\alpha}\left(\frac{\mathbf{i}}{\lambda(k_y)}\frac{\mathrm{d}\lambda(k_y)}{\mathrm{d}k_y}\right)^{\beta}+\left(\frac{\mathbf{i}}{\lambda(k_x)}\frac{\mathrm{d}\lambda(k_x)}{\mathrm{d}k_x}\right)^{\beta}\left(\frac{\mathbf{i}}{\lambda(k_y)}\frac{\mathrm{d}\lambda(k_y)}{\mathrm{d}k_y}\right)^{\alpha}\right\}\\
&\qquad(\boldsymbol{l}(k_x)^{\dagger}\boldsymbol{\phi})(\boldsymbol{l}(k_y)^{\dagger}\boldsymbol{\phi})\{l_1(k_x)l_2(k_y)\pm l_2(k_x)l_1(k_y)\}\\
&+\lambda(k_x)^t\mu(k_y)^t\left\{\left(\frac{\mathbf{i}}{\lambda(k_x)}\frac{\mathrm{d}\lambda(k_x)}{\mathrm{d}k_x}\right)^{\alpha}\left(\frac{\mathbf{i}}{\mu(k_y)}\frac{\mathrm{d}\mu(k_y)}{\mathrm{d}k_y}\right)^{\beta}+\left(\frac{\mathbf{i}}{\lambda(k_x)}\frac{\mathrm{d}\lambda(k_x)}{\mathrm{d}k_x}\right)^{\beta}\left(\frac{\mathbf{i}}{\mu(k_y)}\frac{\mathrm{d}\mu(k_y)}{\mathrm{d}k_y}\right)^{\alpha}\right\}\\
&\qquad(\boldsymbol{l}(k_x)^{\dagger}\boldsymbol{\phi})(\boldsymbol{m}(k_y)^{\dagger}\boldsymbol{\phi})\{l_1(k_x)m_2(k_y)\pm l_2(k_x)m_1(k_y)\}\\
&+\mu(k_x)^t\lambda(k_y)^t\left\{\left(\frac{\mathbf{i}}{\mu(k_x)}\frac{\mathrm{d}\mu(k_x)}{\mathrm{d}k_x}\right)^{\alpha}\left(\frac{\mathbf{i}}{\lambda(k_y)}\frac{\mathrm{d}\lambda(k_y)}{\mathrm{d}k_y}\right)^{\beta}+\left(\frac{\mathbf{i}}{\mu(k_x)}\frac{\mathrm{d}\mu(k_x)}{\mathrm{d}k_x}\right)^{\beta}\left(\frac{\mathbf{i}}{\lambda(k_y)}\frac{\mathrm{d}\lambda(k_y)}{\mathrm{d}k_y}\right)^{\alpha}\right\}\\
&\qquad(\boldsymbol{m}(k_x)^{\dagger}\boldsymbol{\phi})(\boldsymbol{l}(k_y)^{\dagger}\boldsymbol{\phi})\{m_1(k_x)l_2(k_y)\pm m_2(k_x)l_1(k_y)\}\\
&+\mu(k_x)^t\mu(k_y)^t\left\{\left(\frac{\mathbf{i}}{\mu(k_x)}\frac{\mathrm{d}\mu(k_x)}{\mathrm{d}k_x}\right)^{\alpha}\left(\frac{\mathbf{i}}{\mu(k_y)}\frac{\mathrm{d}\mu(k_y)}{\mathrm{d}k_y}\right)^{\beta}+\left(\frac{\mathbf{i}}{\mu(k_x)}\frac{\mathrm{d}\mu(k_x)}{\mathrm{d}k_x}\right)^{\beta}\left(\frac{\mathbf{i}}{\mu(k_y)}\frac{\mathrm{d}\mu(k_y)}{\mathrm{d}k_y}\right)^{\alpha}\right\}\\
&\qquad(\boldsymbol{m}(k_x)^{\dagger}\boldsymbol{\phi})(\boldsymbol{m}(k_y)^{\dagger}\boldsymbol{\phi})\{m_1(k_x)m_2(k_y)\pm m_2(k_x)m_1(k_y)\}\\
&+\mathcal{O}\left(\frac{1}{t}\right)
\end{aligned}
\tag{2.9}
$$

となり，また

$$
\begin{aligned}
&\hat{\varphi}_1(k_x,t)^*\hat{\varphi}_2(k_y,t)^*\pm\hat{\varphi}_2(k_x,t)^*\hat{\varphi}_1(k_y,t)^*\\
&=(\lambda(k_x)^*)^t(\lambda(k_y)^*)^t(\boldsymbol{l}(k_x)^{\dagger}\boldsymbol{\phi})^*(\boldsymbol{l}(k_y)^{\dagger}\boldsymbol{\phi})^*\{l_1(k_x)^*l_2(k_y)^*\pm l_2(k_x)^*l_1(k_y)^*\}\\
&+(\lambda(k_x)^*)^t(\mu(k_y)^*)^t(\boldsymbol{l}(k_x)^{\dagger}\boldsymbol{\phi})^*(\boldsymbol{m}(k_y)^{\dagger}\boldsymbol{\phi})^*\{l_1(k_x)^*m_2(k_y)^*\pm l_2(k_x)^*m_1(k_y)^*\}\\
&+(\mu(k_x)^*)^t(\lambda(k_y)^*)^t(\boldsymbol{m}(k_x)^{\dagger}\boldsymbol{\phi})^*(\boldsymbol{l}(k_y)^{\dagger}\boldsymbol{\phi})^*\{m_1(k_x)^*l_2(k_y)^*\pm m_2(k_x)^*l_1(k_y)^*\}\\
&+(\mu(k_x)^*)^t(\mu(k_y)^*)^t(\boldsymbol{m}(k_x)^{\dagger}\boldsymbol{\phi})^*(\boldsymbol{m}(k_y)^{\dagger}\boldsymbol{\phi})^*\{m_1(k_x)^*m_2(k_y)^*\pm m_2(k_x)^*m_1(k_y)^*\}
\end{aligned}
\tag{2.10}
$$

となる．

(2.10)，(2.9)，(2.6) より結合モーメントは

$$
\begin{aligned}
&\left\langle \left(\frac{X_{\mathbf{P}}(t)}{t}\right)^{\alpha}\left(\frac{Y_{\mathbf{P}}(t)}{t}\right)^{\beta}+\left(\frac{X_{\mathbf{P}}(t)}{t}\right)^{\beta}\left(\frac{Y_{\mathbf{P}}(t)}{t}\right)^{\alpha}\right\rangle \\
&=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{d}k_x}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{d}k_y}{2\pi}\left\{\left(\frac{\mathbf{i}}{\lambda(k_x)}\frac{\mathrm{d}\lambda(k_x)}{\mathrm{d}k_x}\right)^{\alpha}\left(\frac{\mathbf{i}}{\lambda(k_y)}\frac{\mathrm{d}\lambda(k_y)}{\mathrm{d}k_y}\right)^{\beta}+\left(\frac{\mathbf{i}}{\lambda(k_x)}\frac{\mathrm{d}\lambda(k_x)}{\mathrm{d}k_x}\right)^{\beta}\left(\frac{\mathbf{i}}{\lambda(k_y)}\frac{\mathrm{d}\lambda(k_y)}{\mathrm{d}k_y}\right)^{\alpha}\right\} \\
&\qquad\times\left|\boldsymbol{l}(k_x)^{\dagger}\boldsymbol{\phi}\right|^2\left|\boldsymbol{l}(k_y)^{\dagger}\boldsymbol{\phi}\right|^2\{l_1(k_x)^*l_2(k_y)^*\pm l_2(k_x)^*l_1(k_y)^*\}\{l_1(k_x)l_2(k_y)\pm l_2(k_x)l_1(k_y)\} \\
&+\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{d}k_x}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{d}k_y}{2\pi}(\lambda(k_y)^*)^t\mu(k_y)^t\left\{\left(\frac{\mathbf{i}}{\lambda(k_x)}\frac{\mathrm{d}\lambda(k_x)}{\mathrm{d}k_x}\right)^{\alpha}\left(\frac{\mathbf{i}}{\mu(k_y)}\frac{\mathrm{d}\mu(k_y)}{\mathrm{d}k_y}\right)^{\beta}+\left(\frac{\mathbf{i}}{\lambda(k_x)}\frac{\mathrm{d}\lambda(k_x)}{\mathrm{d}k_x}\right)^{\beta}\left(\frac{\mathbf{i}}{\mu(k_y)}\frac{\mathrm{d}\mu(k_y)}{\mathrm{d}k_y}\right)^{\alpha}\right\} \\
&\qquad\times\left|\boldsymbol{l}(k_x)^{\dagger}\boldsymbol{\phi}\right|^2(\boldsymbol{l}(k_y)^{\dagger}\boldsymbol{\phi})^*(\boldsymbol{m}(k_y)^{\dagger}\boldsymbol{\phi})\{l_1(k_x)^*l_2(k_y)^*\pm l_2(k_x)^*l_1(k_y)^*\}\{l_1(k_x)m_2(k_y)\pm l_2(k_x)m_1(k_y)\} \\
&+\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{d}k_x}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{d}k_y}{2\pi}(\lambda(k_x)^*)^t\mu(k_x)^t\left\{\left(\frac{\mathbf{i}}{\mu(k_x)}\frac{\mathrm{d}\mu(k_x)}{\mathrm{d}k_x}\right)^{\alpha}\left(\frac{\mathbf{i}}{\lambda(k_y)}\frac{\mathrm{d}\lambda(k_y)}{\mathrm{d}k_y}\right)^{\beta}+\left(\frac{\mathbf{i}}{\mu(k_x)}\frac{\mathrm{d}\mu(k_x)}{\mathrm{d}k_x}\right)^{\beta}\left(\frac{\mathbf{i}}{\lambda(k_y)}\frac{\mathrm{d}\lambda(k_y)}{\mathrm{d}k_y}\right)^{\alpha}\right\} \\
&\qquad\times(\boldsymbol{l}(k_x)^{\dagger}\boldsymbol{\phi})^*(\boldsymbol{m}(k_x)^{\dagger}\boldsymbol{\phi})\left|\boldsymbol{l}(k_y)^{\dagger}\boldsymbol{\phi}\right|^2\{l_1(k_x)^*l_2(k_y)^*\pm l_2(k_x)^*l_1(k_y)^*\}\{m_1(k_x)l_2(k_y)\pm m_2(k_x)l_1(k_y)\} \\
&+\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{d}k_x}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{d}k_y}{2\pi}(\lambda(k_x)^*)^t\mu(k_x)^t(\lambda(k_y)^*)^t\mu(k_y)^t \\
&\times\left\{\left(\frac{\mathbf{i}}{\mu(k_x)}\frac{\mathrm{d}\mu(k_x)}{\mathrm{d}k_x}\right)^{\alpha}\left(\frac{\mathbf{i}}{\mu(k_y)}\frac{\mathrm{d}\mu(k_y)}{\mathrm{d}k_y}\right)^{\beta}+\left(\frac{\mathbf{i}}{\mu(k_x)}\frac{\mathrm{d}\mu(k_x)}{\mathrm{d}k_x}\right)^{\beta}\left(\frac{\mathbf{i}}{\mu(k_y)}\frac{\mathrm{d}\mu(k_y)}{\mathrm{d}k_y}\right)^{\alpha}\right\} \\
&\quad\times(\boldsymbol{l}(k_x)^{\dagger}\boldsymbol{\phi})^*(\boldsymbol{m}(k_x)^{\dagger}\boldsymbol{\phi})(\boldsymbol{l}(k_y)^{\dagger}\boldsymbol{\phi})^*(\boldsymbol{m}(k_y)^{\dagger}\boldsymbol{\phi})\{l_1(k_x)^*l_2(k_y)^*\pm l_2(k_x)^*l_1(k_y)^*\}\{m_1(k_x)m_2(k_y)\pm m_2(k_x)m_1(k_y)\} \\
&+\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{d}k_x}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{d}k_y}{2\pi}(\mu(k_y)^*)^t\lambda(k_y)^t\left\{\left(\frac{\mathbf{i}}{\lambda(k_x)}\frac{\mathrm{d}\lambda(k_x)}{\mathrm{d}k_x}\right)^{\alpha}\left(\frac{\mathbf{i}}{\lambda(k_y)}\frac{\mathrm{d}\lambda(k_y)}{\mathrm{d}k_y}\right)^{\beta}+\left(\frac{\mathbf{i}}{\lambda(k_x)}\frac{\mathrm{d}\lambda(k_x)}{\mathrm{d}k_x}\right)^{\beta}\left(\frac{\mathbf{i}}{\lambda(k_y)}\frac{\mathrm{d}\lambda(k_y)}{\mathrm{d}k_y}\right)^{\alpha}\right\} \\
&\qquad\times\left|\boldsymbol{l}(k_x)^{\dagger}\boldsymbol{\phi}\right|^2(\boldsymbol{m}(k_y)^{\dagger}\boldsymbol{\phi})^*(\boldsymbol{l}(k_y)^{\dagger}\boldsymbol{\phi})\{l_1(k_x)^*m_2(k_y)^*\pm l_2(k_x)^*m_1(k_y)^*\}\{l_1(k_x)l_2(k_y)\pm l_2(k_x)l_1(k_y)\} \\
&+\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{d}k_x}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{d}k_y}{2\pi}\left\{\left(\frac{\mathbf{i}}{\lambda(k_x)}\frac{\mathrm{d}\lambda(k_x)}{\mathrm{d}k_x}\right)^{\alpha}\left(\frac{\mathbf{i}}{\mu(k_y)}\frac{\mathrm{d}\mu(k_y)}{\mathrm{d}k_y}\right)^{\beta}+\left(\frac{\mathbf{i}}{\lambda(k_x)}\frac{\mathrm{d}\lambda(k_x)}{\mathrm{d}k_x}\right)^{\beta}\left(\frac{\mathbf{i}}{\mu(k_y)}\frac{\mathrm{d}\mu(k_y)}{\mathrm{d}k_y}\right)^{\alpha}\right\} \\
&\qquad\times\left|\boldsymbol{l}(k_x)^{\dagger}\boldsymbol{\phi}\right|^2\left|\boldsymbol{m}(k_y)^{\dagger}\boldsymbol{\phi}\right|^2\{l_1(k_x)^*m_2(k_y)^*\pm l_2(k_x)^*m_1(k_y)^*\}\{l_1(k_x)m_2(k_y)\pm l_2(k_x)m_1(k_y)\} \\
&+\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{d}k_x}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{d}k_y}{2\pi}(\lambda(k_x)^*)^t\mu(k_x)^t(\mu(k_y)^*)^t\lambda(k_y)^t \\
&\times\left\{\left(\frac{\mathbf{i}}{\mu(k_x)}\frac{\mathrm{d}\mu(k_x)}{\mathrm{d}k_x}\right)^{\alpha}\left(\frac{\mathbf{i}}{\lambda(k_y)}\frac{\mathrm{d}\lambda(k_y)}{\mathrm{d}k_y}\right)^{\beta}+\left(\frac{\mathbf{i}}{\mu(k_x)}\frac{\mathrm{d}\mu(k_x)}{\mathrm{d}k_x}\right)^{\beta}\left(\frac{\mathbf{i}}{\lambda(k_y)}\frac{\mathrm{d}\lambda(k_y)}{\mathrm{d}k_y}\right)^{\alpha}\right\} \\
&\quad\times(\boldsymbol{l}(k_x)^{\dagger}\boldsymbol{\phi})^*(\boldsymbol{m}(k_x)^{\dagger}\boldsymbol{\phi})(\boldsymbol{m}(k_y)^{\dagger}\boldsymbol{\phi})^*(\boldsymbol{l}(k_y)^{\dagger}\boldsymbol{\phi})\{l_1(k_x)^*m_2(k_y)^*\pm l_2(k_x)^*m_1(k_y)^*\}\{m_1(k_x)l_2(k_y)\pm m_2(k_x)l_1(k_y)\} \\
&+\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{d}k_x}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{d}k_y}{2\pi}(\lambda(k_x)^*)^t\mu(k_x)^t\left\{\left(\frac{\mathbf{i}}{\mu(k_x)}\frac{\mathrm{d}\mu(k_x)}{\mathrm{d}k_x}\right)^{\alpha}\left(\frac{\mathbf{i}}{\mu(k_y)}\frac{\mathrm{d}\mu(k_y)}{\mathrm{d}k_y}\right)^{\beta}+\left(\frac{\mathbf{i}}{\mu(k_x)}\frac{\mathrm{d}\mu(k_x)}{\mathrm{d}k_x}\right)^{\beta}\left(\frac{\mathbf{i}}{\mu(k_y)}\frac{\mathrm{d}\mu(k_y)}{\mathrm{d}k_y}\right)^{\alpha}\right\} \\
&\qquad\times(\boldsymbol{l}(k_x)^{\dagger}\boldsymbol{\phi})^*(\boldsymbol{m}(k_x)^{\dagger}\boldsymbol{\phi})\left|\boldsymbol{m}(k_y)^{\dagger}\boldsymbol{\phi}\right|^2\{l_1(k_x)^*m_2(k_y)^*\pm l_2(k_x)^*m_1(k_y)^*\}\{m_1(k_x)m_2(k_y)\pm m_2(k_x)m_1(k_y)\} \\
&+\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{d}k_x}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{d}k_y}{2\pi}(\mu(k_x)^*)^t\lambda(k_x)^t\left\{\left(\frac{\mathbf{i}}{\lambda(k_x)}\frac{\mathrm{d}\lambda(k_x)}{\mathrm{d}k_x}\right)^{\alpha}\left(\frac{\mathbf{i}}{\lambda(k_y)}\frac{\mathrm{d}\lambda(k_y)}{\mathrm{d}k_y}\right)^{\beta}+\left(\frac{\mathbf{i}}{\lambda(k_x)}\frac{\mathrm{d}\lambda(k_x)}{\mathrm{d}k_x}\right)^{\beta}\left(\frac{\mathbf{i}}{\lambda(k_y)}\frac{\mathrm{d}\lambda(k_y)}{\mathrm{d}k_y}\right)^{\alpha}\right\} \\
&\qquad\times(\boldsymbol{m}(k_x)^{\dagger}\boldsymbol{\phi})^*(\boldsymbol{l}(k_x)^{\dagger}\boldsymbol{\phi})\left|\boldsymbol{l}(k_y)^{\dagger}\boldsymbol{\phi}\right|^2\{m_1(k_x)^*l_2(k_y)^*\pm m_2(k_x)^*l_1(k_y)^*\}\{l_1(k_x)l_2(k_y)\pm l_2(k_x)l_1(k_y)\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{d}k_x}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{d}k_y}{2\pi}(\mu(k_x)^*)^t\lambda(k_x)^t(\lambda(k_y)^*)^t\mu(k_y)^t\\
&\times\left\{\left(\frac{\mathbf{i}}{\lambda(k_x)}\frac{\mathrm{d}\lambda(k_x)}{\mathrm{d}k_x}\right)^\alpha\left(\frac{\mathbf{i}}{\mu(k_y)}\frac{\mathrm{d}\mu(k_y)}{\mathrm{d}k_y}\right)^\beta+\left(\frac{\mathbf{i}}{\lambda(k_x)}\frac{\mathrm{d}\lambda(k_x)}{\mathrm{d}k_x}\right)^\beta\left(\frac{\mathbf{i}}{\mu(k_y)}\frac{\mathrm{d}\mu(k_y)}{\mathrm{d}k_y}\right)^\alpha\right\}\\
&\quad\times(\boldsymbol{m}(k_x)^\dagger\boldsymbol{\phi})^*(\boldsymbol{l}(k_x)^\dagger\boldsymbol{\phi})(\boldsymbol{l}(k_y)^\dagger\boldsymbol{\phi})^*(\boldsymbol{m}(k_y)^\dagger\boldsymbol{\phi})\{m_1(k_x)^*l_2(k_y)^*\pm m_2(k_x)^*l_1(k_y)^*\}\{l_1(k_x)m_2(k_y)\pm l_2(k_x)m_1(k_y)\}\\
&+\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{d}k_x}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{d}k_y}{2\pi}\left\{\left(\frac{\mathbf{i}}{\mu(k_x)}\frac{\mathrm{d}\mu(k_x)}{\mathrm{d}k_x}\right)^\alpha\left(\frac{\mathbf{i}}{\lambda(k_y)}\frac{\mathrm{d}\lambda(k_y)}{\mathrm{d}k_y}\right)^\beta+\left(\frac{\mathbf{i}}{\mu(k_x)}\frac{\mathrm{d}\mu(k_x)}{\mathrm{d}k_x}\right)^\beta\left(\frac{\mathbf{i}}{\lambda(k_y)}\frac{\mathrm{d}\lambda(k_y)}{\mathrm{d}k_y}\right)^\alpha\right\}\\
&\qquad\times\left|\boldsymbol{m}(k_x)^\dagger\boldsymbol{\phi}\right|^2\left|\boldsymbol{l}(k_y)^\dagger\boldsymbol{\phi}\right|^2\{m_1(k_x)^*l_2(k_y)^*\pm m_2(k_x)^*l_1(k_y)^*\}\{m_1(k_x)l_2(k_y)\pm m_2(k_x)l_1(k_y)\}\\
&+\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{d}k_x}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{d}k_y}{2\pi}(\lambda(k_y)^*)^t\mu(k_y)^t\left\{\left(\frac{\mathbf{i}}{\mu(k_x)}\frac{\mathrm{d}\mu(k_x)}{\mathrm{d}k_x}\right)^\alpha\left(\frac{\mathbf{i}}{\mu(k_y)}\frac{\mathrm{d}\mu(k_y)}{\mathrm{d}k_y}\right)^\beta+\left(\frac{\mathbf{i}}{\mu(k_x)}\frac{\mathrm{d}\mu(k_x)}{\mathrm{d}k_x}\right)^\beta\left(\frac{\mathbf{i}}{\mu(k_y)}\frac{\mathrm{d}\mu(k_y)}{\mathrm{d}k_y}\right)^\alpha\right\}\\
&\qquad\times\left|\boldsymbol{m}(k_x)^\dagger\boldsymbol{\phi}\right|^2(\boldsymbol{l}(k_y)^\dagger\boldsymbol{\phi})^*(\boldsymbol{m}(k_y)^\dagger\boldsymbol{\phi})\{m_1(k_x)^*l_2(k_y)^*\pm m_2(k_x)^*l_1(k_y)^*\}\{m_1(k_x)m_2(k_y)\pm m_2(k_x)m_1(k_y)\}\\
&+\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{d}k_x}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{d}k_y}{2\pi}(\mu(k_x)^*)^t\lambda(k_x)^t(\mu(k_y)^*)^t\lambda(k_y)^t\\
&\times\left\{\left(\frac{\mathbf{i}}{\lambda(k_x)}\frac{\mathrm{d}\lambda(k_x)}{\mathrm{d}k_x}\right)^\alpha\left(\frac{\mathbf{i}}{\lambda(k_y)}\frac{\mathrm{d}\lambda(k_y)}{\mathrm{d}k_y}\right)^\beta+\left(\frac{\mathbf{i}}{\lambda(k_x)}\frac{\mathrm{d}\lambda(k_x)}{\mathrm{d}k_x}\right)^\beta\left(\frac{\mathbf{i}}{\lambda(k_y)}\frac{\mathrm{d}\lambda(k_y)}{\mathrm{d}k_y}\right)^\alpha\right\}\\
&\quad\times(\boldsymbol{m}(k_x)^\dagger\boldsymbol{\phi})^*(\boldsymbol{l}(k_x)^\dagger\boldsymbol{\phi})(\boldsymbol{m}(k_y)^\dagger\boldsymbol{\phi})^*(\boldsymbol{l}(k_y)^\dagger\boldsymbol{\phi})\{m_1(k_x)^*m_2(k_y)^*\pm m_2(k_x)^*m_1(k_y)^*\}\{l_1(k_x)l_2(k_y)\pm l_2(k_x)l_1(k_y)\}\\
&+\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{d}k_x}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{d}k_y}{2\pi}(\mu(k_x)^*)^t\lambda(k_x)^t\left\{\left(\frac{\mathbf{i}}{\lambda(k_x)}\frac{\mathrm{d}\lambda(k_x)}{\mathrm{d}k_x}\right)^\alpha\left(\frac{\mathbf{i}}{\mu(k_y)}\frac{\mathrm{d}\mu(k_y)}{\mathrm{d}k_y}\right)^\beta+\left(\frac{\mathbf{i}}{\lambda(k_x)}\frac{\mathrm{d}\lambda(k_x)}{\mathrm{d}k_x}\right)^\beta\left(\frac{\mathbf{i}}{\mu(k_y)}\frac{\mathrm{d}\mu(k_y)}{\mathrm{d}k_y}\right)^\alpha\right\}\\
&\qquad\times(\boldsymbol{m}(k_x)^\dagger\boldsymbol{\phi})^*(\boldsymbol{l}(k_x)^\dagger\boldsymbol{\phi})\left|\boldsymbol{m}(k_y)^\dagger\boldsymbol{\phi}\right|^2\{m_1(k_x)^*m_2(k_y)^*\pm m_2(k_x)^*m_1(k_y)^*\}\{l_1(k_x)m_2(k_y)\pm l_2(k_x)m_1(k_y)\}\\
&+\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{d}k_x}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{d}k_y}{2\pi}(\mu(k_y)^*)^t\lambda(k_y)^t\left\{\left(\frac{\mathbf{i}}{\mu(k_x)}\frac{\mathrm{d}\mu(k_x)}{\mathrm{d}k_x}\right)^\alpha\left(\frac{\mathbf{i}}{\lambda(k_y)}\frac{\mathrm{d}\lambda(k_y)}{\mathrm{d}k_y}\right)^\beta+\left(\frac{\mathbf{i}}{\mu(k_x)}\frac{\mathrm{d}\mu(k_x)}{\mathrm{d}k_x}\right)^\beta\left(\frac{\mathbf{i}}{\lambda(k_y)}\frac{\mathrm{d}\lambda(k_y)}{\mathrm{d}k_y}\right)^\alpha\right\}\\
&\qquad\times\left|\boldsymbol{m}(k_x)^\dagger\boldsymbol{\phi}\right|^2(\boldsymbol{m}(k_y)^\dagger\boldsymbol{\phi})^*(\boldsymbol{l}(k_y)^\dagger\boldsymbol{\phi})\{m_1(k_x)^*m_2(k_y)^*\pm m_2(k_x)^*m_1(k_y)^*\}\{m_1(k_x)l_2(k_y)\pm m_2(k_x)l_1(k_y)\}\\
&+\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{d}k_x}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{d}k_y}{2\pi}\left\{\left(\frac{\mathbf{i}}{\mu(k_x)}\frac{\mathrm{d}\mu(k_x)}{\mathrm{d}k_x}\right)^\alpha\left(\frac{\mathbf{i}}{\mu(k_y)}\frac{\mathrm{d}\mu(k_y)}{\mathrm{d}k_y}\right)^\beta+\left(\frac{\mathbf{i}}{\mu(k_x)}\frac{\mathrm{d}\mu(k_x)}{\mathrm{d}k_x}\right)^\beta\left(\frac{\mathbf{i}}{\mu(k_y)}\frac{\mathrm{d}\mu(k_y)}{\mathrm{d}k_y}\right)^\alpha\right\}\\
&\qquad\times\left|\boldsymbol{m}(k_x)^\dagger\boldsymbol{\phi}\right|^2\left|\boldsymbol{m}(k_y)^\dagger\boldsymbol{\phi}\right|^2\{m_1(k_x)^*m_2(k_y)^*\pm m_2(k_x)^*m_1(k_y)^*\}\{m_1(k_x)m_2(k_y)\pm m_2(k_x)m_1(k_y)\}\\
&+\mathcal{O}\left(\frac{1}{t}\right)
\end{aligned}
\tag{2.11}
$$

となる.

2.2 計算及び結果

以下では，1次元量子ウォークにおいて極限分布が最も簡単化される $\boldsymbol{\phi}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{\mathbf{i}}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$ かつ $\boldsymbol{U}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$ の場合を考えて，(2.11) の計算を進めることにする．1.2 節で解説したフーリエ解析法を x 方向及び y 方向に適用すると

$$\lambda(k_x)=\frac{\mathbf{i}\sin k_x+\sqrt{1+\cos^2 k_x}}{\sqrt{2}},\quad \lambda(k_y)=\frac{\mathbf{i}\sin k_y+\sqrt{1+\cos^2 k_y}}{\sqrt{2}},$$

$$\mu(k_x)=\frac{\mathbf{i}\sin k_x-\sqrt{1+\cos^2 k_x}}{\sqrt{2}},\quad \mu(k_y)=\frac{\mathbf{i}\sin k_y-\sqrt{1+\cos^2 k_y}}{\sqrt{2}},$$

$$\frac{\mathbf{i}}{\lambda(k_x)}\frac{\mathrm{d}\lambda(k_x)}{\mathrm{d}k_x}=-\frac{\cos k_x}{\sqrt{1+\cos^2 k_x}},\quad \frac{\mathbf{i}}{\lambda(k_y)}\frac{\mathrm{d}\lambda(k_y)}{\mathrm{d}k_y}=-\frac{\cos k_y}{\sqrt{1+\cos^2 k_y}},$$

$$\frac{\mathbf{i}}{\mu(k_x)}\frac{\mathrm{d}\mu(k_x)}{\mathrm{d}k_x}=\frac{\cos k_x}{\sqrt{1+\cos^2 k_x}},\quad \frac{\mathbf{i}}{\mu(k_y)}\frac{\mathrm{d}\mu(k_y)}{\mathrm{d}k_y}=\frac{\cos k_y}{\sqrt{1+\cos^2 k_y}},$$

$$l_1(k_x)=\sqrt{\frac{\sqrt{1+\cos^2 k_x}+\cos k_x}{2\sqrt{1+\cos^2 k_x}}}\,\mathbf{e}^{\mathbf{i}k_x},\quad l_1(k_y)=\sqrt{\frac{\sqrt{1+\cos^2 k_y}+\cos k_y}{2\sqrt{1+\cos^2 k_y}}}\,\mathbf{e}^{\mathbf{i}k_y},$$

$$l_2(k_x)=\sqrt{\frac{\sqrt{1+\cos^2 k_x}-\cos k_x}{2\sqrt{1+\cos^2 k_x}}},\quad l_2(k_y)=\sqrt{\frac{\sqrt{1+\cos^2 k_y}-\cos k_y}{2\sqrt{1+\cos^2 k_y}}}$$

$$m_1(k_x)=\sqrt{\frac{\sqrt{1+\cos^2 k_x}-\cos k_x}{2\sqrt{1+\cos^2 k_x}}}\,\mathbf{e}^{\mathbf{i}k_x},\quad m_1(k_y)=\sqrt{\frac{\sqrt{1+\cos^2 k_y}-\cos k_y}{2\sqrt{1+\cos^2 k_y}}}\,\mathbf{e}^{\mathbf{i}k_y},$$

$$m_2(k_x)=-\sqrt{\frac{\sqrt{1+\cos^2 k_x}+\cos k_x}{2\sqrt{1+\cos^2 k_x}}},\quad m_2(k_y)=-\sqrt{\frac{\sqrt{1+\cos^2 k_y}+\cos k_y}{2\sqrt{1+\cos^2 k_y}}},$$

$$\boldsymbol{l}(k_x)^\dagger\boldsymbol{\phi}=\sqrt{\frac{\sqrt{1+\cos^2 k_x}+\cos k_x}{2\sqrt{1+\cos^2 k_x}}}\left\{\frac{\mathbf{e}^{-\mathbf{i}k_x}}{\sqrt{2}}+\frac{\mathbf{i}}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{1+\cos^2 k_x}-\cos k_x\right)\right\},$$

$$\boldsymbol{l}(k_y)^\dagger\boldsymbol{\phi}=\sqrt{\frac{\sqrt{1+\cos^2 k_y}+\cos k_y}{2\sqrt{1+\cos^2 k_y}}}\left\{\frac{\mathbf{e}^{-\mathbf{i}k_y}}{\sqrt{2}}+\frac{\mathbf{i}}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{1+\cos^2 k_y}-\cos k_y\right)\right\},$$

$$\boldsymbol{m}(k_x)^\dagger\boldsymbol{\phi}=\sqrt{\frac{\sqrt{1+\cos^2 k_x}-\cos k_x}{2\sqrt{1+\cos^2 k_x}}}\left\{\frac{\mathbf{e}^{-\mathbf{i}k_x}}{\sqrt{2}}-\frac{\mathbf{i}}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{1+\cos^2 k_x}+\cos k_x\right)\right\},$$

$$\boldsymbol{m}(k_y)^\dagger\boldsymbol{\phi}=\sqrt{\frac{\sqrt{1+\cos^2 k_y}-\cos k_y}{2\sqrt{1+\cos^2 k_y}}}\left\{\frac{\mathbf{e}^{-\mathbf{i}k_y}}{\sqrt{2}}-\frac{\mathbf{i}}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{1+\cos^2 k_y}+\cos k_y\right)\right\},$$

$$\left|\boldsymbol{l}(k_x)^\dagger\boldsymbol{\phi}\right|^2=\frac{\sqrt{1+\cos^2 k_x}-\sin k_x}{2\sqrt{1+\cos^2 k_x}},\quad \left|\boldsymbol{l}(k_y)^\dagger\boldsymbol{\phi}\right|^2=\frac{\sqrt{1+\cos^2 k_y}-\sin k_y}{2\sqrt{1+\cos^2 k_y}},$$

$$
\left|\boldsymbol{m}(k_x)^\dagger\boldsymbol{\phi}\right|^2 = \frac{\sqrt{1+\cos^2 k_x}+\sin k_x}{2\sqrt{1+\cos^2 k_x}}, \quad \left|\boldsymbol{m}(k_y)^\dagger\boldsymbol{\phi}\right|^2 = \frac{\sqrt{1+\cos^2 k_y}+\sin k_y}{2\sqrt{1+\cos^2 k_y}}
$$

となる．これらを用いると結合モーメントに対する長時間評価として

$$
\begin{aligned}
&\left\langle \left(\frac{X_{\mathbf{P}}(t)}{t}\right)^\alpha \left(\frac{Y_{\mathbf{P}}(t)}{t}\right)^\beta + \left(\frac{X_{\mathbf{P}}(t)}{t}\right)^\beta \left(\frac{Y_{\mathbf{P}}(t)}{t}\right)^\alpha \right\rangle \\
&= \int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{d}k_x}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{d}k_y}{2\pi}\left\{\left(-\frac{\cos k_x}{\sqrt{1+\cos^2 k_x}}\right)^\alpha\left(-\frac{\cos k_y}{\sqrt{1+\cos^2 k_y}}\right)^\beta + \left(-\frac{\cos k_x}{\sqrt{1+\cos^2 k_x}}\right)^\beta\left(-\frac{\cos k_y}{\sqrt{1+\cos^2 k_y}}\right)^\alpha\right\} \\
&\times \frac{\sqrt{1+\cos^2 k_x}-\sin k_x}{2\sqrt{1+\cos^2 k_x}} \times \frac{\sqrt{1+\cos^2 k_y}-\sin k_y}{2\sqrt{1+\cos^2 k_y}} \\
&\times \frac{\sqrt{1+\cos^2 k_x}\sqrt{1+\cos^2 k_y}-\cos k_x\cos k_y \pm \cos(k_x-k_y)}{2\sqrt{1+\cos^2 k_x}\sqrt{1+\cos^2 k_y}} \\
&\quad + \int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{d}k_x}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{d}k_y}{2\pi}\left\{\lambda(k_y)^*\mu(k_y)\right\}^t \\
&\quad \times \left\{\left(-\frac{\cos k_x}{\sqrt{1+\cos^2 k_x}}\right)^\alpha\left(\frac{\cos k_y}{\sqrt{1+\cos^2 k_y}}\right)^\beta + \left(-\frac{\cos k_x}{\sqrt{1+\cos^2 k_x}}\right)^\beta\left(\frac{\cos k_y}{\sqrt{1+\cos^2 k_y}}\right)^\alpha\right\} \\
&\quad \times \frac{\cos k_y(\sqrt{1+\cos^2 k_x}-\sin k_x)(\sin k_y - \mathbf{i}\sqrt{1+\cos^2 k_y})}{4\sqrt{1+\cos^2 k_x}\sqrt{1+\cos^2 k_y}} \\
&\quad \times \frac{-\cos k_x \mp \mathbf{i}\sin(k_x-k_y)\sqrt{1+\cos^2 k_y} \mp \cos k_y\cos(k_x-k_y)}{2\sqrt{1+\cos^2 k_x}\sqrt{1+\cos^2 k_y}} \\
&\quad + \int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{d}k_x}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{d}k_y}{2\pi}\left\{\lambda(k_x)^*\mu(k_x)\right\}^t \\
&\quad \times \left\{\left(\frac{\cos k_x}{\sqrt{1+\cos^2 k_x}}\right)^\alpha\left(-\frac{\cos k_y}{\sqrt{1+\cos^2 k_y}}\right)^\beta + \left(\frac{\cos k_x}{\sqrt{1+\cos^2 k_x}}\right)^\beta\left(-\frac{\cos k_y}{\sqrt{1+\cos^2 k_y}}\right)^\alpha\right\} \\
&\quad \times \frac{\cos k_x(\sqrt{1+\cos^2 k_y}-\sin k_y)(\sin k_x - \mathbf{i}\sqrt{1+\cos^2 k_x})}{4\sqrt{1+\cos^2 k_x}\sqrt{1+\cos^2 k_y}} \\
&\quad \times \frac{-\cos k_y \pm \mathbf{i}\sin(k_x-k_y)\sqrt{1+\cos^2 k_x} \mp \cos k_x\cos(k_x-k_y)}{2\sqrt{1+\cos^2 k_x}\sqrt{1+\cos^2 k_y}} \\
&\qquad + \int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{d}k_x}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{d}k_y}{2\pi}\left\{\lambda(k_x)^*\mu(k_x)\lambda(k_y)^*\mu(k_y)\right\}^t \\
&\qquad \times \left\{\left(\frac{\cos k_x}{\sqrt{1+\cos^2 k_x}}\right)^\alpha\left(\frac{\cos k_y}{\sqrt{1+\cos^2 k_y}}\right)^\beta + \left(\frac{\cos k_x}{\sqrt{1+\cos^2 k_x}}\right)^\beta\left(\frac{\cos k_y}{\sqrt{1+\cos^2 k_y}}\right)^\alpha\right\} \\
&\qquad \times \frac{-\cos k_x\cos k_y\left(\sqrt{1+\cos^2 k_x}+\mathbf{i}\sin k_x\right)\left(\sqrt{1+\cos^2 k_y}+\mathbf{i}\sin k_y\right)}{4\sqrt{1+\cos^2 k_x}\sqrt{1+\cos^2 k_y}} \\
&\qquad \times \left\{\frac{-1 \mp \sqrt{1+\cos^2 k_x}\sqrt{1+\cos^2 k_y}\cos(k_x-k_y) \pm \cos k_x\cos k_y\cos(k_x-k_y)}{2\sqrt{1+\cos^2 k_x}\sqrt{1+\cos^2 k_y}}\right. \\
&\qquad\qquad \left. \mp \frac{\mathbf{i}\sin(k_x-k_y)\left(\cos k_y\sqrt{1+\cos^2 k_x}-\cos k_x\sqrt{1+\cos^2 k_y}\right)}{2\sqrt{1+\cos^2 k_x}\sqrt{1+\cos^2 k_y}}\right\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{d}k_x}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{d}k_y}{2\pi}\left\{\mu(k_y)^*\lambda(k_y)\right\}^t \\
&\times\left\{\left(-\frac{\cos k_x}{\sqrt{1+\cos^2 k_x}}\right)^{\alpha}\left(-\frac{\cos k_y}{\sqrt{1+\cos^2 k_y}}\right)^{\beta}+\left(-\frac{\cos k_x}{\sqrt{1+\cos^2 k_x}}\right)^{\beta}\left(-\frac{\cos k_y}{\sqrt{1+\cos^2 k_y}}\right)^{\alpha}\right\} \\
&\times\frac{\cos k_y(\sqrt{1+\cos^2 k_x}-\sin k_x)(\sin k_y+\mathbf{i}\sqrt{1+\cos^2 k_y})}{4\sqrt{1+\cos^2 k_x}\sqrt{1+\cos^2 k_y}} \\
&\times\frac{-\cos k_x\pm\mathbf{i}\sin(k_x-k_y)\sqrt{1+\cos^2 k_y}\mp\cos k_y\cos(k_x-k_y)}{2\sqrt{1+\cos^2 k_x}\sqrt{1+\cos^2 k_y}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{d}k_x}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{d}k_y}{2\pi}\left\{\left(-\frac{\cos k_x}{\sqrt{1+\cos^2 k_x}}\right)^{\alpha}\left(\frac{\cos k_y}{\sqrt{1+\cos^2 k_y}}\right)^{\beta}+\left(-\frac{\cos k_x}{\sqrt{1+\cos^2 k_x}}\right)^{\beta}\left(\frac{\cos k_y}{\sqrt{1+\cos^2 k_y}}\right)^{\alpha}\right\} \\
&\times\frac{\sqrt{1+\cos^2 k_x}-\sin k_x}{2\sqrt{1+\cos^2 k_x}}\times\frac{\sqrt{1+\cos^2 k_y}+\sin k_y}{2\sqrt{1+\cos^2 k_y}} \\
&\times\frac{\sqrt{1+\cos^2 k_x}\sqrt{1+\cos^2 k_y}+\cos k_x\cos k_y\mp\cos(k_x-k_y)}{2\sqrt{1+\cos^2 k_x}\sqrt{1+\cos^2 k_y}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{d}k_x}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{d}k_y}{2\pi}\left\{\lambda(k_x)^*\mu(k_x)\mu(k_y)^*\lambda(k_y)\right\}^t \\
&\times\left\{\left(\frac{\cos k_x}{\sqrt{1+\cos^2 k_x}}\right)^{\alpha}\left(-\frac{\cos k_y}{\sqrt{1+\cos^2 k_y}}\right)^{\beta}+\left(\frac{\cos k_x}{\sqrt{1+\cos^2 k_x}}\right)^{\beta}\left(-\frac{\cos k_y}{\sqrt{1+\cos^2 k_y}}\right)^{\alpha}\right\} \\
&\times\frac{\cos k_x\cos k_y\left(\sqrt{1+\cos^2 k_x}+\mathbf{i}\sin k_x\right)\left(\sqrt{1+\cos^2 k_y}-\mathbf{i}\sin k_y\right)}{4\sqrt{1+\cos^2 k_x}\sqrt{1+\cos^2 k_y}} \\
&\times\left\{\frac{-1\pm\sqrt{1+\cos^2 k_x}\sqrt{1+\cos^2 k_y}\cos(k_x-k_y)\pm\cos k_x\cos k_y\cos(k_x-k_y)}{2\sqrt{1+\cos^2 k_x}\sqrt{1+\cos^2 k_y}}\right. \\
&\qquad\left.\mp\frac{\mathbf{i}\sin(k_x-k_y)\left(\cos k_y\sqrt{1+\cos^2 k_x}+\cos k_x\sqrt{1+\cos^2 k_y}\right)}{2\sqrt{1+\cos^2 k_x}\sqrt{1+\cos^2 k_y}}\right\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{d}k_x}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{d}k_y}{2\pi}\left\{\lambda(k_x)^*\mu(k_x)\right\}^t \\
&\times\left\{\left(\frac{\cos k_x}{\sqrt{1+\cos^2 k_x}}\right)^{\alpha}\left(\frac{\cos k_y}{\sqrt{1+\cos^2 k_y}}\right)^{\beta}+\left(\frac{\cos k_x}{\sqrt{1+\cos^2 k_x}}\right)^{\beta}\left(\frac{\cos k_y}{\sqrt{1+\cos^2 k_y}}\right)^{\alpha}\right\} \\
&\times\frac{\cos k_x(\sqrt{1+\cos^2 k_y}+\sin k_y)(\sin k_x-\mathbf{i}\sqrt{1+\cos^2 k_x})}{4\sqrt{1+\cos^2 k_x}\sqrt{1+\cos^2 k_y}} \\
&\times\frac{\cos k_y\mp\mathbf{i}\sin(k_x-k_y)\sqrt{1+\cos^2 k_x}\pm\cos k_x\cos(k_x-k_y)}{2\sqrt{1+\cos^2 k_x}\sqrt{1+\cos^2 k_y}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{d}k_x}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{d}k_y}{2\pi}\left\{\mu(k_x)^*\lambda(k_x)\right\}^t \\
&\times\left\{\left(-\frac{\cos k_x}{\sqrt{1+\cos^2 k_x}}\right)^{\alpha}\left(-\frac{\cos k_y}{\sqrt{1+\cos^2 k_y}}\right)^{\beta}+\left(-\frac{\cos k_x}{\sqrt{1+\cos^2 k_x}}\right)^{\beta}\left(-\frac{\cos k_y}{\sqrt{1+\cos^2 k_y}}\right)^{\alpha}\right\} \\
&\times\frac{\cos k_x(\sqrt{1+\cos^2 k_y}-\sin k_y)(\sin k_x+\mathbf{i}\sqrt{1+\cos^2 k_x})}{4\sqrt{1+\cos^2 k_x}\sqrt{1+\cos^2 k_y}} \\
&\times\frac{-\cos k_y\mp\mathbf{i}\sin(k_x-k_y)\sqrt{1+\cos^2 k_x}\mp\cos k_x\cos(k_x-k_y)}{2\sqrt{1+\cos^2 k_x}\sqrt{1+\cos^2 k_y}} \\
&\quad+\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{d}k_x}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{d}k_y}{2\pi}\left\{\mu(k_x)^*\lambda(k_x)\lambda(k_y)^*\mu(k_y)\right\}^t \\
&\quad\times\left\{\left(-\frac{\cos k_x}{\sqrt{1+\cos^2 k_x}}\right)^{\alpha}\left(\frac{\cos k_y}{\sqrt{1+\cos^2 k_y}}\right)^{\beta}+\left(-\frac{\cos k_x}{\sqrt{1+\cos^2 k_x}}\right)^{\beta}\left(\frac{\cos k_y}{\sqrt{1+\cos^2 k_y}}\right)^{\alpha}\right\} \\
&\quad\times\frac{\cos k_x\cos k_y\left(\sqrt{1+\cos^2 k_x}-\mathbf{i}\sin k_x\right)\left(\sqrt{1+\cos^2 k_y}+\mathbf{i}\sin k_y\right)}{4\sqrt{1+\cos^2 k_x}\sqrt{1+\cos^2 k_y}} \\
&\quad\times\left\{\frac{-1\pm\sqrt{1+\cos^2 k_x}\sqrt{1+\cos^2 k_y}\cos(k_x-k_y)\pm\cos k_x\cos k_y\cos(k_x-k_y)}{2\sqrt{1+\cos^2 k_x}\sqrt{1+\cos^2 k_y}}\right. \\
&\qquad\left.\pm\frac{\mathbf{i}\sin(k_x-k_y)\left(\cos k_y\sqrt{1+\cos^2 k_x}+\cos k_x\sqrt{1+\cos^2 k_y}\right)}{2\sqrt{1+\cos^2 k_x}\sqrt{1+\cos^2 k_y}}\right\} \\
+&\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{d}k_x}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{d}k_y}{2\pi}\left\{\left(\frac{\cos k_x}{\sqrt{1+\cos^2 k_x}}\right)^{\alpha}\left(-\frac{\cos k_y}{\sqrt{1+\cos^2 k_y}}\right)^{\beta}+\left(\frac{\cos k_x}{\sqrt{1+\cos^2 k_x}}\right)^{\beta}\left(-\frac{\cos k_y}{\sqrt{1+\cos^2 k_y}}\right)^{\alpha}\right\} \\
\times&\frac{\sqrt{1+\cos^2 k_x}+\sin k_x}{2\sqrt{1+\cos^2 k_x}}\times\frac{\sqrt{1+\cos^2 k_y}-\sin k_y}{2\sqrt{1+\cos^2 k_y}} \\
\times&\frac{\sqrt{1+\cos^2 k_x}\sqrt{1+\cos^2 k_y}+\cos k_x\cos k_y\mp\cos(k_x-k_y)}{2\sqrt{1+\cos^2 k_x}\sqrt{1+\cos^2 k_y}} \\
&\quad+\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{d}k_x}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{d}k_y}{2\pi}\left\{\lambda(k_y)^*\mu(k_y)\right\}^t \\
&\quad\times\left\{\left(\frac{\cos k_x}{\sqrt{1+\cos^2 k_x}}\right)^{\alpha}\left(\frac{\cos k_y}{\sqrt{1+\cos^2 k_y}}\right)^{\beta}+\left(\frac{\cos k_x}{\sqrt{1+\cos^2 k_x}}\right)^{\beta}\left(\frac{\cos k_y}{\sqrt{1+\cos^2 k_y}}\right)^{\alpha}\right\} \\
&\quad\times\frac{\cos k_y(\sqrt{1+\cos^2 k_x}+\sin k_x)(\sin k_y-\mathbf{i}\sqrt{1+\cos^2 k_y})}{4\sqrt{1+\cos^2 k_x}\sqrt{1+\cos^2 k_y}} \\
&\quad\times\frac{\cos k_x\pm\mathbf{i}\sin(k_x-k_y)\sqrt{1+\cos^2 k_y}\pm\cos k_y\cos(k_x-k_y)}{2\sqrt{1+\cos^2 k_x}\sqrt{1+\cos^2 k_y}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{d}k_x}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{d}k_y}{2\pi}\left\{\mu(k_x)^*\lambda(k_x)\mu(k_y)^*\lambda(k_y)\right\}^t\\
&\times\left\{\left(-\frac{\cos k_x}{\sqrt{1+\cos^2 k_x}}\right)^{\alpha}\left(-\frac{\cos k_y}{\sqrt{1+\cos^2 k_y}}\right)^{\beta}+\left(-\frac{\cos k_x}{\sqrt{1+\cos^2 k_x}}\right)^{\beta}\left(-\frac{\cos k_y}{\sqrt{1+\cos^2 k_y}}\right)^{\alpha}\right\}\\
&\times\frac{-\cos k_x\cos k_y\left(\sqrt{1+\cos^2 k_x}-\mathbf{i}\sin k_x\right)\left(\sqrt{1+\cos^2 k_y}-\mathbf{i}\sin k_y\right)}{4\sqrt{1+\cos^2 k_x}\sqrt{1+\cos^2 k_y}}\\
&\times\left\{\frac{-1\mp\sqrt{1+\cos^2 k_x}\sqrt{1+\cos^2 k_y}\cos(k_x-k_y)\pm\cos k_x\cos k_y\cos(k_x-k_y)}{2\sqrt{1+\cos^2 k_x}\sqrt{1+\cos^2 k_y}}\right.\\
&\qquad\left.\pm\frac{\mathbf{i}\sin(k_x-k_y)\left(\cos k_y\sqrt{1+\cos^2 k_x}-\cos k_x\sqrt{1+\cos^2 k_y}\right)}{2\sqrt{1+\cos^2 k_x}\sqrt{1+\cos^2 k_y}}\right\}\\
&\quad+\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{d}k_x}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{d}k_y}{2\pi}\left\{\mu(k_x)^*\lambda(k_x)\right\}^t\\
&\quad\times\left\{\left(-\frac{\cos k_x}{\sqrt{1+\cos^2 k_x}}\right)^{\alpha}\left(\frac{\cos k_y}{\sqrt{1+\cos^2 k_y}}\right)^{\beta}+\left(-\frac{\cos k_x}{\sqrt{1+\cos^2 k_x}}\right)^{\beta}\left(\frac{\cos k_y}{\sqrt{1+\cos^2 k_y}}\right)^{\alpha}\right\}\\
&\quad\times\frac{\cos k_x(\sqrt{1+\cos^2 k_y}+\sin k_y)(\sin k_x+\mathbf{i}\sqrt{1+\cos^2 k_x})}{4\sqrt{1+\cos^2 k_x}\sqrt{1+\cos^2 k_y}}\\
&\quad\times\frac{\cos k_y\pm\mathbf{i}\sin(k_x-k_y)\sqrt{1+\cos^2 k_x}\pm\cos k_x\cos(k_x-k_y)}{2\sqrt{1+\cos^2 k_x}\sqrt{1+\cos^2 k_y}}\\
&\quad+\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{d}k_x}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{d}k_y}{2\pi}\left\{\mu(k_y)^*\lambda(k_y)\right\}^t\\
&\quad\times\left\{\left(\frac{\cos k_x}{\sqrt{1+\cos^2 k_x}}\right)^{\alpha}\left(-\frac{\cos k_y}{\sqrt{1+\cos^2 k_y}}\right)^{\beta}+\left(\frac{\cos k_x}{\sqrt{1+\cos^2 k_x}}\right)^{\beta}\left(-\frac{\cos k_y}{\sqrt{1+\cos^2 k_y}}\right)^{\alpha}\right\}\\
&\quad\times\frac{\cos k_y(\sqrt{1+\cos^2 k_x}+\sin k_x)(\sin k_y+\mathbf{i}\sqrt{1+\cos^2 k_y})}{4\sqrt{1+\cos^2 k_x}\sqrt{1+\cos^2 k_y}}\\
&\quad\times\frac{\cos k_x\mp\mathbf{i}\sin(k_x-k_y)\sqrt{1+\cos^2 k_y}\pm\cos k_y\cos(k_x-k_y)}{2\sqrt{1+\cos^2 k_x}\sqrt{1+\cos^2 k_y}}\\
+&\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{d}k_x}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{d}k_y}{2\pi}\left\{\left(\frac{\cos k_x}{\sqrt{1+\cos^2 k_x}}\right)^{\alpha}\left(\frac{\cos k_y}{\sqrt{1+\cos^2 k_y}}\right)^{\beta}+\left(\frac{\cos k_x}{\sqrt{1+\cos^2 k_x}}\right)^{\beta}\left(\frac{\cos k_y}{\sqrt{1+\cos^2 k_y}}\right)^{\alpha}\right\}\\
\times&\frac{\sqrt{1+\cos^2 k_x}+\sin k_x}{2\sqrt{1+\cos^2 k_x}}\times\frac{\sqrt{1+\cos^2 k_y}+\sin k_y}{2\sqrt{1+\cos^2 k_y}}\\
\times&\frac{\sqrt{1+\cos^2 k_x}\sqrt{1+\cos^2 k_y}-\cos k_x\cos k_y\pm\cos(k_x-k_y)}{2\sqrt{1+\cos^2 k_x}\sqrt{1+\cos^2 k_y}}\\
+&\mathcal{O}\left(\frac{1}{t}\right)
\end{aligned}
\tag{2.12}
$$

が得られる.

次に1次元量子ウォークに対する計算 [1, 2, 6] と同様に，$(k_x, k_y) \mapsto (v_x, v_y)$ へ

$$-\frac{\cos k_x}{\sqrt{1+\cos^2 k_x}} = v_x, \quad -\frac{\cos k_y}{\sqrt{1+\cos^2 k_y}} = v_y \tag{2.13}$$

に従って変数変換する．すると

$$\sqrt{1+\cos^2 k_x} = \frac{1}{\sqrt{1-v_x^2}}, \quad \sqrt{1+\cos^2 k_y} = \frac{1}{\sqrt{1-v_y^2}},$$

$$\cos k_x = -\frac{v_x}{\sqrt{1-v_x^2}}, \quad \cos k_y = -\frac{v_y}{\sqrt{1-v_y^2}},$$

$$\sin k_x = \frac{\sqrt{1-2v_x^2}}{\sqrt{1-v_x^2}}, \quad \sin k_y = \frac{\sqrt{1-2v_y^2}}{\sqrt{1-v_y^2}},$$

$$\cos k_x \cos k_y = \frac{v_x v_y}{\sqrt{1-v_x^2}\sqrt{1-v_y^2}}, \quad \sin k_x \sin k_y = \frac{\sqrt{1-2v_x^2}\sqrt{1-2v_y^2}}{\sqrt{1-v_x^2}\sqrt{1-v_y^2}},$$

$$\cos(k_x - k_y) = \frac{v_x v_y + \sqrt{1-2v_x^2}\sqrt{1-2v_y^2}}{\sqrt{1-v_x^2}\sqrt{1-v_y^2}}, \quad \sin(k_x - k_y) = \frac{-v_y\sqrt{1-2v_x^2} + v_x\sqrt{1-2v_y^2}}{\sqrt{1-v_x^2}\sqrt{1-v_y^2}}$$

となる．$\lambda(k)$ 及び $\mu(k)$ は絶対値が1の複素数であるから $\lambda(k)^*\mu(k)$ も同様である．よって

$$\lambda(k)^*\mu(k) = -\frac{\left(\mathbf{i}\sin k - \sqrt{1+\cos^2 k}\right)^2}{2} = -\frac{\left(\mathbf{i}\sqrt{1-2v^2} - 1\right)^2}{2(1-v^2)} = \mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta(v)}$$

と書ける．これを x 方向及び y 方向にそれぞれ適用すると

$$\lambda(k_x)^*\mu(k_x) = -\frac{\left(\mathbf{i}\sqrt{1-2v_x^2} - 1\right)^2}{2(1-v_x^2)} = \mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta_x(v_x)},$$

$$\lambda(k_y)^*\mu(k_y) = -\frac{\left(\mathbf{i}\sqrt{1-2v_y^2} - 1\right)^2}{2(1-v_y^2)} = \mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta_y(v_y)}$$

と書ける．また

$$\frac{\partial k_x}{\partial v_x} = \frac{1}{(1-v_x^2)\sqrt{1-2v_x^2}}, \quad \frac{\partial k_y}{\partial v_y} = \frac{1}{(1-v_y^2)\sqrt{1-2v_y^2}},$$

$$\left|\det\begin{pmatrix} \frac{\partial k_x}{\partial v_x} & \frac{\partial k_x}{\partial v_y} \\ \frac{\partial k_y}{\partial v_x} & \frac{\partial k_y}{\partial v_y} \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{(1-v_x^2)\sqrt{1-2v_x^2}(1-v_y^2)\sqrt{1-2v_y^2}}$$

であるから，指示関数を含めてヤコビアンは

$$|J| = \frac{1}{(1-v_x^2)\sqrt{1-2v_x^2}(1-v_y^2)\sqrt{1-2v_y^2}} \mathbb{1}\left(|v_x| < \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \mathbb{1}\left(|v_y| < \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \tag{2.14}$$

となる．

これらを用いると結合モーメントに対して

$$\left\langle \left(\frac{X_{\mathbf{P}}(t)}{t}\right)^{\alpha}\left(\frac{Y_{\mathbf{P}}(t)}{t}\right)^{\beta}+\left(\frac{X_{\mathbf{P}}(t)}{t}\right)^{\beta}\left(\frac{Y_{\mathbf{P}}(t)}{t}\right)^{\alpha}\right\rangle$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}v_x}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}v_y}{2\pi}\left\{v_x^{\alpha}v_y^{\beta}+v_x^{\beta}v_y^{\alpha}\right\}|J|$$

$$\times\frac{1}{4}\left(1+\sqrt{(1-2v_x^2)(1-2v_y^2)}-\sqrt{1-2v_y^2}-\sqrt{1-2v_x^2}\right)\times\frac{1}{2}\left(1-v_xv_y\pm v_xv_y\pm\sqrt{(1-2v_x^2)(1-2v_y^2)}\right)$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}v_x}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}v_y}{2\pi}\left\{v_x^{\alpha}(-v_y)^{\beta}+v_x^{\beta}(-v_y)^{\alpha}\right\}|J|\,\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta_y(v_y)t}$$

$$\times\frac{1}{\sqrt{1-v_y^2}}\times\frac{1}{4}\left(-\sqrt{1-2v_y^2}+\mathbf{i}+\sqrt{(1-2v_x^2)(1-2v_y^2)}-\mathbf{i}\sqrt{1-2v_x^2}\right)$$

$$\times\frac{1}{\sqrt{1-v_y^2}}\times\frac{1}{2}\left\{v_x(1-v_y^2)\mp\mathbf{i}\left(-v_y\sqrt{1-2v_x^2}+v_x\sqrt{1-2v_y^2}\right)\pm v_y\left(v_xv_y+\sqrt{(1-2v_x^2)(1-2v_y^2)}\right)\right\}$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}v_x}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}v_y}{2\pi}\left\{(-v_x)^{\alpha}v_y^{\beta}+(-v_x)^{\beta}v_y^{\alpha}\right\}|J|\,\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta_x(v_x)t}$$

$$\times\frac{1}{\sqrt{1-v_x^2}}\times\frac{1}{4}\left(-\sqrt{1-2v_x^2}+\mathbf{i}+\sqrt{(1-2v_x^2)(1-2v_y^2)}-\mathbf{i}\sqrt{1-2v_y^2}\right)$$

$$\times\frac{1}{\sqrt{1-v_x^2}}\times\frac{1}{2}\left\{v_y(1-v_x^2)\pm\mathbf{i}\left(-v_y\sqrt{1-2v_x^2}+v_x\sqrt{1-2v_y^2}\right)\pm v_x\left(v_xv_y+\sqrt{(1-2v_x^2)(1-2v_y^2)}\right)\right\}$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}v_x}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}v_y}{2\pi}\left\{(-v_x)^{\alpha}(-v_y)^{\beta}+(-v_x)^{\beta}(-v_y)^{\alpha}\right\}|J|\,\mathbf{e}^{\mathbf{i}\{\theta_x(v_x)+\theta_y(v_y)\}t}$$

$$\times\frac{1}{\sqrt{(1-v_x^2)(1-v_y^2)}}\times\frac{1}{4}\left(-v_xv_y-\mathbf{i}v_xv_y\sqrt{1-2v_y^2}-\mathbf{i}v_xv_y\sqrt{1-2v_x^2}+v_xv_y\sqrt{(1-2v_x^2)(1-2v_y^2)}\right)$$

$$\times\frac{1}{\sqrt{(1-v_x^2)(1-v_y^2)}}\times\frac{1}{2}\left\{-(1-v_x^2)(1-v_y^2)\mp v_xv_y\mp\sqrt{(1-2v_x^2)(1-2v_y^2)}\pm v_x^2v_y^2\pm v_xv_y\sqrt{(1-2v_x^2)(1-2v_y^2)}\right.$$

$$\left.\mp\mathbf{i}(v_x-v_y)\left(-v_y\sqrt{1-2v_x^2}+v_x\sqrt{1-2v_y^2}\right)\right\}$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}v_x}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}v_y}{2\pi}\left\{v_x^{\alpha}v_y^{\beta}+v_x^{\beta}v_y^{\alpha}\right\}|J|\,\mathbf{e}^{-\mathbf{i}\theta_y(v_y)t}$$

$$\times\frac{1}{\sqrt{1-v_y^2}}\times\frac{1}{4}\left(-\sqrt{1-2v_y^2}-\mathbf{i}+\sqrt{(1-2v_x^2)(1-2v_y^2)}+\mathbf{i}\sqrt{1-2v_x^2}\right)$$

$$\times\frac{1}{\sqrt{1-v_y^2}}\times\frac{1}{2}\left\{v_x(1-v_y^2)\pm\mathbf{i}\left(-v_y\sqrt{1-2v_x^2}+v_x\sqrt{1-2v_y^2}\right)\pm v_y\left(v_xv_y+\sqrt{(1-2v_x^2)(1-2v_y^2)}\right)\right\}$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}v_x}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}v_y}{2\pi}\left\{v_x^{\alpha}(-v_y)^{\beta}+v_x^{\beta}(-v_y)^{\alpha}\right\}|J|$$

$$\times\frac{1}{4}\left(1-\sqrt{(1-2v_x^2)(1-2v_y^2)}+\sqrt{1-2v_y^2}-\sqrt{1-2v_x^2}\right)\times\frac{1}{2}\left(1+v_xv_y\mp v_xv_y\mp\sqrt{(1-2v_x^2)(1-2v_y^2)}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}v_x}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}v_y}{2\pi}\left\{(-v_x)^{\alpha}v_y^{\beta}+(-v_x)^{\beta}v_y^{\alpha}\right\}|J|\,\mathbf{e}^{\mathbf{i}\{\theta_x(v_x)-\theta_y(v_y)\}t}\\
&\times\frac{1}{\sqrt{(1-v_x^2)(1-v_y^2)}}\times\frac{1}{4}\left(v_xv_y-\mathbf{i}v_xv_y\sqrt{1-2v_y^2}+\mathbf{i}v_xv_y\sqrt{1-2v_x^2}+v_xv_y\sqrt{(1-2v_x^2)(1-2v_y^2)}\right)\\
&\times\frac{1}{\sqrt{(1-v_x^2)(1-v_y^2)}}\times\frac{1}{2}\left\{-(1-v_x^2)(1-v_y^2)\pm v_xv_y\pm\sqrt{(1-2v_x^2)(1-2v_y^2)}\pm v_x^2v_y^2\pm v_xv_y\sqrt{(1-2v_x^2)(1-2v_y^2)}\right.\\
&\left.\mp(-\mathbf{i})(v_x+v_y)\left(-v_y\sqrt{1-2v_x^2}+v_x\sqrt{1-2v_y^2}\right)\right\}\\
&+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}v_x}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}v_y}{2\pi}\left\{(-v_x)^{\alpha}(-v_y)^{\beta}+(-v_x)^{\beta}(-v_y)^{\alpha}\right\}|J|\,\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta_x(v_x)t}\\
&\times\frac{1}{\sqrt{1-v_x^2}}\times\frac{1}{4}\left(-\sqrt{1-2v_x^2}+\mathbf{i}-\sqrt{(1-2v_x^2)(1-2v_y^2)}+\mathbf{i}\sqrt{1-2v_y^2}\right)\\
&\times\frac{1}{\sqrt{1-v_x^2}}\times\frac{1}{2}\left\{-v_y(1-v_x^2)\mp\mathbf{i}\left(-v_y\sqrt{1-2v_x^2}+v_x\sqrt{1-2v_y^2}\right)\mp v_x\left(v_xv_y+\sqrt{(1-2v_x^2)(1-2v_y^2)}\right)\right\}\\
&+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}v_x}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}v_y}{2\pi}\left\{v_x^{\alpha}v_y^{\beta}+v_x^{\beta}v_y^{\alpha}\right\}|J|\,\mathbf{e}^{-\mathbf{i}\theta_x(v_x)t}\\
&\times\frac{1}{\sqrt{1-v_x^2}}\times\frac{1}{4}\left(-\sqrt{1-2v_x^2}-\mathbf{i}+\sqrt{(1-2v_x^2)(1-2v_y^2)}+\mathbf{i}\sqrt{1-2v_y^2}\right)\\
&\times\frac{1}{\sqrt{1-v_x^2}}\times\frac{1}{2}\left\{v_y(1-v_x^2)\mp\mathbf{i}\left(-v_y\sqrt{1-2v_x^2}+v_x\sqrt{1-2v_y^2}\right)\pm v_x\left(v_xv_y+\sqrt{(1-2v_x^2)(1-2v_y^2)}\right)\right\}\\
&+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}v_x}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}v_y}{2\pi}\left\{v_x^{\alpha}(-v_y)^{\beta}+v_x^{\beta}(-v_y)^{\alpha}\right\}|J|\,\mathbf{e}^{-\mathbf{i}\{\theta_x(v_x)-\theta_y(v_y)\}t}\\
&\times\frac{1}{\sqrt{(1-v_x^2)(1-v_y^2)}}\times\frac{1}{4}\left(v_xv_y+\mathbf{i}v_xv_y\sqrt{1-2v_y^2}-\mathbf{i}v_xv_y\sqrt{1-2v_x^2}+v_xv_y\sqrt{(1-2v_x^2)(1-2v_y^2)}\right)\\
&\times\frac{1}{\sqrt{(1-v_x^2)(1-v_y^2)}}\times\frac{1}{2}\left\{-(1-v_x^2)(1-v_y^2)\pm v_xv_y\pm\sqrt{(1-2v_x^2)(1-2v_y^2)}\pm v_x^2v_y^2\pm v_xv_y\sqrt{(1-2v_x^2)(1-2v_y^2)}\right.\\
&\left.\pm(-\mathbf{i})(v_x+v_y)\left(-v_y\sqrt{1-2v_x^2}+v_x\sqrt{1-2v_y^2}\right)\right\}\\
&+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}v_x}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}v_y}{2\pi}\left\{(-v_x)^{\alpha}v_y^{\beta}+(-v_x)^{\beta}v_y^{\alpha}\right\}|J|\\
&\times\frac{1}{4}\left(1-\sqrt{(1-2v_x^2)(1-2v_y^2)}-\sqrt{1-2v_y^2}+\sqrt{1-2v_x^2}\right)\times\frac{1}{2}\left(1+v_xv_y\mp v_xv_y\mp\sqrt{(1-2v_x^2)(1-2v_y^2)}\right)\\
&+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}v_x}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}v_y}{2\pi}\left\{(-v_x)^{\alpha}(-v_y)^{\beta}+(-v_x)^{\beta}(-v_y)^{\alpha}\right\}|J|\,\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta_y(v_y)t}\\
&\times\frac{1}{\sqrt{1-v_y^2}}\times\frac{1}{4}\left(-\sqrt{1-2v_y^2}+\mathbf{i}-\sqrt{(1-2v_x^2)(1-2v_y^2)}+\mathbf{i}\sqrt{1-2v_x^2}\right)\\
&\times\frac{1}{\sqrt{1-v_y^2}}\times\frac{1}{2}\left\{-v_x(1-v_y^2)\pm\mathbf{i}\left(-v_y\sqrt{1-2v_x^2}+v_x\sqrt{1-2v_y^2}\right)\mp v_y\left(v_xv_y+\sqrt{(1-2v_x^2)(1-2v_y^2)}\right)\right\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}v_x}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}v_y}{2\pi}\left\{v_x^\alpha v_y^\beta+v_x^\beta v_y^\alpha\right\}|J|\,\mathbf{e}^{-\mathbf{i}\{\theta_x(v_x)+\theta_y(v_y)\}t}\\
&\times\frac{1}{\sqrt{(1-v_x^2)(1-v_y^2)}}\times\frac{1}{4}\left(-v_xv_y+\mathbf{i}v_xv_y\sqrt{1-2v_y^2}+\mathbf{i}v_xv_y\sqrt{1-2v_x^2}+v_xv_y\sqrt{(1-2v_x^2)(1-2v_y^2)}\right)\\
&\times\frac{1}{\sqrt{(1-v_x^2)(1-v_y^2)}}\times\frac{1}{2}\left\{-(1-v_x^2)(1-v_y^2)\mp v_xv_y\mp\sqrt{(1-2v_x^2)(1-2v_y^2)}\pm v_x^2v_y^2\pm v_xv_y\sqrt{(1-2v_x^2)(1-2v_y^2)}\right.\\
&\left.\pm\,\mathbf{i}(v_x-v_y)\left(-v_y\sqrt{1-2v_x^2}+v_x\sqrt{1-2v_y^2}\right)\right\}\\
&+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}v_x}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}v_y}{2\pi}\left\{v_x^\alpha(-v_y)^\beta+v_x^\beta(-v_y)^\alpha\right\}|J|\,\mathbf{e}^{-\mathbf{i}\theta_x(v_x)t}\\
&\times\frac{1}{\sqrt{1-v_x^2}}\times\frac{1}{4}\left(-\sqrt{1-2v_x^2}-\mathbf{i}-\sqrt{(1-2v_x^2)(1-2v_y^2)}-\mathbf{i}\sqrt{1-2v_y^2}\right)\\
&\times\frac{1}{\sqrt{1-v_x^2}}\times\frac{1}{2}\left\{-v_y(1-v_x^2)\pm\mathbf{i}\left(-v_y\sqrt{1-2v_x^2}+v_x\sqrt{1-2v_y^2}\right)\mp v_x\left(v_xv_y+\sqrt{(1-2v_x^2)(1-2v_y^2)}\right)\right\}\\
&+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}v_x}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}v_y}{2\pi}\left\{(-v_x)^\alpha v_y^\beta+(-v_x)^\beta v_y^\alpha\right\}|J|\,\mathbf{e}^{-\mathbf{i}\theta_y(v_y)t}\\
&\times\frac{1}{\sqrt{1-v_y^2}}\times\frac{1}{4}\left(-\sqrt{1-2v_y^2}-\mathbf{i}-\sqrt{(1-2v_x^2)(1-2v_y^2)}-\mathbf{i}\sqrt{1-2v_x^2}\right)\\
&\times\frac{1}{\sqrt{1-v_y^2}}\times\frac{1}{2}\left\{-v_x(1-v_y^2)\mp\mathbf{i}\left(-v_y\sqrt{1-2v_x^2}+v_x\sqrt{1-2v_y^2}\right)\mp v_y\left(v_xv_y+\sqrt{(1-2v_x^2)(1-2v_y^2)}\right)\right\}\\
&+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}v_x}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}v_y}{2\pi}\left\{(-v_x)^\alpha(-v_y)^\beta+(-v_x)^\beta(-v_y)^\alpha\right\}|J|\\
&\times\frac{1}{4}\left(1+\sqrt{(1-2v_x^2)(1-2v_y^2)}+\sqrt{1-2v_y^2}+\sqrt{1-2v_x^2}\right)\times\frac{1}{2}\left(1-v_xv_y\pm v_xv_y\pm\sqrt{(1-2v_x^2)(1-2v_y^2)}\right)\\
&+\mathcal{O}\left(\frac{1}{t}\right)
\end{aligned}
\tag{2.15}
$$

という長時間評価が得られる.

ボソンの結合モーメント $\left\langle \left(\frac{X_{\mathbf{B}}(t)}{t}\right)^{\alpha}\left(\frac{Y_{\mathbf{B}}(t)}{t}\right)^{\beta}+\left(\frac{X_{\mathbf{B}}(t)}{t}\right)^{\beta}\left(\frac{Y_{\mathbf{B}}(t)}{t}\right)^{\alpha}\right\rangle$ は (2.15) において複号の上側を採ることによって得られる．$I_{\mathbf{B}}$ と $J_{\mathbf{B}}(t)$ をそれぞれ

$$
\begin{aligned}
I_{\mathbf{B}} = &\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}v_x}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}v_y}{2\pi}\left\{v_x^{\alpha}v_y^{\beta}+v_x^{\beta}v_y^{\alpha}\right\}|J| \\
&\times\left\{\frac{1}{4}-\frac{1}{4}v_x^2-\frac{1}{4}v_y^2+\frac{1}{2}v_x^2v_y^2\right. \\
&\left.+\left(\frac{1}{4}v_y^2-\frac{1}{4}\right)\sqrt{1-2v_x^2}+\left(\frac{1}{4}v_x^2-\frac{1}{4}\right)\sqrt{1-2v_y^2}+\frac{1}{4}\sqrt{\left(1-2v_x^2\right)\left(1-2v_y^2\right)}\right\} \\
&+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}v_x}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}v_y}{2\pi}\left\{v_x^{\alpha}(-v_y)^{\beta}+v_x^{\beta}(-v_y)^{\alpha}\right\}|J| \\
&\times\left\{\frac{1}{4}-\frac{1}{4}v_x^2-\frac{1}{4}v_y^2+\frac{1}{2}v_x^2v_y^2\right. \\
&\left.+\left(\frac{1}{4}v_y^2-\frac{1}{4}\right)\sqrt{1-2v_x^2}+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}v_x^2\right)\sqrt{1-2v_y^2}-\frac{1}{4}\sqrt{\left(1-2v_x^2\right)\left(1-2v_y^2\right)}\right\} \\
&+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}v_x}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}v_y}{2\pi}\left\{(-v_x)^{\alpha}v_y^{\beta}+(-v_x)^{\beta}v_y^{\alpha}\right\}|J| \\
&\times\left\{\frac{1}{4}-\frac{1}{4}v_x^2-\frac{1}{4}v_y^2+\frac{1}{2}v_x^2v_y^2\right. \\
&\left.+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}v_y^2\right)\sqrt{1-2v_x^2}+\left(\frac{1}{4}v_x^2-\frac{1}{4}\right)\sqrt{1-2v_y^2}-\frac{1}{4}\sqrt{\left(1-2v_x^2\right)\left(1-2v_y^2\right)}\right\} \\
&+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}v_x}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}v_y}{2\pi}\left\{(-v_x)^{\alpha}(-v_y)^{\beta}+(-v_x)^{\beta}(-v_y)^{\alpha}\right\}|J| \\
&\times\left\{\frac{1}{4}-\frac{1}{4}v_x^2-\frac{1}{4}v_y^2+\frac{1}{2}v_x^2v_y^2\right. \\
&\left.+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}v_y^2\right)\sqrt{1-2v_x^2}+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}v_x^2\right)\sqrt{1-2v_y^2}+\frac{1}{4}\sqrt{\left(1-2v_x^2\right)\left(1-2v_y^2\right)}\right\}
\end{aligned}
\tag{2.16}
$$

および

$$
\begin{aligned}
J_{\mathbf{B}}(t) = &\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}v_x}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}v_y}{2\pi} \left\{ v_x^{\alpha}(-v_y)^{\beta} + v_x^{\beta}(-v_y)^{\alpha} \right\} |J| \, \mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta_y(v_y)t} \\
&\times \left\{ \frac{1}{4}v_y - \frac{1}{2}v_x^2 v_y + \frac{1}{4}\mathbf{i}v_x + \left(-\frac{1}{4}v_y - \frac{1}{4}\mathbf{i}v_x \right) \sqrt{1-2v_x^2} \right\} \\
&+ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}v_x}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}v_y}{2\pi} \left\{ (-v_x)^{\alpha}(-v_y)^{\beta} + (-v_x)^{\beta}(-v_y)^{\alpha} \right\} |J| \, \mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta_y(v_y)t} \\
&\times \left\{ \frac{1}{4}v_y - \frac{1}{2}v_x^2 v_y - \frac{1}{4}\mathbf{i}v_x + \left(\frac{1}{4}v_y - \frac{1}{4}\mathbf{i}v_x \right) \sqrt{1-2v_x^2} \right\} \\
&+ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}v_x}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}v_y}{2\pi} \left\{ v_x^{\alpha}v_y^{\beta} + v_x^{\beta}v_y^{\alpha} \right\} |J| \, \mathbf{e}^{-\mathbf{i}\theta_y(v_y)t} \\
&\times \left\{ \frac{1}{4}v_y - \frac{1}{2}v_x^2 v_y - \frac{1}{4}\mathbf{i}v_x + \left(-\frac{1}{4}v_y + \frac{1}{4}\mathbf{i}v_x \right) \sqrt{1-2v_x^2} \right\} \\
&+ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}v_x}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}v_y}{2\pi} \left\{ (-v_x)^{\alpha}v_y^{\beta} + (-v_x)^{\beta}v_y^{\alpha} \right\} |J| \, \mathbf{e}^{-\mathbf{i}\theta_y(v_y)t} \\
&\times \left\{ \frac{1}{4}v_y - \frac{1}{2}v_x^2 v_y + \frac{1}{4}\mathbf{i}v_x + \left(\frac{1}{4}v_y + \frac{1}{4}\mathbf{i}v_x \right) \sqrt{1-2v_x^2} \right\} \\
&+ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}v_x}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}v_y}{2\pi} \left\{ (-v_x)^{\alpha}v_y^{\beta} + (-v_x)^{\beta}v_y^{\alpha} \right\} |J| \, \mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta_x(v_x)t} \\
&\times \left\{ \frac{1}{4}v_x - \frac{1}{2}v_x v_y^2 + \frac{1}{4}\mathbf{i}v_y + \left(-\frac{1}{4}v_x - \frac{1}{4}\mathbf{i}v_y \right) \sqrt{1-2v_y^2} \right\} \\
&+ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}v_x}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}v_y}{2\pi} \left\{ (-v_x)^{\alpha}(-v_y)^{\beta} + (-v_x)^{\beta}(-v_y)^{\alpha} \right\} |J| \, \mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta_x(v_x)t} \\
&\times \left\{ \frac{1}{4}v_x - \frac{1}{2}v_x v_y^2 - \frac{1}{4}\mathbf{i}v_y + \left(\frac{1}{4}v_x - \frac{1}{4}\mathbf{i}v_y \right) \sqrt{1-2v_y^2} \right\} \\
&+ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}v_x}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}v_y}{2\pi} \left\{ v_x^{\alpha}v_y^{\beta} + v_x^{\beta}v_y^{\alpha} \right\} |J| \, \mathbf{e}^{-\mathbf{i}\theta_x(v_x)t} \\
&\times \left\{ \frac{1}{4}v_x - \frac{1}{2}v_x v_y^2 - \frac{1}{4}\mathbf{i}v_y + \left(-\frac{1}{4}v_x + \frac{1}{4}\mathbf{i}v_y \right) \sqrt{1-2v_y^2} \right\} \\
&+ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}v_x}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}v_y}{2\pi} \left\{ v_x^{\alpha}(-v_y)^{\beta} + v_x^{\beta}(-v_y)^{\alpha} \right\} |J| \, \mathbf{e}^{-\mathbf{i}\theta_x(v_x)t} \\
&\times \left\{ \frac{1}{4}v_x - \frac{1}{2}v_x v_y^2 + \frac{1}{4}\mathbf{i}v_y + \left(\frac{1}{4}v_x + \frac{1}{4}\mathbf{i}v_y \right) \sqrt{1-2v_y^2} \right\} \\
&+ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}v_x}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}v_y}{2\pi} \left\{ (-v_x)^{\alpha}(-v_y)^{\beta} + (-v_x)^{\beta}(-v_y)^{\alpha} \right\} |J| \, \mathbf{e}^{\mathbf{i}\{\theta_x(v_x)+\theta_y(v_y)\}t} \\
&\times \left(\frac{1}{2}v_x^2 v_y^2 + \frac{1}{4}\mathbf{i}v_x v_y \sqrt{1-2v_x^2} + \frac{1}{4}\mathbf{i}v_x v_y \sqrt{1-2v_y^2} \right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}v_x}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}v_y}{2\pi}\left\{v_x^{\alpha}v_y^{\beta}+v_x^{\beta}v_y^{\alpha}\right\}|J|\,\mathbf{e}^{-\mathbf{i}\{\theta_x(v_x)+\theta_y(v_y)\}t}\\
&\times\left(\frac{1}{2}v_x^2v_y^2-\frac{1}{4}\mathbf{i}v_xv_y\sqrt{1-2v_x^2}-\frac{1}{4}\mathbf{i}v_xv_y\sqrt{1-2v_y^2}\right)\\
&+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}v_x}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}v_y}{2\pi}\left\{(-v_x)^{\alpha}v_y^{\beta}+(-v_x)^{\beta}v_y^{\alpha}\right\}|J|\,\mathbf{e}^{\mathbf{i}\{\theta_x(v_x)-\theta_y(v_y)\}t}\\
&\times\left(\frac{1}{2}v_x^2v_y^2-\frac{1}{4}\mathbf{i}v_xv_y\sqrt{1-2v_x^2}+\frac{1}{4}\mathbf{i}v_xv_y\sqrt{1-2v_y^2}\right)\\
&+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}v_x}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}v_y}{2\pi}\left\{v_x^{\alpha}(-v_y)^{\beta}+v_x^{\beta}(-v_y)^{\alpha}\right\}|J|\,\mathbf{e}^{-\mathbf{i}\{\theta_x(v_x)-\theta_y(v_y)\}t}\\
&\times\left(\frac{1}{2}v_x^2v_y^2+\frac{1}{4}\mathbf{i}v_xv_y\sqrt{1-2v_x^2}-\frac{1}{4}\mathbf{i}v_xv_y\sqrt{1-2v_y^2}\right)
\end{aligned}
\tag{2.17}
$$

とすると

$$
\left\langle\left(\frac{X_{\mathbf{B}}(t)}{t}\right)^{\alpha}\left(\frac{Y_{\mathbf{B}}(t)}{t}\right)^{\beta}+\left(\frac{X_{\mathbf{B}}(t)}{t}\right)^{\beta}\left(\frac{Y_{\mathbf{B}}(t)}{t}\right)^{\alpha}\right\rangle=I_{\mathbf{B}}+J_{\mathbf{B}}(t)+\mathcal{O}\left(\frac{1}{t}\right)\tag{2.18}
$$

となる．

フェルミオンの結合モーメント $\left\langle \left(\frac{X_{\mathbf{F}}(t)}{t}\right)^{\alpha}\left(\frac{Y_{\mathbf{F}}(t)}{t}\right)^{\beta}+\left(\frac{X_{\mathbf{F}}(t)}{t}\right)^{\beta}\left(\frac{Y_{\mathbf{F}}(t)}{t}\right)^{\alpha}\right\rangle$ は複号の下側を採ることによって得られる．$I_{\mathbf{F}}$ と $J_{\mathbf{F}}(t)$ をそれぞれ

$$
\begin{aligned}
I_{\mathbf{F}} =& \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}v_x}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}v_y}{2\pi}\left\{v_x^{\alpha}v_y^{\beta}+v_x^{\beta}v_y^{\alpha}\right\}|J| \\
&\times\left\{\frac{1}{4}v_x^2+\frac{1}{4}v_y^2-\frac{1}{2}v_x^2v_y^2-\frac{1}{4}v_xv_y+\left(\frac{1}{4}v_xv_y-\frac{1}{4}v_y^2\right)\sqrt{1-2v_x^2}\right. \\
&\left.+\left(\frac{1}{4}v_xv_y-\frac{1}{4}v_x^2\right)\sqrt{1-2v_y^2}-\frac{1}{4}v_xv_y\sqrt{\left(1-2v_x^2\right)\left(1-2v_y^2\right)}\right\} \\
&+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}v_x}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}v_y}{2\pi}\left\{v_x^{\alpha}(-v_y)^{\beta}+v_x^{\beta}(-v_y)^{\alpha}\right\}|J| \\
&\times\left\{\frac{1}{4}v_x^2+\frac{1}{4}v_y^2-\frac{1}{2}v_x^2v_y^2+\frac{1}{4}v_xv_y+\left(-\frac{1}{4}v_xv_y-\frac{1}{4}v_y^2\right)\sqrt{1-2v_x^2}\right. \\
&\left.+\left(\frac{1}{4}v_xv_y+\frac{1}{4}v_x^2\right)\sqrt{1-2v_y^2}-\frac{1}{4}v_xv_y\sqrt{\left(1-2v_x^2\right)\left(1-2v_y^2\right)}\right\} \\
&+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}v_x}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}v_y}{2\pi}\left\{(-v_x)^{\alpha}v_y^{\beta}+(-v_x)^{\beta}v_y^{\alpha}\right\}|J| \\
&\times\left\{\frac{1}{4}v_x^2+\frac{1}{4}v_y^2-\frac{1}{2}v_x^2v_y^2+\frac{1}{4}v_xv_y+\left(\frac{1}{4}v_xv_y+\frac{1}{4}v_y^2\right)\sqrt{1-2v_x^2}\right. \\
&\left.+\left(-\frac{1}{4}v_xv_y-\frac{1}{4}v_x^2\right)\sqrt{1-2v_y^2}-\frac{1}{4}v_xv_y\sqrt{\left(1-2v_x^2\right)\left(1-2v_y^2\right)}\right\} \\
&+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}v_x}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}v_y}{2\pi}\left\{(-v_x)^{\alpha}(-v_y)^{\beta}+(-v_x)^{\beta}(-v_y)^{\alpha}\right\}|J| \\
&\times\left\{\frac{1}{4}v_x^2+\frac{1}{4}v_y^2-\frac{1}{2}v_x^2v_y^2-\frac{1}{4}v_xv_y+\left(\frac{1}{4}v_y^2-\frac{1}{4}v_xv_y\right)\sqrt{1-2v_x^2}\right. \\
&\left.+\left(\frac{1}{4}v_x^2-\frac{1}{4}v_xv_y\right)\sqrt{1-2v_y^2}-\frac{1}{4}v_xv_y\sqrt{\left(1-2v_x^2\right)\left(1-2v_y^2\right)}\right\} \\
&+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}v_x}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}v_y}{2\pi}\left\{(-v_x)^{\alpha}v_y^{\beta}+(-v_x)^{\beta}v_y^{\alpha}\right\}|J| \\
&\times\left(-\frac{1}{2}v_x^2v_y^2-\frac{1}{4}v_xv_y-\frac{1}{4}v_xv_y\sqrt{\left(1-2v_x^2\right)\left(1-2v_y^2\right)}\right) \\
&+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}v_x}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}v_y}{2\pi}\left\{v_x^{\alpha}(-v_y)^{\beta}+v_x^{\beta}(-v_y)^{\alpha}\right\}|J| \\
&\times\left(-\frac{1}{2}v_x^2v_y^2-\frac{1}{4}v_xv_y-\frac{1}{4}v_xv_y\sqrt{\left(1-2v_x^2\right)\left(1-2v_y^2\right)}\right)
\end{aligned}
\tag{2.19}
$$

および

$$
\begin{aligned}
J_{\mathbf{F}}(t) = &\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}v_x}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}v_y}{2\pi} \left\{ v_x^{\alpha}(-v_y)^{\beta} + v_x^{\beta}(-v_y)^{\alpha} \right\} |J| \, \mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta_y(v_y)t} \\
&\times \left(\frac{1}{2} v_x^2 v_y - \frac{1}{4} v_y + \frac{1}{4} v_y \sqrt{1-2v_x^2} - \frac{1}{4} v_x \sqrt{1-2v_y^2} + \frac{1}{4} v_x \sqrt{\left(1-2v_x^2\right)\left(1-2v_y^2\right)} \right) \\
&+ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}v_x}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}v_y}{2\pi} \left\{ (-v_x)^{\alpha}(-v_y)^{\beta} + (-v_x)^{\beta}(-v_y)^{\alpha} \right\} |J| \, \mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta_y(v_y)t} \\
&\times \left(\frac{1}{2} v_x^2 v_y - \frac{1}{4} v_y - \frac{1}{4} v_y \sqrt{1-2v_x^2} + \frac{1}{4} v_x \sqrt{1-2v_y^2} + \frac{1}{4} v_x \sqrt{\left(1-2v_x^2\right)\left(1-2v_y^2\right)} \right) \\
&+ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}v_x}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}v_y}{2\pi} \left\{ v_x^{\alpha} v_y^{\beta} + v_x^{\beta} v_y^{\alpha} \right\} |J| \, \mathbf{e}^{-\mathbf{i}\theta_y(v_y)t} \\
&\times \left(\frac{1}{2} v_x^2 v_y - \frac{1}{4} v_y + \frac{1}{4} v_y \sqrt{1-2v_x^2} - \frac{1}{4} v_x \sqrt{1-2v_y^2} + \frac{1}{4} v_x \sqrt{\left(1-2v_x^2\right)\left(1-2v_y^2\right)} \right) \\
&+ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}v_x}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}v_y}{2\pi} \left\{ (-v_x)^{\alpha} v_y^{\beta} + (-v_x)^{\beta} v_y^{\alpha} \right\} |J| \, \mathbf{e}^{-\mathbf{i}\theta_y(v_y)t} \\
&\times \left(\frac{1}{2} v_x^2 v_y - \frac{1}{4} v_y - \frac{1}{4} v_y \sqrt{1-2v_x^2} + \frac{1}{4} v_x \sqrt{1-2v_y^2} + \frac{1}{4} v_x \sqrt{\left(1-2v_x^2\right)\left(1-2v_y^2\right)} \right) \\
&+ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}v_x}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}v_y}{2\pi} \left\{ (-v_x)^{\alpha} v_y^{\beta} + (-v_x)^{\beta} v_y^{\alpha} \right\} |J| \, \mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta_x(v_x)t} \\
&\times \left(\frac{1}{2} v_x v_y^2 - \frac{1}{4} v_x - \frac{1}{4} v_y \sqrt{1-2v_x^2} + \frac{1}{4} v_x \sqrt{1-2v_y^2} + \frac{1}{4} v_y \sqrt{\left(1-2v_x^2\right)\left(1-2v_y^2\right)} \right) \\
&+ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}v_x}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}v_y}{2\pi} \left\{ (-v_x)^{\alpha}(-v_y)^{\beta} + (-v_x)^{\beta}(-v_y)^{\alpha} \right\} |J| \, \mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta_x(v_x)t} \\
&\times \left(\frac{1}{2} v_x v_y^2 - \frac{1}{4} v_x + \frac{1}{4} v_y \sqrt{1-2v_x^2} - \frac{1}{4} v_x \sqrt{1-2v_y^2} + \frac{1}{4} v_y \sqrt{\left(1-2v_x^2\right)\left(1-2v_y^2\right)} \right) \\
&+ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}v_x}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}v_y}{2\pi} \left\{ v_x^{\alpha} v_y^{\beta} + v_x^{\beta} v_y^{\alpha} \right\} |J| \, \mathbf{e}^{-\mathbf{i}\theta_x(v_x)t} \\
&\times \left(\frac{1}{2} v_x v_y^2 - \frac{1}{4} v_x - \frac{1}{4} v_y \sqrt{1-2v_x^2} + \frac{1}{4} v_x \sqrt{1-2v_y^2} + \frac{1}{4} v_y \sqrt{\left(1-2v_x^2\right)\left(1-2v_y^2\right)} \right) \\
&+ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}v_x}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}v_y}{2\pi} \left\{ v_x^{\alpha}(-v_y)^{\beta} + v_x^{\beta}(-v_y)^{\alpha} \right\} |J| \, \mathbf{e}^{-\mathbf{i}\theta_x(v_x)t} \\
&\times \left(\frac{1}{2} v_x v_y^2 - \frac{1}{4} v_x + \frac{1}{4} v_y \sqrt{1-2v_x^2} - \frac{1}{4} v_x \sqrt{1-2v_y^2} + \frac{1}{4} v_y \sqrt{\left(1-2v_x^2\right)\left(1-2v_y^2\right)} \right) \\
&+ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}v_x}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}v_y}{2\pi} \left\{ (-v_x)^{\alpha}(-v_y)^{\beta} + (-v_x)^{\beta}(-v_y)^{\alpha} \right\} |J| \, \mathbf{e}^{\mathbf{i}\{\theta_x(v_x)+\theta_y(v_y)\}t} \\
&\times \left(-\frac{1}{2} v_x^2 v_y^2 + \frac{1}{4} v_x v_y - \frac{1}{4} v_x v_y \sqrt{\left(1-2v_x^2\right)\left(1-2v_y^2\right)} \right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}v_x}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}v_y}{2\pi}\left\{v_x^{\alpha}v_y^{\beta}+v_x^{\beta}v_y^{\alpha}\right\}|J|\,\mathbf{e}^{-\mathbf{i}\{\theta_x(v_x)+\theta_y(v_y)\}t}\\
&\times\left(-\frac{1}{2}v_x^2v_y^2+\frac{1}{4}v_xv_y-\frac{1}{4}v_xv_y\sqrt{\left(1-2v_x^2\right)\left(1-2v_y^2\right)}\right)\\
&+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}v_x}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}v_y}{2\pi}\left\{(-v_x)^{\alpha}v_y^{\beta}+(-v_x)^{\beta}v_y^{\alpha}\right\}|J|\,\left[\mathbf{e}^{\mathbf{i}\{\theta_x(v_x)-\theta_y(v_y)\}t}-1\right]\\
&\times\left(-\frac{1}{2}v_x^2v_y^2-\frac{1}{4}v_xv_y-\frac{1}{4}v_xv_y\sqrt{\left(1-2v_x^2\right)\left(1-2v_y^2\right)}\right)\\
&+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}v_x}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}v_y}{2\pi}\left\{v_x^{\alpha}(-v_y)^{\beta}+v_x^{\beta}(-v_y)^{\alpha}\right\}|J|\,\left[\mathbf{e}^{-\mathbf{i}\{\theta_x(v_x)-\theta_y(v_y)\}t}-1\right]\\
&\times\left(-\frac{1}{2}v_x^2v_y^2-\frac{1}{4}v_xv_y-\frac{1}{4}v_xv_y\sqrt{\left(1-2v_x^2\right)\left(1-2v_y^2\right)}\right)
\end{aligned}
\tag{2.20}
$$

とすると

$$
\left\langle\left(\frac{X_{\mathbf{F}}(t)}{t}\right)^{\alpha}\left(\frac{Y_{\mathbf{F}}(t)}{t}\right)^{\beta}+\left(\frac{X_{\mathbf{F}}(t)}{t}\right)^{\beta}\left(\frac{Y_{\mathbf{F}}(t)}{t}\right)^{\alpha}\right\rangle=I_{\mathbf{F}}+J_{\mathbf{F}}(t)+\mathcal{O}\left(\frac{1}{t}\right)\tag{2.21}
$$

となる．

以下，結合モーメントの次数 α，β の偶奇性について場合分けして解析を行うことにする．

(i)α：偶数，β：偶数の場合

$$v_x^\alpha v_y^\beta + v_x^\beta v_y^\alpha = v_x^\alpha v_y^\beta + v_x^\beta v_y^\alpha, \qquad v_x^\alpha(-v_y)^\beta + v_x^\beta(-v_y)^\alpha = v_x^\alpha v_y^\beta + v_x^\beta v_y^\alpha,$$

$$(-v_x)^\alpha v_y^\beta + (-v_x)^\beta v_y^\alpha = v_x^\alpha v_y^\beta + v_x^\beta v_y^\alpha, \qquad (-v_x)^\alpha(-v_y)^\beta + (-v_x)^\beta(-v_y)^\alpha = v_x^\alpha v_y^\beta + v_x^\beta v_y^\alpha$$

であるから

$$I_{\mathbf{B}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}v_x}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}v_y}{2\pi} \left\{ v_x^\alpha v_y^\beta + v_x^\beta v_y^\alpha \right\} |J| \times \left(1 - v_x^2 - v_y^2 + 2v_x^2 v_y^2\right),$$

$$\begin{aligned} J_{\mathbf{B}}(t) = &\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}v_x}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}v_y}{2\pi} \left\{ v_x^\alpha v_y^\beta + v_x^\beta v_y^\alpha \right\} |J| \\ &\times v_x^2 v_y^2 \left[\cos\left\{(\theta_x + \theta_y)\, t\right\} + \cos\left\{(\theta_x - \theta_y)\, t\right\} - 1\right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{\mathbf{F}} = &\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}v_x}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}v_y}{2\pi} \left\{ v_x^\alpha v_y^\beta + v_x^\beta v_y^\alpha \right\} |J| \\ &\times \frac{2v_x^2 + 2v_y^2 + 2v_x v_y - 3v_x^2 v_y^2}{2v_x^2 + 2v_y^2 - v_x v_y - 6v_x^2 v_y^2 + 3v_x v_y \sqrt{(1-2v_x^2)(1-2v_y^2)}} \times (v_x - v_y)^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_{\mathbf{F}}(t) = &\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}v_x}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}v_y}{2\pi} \left\{ v_x^\alpha v_y^\beta + v_x^\beta v_y^\alpha \right\} |J| \\ &\times v_x^2 v_y^2 \left[1 - \cos\left\{(\theta_x + \theta_y)\, t\right\} - \cos\left\{(\theta_x - \theta_y)\, t\right\}\right]. \end{aligned}$$

(ii)α：奇数，β：奇数の場合

$$v_x^\alpha v_y^\beta + v_x^\beta v_y^\alpha = v_x^\alpha v_y^\beta + v_x^\beta v_y^\alpha, \qquad v_x^\alpha(-v_y)^\beta + v_x^\beta(-v_y)^\alpha = -\left(v_x^\alpha v_y^\beta + v_x^\beta v_y^\alpha\right),$$

$$(-v_x)^\alpha v_y^\beta + (-v_x)^\beta v_y^\alpha = -\left(v_x^\alpha v_y^\beta + v_x^\beta v_y^\alpha\right), \qquad (-v_x)^\alpha(-v_y)^\beta + (-v_x)^\beta(-v_y)^\alpha = v_x^\alpha v_y^\beta + v_x^\beta v_y^\alpha$$

であるから

$$I_{\mathbf{B}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}v_x}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}v_y}{2\pi} \left\{v_x^\alpha v_y^\beta + v_x^\beta v_y^\alpha\right\} |J| \times \sqrt{(1-2v_x^2)(1-2v_y^2)},$$

$$\begin{aligned} J_{\mathbf{B}}(t) = &\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}v_x}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}v_y}{2\pi} \left\{v_x^\alpha v_y^\beta + v_x^\beta v_y^\alpha\right\} |J| \\ &\times \frac{1}{2} v_x v_y \left[\left(\sqrt{1-2v_x^2} - \sqrt{1-2v_y^2}\right) \sin\{(\theta_x - \theta_y)t\} \right. \\ &\left. - \left(\sqrt{1-2v_x^2} + \sqrt{1-2v_y^2}\right) \sin\{(\theta_x + \theta_y)t\}\right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{\mathbf{F}} = &\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}v_x}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}v_y}{2\pi} \left\{v_x^\alpha v_y^\beta + v_x^\beta v_y^\alpha\right\} |J| \\ &\times \frac{v_x^2 v_y^2}{2v_x^2 v_y^2 - v_x v_y - v_x v_y \sqrt{(1-2v_x^2)(1-2v_y^2)}} \times (v_x - v_y)^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_{\mathbf{F}}(t) = &\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}v_x}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}v_y}{2\pi} \left\{v_x^\alpha v_y^\beta + v_x^\beta v_y^\alpha\right\} |J| \\ &\times \frac{1}{2} v_x v_y \left[\left(1 - \sqrt{(1-2v_x^2)(1-2v_y^2)}\right) \cos\{(\theta_x + \theta_y)t\} \right. \\ &\left. + \left(1 + \sqrt{(1-2v_x^2)(1-2v_y^2)}\right) (1 - \cos\{(\theta_x - \theta_y)t\})\right]. \end{aligned}$$

(iii)α：偶数，β：奇数の場合

$$v_x^\alpha v_y^\beta + v_x^\beta v_y^\alpha = v_x^\alpha v_y^\beta + v_x^\beta v_y^\alpha, \qquad v_x^\alpha(-v_y)^\beta + v_x^\beta(-v_y)^\alpha = -v_x^\alpha v_y^\beta + v_x^\beta v_y^\alpha,$$

$$(-v_x)^\alpha v_y^\beta + (-v_x)^\beta v_y^\alpha = v_x^\alpha v_y^\beta - v_x^\beta v_y^\alpha, \qquad (-v_x)^\alpha(-v_y)^\beta + (-v_x)^\beta(-v_y)^\alpha = -\left(v_x^\alpha v_y^\beta + v_x^\beta v_y^\alpha\right)$$

であるから

$$I_{\mathbf{B}} = 0,$$

$$\begin{aligned} J_{\mathbf{B}}(t) = &\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}v_x}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}v_y}{2\pi} |J| \\ &\times \left[v_x^\alpha v_y^\beta \left\{ (2v_x^2 v_y - v_y)\mathbf{i}\sin(\theta_y t) - v_y \sin(\theta_x t) \right\} \right. \\ &\left. + v_x^\beta v_y^\alpha \left\{ (2v_x v_y^2 - v_x)\mathbf{i}\sin(\theta_x t) - v_x \sin(\theta_y t) \right\} \right], \end{aligned}$$

$$I_{\mathbf{F}} = 0,$$

$$\begin{aligned} J_{\mathbf{F}}(t) = &\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}v_x}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}v_y}{2\pi} |J| \\ &\times \left[v_x^\alpha v_y^\beta \left\{ (v_y - 2v_x^2 v_y)\mathbf{i}\sin(\theta_y t) - v_y \sqrt{1 - 2v_x^2} \cos(\theta_x t) \right\} \right. \\ &\left. + v_x^\beta v_y^\alpha \left\{ (v_x - 2v_x v_y^2)\mathbf{i}\sin(\theta_x t) - v_x \sqrt{1 - 2v_y^2} \cos(\theta_y t) \right\} \right]. \end{aligned}$$

(iv)α：奇数，β：偶数の場合

$$v_x^\alpha v_y^\beta + v_x^\beta v_y^\alpha = v_x^\alpha v_y^\beta + v_x^\beta v_y^\alpha, \qquad v_x^\alpha(-v_y)^\beta + v_x^\beta(-v_y)^\alpha = v_x^\alpha v_y^\beta - v_x^\beta v_y^\alpha,$$

$$(-v_x)^\alpha v_y^\beta + (-v_x)^\beta v_y^\alpha = -v_x^\alpha v_y^\beta + v_x^\beta v_y^\alpha, \qquad (-v_x)^\alpha(-v_y)^\beta + (-v_x)^\beta(-v_y)^\alpha = -\left(v_x^\alpha v_y^\beta + v_x^\beta v_y^\alpha\right)$$

であるから

$$I_{\mathbf{B}} = 0,$$

$$\begin{aligned} J_{\mathbf{B}}(t) = &\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}v_x}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}v_y}{2\pi} |J| \\ &\times \left[v_x^\alpha v_y^\beta \left\{(2v_x v_y^2 - v_x)\mathbf{i}\sin(\theta_x t) - v_x \sin(\theta_y t)\right\}\right. \\ &\left. + v_x^\beta v_y^\alpha \left\{(2v_x^2 v_y - v_y)\mathbf{i}\sin(\theta_y t) - v_y \sin(\theta_x t)\right\}\right], \end{aligned}$$

$$I_{\mathbf{F}} = 0,$$

$$\begin{aligned} J_{\mathbf{F}}(t) = &\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}v_x}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}v_y}{2\pi} |J| \\ &\times \left[v_x^\alpha v_y^\beta \left\{(v_x - 2v_x v_y^2)\mathbf{i}\sin(\theta_x t) - v_x \sqrt{1 - 2v_y^2}\sin(\theta_y t)\right\}\right. \\ &\left. + v_x^\beta v_y^\alpha \left\{(v_y - 2v_x^2 v_y)\mathbf{i}\sin(\theta_y t) - v_y \sqrt{1 - 2v_x^2}\cos(\theta_x t)\right\}\right]. \end{aligned}$$

長時間極限 $t \to \infty$ を採ると

$$\lim_{t\to\infty}\left\langle \left(\frac{X_{\mathbf{B}}(t)}{t}\right)^{\alpha}\left(\frac{Y_{\mathbf{B}}(t)}{t}\right)^{\beta}+\left(\frac{X_{\mathbf{B}}(t)}{t}\right)^{\beta}\left(\frac{Y_{\mathbf{B}}(t)}{t}\right)^{\alpha}\right\rangle = I_{\mathbf{B}}+\lim_{t\to\infty}J_{\mathbf{B}}(t),$$

$$\lim_{t\to\infty}\left\langle \left(\frac{X_{\mathbf{F}}(t)}{t}\right)^{\alpha}\left(\frac{Y_{\mathbf{F}}(t)}{t}\right)^{\beta}+\left(\frac{X_{\mathbf{F}}(t)}{t}\right)^{\beta}\left(\frac{Y_{\mathbf{F}}(t)}{t}\right)^{\alpha}\right\rangle = I_{\mathbf{F}}+\lim_{t\to\infty}J_{\mathbf{F}}(t).$$

$J_{\mathbf{B}}(t)$ と $J_{\mathbf{F}}(t)$ は時間 t の振動項から成る．よって長時間極限 $t \to \infty$ においては，これらの項の寄与は均されて消えてしまうことが予想される．以下，このランダム位相近似を用いることとし

$$\lim_{t\to\infty}J_{\mathbf{B}}(t)=\lim_{t\to\infty}J_{\mathbf{F}}(t)=0$$

とする．結果として

$$\lim_{t\to\infty}\left\langle \left(\frac{X_{\mathbf{B}}(t)}{t}\right)^{\alpha}\left(\frac{Y_{\mathbf{B}}(t)}{t}\right)^{\beta}+\left(\frac{X_{\mathbf{B}}(t)}{t}\right)^{\beta}\left(\frac{Y_{\mathbf{B}}(t)}{t}\right)^{\alpha}\right\rangle = I_{\mathbf{B}}, \tag{2.22}$$

$$\lim_{t\to\infty}\left\langle \left(\frac{X_{\mathbf{F}}(t)}{t}\right)^{\alpha}\left(\frac{Y_{\mathbf{F}}(t)}{t}\right)^{\beta}+\left(\frac{X_{\mathbf{F}}(t)}{t}\right)^{\beta}\left(\frac{Y_{\mathbf{F}}(t)}{t}\right)^{\alpha}\right\rangle = I_{\mathbf{F}} \tag{2.23}$$

となる．

第3章　結論

3.1　結果のまとめ

第2章で記述した計算の結果，ランダム位相近似を用いると，次のような極限定理が2次元量子ウォークのボソン・フェルミオン模型に対して得られたことになる．

(i) ボソン模型の場合

$$\begin{aligned}&\lim_{t\to\infty}\left\langle\left(\frac{X_{\mathbf{B}}(t)}{t}\right)^{\alpha}\left(\frac{Y_{\mathbf{B}}(t)}{t}\right)^{\beta}+\left(\frac{X_{\mathbf{B}}(t)}{t}\right)^{\beta}\left(\frac{Y_{\mathbf{B}}(t)}{t}\right)^{\alpha}\right\rangle\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}v_x\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}v_y\,\frac{v_x^{\alpha}v_y^{\beta}+v_x^{\beta}v_y^{\alpha}}{2}\,f_{\mathbf{B}}(v_x,v_y),\quad \alpha,\beta\in\{0,1,2,\dots\}.\end{aligned}\tag{3.1}$$

但し，ボソンの確率密度関数 $f_{\mathbf{B}}(v_x,v_y)$ は今野関数 (1.16) を用いて

$$f_{\mathbf{B}}(v_x,v_y)=K(v_x)K(v_y)\mu_{\mathbf{B}}(v_x,v_y),\tag{3.2}$$

$$\mu_{\mathbf{B}}(v_x,v_y)=\begin{cases}\frac{1}{2}-\frac{1}{2}v_x^2-\frac{1}{2}v_y^2+v_x^2v_y^2 & \alpha:\text{偶数},\ \beta:\text{偶数},\\ \frac{1}{2}\sqrt{(1-2v_x^2)(1-2v_y^2)} & \alpha:\text{奇数},\ \beta:\text{奇数},\\ 0 & \alpha:\text{偶数},\ \beta:\text{奇数},\\ 0 & \alpha:\text{奇数},\ \beta:\text{偶数}.\end{cases}\tag{3.3}$$

図3.1はα:偶数，β:偶数の場合を，図3.2はα:奇数，β:奇数の場合の $f_{\mathbf{B}}(v_x,v_y)$ を示す．

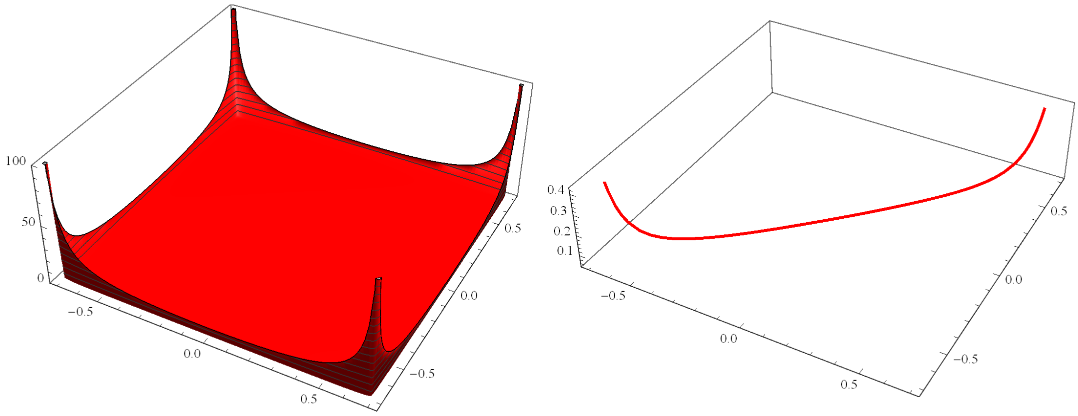


図 3.1: α : 偶数，β : 偶数の場合．左は $f_{\mathbf{B}}(v_x, v_y)$ のグラフ．右は $f_{\mathbf{B}}(v_x, v_y)$ の $v_x = v_y$ による切り口．

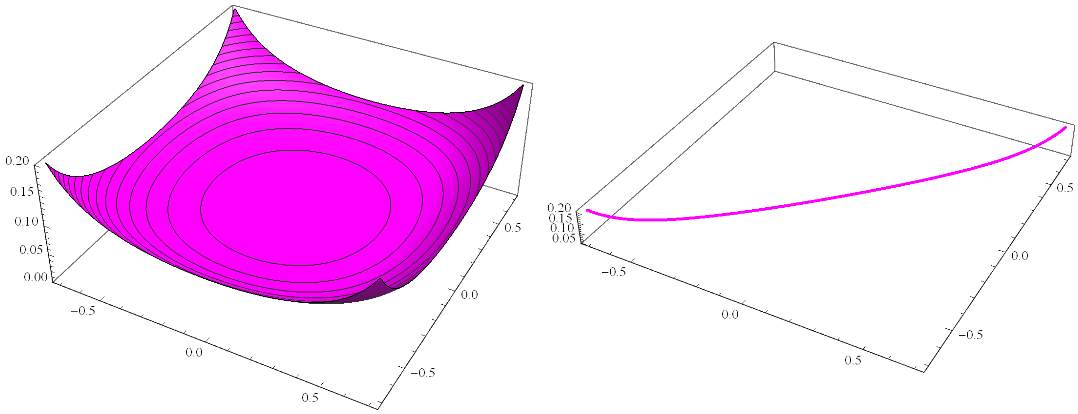


図 3.2: α : 奇数，β : 奇数の場合．左は $f_{\mathbf{B}}(v_x, v_y)$ のグラフ．右は $f_{\mathbf{B}}(v_x, v_y)$ の $v_x = v_y$ による切り口．

(ii) フェルミオン模型の場合

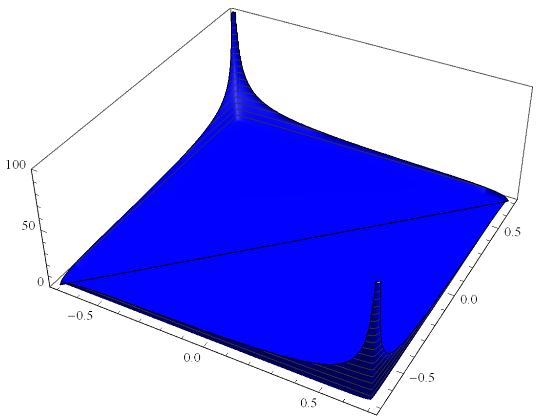
$$
\begin{aligned}
&\lim_{t\to\infty}\left\langle \left(\frac{X_{\mathbf{F}}(t)}{t}\right)^{\alpha}\left(\frac{Y_{\mathbf{F}}(t)}{t}\right)^{\beta}+\left(\frac{X_{\mathbf{F}}(t)}{t}\right)^{\beta}\left(\frac{Y_{\mathbf{F}}(t)}{t}\right)^{\alpha}\right\rangle \\
&=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}v_x\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}v_y\,\frac{v_x^{\alpha}v_y^{\beta}+v_x^{\beta}v_y^{\alpha}}{2}\,f_{\mathbf{F}}(v_x,v_y),\qquad \alpha,\beta\in\{0,1,2,\dots\}.
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

但し，フェルミオンの確率密度関数 $f_{\mathbf{F}}(v_x,v_y)$ は今野関数 (1.16) を用いて

$$
f_{\mathbf{F}}(v_x,v_y)=K(v_x)K(v_y)\mu_{\mathbf{F}}(v_x,v_y)(v_x-v_y)^2, \tag{3.5}
$$

$$
\mu_{\mathbf{F}}(v_x,v_y)=\begin{cases}
\frac{2v_x^2+2v_y^2+2v_xv_y-3v_x^2v_y^2}{4v_x^2+4v_y^2-2v_xv_y-12v_x^2v_y^2+6v_xv_y\sqrt{(1-2v_x^2)(1-2v_y^2)}} & \alpha:\text{偶数},\ \beta:\text{偶数},\\
\frac{v_x^2v_y^2}{4v_x^2v_y^2-2v_xv_y-2v_xv_y\sqrt{(1-2v_x^2)(1-2v_y^2)}} & \alpha:\text{奇数},\ \beta:\text{奇数},\\
0 & \alpha:\text{偶数},\ \beta:\text{奇数},\\
0 & \alpha:\text{奇数},\ \beta:\text{偶数}.
\end{cases} \tag{3.6}
$$

図 3.3 は α : 偶数，β : 偶数の場合を，図 3.4 は α : 奇数，β : 奇数の場合の $f_{\mathbf{F}}(v_x,v_y)$ を示す.



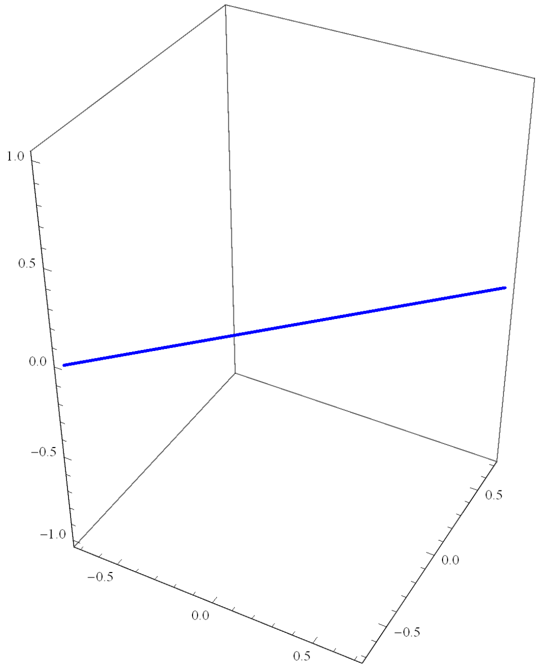
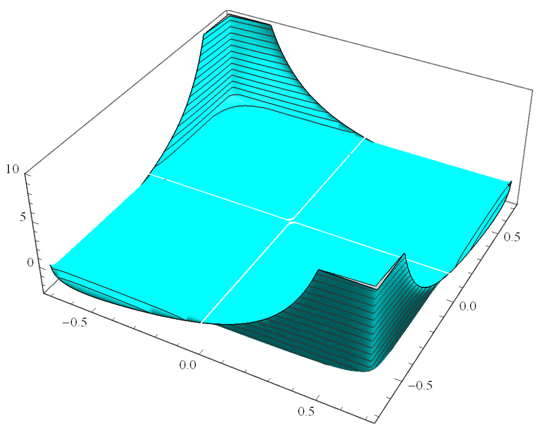


図 3.3: α：偶数，β：偶数の場合．左は $f_{\mathbf{F}}(v_x, v_y)$ のグラフ．右は $f_{\mathbf{F}}(v_x, v_y)$ の $v_x = v_y$ による切り口．



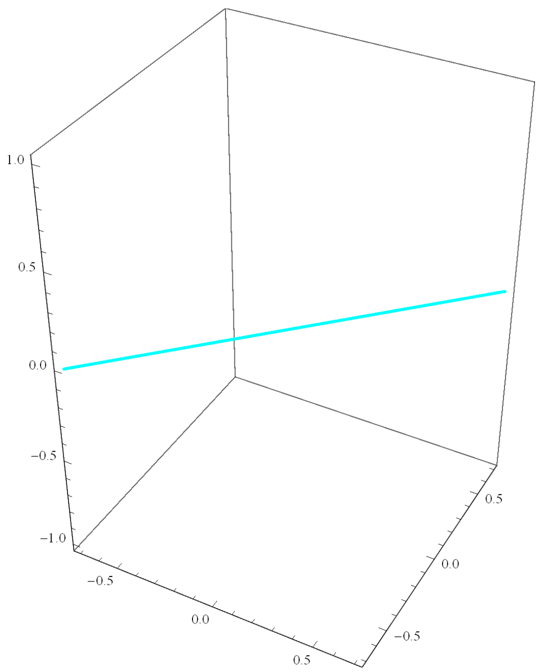


図 3.4: α：奇数，β：奇数の場合．左は $f_{\mathbf{F}}(v_x, v_y)$ のグラフ．右は $f_{\mathbf{F}}(v_x, v_y)$ の $v_x = v_y$ による切り口．

3.2 考察

α : 偶数，β : 偶数の図 3.1 と図 3.3 は，数値計算により直接的にプロットした図 2.1 に類似している．しかしながら，α : 奇数，β : 奇数の図 3.2 では z 軸に垂直な断面は円形となり，図 3.4 では第 1 象限と第 3 象限において部分的に負の領域が現れてしまい，いずれも図 2.1 とは大きく異なる結果となってしまった．α と β の偶奇性が異なる場合，$I_{\mathbf{B}}$ や $I_{\mathbf{F}}$ の被積分関数の各項には v_x もしくは v_y に関する奇関数が現れるが，積分範囲が対称的であるため積分は 0 となってしまった．

2 種類の 2 次元模型の長時間極限確率密度関数は，(3.2) と (3.5) に示したようにいずれも，x 方向及び y 方向の今野関数 $K(v)$ と対称関数の積で表れる結果となった．フェルミオン模型では，(3.5) はさらに $(v_x - v_y)^2$ を含んでおり，これはパウリの排他原理を表している．またこれによって，各方向独立な 1 次元量子ウォークを D 個用意して得られる D 次元フェルミオン確率密度関数には $\displaystyle\prod_{1\leq j<k\leq D}(v_k - v_j)^2$ が含まれると予想でき，GUE ランダム行列の固有値分布の確率密度関数との類比が見られることが期待される．

計算過程において，フェルミオン模型では $I_{\mathbf{F}}$ と $J_{\mathbf{F}}(t)$ の両方に $(v_x - v_y)^2$ の因子が現れると予想していた．当初 $I_{\mathbf{F}}$ は $I_{\mathbf{B}}$ と同様に四つの積分で構成されていたが，確率密度関数に $(v_x - v_y)^2$ の因子が現れなかったために $J_{\mathbf{F}}(t)$ から式を差し引き，その分を $I_{\mathbf{F}}$ に加え，改めて $I_{\mathbf{F}}$ と $J_{\mathbf{F}}(t)$ を再構成してから計算を実行した．それゆえ $I_{\mathbf{F}}$ は $I_{\mathbf{B}}$ よりも積分の数が二つ多く，さらに $J_{\mathbf{F}}(t)$ の最後の二つの積分は $J_{\mathbf{B}}(t)$ とは異なる形となっている．しかし結果として，$J_{\mathbf{F}}(t)$ には $(v_x - v_y)^2$ の因子は現れなかった．

α : 偶数，β : 偶数の場合と α : 奇数，β : 奇数の場合，確率密度関数の積分値は 1 にはならず，規格化されなかった．そのためスレーター行列式のように (2.2) に対し規格化定数を掛けることも想定された．しかし実は規格化定数を掛ける前の積分値は 1 よりも小さい．これはランダム位相近似によって時間に依存する積分を落としたことに起因するかもしれない．また，上述のように奇関数の積分は 0 となる．そのため確率密度関数に任意の奇関数を足しても結合モーメントとしては同じ値となる．それゆえ確率密度関数が不定となってしまう問題（いわゆるモーメント問題）も考えられる．

本論文では，ボソン模型とフェルミオン模型という 2 種類の新しいタイプの 2 次元量子ウォーク模型を考案した．フーリエ解析法を用いることにより，長時間極限における結合モーメント極限定理を導出することを試みた．最終的には，ランダム位相近似を用いることにより，偶数次結合モーメントに対しては，直接的な数値計算の結果を再現する解析的な結果を得ることに成功した．しかしながら上述のように，結果にはまだいくつか問題点が残されている．2 次元量子ウォークに関する解析的な研究は未だ少なく，将来の研究が望まれる．

参考文献

[1] 今野紀雄, 量子ウォークの数理, 産業図書 (2008).

[2] 今野紀雄, 量子ウォーク, 森北出版 (2014).

[3] 町田拓也, 図で解る量子ウォーク入門, 森北出版 (2015).

[4] N.Konno, Quantum Inf. Process., **1**, 345-354 (2002).

[5] N.Konno, J. Math. Soc. Jpn., **57**, 1179-1195 (2005).

[6] G.Grimmett, S.Janson, and P.F.Scudo, Phys. Rev. E, **69**, 026119 (2004).

[7] K.Watabe, N.Kobayashi, M.Katori, and N.Konno, Phys. Rev. A, **77**, 062331 (2008).