

2011 年度 修士論文

Master Thesis, March 2012

べき行列法による

Schramm Loewner 方程式の研究

Power Martix Approach  
to Schramm Loewner Evolution

河原陽明

Yomei Kawahara

中央大学大学院 理工学研究科 物理学専攻

Department of Physics, Faculty of Science and Engineering,  
Chuo University

# 目次

第1章	はじめに	2
第2章	Schramm Loewner 方程式	4
2.1	Loewner 方程式	4
2.2	Schramm Loewner 方程式	5
2.3	SLE $_{\kappa}$ の性質	5
2.4	SLE の種類	6
第3章	べき行列法	7
3.1	べき行列	7
3.2	べき行列の積	8
3.3	べき行列の微分	9
3.4	べき行列の微分方程式	10
3.5	行列 $\langle z^{k+1} \rangle$ の性質	11
第4章	共形場理論と SLE の関係	13
4.1	Bauer, Bernard の研究	13
第5章	研究結果	15
5.1	SLE へのべき行列法の適用	15
5.2	後進 SLE へのべき行列法の適用	17
5.3	time-ordered exponential	18
第6章	今後の展望	22
6.1	様々な SLE への応用	22
6.2	確率過程との繋がり	22
6.3	共形場理論との繋がり	23

# 第1章 はじめに

二次元のランダムな曲線の例として、通常のランダムウォーク (random walk : RW), ループ除去ランダムウォーク (loop-erased random walk : LERW), 自己回避ランダムウォーク (self-avoiding walk : SAW) が平面上に描く軌跡が挙げられる。これらの曲線はフラクタル曲線であり、数理物理として興味深い。またそれだけではなく RW, SAW は高分子物理学においては、RW はガウス鎖, SAW は排除体積鎖と呼ばれ、エントロピーの計算やシミュレーションなどで用いられている [17].

また浸透模型 (percolation) や磁性体の模型 (Ising model) などの統計力学モデルを平面上で考えると、臨界状態において、二つの状態の境界線が生じる。この境界線も同じくフラクタル曲線であり、この曲線を解析することで、臨界状態の系が持つ性質が調べられている。

臨界状態とは、系が相転移する温度 (臨界温度) に達した状態のことである。この際に不連続な変化が生じることがあり、これを二次転移または臨界現象と呼ぶ。臨界現象が起こることにより、系の性質が劇的に変わるため、非常に興味深い研究対象である。臨界現象の例として、磁性体では、キュリー温度において比熱の発散や磁化率の発散などが起こる興味深い性質を持つことが知られている [5].

さらに非平衡統計力学モデルである砂山モデル (Abelian sandpile model) や森林火災模型などにも、フラクタル曲線が現れる。統計物理学では、曲線を調べるのが重要な意味を持つ。

それらのランダムに生成される曲線は、一見、関連がないように思えるが、それらの界面の連続極限が Schramm Loewner Evolution (SLE) によって表されることが近年分かってきた。SLE は 2000 年に数学者 Schramm によって導入された共形写像 (等角写像) の確率過程である [19]. この SLE は、Bauer, Bernad の研究により、複素平面上での共形共変性を持つ場の理論である共形場理論 (conformal field theory : CFT) との関連が知られている [8-14].

本研究では、Schramm Loewner 方程式に対して、Schippers によって導入さ

れたべき行列法を適用し, 新たな表現を得ることを目的とした. その結果, 今まで計算によって明らかな形が与えられていなかった Bauer, Bernard の形式的 Virasoro 群の生成子が自然な導出で表れるをことを報告する. 本論文では, 2 章で Schramm Loewner 方程式, 3 章でべき行列法, そして 4 章で Bauer, Bernard の成果を述べる. この三つの章を踏まえ, 5 章で確率解析の基礎となる伊藤の公式をべき行列に適用することで, SLE のべき行列表現を得たこと示す. 最後に, この結果より推測できるいくつかの事柄を 6 章で述べる.

# 第2章 Schramm Loewner 方程式

ここでは, Schramm により導入された共形写像の確率過程の連続極限である Schramm Loewner Evolution を記述する Schramm Loewner 方程式について記述する. この方程式は Stochastic Loewner 方程式と呼ばれることもある.

## 2.1 Loewner 方程式

複素上半平面を  $\mathbb{H}$  と表す. この領域  $\mathbb{H}$  において, 実軸上の一点から発展していく曲線の時刻  $t$  での先端を時間  $t \in (0, \infty)$  を用いて,  $\gamma_t$  と表し, その曲線全体を  $\gamma_{(0,t]}$  と表す. ただし, 曲線は自分自身と交わらないとする. また領域  $\mathbb{H}$  において曲線  $\gamma_{(0,t]}$  を除いた領域を  $\mathbb{H} \setminus / \gamma_{(0,t]}$  と表す.

この領域  $\mathbb{H} \setminus / \gamma_{(0,t]}$  を  $\mathbb{H}$  に移す共形写像 (等角写像) を考え,  $g_t(z), z \in \mathbb{C}$  と表す. この共形写像の存在は, リーマンの写像定理によって, 保障されている. そして, この写像に流体力学的正規化条件 (hydrodynamic normalization) を用いることで

$$\lim_{z \rightarrow \infty} [g_t(z) - z] = 0 \quad (2.1)$$

と一意に与えられる. また, この写像は, Schwartz の鏡像原理及び, Möbius 変換を用いることで

$$g_t(z) = z + \sum_{n=-\infty}^1 \frac{a_{n+1}(t)}{z^n}, \quad a_2(t) \in \mathbb{R}, \quad (2.2)$$

と表すことができる. この  $a_2(t)$  は, 領域  $\mathbb{H} \setminus / \gamma_{(0,t]}$  を特徴付ける量であり, 上半平面容量 ( $\mathbb{H}$  - capacity) という. これらの条件とともに  $g_t(z)$  は, Loewner 方程式

$$\frac{\partial}{\partial t} g_t(z) = \frac{1}{g_t(z) - U_t} \frac{da_2(t)}{dt}, \quad (2.3)$$

に従う. ここで,  $U_t$  は駆動関数と呼ばれる連続関数である. 通常は,  $a_2(t) = 2t$  とパラメトライズする.

## 2.2 Schramm Loewner 方程式

2.1 で得た Loewner 方程式の駆動関数に一次元標準ブラウン運動  $B_t$  を入れたものを考える. つまり

$$\frac{\partial}{\partial t} g_t(z) = \frac{2}{g_t(z) - U_t}, \quad U_t = \sqrt{\kappa} B_t, \quad g_{t=0} = z, \quad (2.4)$$

という方程式である. この方程式を Schramm Loewner 方程式という. ここで  $\kappa > 0$  は, ブラウン運動の拡散係数である. このパラメータ  $\kappa$  によって, SLE は特徴付けられるため, SLE のことを  $SLE_\kappa$  と書くこともある.

## 2.3 $SLE_\kappa$ の性質

$SLE_\kappa$  によって描かれる曲線  $\gamma$  は,  $\kappa$  の値により, 三つの相に分かれることが知られている [14].

- (a)  $0 < \kappa \leq 4$  のとき, 曲線  $\gamma$  は自分自身と接しない単純曲線
- (b)  $4 < \kappa < 8$  のとき, 曲線  $\gamma$  は自分自身や実軸と接し, 発展する曲線
- (c)  $8 \leq \kappa$  のとき, 曲線  $\gamma$  は上半平面  $\mathbb{H}$  を埋め尽くす曲線

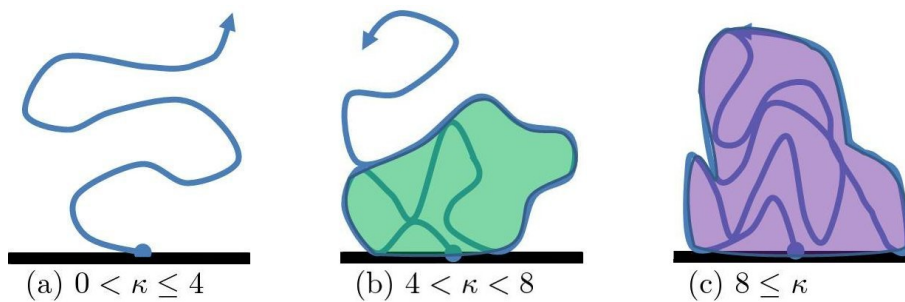


図 2.1: SLE の相は  $\kappa$  によって変わる

$\kappa$  が特別な場合には, いくつかの代表的な model の連続極限と対応することが知られている.

- (1)  $\kappa = 2$   $\iff$  ループ除去ランダムウォーク
- (2)  $\kappa = \frac{8}{3}$   $\iff$  自己回避ウォーク
- (3)  $\kappa = 3$   $\iff$  臨界イジング界面模型
- (4)  $\kappa = \frac{16}{3}$   $\iff$  臨界イジング模型
- (5)  $\kappa = 8$   $\iff$  uniform spanning tree

## 2.4 SLEの種類

今回, 定義した SLE は chordal SLE と呼ばれる. chordal SLE の他には, 定義された領域ごとに, 次の SLE が知られている.

( $\alpha$ ) radial SLE

単位円盤上の一点から原点に伸びる曲線を単位円盤に写す SLE

( $\beta$ ) whole plane SLE

無限遠点から原点に伸びる曲線を無限遠点に戻す SLE

## 第3章 ベキ行列法

ここでは, Schippers が導入したベキ行列法について説明する [20, 21].

### 3.1 ベキ行列

まずベキ行列の元になるベキ級数の含まれる一般化空間を次のように定義する.

$$\mathbb{C}_p[1/z] = \left\{ \sum_{m=-\infty}^p a_m z^m : a_m \in \mathbb{C}, a_p \neq 0 \right\}.$$

この空間に属する  $f \in \mathbb{C}_p[1/z]$  という関数  $f(z)$  は,  $p$  次の極を持っている. また, 空間  $f \in \mathbb{C}_p[1/z]$  を集めて作る  $f \in \mathbb{C}_{\leq p}[1/z] = \bigcup_{k=-\infty}^p \mathbb{C}_k[1/z]$  は, ベクトル空間を成す.

関数  $f \in \mathbb{C}_p[1/z]$  について, 無限遠点周りでローラン展開を行う.

$$f(z) = \sum_{m=-\infty}^p [f]_m^1 z^m.$$

このとき, 関数  $f_t(z)$  の  $z$  の  $m$  乗の係数を  $[f]_m^1$  と定めた. さらに, この関数  $f_t(z)$  の  $n$  乗を考え, 同様にローラン展開を行う.

$$(f(z))^n = \sum_{m=-\infty}^{np} [f]_m^n z^m.$$

ここでは, 関数  $(f_t(z))^n$  の  $z$  の  $m$  乗の係数を  $[f]_m^n$  と定める. このようにして, 得た係数  $[f]_m^n$  を  $(n, m)$  成分に持つ無限行列を, ベキ行列と呼ぶ. また, この行列は  $M_p(\infty) = \{[f] : [f] \in \mathbb{C}[1/z]\}$  という空間に属するとする. このように書き表せることから写像  $f \mapsto [f]$  があると考えられる. 以下では, 特に  $p = 1$  の場合について  $M(\infty) = M_1(\infty)$  とする.



## 3.2 べき行列の積

次にここで導入したべき級数とべき行列について演算についての関係を見る. 関数  $f, g \in \mathbb{C}_1[1/z]$  に対して, この合成写像  $f \circ g$  の  $n$  乗を計算すると

$$\begin{aligned} (f \circ g)^n(z) &= \sum_{l=-\infty}^n [f]_l^n (g(z))^l, \\ &= \sum_{l=-\infty}^n [f]_l^n \sum_{m=-\infty}^l [g]_m^l z^m, \\ &= \sum_{l=-\infty}^n \sum_{m=-\infty}^n [f]_l^n [g]_m^l z^m, \end{aligned}$$

となる. ここで, 和を取り変えると

$$(f \circ g)^n(z) = \sum_{l=-\infty}^n \left( \sum_{m=l}^n [f]_l^n [g]_m^l \right) z^m, \quad (3.1)$$

となる. よって, べき行列では

$$[f \circ g] = [f][g], \quad (3.2)$$

という計算が成り立つことが分かり, また計算が  $M(\infty)$  に閉じていることが分かる. さらに, 写像  $f \mapsto [f]$  は, べき級数での合成写像の計算とべき行列の積が対応し, 群作用を保つことが分かる. よって,  $f \mapsto [f]$  という群の準同型写像である.

また, べき級数の計算から, べき行列の成分での演算を見ると

$$[f \circ g]_m^n = \sum_{l=m}^n [f]_l^n [g]_m^l, \quad (3.3)$$

となり, べき行列の積の  $n, m$  成分は,  $(n - m + 1) \times (n - m + 1)$  の大きさの行列の積を行うことで得られる. ここで積を考える際に表れた有限の行列を principal block と呼ぶ.

### 3.3 べき行列の微分

パラメータ  $t$  に依存する関数  $F_t$  を考える.

$$F_t(z) = z + th(z) + o(t). \quad (3.4)$$

このとき,  $h \in \mathbb{C}_{\leq 1}[1/z]$  とする. この関数の  $n$  乗を考えると

$$\begin{aligned} (F_t(z))^n &= (z + th(z) + o(t))^n, \\ &= z^n + nth(z)z^{n-1} + o(t) \end{aligned}$$

なり, この  $(F_t(z))^n$  を  $t$  で微分する.

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} (F_t(z))^n \right|_{t=0} &= nh(z)z^{n-1}, \\ &= \sum_{l=-\infty}^1 n[h]_l^1 z^{n+l-1}. \end{aligned}$$

このとき

$$\langle h \rangle_m^n = n[h]_{m-n+1}^1, \quad (3.5)$$

と定めると

$$\left. \frac{d}{dt} (F_t(z))^n \right|_{t=0} = \sum_{m=-\infty}^n \langle h \rangle_m^n z^{n+m-1}, \quad (3.6)$$

となる. そして, この  $\langle h \rangle$  は,

$$\mathfrak{m}(\infty) = \{ \langle h \rangle : h \in \mathbb{C}_{\leq 1}[1/z] \}, \quad (3.7)$$

という空間に属するものとする.

このべき行列  $\langle h \rangle$  の指数関数は, べき行列の微分方程式の解として表れるため, べき行列法での重要な役割を持つ. 関数  $h \in \mathbb{C}_{\leq 1}$  に対して, べき行列の指数関数  $\exp \langle h \rangle$  は次のように与えられる.

$$\exp \langle h \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \langle h \rangle^n. \quad (3.8)$$

べき行列の成分の演算が principal block の積で収まることから, このべき行列の指数関数の存在が保障される. また, この指数関数は以下の性質を

持つ.

$$(1) \quad \exp t\langle h \rangle \exp s\langle h \rangle = \exp (t+s)\langle h \rangle. \quad (3.9)$$

$$(2) \quad \frac{d}{dt} \exp t\langle h \rangle = \langle h \rangle \exp t\langle h \rangle = \exp t\langle h \rangle \langle h \rangle. \quad (3.10)$$

### 3.4 べき行列の微分方程式

ここでは, 常微分形式 Loewner 方程式についてべき行列を適用することで, 得られるべき行列の微分方程式について説明する.

常微分形式 Loewner 方程式は, 次のように定義される.

定義 3.4.1. 関数  $f_t \in \mathbb{C}_1[1/z]$ ,  $t \geq 0$  に対して, 関数  $h(z) = -zp(z) \in \mathbb{C}_{\leq 1}[1/z]$  が存在するとき

$$\frac{\partial f_t(z)}{\partial t} = h \circ f_t(z), \quad (3.11)$$

を常微分形式 Loewner 方程式という. ここで,  $p(z)$  は,

$$p(z) = \sum_{n=-\infty}^0 p_n z^n, \quad p_0 = 1, \quad (3.12)$$

というべき級数である.

ここで定義された Loewner 方程式に対して, べき行列法を適用する. まず,  $f_t(z)$  の  $n$  乗を  $t$  で微分すると

$$\frac{\partial (f_t(z))^n}{\partial t} = n(f_t(z))^{n-1} \frac{\partial f_t(z)}{\partial t}, \quad (3.13)$$

となり, この左辺についてべき行列で表現すると

$$\frac{\partial (f_t(z))^n}{\partial t} = \sum_{m=-\infty}^n \frac{\partial}{\partial t} [f_t]_m^n z^m, \quad (3.14)$$

となる. 次に右辺をべき行列で表す.

$$\begin{aligned}
n(f_t(z))^{n-1} \frac{\partial f_t(z)}{\partial t} &= n(f_t(z))^{n-1} \sum_{r=-\infty}^r [h]_r^1 (f_t(z))^r, \\
&= n \sum_{r=-\infty}^1 [h]_r^1 (f_t(z))^{n+r-1}, \\
&= n \sum_{r=-\infty}^1 \sum_{m=-\infty}^{n+r-1} [h]_r^1 [f_t]_m^{n+r-1} z^m.
\end{aligned}$$

ここで,  $l = n + r - 1$  とすることで

$$\begin{aligned}
n(f_t(z))^{n-1} \frac{\partial f_t(z)}{\partial t} &= \sum_{l=-\infty}^n \sum_{m=-\infty}^l n [h]_{l-n+1}^1 [f_t]_m^l z^m, \\
&= \sum_{m=-\infty}^n \sum_{l=m}^n \langle h \rangle_l^n [f_t]_m^l z^m, \tag{3.15}
\end{aligned}$$

となる. よってべき行列の微分方程式は

$$\frac{\partial}{\partial t} [f_t] = \langle h \rangle [f_t], \tag{3.16}$$

となる. この解は, 前の節でも述べた通り, 一般に指数関数の形で書かれ

$$[f_t] = \exp t \langle h \rangle, \tag{3.17}$$

と与えられる.

### 3.5 行列 $\langle z^{k+1} \rangle$ の性質

ここで,  $\langle z^{k+1} \rangle$  という行列を以下で定義する. これは,  $\langle h \rangle$  で定義した括弧  $\langle \rangle$  の定義を,  $z$  の  $k+1$  乗に対して適用したものである. よって,  $\langle z^{k+1} \rangle$  の成分は

$$\langle z^{k+1} \rangle_m^n = n \delta_{n,m-k}, \quad n, m \in \mathbb{Z}, \tag{3.18}$$

と与えられる. この  $\langle z^{k+1} \rangle$  は以下の Witt 代数を満たす.

$$[\langle z^{n+1} \rangle, \langle z^{m+1} \rangle] = (n - m) \langle z^{n+m+1} \rangle. \tag{3.19}$$

この行列には以下の性質がある.

$$\begin{aligned}(\langle z^{k+1} \rangle_m^n)^2 &= \sum_l \langle z^{k+1} \rangle_l^n \langle z^{k+1} \rangle_m^l \\ &= \sum_l n l \delta_{n, l-k} \delta_{l, m-k}, \\ &= n(m-k) \delta_{n, m-2k}, \\ &= (n+k) \langle z^{2k+1} \rangle_m^n.\end{aligned}$$

## 第4章 共形場理論とSLEの関係

ここでは Bauer, Bernard によって示された共形場理論との関係を紹介する. Bauer, Bernard によると, SLE と共形場理論の関係は, 以下のような群を定義することにより, 対応が得ることができる. [8–14]

### 4.1 Bauer, Bernard の研究

定義 4.1.1. 形式的 Virasoro 群  $Vir_-$  に属する  $F_{G_t} \in Vir_-$  は, Schramm Loewner 方程式を満たす共形写像  $g_t$  に対して,  $G_t(z) = g_t - U_t$  と定めた  $G_t$  と Virasoro 代数  $L_k (k \leq 0)$  を用いることで, 次の関係を満たすように定義される.

$$(F_{G_t})^{-1} dF_{G_t} = dt \left( -2L_{-2} + \frac{\kappa}{2}(L_{-1})^2 \right) + \sqrt{\kappa} L_{-1} dB_t. \quad (4.1)$$

ただし, Virasoro 代数の元  $L_k$  は,

$$L_k = -z^k \frac{\partial}{\partial z}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (4.2)$$

とする.

この定義の際に得ることが出来る関係を次のように書きなおす.

$$dF_{G_t} = F_{G_t} \left( dt(-2L_{-2} + \frac{\kappa}{2}(L_{-1})^2) + \sqrt{\kappa} L_{-1} dB_t \right). \quad (4.3)$$

この式を最高重み表現での最高重みベクトル  $|\omega\rangle$  に作用させると

$$dF_{G_t}|\omega\rangle = F_{G_t} \left( dt(-2L_{-2} + \frac{\kappa}{2}(L_{-1})^2) + \sqrt{\kappa} L_{-1} dB_t \right) |\omega\rangle, \quad (4.4)$$

となる. ここで期待値をとると, ブラウン運動のマルチンゲール性より

$$\mathbf{E} [dF_{G_t}|\omega\rangle] = \mathbf{E} \left[ F_{G_t} \left( dt(-2L_{-2} + \frac{\kappa}{2}(L_{-1})^2) \right) |\omega\rangle \right], \quad (4.5)$$

となる. この式を時間で微分すると

$$\frac{d}{dt}\mathbf{E}[F_{G_t}|\omega\rangle] = \frac{d}{dt}\mathbf{E}\left[F_{G_t}\left(dt(-2L_{-2} + \frac{\kappa}{2}(L_{-1})^2)\right)|\omega\rangle\right], \quad (4.6)$$

という関係式が得られる. 最高重み表現でのベクトル  $|\omega\rangle$  と, レベル 2 まで退化した表現での特異ベクトル  $|\chi\rangle$  には

$$|\chi\rangle = \left(-2L_{-2} + \frac{\kappa}{2}(L_{-1})^2\right)|\omega\rangle = 0, \quad (4.7)$$

という関係があるので

$$\frac{d}{dt}\mathbf{E}\left[F_{G_t}\left(dt(-2L_{-2} + \frac{\kappa}{2}(L_{-1})^2)\right)|\omega\rangle\right] = 0, \quad (4.8)$$

となりレベル 2 の退化表現が SLE のマルチンゲールを与えることが分かる [8–14, 23].

## 第5章 研究結果

### 5.1 SLE へのべき行列法の適用

べき行列法を SLE に適用する方法を示す. まず, SLE の方程式に対して以下の変更を行う.

$$G_t(z) = g_t(z) - \sqrt{\kappa}B_t. \quad (5.1)$$

この変更により, SLE の確率微分方程式は,

$$dG_t = \frac{2}{G_t} dt - \sqrt{\kappa}dB_t, \quad (5.2)$$

となる. このとき, 時間  $t$  による偏微分と, 一次元標準ブラウン運動  $B_t$  を通常の変数としたときの偏微分を考えると

$$\frac{\partial}{\partial t}G_t(z) = \frac{2}{G_t}, \quad \left. \frac{\partial G_t(z)}{\partial x} \right|_{x=B_t} = -\sqrt{\kappa}, \quad (5.3)$$

となる. 次に  $G_t(z)$  のべき行列を考える. まず  $G_t(z)$  の一乗について

$$G_t(z) = \sum_{m=-\infty}^1 [G_t]_m^1 z^m, \quad [G_t]_1^1 = 1, \quad [G_t]_0^1 = -\sqrt{\kappa}t, \quad [G_t]_{-1}^1 = 2t, \quad (5.4)$$

となる. さらに,  $h_t(z)$  の  $m$  乗は

$$(G_t(z))^n = \sum_{m=-\infty}^n [G_t]_m^n z^m, \quad (5.5)$$

となる. このべき行列  $[G_t]$  の初期条件は  $G_{t=0}(z) = z$  より

$$[G_{t=0}] = I \quad (5.6)$$



である.(このとき,  $I$  は単位行列とした)

このように定義したべき行列  $[G_t]$  の成分に対する伊藤の公式を導くためにべき級数  $G_t$  の  $n$  乗について, 伊藤の公式を計算する [6].

$$\begin{aligned}
d(G_t(z))^n &= \left. \frac{\partial(G_t(z))^n}{\partial t} \right|_{x=B_t} dt + \left. \frac{\partial(G_t(z))^n}{\partial B_t} \right|_{x=B_t} dB_t + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2(G_t(z))^n}{\partial B_t^2} \right|_{x=B_t} (dB_t)^2, \\
&= 2n(G_t(z))^{n-2} dt - n\sqrt{\kappa}(G_t(z))^{n-1} dB_t + \frac{n(n-1)}{2}(G_t(z))^{n-2} \kappa dt, \\
&= \left\{ 2n + \frac{n(n-1)}{2} \kappa \right\} (G_t(z))^{n-2} dt - n\sqrt{\kappa}(G_t(z))^{n-1} dB_t. \tag{5.7}
\end{aligned}$$

この伊藤の公式に対して, べき行列法を適用すると

$$\begin{aligned}
d \sum_{m=-\infty}^n [G_t]_m^n z^m &= \sum_{m=-\infty}^{n-2} \left\{ 2n + \frac{n(n-1)}{2} \kappa \right\} [G_t]_m^{n-2} z^m dt \\
&\quad - \sum_{m=-\infty}^{n-1} n\sqrt{\kappa} [G_t]_m^{n-1} z^m dB_t, \\
&= \sum_{m=-\infty}^{n-1} \left( \left\{ 2n + \frac{n(n-1)}{2} \kappa \right\} [G_t]_m^{n-2} dt - n\sqrt{\kappa} [G_t]_m^{n-1} z^m dB_t \right) z^m, \tag{5.8}
\end{aligned}$$

となる. ただし,  $[G_t]_m^n = 0, (n < m)$  を用いた. よって, べき行列の成分に対しての伊藤の公式は

$$d[G_t]_m^n = \left\{ 2n + \frac{n(n-1)}{2} \kappa \right\} [G_t]_m^{n-2} dt - n\sqrt{\kappa} [G_t]_m^{n-1} dB_t, \tag{5.9}$$

となる. この式を整理すると,

$$d[G_t]_m^n = \sum_l \left\{ 2n + \frac{n(n-1)}{2} \kappa \right\} \delta_{n,l+2} [G_t]_m^l dt - n\sqrt{\kappa} \delta_{n,l+1} [G_t]_m^l dB_t, \tag{5.10}$$

と書き直すことができる.

ここで, 行列  $\langle z^{k+1} \rangle$  を用いると

$$d[G_t]_m^n = \sum_l \left\{ 2\langle z^{-1} \rangle_l^n + \frac{\kappa}{2} (\langle z^{-0} \rangle_l^2)^n \right\} [G_t]_m^l - \sqrt{\kappa} \langle z^0 \rangle_l^n [h_t]_m^l dB_t, \tag{5.11}$$

となる. このことより, べき行列の伊藤の公式は

$$d[G_t] = \left( \left\{ 2\langle z^{-1} \rangle + \frac{\kappa}{2} \langle z^0 \rangle^2 \right\} dt - \sqrt{\kappa} \langle z^0 \rangle dB_t \right) [G_t], \tag{5.12}$$

となる.

## 5.2 後進 SLE へのべき行列法の適用

Schramm Loewner 方程式を満たす写像  $g_t$  に対して,  $f_t = g_t^{-1}$  という逆写像を考える. この逆写像  $f_t$  に  $g_t(z)$  を代入して時間微分を行うと

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} f_t(g_t(z)) &= \frac{\partial g_t(z)}{\partial t} \frac{\partial f_t(g_t(z))}{\partial(g_t(z))}, \\ &= \frac{2}{g_t(z) - U_t} \frac{\partial f_t(g_t(z))}{\partial(g_t(z))} \end{aligned}$$

となり,  $g_t(z) = z$  とすると

$$\frac{\partial}{\partial t} f_t(z) = \frac{2}{z - U_t} \frac{\partial f_t(z)}{\partial z} \quad (5.13)$$

となる. この逆写像の持つ分布は,

$$g_{-t}(z) \stackrel{d}{=} f_t(z + \sqrt{\kappa}B_t) - \sqrt{\kappa}B_t \quad (5.14)$$

となり, この確率分布の関係より, 負時間での SLE の振る舞いが分かる [2]. さらに  $g_{t,-}(z) \equiv g_{-t}(z), t \geq 0$  と置き, Schramm Loewner 方程式が負の方向に時間が進むように拡張する. この負の時間発展をする Schramm Loewner 方程式を, 後進 Schramm Loewner 方程式といい, この方程式に従う確率過程を後進 SLE という. よって, 以下では, 後進 Schramm Loewner 方程式の形を求める.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} g_{t,-}(z) &= -\frac{\partial}{\partial t} g_{-t}(z) \\ &= -\frac{2}{g_{t,-}(z) - \sqrt{\kappa}B_t}, \end{aligned} \quad (5.15)$$

となる. この際に負の方向に時間が進むブラウン運動を以下のように定義する.

**定義 5.2.1.** 時間が正の方向に発展するブラウン運動  $B_t, t \geq 0$  に対し, 時間が負の方向に発展する

$$\tilde{B}_t = B_{-t}, \quad t \geq 0, \quad (5.16)$$

という負の時間発展をするブラウン運動を考え, このふたつを合わせて two-sided ブラウン運動と呼ぶ.

ここで、定義されたブラウン運動の分布は、 $t \geq 0$  に対して

$$B_{-t} \stackrel{d}{=} B_t \stackrel{d}{=} -B_t, \quad (5.17)$$

という関係があり、この間でブラウン運動を取り変えても確率分布に変化はない。よって、この関係を使って式を整理すると

$$\frac{\partial}{\partial t} g_{t,-}(z) = -\frac{2}{g_{t,-}(z) + \sqrt{\kappa}B_t}, \quad t \geq 0, \quad (5.18)$$

となる。この方程式から

$$G_{t,-}(z) = g_{t,-}(z) + \sqrt{\kappa}B_t \quad (5.19)$$

とし、この  $G_{t,-}$  に対する確率微分方程式を求めると

$$dG_{t,-} = -\frac{2}{G_{t,-}} dt + \sqrt{\kappa}B_t \quad (5.20)$$

となる。このとき、初期条件は

$$[G_{t=0,-}] = I \quad (5.21)$$

である。この確率微分方程式にべき行列法を適用し、計算を行うと

$$d[G_{t,-}] = \left\{ \left( -2\langle z^{-1} \rangle + \frac{\kappa}{2}\langle z^0 \rangle^2 \right) dt + \sqrt{\kappa}\langle z^0 \rangle dB_t \right\} [G_{t,-}], \quad t \geq 0, \quad (5.22)$$

という伊藤の公式が得られる。この  $[G_{t,-}]$  の満たす伊藤の公式は、Bauer と Bernard によって定義された形式的 Virasoro 群の生成子と一致する。

### 5.3 time-ordered exponential

ここでは、場の理論などで用いられる time-ordered exponential にブラウン運動を含めたものを説明する。ここでは、この + の添え字を付けることで time-ordered であることを表す。まず  $\langle h_1 \rangle, \langle h_2 \rangle \in \mathfrak{m}_1(\infty)$  という行列と、 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  という定数を考える。この行列  $\langle h_1 \rangle, \langle h_2 \rangle$  とパラメータ  $t \geq 0$  を用いて、以下で  $I_m(\alpha\langle h_1 \rangle, \beta\langle h_2 \rangle; t)$  という量を考える。自然数  $m \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$  に対して

$$\begin{aligned} & I_m(\alpha\langle h_1 \rangle, \beta\langle h_2 \rangle; t) \\ & \equiv \left( \alpha\langle h_1 \rangle \int_0^t dB_{t_m} + \beta\langle h_2 \rangle \int_0^t dt_m \right) \left( \alpha\langle h_1 \rangle \int_0^{t_m} dB_{t_{m-1}} + \beta\langle h_2 \rangle \int_0^{t_m} dt_{m-1} \right) \\ & \times \cdots \times \left( \alpha\langle h_1 \rangle \int_0^{t_2} dB_{t_1} + \beta\langle h_2 \rangle \int_0^{t_2} dt_1 \right), \end{aligned} \quad (5.23)$$

という行列を係数とする積分の積を定義する. ただし,  $I_m(\alpha\langle h_1\rangle, \beta\langle h_2\rangle; t) \in \mathfrak{m}_1(\infty)$ ,  $m \in \mathbb{N}$  であり,  $I_0(\alpha\langle h_1\rangle, \beta\langle h_2\rangle; t) \equiv 1$  とした. この  $I_m(\alpha\langle h_1\rangle, \beta\langle h_2\rangle; t)$  は

$$dI_m(\alpha\langle h_1\rangle, \beta\langle h_2\rangle; t) = (\alpha\langle h_1\rangle dB_t + \beta\langle h_2\rangle dt) I_{m-1}(\alpha\langle h_1\rangle, \beta\langle h_2\rangle; t), \quad (5.24)$$

という関係にある. そして, time-ordered exponential は

$$\exp\left(\alpha\langle h_1\rangle \int_0^t dB_{t'} + \beta\langle h_2\rangle \int_0^t dt'\right)_+ \equiv \sum_{m=0}^{\infty} I_m(\alpha\langle h_1\rangle, \beta\langle h_2\rangle; t), \quad (5.25)$$

と定義される. この定義から

$$\begin{aligned} & d \exp\left(\alpha\langle h_1\rangle \int_0^t dB_{t'} + \beta\langle h_2\rangle \int_0^t dt'\right)_+ \\ &= (\alpha\langle h_1\rangle dB_t + \beta\langle h_2\rangle dt) \exp\left(\alpha\langle h_1\rangle \int_0^t dB_{t'} + \beta\langle h_2\rangle \int_0^t dt'\right)_+, \quad t \geq 0, \end{aligned} \quad (5.26)$$

という確率微分方程式を満たす.

**Remark 1.**

(1)  $\alpha = 0$  の場合

時間部分のみが残るため

$$I_m(0, \beta\langle h_2\rangle; t) = \beta^m \langle h_2 \rangle^m t^m / m!, \quad m \in \mathbb{N}, \quad (5.27)$$

となるので

$$\exp\left(\beta\langle h_2\rangle \int_0^t dt'\right)_+ = \exp(\beta t \langle h_2 \rangle), \quad (5.28)$$

となる.

(2)  $\beta = 0$  の場合

この場合は, ブラウン運動による積分の部分だけが残る

$$I_m(\alpha\langle h_1\rangle, 0; t) = \alpha^m \langle h_1 \rangle^m \int_0^t dB_{t_m} \int_0^{t_m} dB_{t_{m-1}} \cdots \int_0^{t_2} dB_{t_1}, \quad m \in \mathbb{N}, \quad (5.29)$$

となる. このとき, 多重伊藤積分の公式より

$$\alpha^m \langle h_1 \rangle^m \int_0^t dB_{t_m} \int_0^{t_m} dB_{t_{m-1}} \cdots \int_0^{t_2} dB_{t_1} = \alpha^m \langle h_1 \rangle^m \frac{1}{m!} H_m(B_t, t), \quad (5.30)$$

と表すことができる [18]. ここで,  $H_m(B_t, t)$  はパラメータ付きのエルミート多項式であり

$$H_m(x, y) \equiv \frac{\partial^m}{\partial \xi^m} \exp\left(\xi x - \frac{1}{2}\xi^2 y\right) \Big|_{\xi=0}, \quad m \in \mathbb{N}, x, y \in \mathbb{R}, \quad (5.31)$$

という公式で与えられる. この公式で  $z = \sqrt{y}(\xi - \frac{x}{y})$  と変数を変えたと

$$H(x, y) = y^{\frac{m}{2}} H_m(z) = (-1)^m y^{\frac{m}{2}} e^{z^2/2} \frac{d^m}{dz^m} e^{-z^2/2}, \quad (5.32)$$

となり, 通常のエルミート多項式  $H_m(z)$  で表すことができる. ここで  $\beta = 0$  の場合の time-ordered exponential は

$$\exp\left(\alpha \langle h_1 \rangle \int_0^t dB_{t'}\right)_+ = \exp\left(\alpha \langle h_1 \rangle B_t - \frac{\alpha^2}{2} \langle h_1 \rangle^2 t\right), \quad (5.33)$$

となる. よって,  $\beta = 0$  の場合の伊藤の公式は

$$d \exp\left(\alpha \langle h_1 \rangle \int_0^t dB_{t'}\right)_+ = \alpha \langle h_1 \rangle \exp\left(\alpha \langle h_1 \rangle \int_0^t dB_{t'}\right)_+ dB_t, \quad (5.34)$$

となる.

また,  $\beta = 0$  の場合の time-ordered exponential はマルチンゲールであり, 期待値をとると

$$\mathbf{E} \left[ \exp\left(\alpha \langle h_1 \rangle \int_0^t dB_{t'}\right)_+ \right] = \exp\left(\alpha \langle h_1 \rangle \int_0^t dB_{t'}\right)_+ \Big|_{t=0} = 1, \quad 0 \leq \forall t \leq T < \infty, \quad (5.35)$$

という性質がある.

以下で, この time-ordered exponential を用いて  $[G_{t,-}]$  の解を表す. (5.22) の形を見ると, 伊藤の公式より

$$\left\{ \left( -2 \langle z^{-1} \rangle + \frac{\kappa}{2} \langle z^0 \rangle^2 \right) dt + \sqrt{\kappa} \langle z^0 \rangle dB_t \right\},$$

が出てくることになる. この関係を満たすのは time-ordered exponential であるため,  $[G_{t,-}]$  の解は

$$[G_{t,-}] = \exp\left(\sqrt{\kappa} \langle z^0 \rangle \int_0^t dB_{t'} + \left\{ -2 \langle z^{-1} \rangle + \frac{\kappa}{2} \langle z^0 \rangle^2 \right\} \int_0^t dt'\right)_+, \quad t \geq 0, \quad (5.36)$$

と与えられる. これにより, 形式的 Virasoro 群の形が明らかになった. 以上の結果を定理とする.

定理 5.3.1. 初期条件  $[G_{t=0,-}] = I$  である

$$d[G_{t,-}] = \left\{ \left( -2\langle z^{-1} \rangle + \frac{\kappa}{2} \langle z^0 \rangle^2 \right) dt + \sqrt{\kappa} \langle z^0 \rangle dB_t \right\} [G_{t,-}], \quad t \geq 0, \quad (5.37)$$

の解は

$$[G_{t,-}] = \exp \left( \sqrt{\kappa} \langle z^0 \rangle \int_0^t dB_{t'} + \left\{ -2\langle z^{-1} \rangle + \frac{\kappa}{2} \langle z^0 \rangle^2 \right\} \int_0^t dt' \right)_+, \quad t \geq 0, \quad (5.38)$$

で与えられる.

**Remark 2.** ホワイトノイズ  $W_t = \frac{dB_t}{dt}$  を用いて揃える方法を以下で示す. ここでは, time-ordered であることを  $T$  を用いて表す. この  $I_m(\alpha\langle h_1 \rangle, \beta\langle h_2 \rangle; t)$  は時間の積分範囲を揃えることで

$$\begin{aligned} & I_m(\alpha\langle h_1 \rangle, \beta\langle h_2 \rangle; t) \\ &= \frac{1}{m!} \left( \alpha\langle h_1 \rangle \int_0^t dB_{t_m} + \beta\langle h_2 \rangle \int_0^t dt_m \right) \left( \alpha\langle h_1 \rangle \int_0^{t_m} dB_{t_{m-1}} + \beta\langle h_2 \rangle \int_0^{t_m} dt_{m-1} \right) \\ & \quad \times \cdots \times \left( \alpha\langle h_1 \rangle \int_0^{t_1} dB_{t_1} + \beta\langle h_2 \rangle \int_0^{t_1} dt_1 \right), \end{aligned} \quad (5.39)$$

$$= \frac{1}{m!} \int_0^t \int_0^{t_m} \cdots \int_0^{t_1} dt_m dt_{m-1} \cdots dt_1 T \left[ \frac{dB_{t_m}}{dt_m} \cdots \frac{dB_{t_{m-1}}}{dt_{m-1}} \frac{dB_{t_1}}{dt_1} \right], \quad (5.40)$$

となるため, time-ordered exponential の定義から

$$T \left\{ \exp \left( \alpha\langle h_1 \rangle \int_0^t dB_{t'} + \beta\langle h_2 \rangle \int_0^t dt' \right) \right\} \equiv \sum_{m=0}^{\infty} I_m(\alpha\langle h_1 \rangle, \beta\langle h_2 \rangle; t), \quad (5.41)$$

とすることができる [15, 22].

## 第6章 今後の展望

### 6.1 様々なSLEへの応用

今回紹介した chordal SLE の他に radial SLE, whole plane SLE など境界の形を変化させた様々な SLE が存在する [8-14]. 今回, 発見したべき行列表現はその他の SLE に対しても有効な手段であると考えられ, さらなる研究が期待される.

### 6.2 確率過程との繋がり

今回得ることができた SLE のべき行列表現は

$$[G_{t,-}] = \exp \left( \sqrt{\kappa} \langle z^0 \rangle \int_0^t dB_{t'} + \left\{ -2 \langle z^{-1} \rangle + \frac{\kappa}{2} \langle z^0 \rangle^2 \right\} \int_0^t dt' \right)_+, \quad t \geq 0, \quad (6.1)$$

である. 無限次元列ベクトル

$$|z\rangle = \begin{pmatrix} \vdots \\ z^{-2} \\ z^{-1} \\ 1 \\ z \\ z^2 \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad (6.2)$$

を考え,  $|z\rangle$  に  $[G_{t,-}]$  を左から作用させる.

$$\begin{aligned} [G_{t,-}]|z\rangle &= \exp \left( \sqrt{\kappa} \langle z^0 \rangle \int_0^t dB_{t'} + \left\{ -2 \langle z^{-1} \rangle + \frac{\kappa}{2} \langle z^0 \rangle^2 \right\} \int_0^t dt' \right)_+ |z\rangle, \\ &\equiv |G_{t,-}\rangle. \end{aligned} \quad (6.3)$$

これを考えることで

$$|G_{t,-}\rangle = \begin{pmatrix} \vdots \\ G_{t,-}^{-2} \\ G_{t,-}^{-1} \\ 1 \\ G_{t,-} \\ G_{t,-}^2 \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad (6.4)$$

という無限次元列ベクトルを与えることができる. このベクトルから確率過程における Heisenberg 表現を与えることができると考えられる.

### 6.3 共形場理論との繋がり

べき行列法により得た結果から, 最高重みベクトルや SLE の局所性などを用いることで, 中心電荷と共形次元の関係が出てくることが期待される. またパラメータの関係だけに留まらず, 相関関数の計算や Cardy の公式など, さらなる共形場理論との関係が期待される. [8–14].



# 謝辞

本研究を進めるにあたり，指導教官の香取眞理先生には大学学士4年から大学院修士2年の計3年間，多くのご指導ご鞭撻を頂き，深く感謝申し上げます。先生から頂いたご助言，及び議論を行うことができたことから，多くの分野にまたがる研究内容についての深い理解が得ることができました。また就職活動で，研究がなかなか進まなかったにも関わらず，励ましの言葉を掛けて応援し続けて頂き，ありがとうございました。稲見先生，田口先生は，修士論文の副査をして頂きました。また稲見先生には，弦理論の講義やセミナー等で，大学から大学院まで大変お世話になりました。松下先生には，学内でのセミナーなどを通し，様々な交流をして頂き，多くのことを学ぶことができ，人生の良い経験となりました。香取研究室の小林奈央樹氏，錦織志菜さん，山田泰之君には研究の相談に乗って頂きました。稲見研究室の皆様，特に西山悌生君，北村比孝君，小山陽次氏には研究の相談，稲見研主催のセミナー等で，大変お世話になりました。たくさんのご支援があり，修士論文をまとめることができました。皆様，ありがとうございました。

## 参考文献

- [1] 香取眞理, Summer School 数理物理 2009 講義テキスト, 東京大学大学院数理科学研究科大講義室, (2009年8月27日 - 30日).
- [2] 香取眞理, 講義ノート「確率的 Loewner 発展 (SLE) 入門」, 東京工業大学大学院数学専攻 集中講義, (2010年12月6 - 10日).
- [3] 川上則雄, 梁成吉. 「共形場理論と一次元量子系」, 岩波書店, (1997).
- [4] 鈴木淳史. 「現代物理学への招待, ランダムウォークから広がる多彩な物理と数理」, サイエンス社, (2006).
- [5] 西森秀稔. 「相転移・臨界現象の統計物理学」, 培風館, (2005).
- [6] 松本裕行. 「応用のための確率論・確率過程」, サイエンス社, (2004).
- [7] 山田泰彦. 「共形場理論入門」, 培風館, (2006).
- [8] M.Bauer and D.Bernard. SLE $_{\kappa}$  growth processes and conformal field theories. Phys. Lett. **B543**, 135-138 (2002).
- [9] M.Bauer and D.Bernard. SLE martingales and the Virasoro algebra. Phys. Lett. **B557**, 309-316 (2003).
- [10] M.Bauer and D.Bernard. Conformal Field Theories of Stochastic Loewner Evolutions. Comm. Math. Phys. **239**, 439-521 (2003).
- [11] M.Bauer and D.Bernard. SLE, CFT and zig-zag probability. in: Proceedings of Nato Conference Conformal Invariance and Random Spatial processes. Edimbourg (2003).
- [12] M.Bauer and D.Bernard. CFTs of SLEs : the radial case. Phys. Lett. **B583**, 324-330 (2004).

- [13] M.Bauer and D.Bernard. Conformal transformations and the SLE partition function martingale. *Ann. Henri Poincaré* **5**, 289-326 (2004).
- [14] M.Bauer and D.Bernard. 2D growth process:SLE and Loewner chains. *Phys.Rep.* **432**, 115-221 (2006).
- [15] J.Cardy. SLE for theoretical physicists. *Ann. Phys.* **318**, 81-118 (2005).
- [16] R.Friedrich and W.Werner. Conformal Restriction, Highest-Weight Representations and SLE. *Comm. Math. Phys.* **243**, 105-122 (2003).
- [17] P.de Gennes. *Scailing Concepts in Polymer Physics*. Cornell University Press, (1979).
- [18] I, Karatzas and S. E. Shreve.: *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. 2nd edn. Springer, (1991).
- [19] O.Schramm. Scaling limits of loop-erased random walks and uniform spanning trees. *Israel J. Math.* **118**, 221-228 (2000).
- [20] E.Schippers. The power matrix, coadjoint action and quadratic differentials. *J. Anal. Math.* **98**, 249-277 (2006).
- [21] E.Schippers. A power matrix approach to Witt algebra and Loewner equations. *Computational Methods and Function Theory* **10**, 399-420(2010).
- [22] M.E.Peskin and D.V.Schroeder. *An Introduction to Quantum Field Theory*. Westview Press, (1995).
- [23] R. Mahnke, J. Kaupužs and I. Lubashevsky. *Physics of Stochastic Processes: How Randomness Acts in Time*. WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, Weinheim, (2009).