

ヤコビ・テータ積分核およびラマヌジャン
積分核をもつ無限次元行列式点過程

Infinite-dimensional determinantal point processes
with Jacobi-theta kernel and Ramanujan kernel

高橋 優太

Yuta Takahashi

中央大学大学院 理工学研究科 物理学専攻

Department of Physics, Faculty of Science and Engineering, Chuo University

平成 26 年 3 月 3 日

(3 Mar 2014)

論文のあらまし

q -拡張とは, q という一つのパラメタを 1 にした極限で古典論を包含するような, 古典論の非自明な拡張を考える理論である. この論文では, ランダム行列理論で有名なガウス・ユニタリー・アンサンブルの固有値点過程の q -拡張である, Stieltjes-Wigert アンサンブルと呼ばれる行列式点過程から導かれる無限粒子極限について考える. 適切なスケーリング極限をとることにより, 三角関数の q -拡張であるヤコビ・テータ関数, およびエアリー関数の q -拡張であるラマヌジャン関数と呼ばれる q -級数によって記述される行列式点過程が導出される. 前者は Stieltjes-Wigert アンサンブルに対するバルク・スケーリング極限であり, 後者はエッジ・スケーリング極限になっている. さらに, それらから q を 1 にした極限で古典的なサイン行列式点過程およびエアリー行列式点過程が導出されることを示す.

謝辞

まず、私の修士課程二年間にわたり懇切丁寧なご指導、セミナーでの啓発的な議論、そして沢山の励ましを下さった指導教官の香取眞理教授に心からの感謝の辞を述べます。香取先生は、私に数理物理学の最先端や、いかにして研究者のコミュニティーに対して自身の研究を表現していくかということを学ぶ機会を数多く下さいました。また、先生の研究に対する情熱的な姿勢は、深く私に影響を与えました。

本修士論文を読んで下さった稲見武夫教授、石井靖教授に深く感謝いたします。

目次

| | | |
|-------|---|----|
| 第 1 章 | はじめに | 1 |
| 第 2 章 | Stieltjes-Wigert 多項式の漸近形 | 11 |
| 2.1 | バルク・スケーリング ($0 < \tau < 2$) | 11 |
| 2.2 | エッジ・スケーリング ($\tau = 0, 2$) | 12 |
| 第 3 章 | 主結果 | 15 |
| 3.1 | ヤコビ・テータ行列式点過程 | 15 |
| 3.2 | ラマヌジャン行列式点過程 | 17 |
| 第 4 章 | \mathbb{R} 上への写像 | 19 |
| 4.1 | \mathbb{R} 上に写したヤコビ・テータ行列式点過程 | 21 |
| 4.2 | \mathbb{R} 上に写したラマヌジャン行列式点過程 | 24 |
| 第 5 章 | 今後の課題 | 27 |
| 付録 A | Lemma 1 および Lemma 2 の証明 | 31 |
| 付録 B | (3.1.11) の証明 | 41 |
| 付録 C | (3.2.10) の証明 | 43 |
| 参考文献 | | 50 |

第1章 はじめに

次の分布によって与えられるランダムな $N \times N$ エルミート行列 H の統計集団（アンサンブル）を考える：

$$\begin{aligned} P(dH) &\propto e^{-\text{Tr}(H^2)} \prod_{j=1}^N dH_{jj} \prod_{1 \leq j < k \leq N} d\Re H_{jk} d\Im H_{jk} \\ &= \prod_{j=1}^N e^{-H_{jj}^2} dH_{jj} \prod_{1 \leq j < k \leq N} e^{-2|H_{jk}|^2} d\Re H_{jk} d\Im H_{jk}. \end{aligned} \quad (1.0.1)$$

ここで $N \in \{2, 3, \dots\}$ とする. (1.0.1) は, 合計 N^2 個あるエルミート行列 H の独立な実数成分のうち, 実数である対角成分は分散 $1/2$, 平均 0 のガウス分布で, 上三角成分の実部および虚部は共に分散 $1/4$, 平均 0 のガウス分布で, それぞれ互いに独立に分布しているようなランダム・エルミート行列を考えることに同じであることを示している. このようなランダム行列アンサンブルは, **ガウシアン・ユニタリー・アンサンブル** (GUE) と呼ばれる [25, 12, 27]. ランダム行列アンサンブルは, 物理学や数学において様々なモデルを与える [25, 12, 27]. そこでは行列の固有値が, 例えばある特定の量子系におけるエネルギーといったような重要な量を記述するため, 特に与えられたランダム行列アンサンブルの**固有値分布**に興味がある. 固有値分布は行列を対角化することによって計算することができる. GUE に対しては, H をユニタリー行列 U によって対角化し, 固有値 $x_j \in \mathbb{R}$, $1 \leq j \leq N$ 以外の $N^2 - N$ 個の変数を積分することで, 次のような固有値分布が厳密に計算される：

$$P_N^{\text{GUE}}(\{x_j\}_{j=1}^N) = c_N^{\text{GUE}} \prod_{j=1}^N e^{-x_j^2} \prod_{1 \leq j < k \leq N} (x_k - x_j)^2. \quad (1.0.2)$$

ここで c_N^{GUE} は規格化定数であり, これもまた厳密に決定することができる [25, 12, 27]. ここで, 固有値分布 (1.0.2) のもつ特徴的な差積の構造に注意する. 差積は以下のヴァンデルモンド行列式

$$\prod_{1 \leq j < k \leq N} (x_k - x_j) = \det_{1 \leq j, k \leq N} [x_k^{j-1}] \quad (1.0.3)$$

を用いて表現できるが, この因子は, エルミート行列 H の各成分は独立であったにもかかわらずその固有値の間には強い相関があることを示している. この因子のために, N 個の固有値たちは一致することができない. 実際, ランダム行列アンサンブルとクーロン・ガスと呼ばれる統計力学モデルの間に, 興味深い対応関係がある [25, 12, 27]. この対応関係は, 上述の固有値間の反発に対して物理的な直感を与える. 二次元空間の N 個の点電荷からなる, 逆温度 β

にある古典熱平衡系を考える．各点電荷は調和ポテンシャルのなかで，一直線上に閉じ込められているとする．すると，系のエネルギーは

$$U_N \left(\{x_j\}_{j=1}^N \right) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N x_j^2 - \sum_{1 \leq j < k \leq N} \ln |x_k - x_j| \quad (1.0.4)$$

で与えられる．ここで第一項は点電荷を閉じ込める外的なポテンシャル，第二項は点電荷の間に働く二次元クーロン相互作用であり，粒子間の反発をあらわしている．したがって， N 個の点電荷の位置の分布は

$$Q_N \left(\{x_j\}_{j=1}^N \right) = C_N \exp \left[-\beta U_N \left(\{x_j\}_{j=1}^N \right) \right] \quad (1.0.5)$$

で与えられるが，これは $\beta = 2$ と置いたとき，(1.0.2) と完全に一致する．ここで，(1.0.2) や (1.0.5) は対称関数であるので，同種粒子系を考えていることに注意する．

前述のような同種粒子系の点配置は，

$$\Xi^{\text{GUE}}(\cdot) = \sum_{j=1}^N \delta_{X_j}(\cdot) \quad (1.0.6)$$

と表現することができる．ここで $\delta_x(\cdot)$ はデルタ測度， X_j , $1 \leq j \leq N$ は確率分布 (1.0.2) をもつ実軸 \mathbb{R} 上の乱数である．そこでこのような粒子系を， $(\Xi^{\text{GUE}}, P_N^{\text{GUE}})$ であらわすことにする．さて，ランダム行列アンサンブルにおいて最もよく調べられている物理量は， N' 点相関関数と呼ばれる次の量である． $1 \leq N' \leq N$ に対して， N' 点相関関数は

$$\begin{aligned} \rho_N^{(N')} \left(\{x_1^{(N')}, \dots, x_{N'}^{(N')}\} \right) &= \left\langle \sum_{1 \leq j_1 \neq \dots \neq j_{N'} \leq N} \prod_{k=1}^{N'} \delta \left(x_k^{(N')} - x_{j_k} \right) \right\rangle \\ &= \frac{N!}{(N - N')!} \int dx_{N'+1} \cdots \int dx_N P_N^{\text{GUE}} \left(\{x_1^{(N')}, \dots, x_{N'}^{(N')}, x_{N'+1}, \dots, x_N\} \right) \end{aligned} \quad (1.0.7)$$

なる対称関数で定義される．ここで， $1 \leq j \leq N'$ に対し， $x_j^{(N')} \in \mathbb{R}$ である．もしくは， f を実関数として，

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_N[f] &= E_N \left[\exp \left(\int f(x) \Xi^{\text{GUE}}(dx) \right) \right] \\ &= \int dx_1 \cdots \int dx_N P_N^{\text{GUE}} \left(\{x_j\}_{j=1}^N \right) e^{\sum_{k=1}^N f(x_k)} \end{aligned} \quad (1.0.8)$$

によって定義される**モーメント母関数**を考える．これが相関関数 (1.0.7) の母関数であることが， $g(\cdot) = e^{f(\cdot)} - 1$ と実関数 f 代わりに実関数 g 導入し，それについて展開することで

$$\mathcal{G}_N[f] = \int dx_1 \cdots \int dx_N P_N^{\text{GUE}} \left(\{x_j\}_{j=1}^N \right) \prod_{k=1}^N (1 + g(x_k)) \quad (1.0.9)$$

$$= 1 + \sum_{N'=1}^N \frac{1}{N'!} \int dx_1^{N'} \cdots \int dx_{N'}^{N'} \prod_{j=1}^{N'} g \left(x_j^{(N')} \right) \rho_N^{(N')} \left(\{x_1^{(N')}, \dots, x_{N'}^{(N')}\} \right) \quad (1.0.10)$$

を得ることからわかる．ここで， $K(x, y)$ を二変数実関数で次の二条件

$$\int K(x, x) dx = N, \quad K(x, y) = \int K(x, s) K(s, y) ds \quad (1.0.11)$$

を満たすものとする．このとき，次の恒等式を示すことができる：

$$\int dx_{N'+1} \cdots \int dx_N \det_{1 \leq j, k \leq N} [K(x_j, x_k)] = (N - N')! \det_{1 \leq j, k \leq N'} [K(x_j, x_k)]. \quad (1.0.12)$$

ここで，(1.0.3) 注意すれば，行列式の多重線形性を用いて GUE-固有値分布 (1.0.2) を，次のような行列式の形式で表現することができる：

$$P_N^{\text{GUE}} \left(\{x_j\}_{j=1}^N \right) = \frac{1}{N!} \det_{1 \leq j, k \leq N} \left[K_N^{\text{GUE}}(x_j, x_k) \right]. \quad (1.0.13)$$

ここで，二変数関数 K_N^{GUE} は

$$K_N^{\text{GUE}}(x, y) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{H_n(x) H_n(y)}{2^n n! \pi^{1/2}} e^{-(x^2+y^2)/2} \quad (1.0.14)$$

$$= \frac{2^{-N} \pi^{-1/2}}{(N-1)!} \frac{H_N(x) H_{N-1}(y) - H_N(y) H_{N-1}(x)}{x - y} e^{-(x^2+y^2)/2}, \quad (1.0.15)$$

$(x, y) \in \mathbb{R}^2,$

$$K_N^{\text{GUE}}(x, x) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{H_n(x)^2}{2^n n! \pi^{1/2}} e^{-x^2} \quad (1.0.16)$$

$$= \frac{2^{-N} \pi^{-1/2}}{(N-1)!} \left(H'_N(x) H_{N-1}(x) - H_N(x) H'_{N-1}(x) \right) e^{-x^2}, \quad (1.0.17)$$

$x = y \in \mathbb{R},$

と，エルミート多項式

$$H_n(x) = n! \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(-1)^k (2x)^{n-2k}}{k!(n-2k)!}, \quad n \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}, \quad (1.0.18)$$

を用いて与えた．等式 (1.0.15) は，直交多項式に対して成立する Christoffel-Darboux の公式 [33] より与えられる．ここで，(1.0.13) のような行列式の形式で分布 (1.0.2) を表現するだけならば，エルミート多項式を用いる必要はない．ここでは，(1.0.2) において 1 体ポテンシャルに相当したガウシアン e^{-x^2} を重み関数としてもつ直交多項式を利用することが重要である．エルミート多項式の直交性によって，条件 (1.0.11) を満たす二変数関数 K_N^{GUE} が得られる．さて，GUE-固有値分布 (1.0.2) に対する二つ目の注目すべき特徴は， N' 点相関関数 $\rho_N^{(N')}$ が，全ての $1 \leq N' \leq N$ に対して厳密に計算される場所にある．(1.0.15), (1.0.17) で与えられる K_N^{GUE} は (1.0.11) を満たすので，(1.0.13) と書かれる GUE-固有値分布 P_N^{GUE} に対し (1.0.12) を用いれば，GUE-固有値分布 (1.0.2) の全ての N' 点相関関数 (1.0.7) が厳密に計算され，またそれらは二変数関数 K_N^{GUE} によって記述される行列式

$$\rho_N^{(N')} \left(\left\{ x_1^{(N')}, \dots, x_{N'}^{(N')} \right\} \right) = \det_{1 \leq j, k \leq N'} \left[K_N^{\text{GUE}} \left(x_j^{(N')}, x_k^{(N')} \right) \right] \quad (1.0.19)$$

で表現されることがわかる。ここで、積分作用素

$$\widehat{\mathbf{K}}g(\cdot) = \int dy \mathbf{K}(\cdot, y)g(y) \quad (1.0.20)$$

の積分核 \mathbf{K} ，および実関数 g に付随するフレドホルム行列式

$$\begin{aligned} & \text{Det}_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} \left[\delta(x-y) + \mathbf{K}(x,y)g(y) \right] \\ &= 1 + \sum_{N'=1}^N \frac{1}{N'!} \int dx_1^{N'} \cdots \int dx_{N'}^{N'} \prod_{j=1}^{N'} g(x_j^{(N')}) \det_{1 \leq k, \ell \leq N'} \left[\mathbf{K}(x_k^{(N')}, x_\ell^{(N')}) \right] \end{aligned} \quad (1.0.21)$$

を定義する。ある位置の分布 P_N によって与えられる同種粒子系 (Ξ, P_N) は、(1.0.8) のように定義されるモーメント母関数が、ある積分核 \mathbf{K} に付随するフレドホルム行列式 (1.0.21) で与えられるとき、**積分核 \mathbf{K} をもつ行列式点過程**と呼ばれる [32,31]。すなわち、GUE-固有値分布 (1.0.2) によって与えられる N -粒子系 $(\Xi^{\text{GUE}}, P_N^{\text{GUE}})$ は行列式点過程である。

ここで、固有値分布 (1.0.2) の文脈では N 個の固有値からなる粒子系の無限粒子極限を考えることはできないが、(1.0.7) のように粒子系の情報を相関関数に焼き直すことで、それらを通して無限粒子系を調べることができることに注意する。GUE は上述のように、全ての相関関数が単一の積分核 K_N^{GUE} に付随するフレドホルム行列式

$$\text{Det}_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} \left[\delta(x-y) + K_N^{\text{GUE}}(x,y)g(y) \right] \quad (1.0.22)$$

により生成されるという行列式点過程である。したがって、その行列式構造から、適切な K_N^{GUE} の極限が得られれば、それに対応して極限系の全ての相関関数がフレドホルム行列式から決まるという意味で、無限粒子極限が得られることになる。そこで意味のある極限を得るために、**局所的に**系を観察して、極限をとることを考える。これは、ある典型的な粒子間の距離を定め、そのスケールを保ちながら極限をとるということを意味する。まずは粒子系のバルク領域に注目するとして、次のようなスケール変換を施してみる：

$$x = \frac{\pi\phi}{\sqrt{2N}}, \quad \phi \in \mathbb{R}. \quad (1.0.23)$$

実際、スケール変換 (1.0.23) を導入した、次のようなエルミート多項式に対する漸近解析の結果 [33]

$$H_n(x)e^{-x^2/2} = \frac{n!}{\Gamma(n/2+1)} \cos(\sqrt{2n+1}x - n\pi/2) + \mathcal{O}(n^{-3/4}) \quad (1.0.24)$$

が知られているので、 K_N^{GUE} に対し**バルク・スケーリング極限**

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\pi}{\sqrt{2N}} K_N^{\text{GUE}} \left(\frac{\pi\phi}{\sqrt{2N}}, \frac{\pi\varphi}{\sqrt{2N}} \right) = K_{\sin}(\phi, \varphi) \quad (1.0.25)$$

を得ることができる。ここで K_{\sin} は

$$K_{\sin}(\phi, \varphi) = \begin{cases} \frac{\sin(\pi(\phi - \varphi))}{\pi(\phi - \varphi)}, & \phi, \varphi \in \mathbb{R}, \phi \neq \varphi, \\ 1, & \phi = \varphi \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (1.0.26)$$

なる積分核であり、**サイン積分核**とよばれる [25, 12, 27]. したがって、この積分核を用いることで、粒子数 $N \rightarrow \infty$ としたときの系の原点近傍での漸近の様子を調べることができる. これに関連して、粒子系のエッジ近傍もまた別の興味ある領域であると考えられる. その領域を観察するために、次のようなスケール変換と、右端への平行移動を考える：

$$x = \frac{\zeta}{2^{1/2}N^{1/6}} + \sqrt{2N+1}, \quad \zeta \in \mathbb{R}. \quad (1.0.27)$$

スケール変換 (1.0.27) を導入したエルミート多項式の漸近解析の結果 [29]

$$H_n(x)e^{-x^2/2} = 2^{n/2+1/4}(n!)^{1/2}\pi^{1/4}n^{-1/12} \left(\text{Ai}(\zeta) + \mathcal{O}(n^{-2/3}) \right) \quad (1.0.28)$$

を用いることで、今度は次のような K_N^{GUE} の**エッジ・スケールリング極限**を得ることができる [11]:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{1/2}N^{1/6}} K_N^{\text{GUE}} \left(\frac{\zeta}{2^{1/2}N^{1/6}} + \sqrt{2N+1}, \frac{\xi}{2^{1/2}N^{1/6}} + \sqrt{2N+1} \right) = K^{\text{Airy}}(\zeta, \xi). \quad (1.0.29)$$

ここで、積分核 K^{Airy} は

$$\text{Ai}''(\zeta) - \zeta \text{Ai}(\zeta) = 0 \quad (1.0.30)$$

なる微分方程式の解であるエアリー関数 [39]

$$\text{Ai}(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\infty e^{-i\pi/3}}^{\infty e^{i\pi/3}} e^{v^3/3 - \zeta v} dv \quad (1.0.31)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dw e^{\sqrt{-1}(w^3/3 + \zeta w)} \quad (1.0.32)$$

を用いて記述される

$$K_{\text{Ai}}(\zeta, \xi) = \begin{cases} \frac{\text{Ai}(\zeta) \text{Ai}'(\xi) - \text{Ai}(\xi) \text{Ai}'(\zeta)}{\zeta - \xi}, & (\zeta, \xi) \in \mathbb{R}^2, \zeta \neq \xi, \\ \text{Ai}'(\zeta)^2 - \zeta \text{Ai}(\zeta)^2, & \zeta = \xi \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (1.0.33)$$

なる積分核で、**エアリー積分核**と呼ばれる [25, 12, 27]. この積分核を用いることで、GUE-固有値分布 (1.0.2) によって与えられる粒子系 $(\Xi^{\text{GUE}}, \text{P}_N^{\text{GUE}})$ の粒子数 $N \rightarrow \infty$ に対するエッジ近傍での漸近的な振舞いを調べることができる.

さて、この論文では次のような、**Stieltjes-Wigert アンサンブル** [37, 9, 10, 34] と呼ばれる固有値アンサンブルを調べる：

$$P_N \left(\{x_j\}_{j=1}^N \right) = c_N \prod_{j=1}^N \frac{e^{-(\ln x_j)^2/2|\ln q|}}{\sqrt{2\pi|\ln q|}} \prod_{1 \leq j < k \leq N} (x_k - x_j)^2. \quad (1.0.34)$$

ここで、以下では、 q は

$$0 < q < 1 \quad (1.0.35)$$

なるパラメタ, そして $x_j \in \mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$, $1 \leq j \leq N$ とする. c_N は規格化定数で, 厳密に決めることができる [37, 35]. 以下では, $0 < |q| < 1$, $z \in \mathbb{C}$ に対して定義される q -Pochhammer 記号 [1, 20]

$$(z; q)_0 = 1, \quad (z; q)_n = \prod_{k=0}^{n-1} (1 - zq^k), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (z; q)_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} (z; q)_n \quad (1.0.36)$$

を用いる. (1.0.34) をカノニカル・アンサンブルの形式で書けば, ポテンシャルは

$$W_N(\{x_j\}_{j=1}^N) = \frac{1}{4|\ln q|} \sum_{j=1}^N (\ln x_j)^2 - \sum_{1 \leq j < k \leq N} \ln |x_k - x_j| \quad (1.0.37)$$

であり, 粒子たちの位置の分布 (1.0.34) は

$$P_N(\{x_j\}_{j=1}^N) = c_N (2\pi |\ln q|)^{-N/2} \exp \left[-\beta W_N(\{x_j\}_{j=1}^N) \right] \quad (1.0.38)$$

において, 逆温度 $\beta = 2$ と置いたものとなる. 今回, 粒子たちは (1.0.37) の第一項の対数関数の二乗によって与えられている外的なポテンシャルによって, GUE-固有値分布 (1.0.2) の場合に比べてかなり弱く半直線 \mathbb{R}_+ 上に閉じ込められている. 一方, (1.0.37) の第二項の二粒子間の二次元クーロン相互作用は, GUE の場合と変わらない. 固有値アンサンブル (1.0.34) は, たとえばチャーン・サイモンズ理論の研究において重要な役割を果たすことが知られている [37]. GUE 同様, Stieltjes-Wigert アンサンブル (1.0.34) も行列式点過程であることを示すことができる. そこでは, Stieltjes-Wigert アンサンブル (1.0.34) に対し, その名前の由来でもある **Stieltjes-Wigert 直交多項式** と呼ばれる

$$\int_0^\infty p_n(x; q) p_m(x; q) w(x; q) dx = \delta_{nm}, \quad n, m \in \mathbb{N}_0, \quad (1.0.39)$$

という直交関係をみたとす, $0 < q < 1$ の 1 パラメタ q を含む多項式たちを用いる. ここで直交関係 (1.0.39) の重み関数 $w(x; q)$ は, (1.0.34) で現れている **対数正規型** の分布関数

$$w(x; q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi |\ln q|}} \exp \left[-\frac{(\ln x)^2}{2|\ln q|} \right], \quad x > 0, \quad 0 < q < 1, \quad (1.0.40)$$

で与える. この重み関数は

$$w(q^c x; q) = q^{c^2/2} x^c w(x; q), \quad c \in \mathbb{R}, \quad (1.0.41)$$

$$w\left(\frac{1}{x}; q\right) = w(x; q) \quad (1.0.42)$$

なる関数等式を満たす. 実際に, (1.0.39) を満たす直交多項式系は明示的に知られており,

$$p_n(x; q) = (-1)^n q^{n/2+1/4} \sqrt{(q; q)_n} \sum_{k=0}^n \frac{q^{k^2} (-q^{1/2} x)^k}{(q; q)_k (q; q)_{n-k}}, \quad x > 0, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (1.0.43)$$

で与えられる [33, 7, 20]. Stieltjes-Wigert 多項式 (1.0.43) を用いれば, 固有値アンサンブル (1.0.34) によって与えられる粒子系 (Ξ, P_N) のモーメント母関数 (1.0.10) は,

$$\text{Det}_{(x,y) \in \mathbb{R}_+^2} \left[\delta(x-y) + K_N(x,y)g(y) \right] \quad (1.0.44)$$

と, 積分核

$$K_N(x,y) = \sum_{n=0}^{N-1} p_n(x;q)p_n(y;q)\sqrt{w(x;q)w(y;q)} \quad (1.0.45)$$

$$= \frac{\sqrt{1-q^N} p_N(x;q)p_{N-1}(y;q) - p_N(y;q)p_{N-1}(x;q)}{q^{2N} (x-y)} \sqrt{w(x;q)w(y;q)}, \quad (1.0.46)$$

$$(x,y) \in \mathbb{R}_+^2, x \neq y,$$

$$K_N(x,x) = \sum_{n=0}^{N-1} p_n(x;q)^2 w(x;q) \quad (1.0.47)$$

$$= \frac{\sqrt{1-q^N}}{q^{2N}} \left(p'_N(x;q)p_{N-1}(x;q) - p_N(x;q)p'_{N-1}(x;q) \right) w(x;q), \quad (1.0.48)$$

$$x = y \in \mathbb{R}_+,$$

に付随するフレドホルム行列式で与えられることが示される [34]. ここで, Stieltjes-Wigert 直交多項式のもつ q というパラメタは, Stieltjes-Wigert アンサンブル (1.0.34) のもつ q というパラメタにちょうど対応していることに注意する.

本研究の目的は, Stieltjes-Wigert アンサンブルの無限粒子極限を考察することである. その際, GUE の場合について説明したように, 系の局所的な領域, すなわちバルク領域およびエッジ領域における系の粒子数 $N \rightarrow \infty$ に対する漸近的振舞いを調べることを考える. 前述のように, Stieltjes-Wigert アンサンブルは行列式点過程であり, (1.0.46), (1.0.48) によって与えられる単一の積分核 K_N によって記述されている. そこで, (1.0.24), (1.0.28) のような, 付随する直交多項式の漸近展開を得ることがはじめの課題となる. Stieltjes-Wigert 多項式に対する漸近解析は, いくつかの論文 [14–16, 41, 4] で調べられているが, 我々は特に Ismail と Zhang による結果 [15, 16] に注目する. 理由は彼らが Stieltjes-Wigert 多項式 (1.0.43) に対して導入したスケール変換

$$x = q^{-n\tau} u, \quad (1.0.49)$$

$n \in \mathbb{N}_0, u > 0$ にある. ここで, 彼らは $\tau > 0$ と置いている. 局所的な領域における系の漸近的振舞いを調べる際, まずは粒子数 N が大きいときの系の大域的な振る舞いを知ることは役に立つ. それは, 平均場近似の方法 [25, 12, 27, 23, 21] によって, 系の粒子数密度の計算の問題を積分方程式の問題 [26] に帰着させることによって計算することができる. たとえば GUE-固有値分布 (1.0.2) に対しては, 粒子数 N が十分大きいとき, 平均粒子数密度として次の Wigner の半円則 [25, 12, 27] が解として得られる:

$$\rho_{N,\text{GUE}}^{\text{mf}}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \sqrt{2N - x^2}, & -\sqrt{2N} < x < \sqrt{2N}, \\ 0, & |x| > \sqrt{2N}. \end{cases} \quad (1.0.50)$$

この結果 (1.0.50) から、粒子系 $(\Xi^{\text{GUE}}, \mathbf{P}_N^{\text{GUE}})$ のエッジ領域は $x = \pm\sqrt{2N}$ 近傍に対応し、バルク領域は $-\sqrt{2N} < x < \sqrt{2N}$ に対応することが読み取れる。なお、GUE に対して Wigner の半円則は、平均場近似を用いなくても厳密に導出される。さて、我々の研究対象である Stieltjes-Wigert アンサンブル (1.0.34) に対しては、粒子数 N が大きいとき、系の平均粒子数密度は次のように計算される [23, 3, 21] :

$$\rho_N^{\text{mf}}(x) = \frac{1}{\pi|\ln q|x} \tan^{-1} \left[\frac{\sqrt{4x - (1 + q^N x)^2}}{1 + q^N x} \right], \quad 0 < q < 1. \quad (1.0.51)$$

(1.0.51) の関数の台は、粒子数 N が十分大きいとき、 $1 < x < 4q^{-2N}(1 - q^N/2)$ で与えられる。したがって、粒子数 N が十分大きいとき、粒子系 (Ξ, \mathbf{P}_N) のエッジ領域は、

$$x = 1 \quad (1.0.52)$$

の左端近傍および

$$x = q^{-2N} \quad (1.0.53)$$

の右端近傍に対応し、また、系のバルク領域は

$$1 < x < q^{-2N} \quad (1.0.54)$$

に対応することがわかる。このように系の大域的な振る舞いを見積もることにより、Ismail と Zhang が導入したスケール変換 (1.0.49) において、パラメタの値を $\tau = 0, 0 < \tau < 2, \tau = 2$ と置いた変換は、それぞれ粒子系の左端、バルク領域、右端に関するスケーリングであることがわかる。この論文では、スケール変換 (1.0.49) において、(i) $\tau = 0$ を用いた左端に関する漸近展開の公式、(ii) $0 < \tau < 2$ を用いたバルク領域に関する、[15] の (2.19) 式と (2.23) 式で与えられた漸近解析の結果の精度を上げた公式、および (iii) $\tau = 2$ を用いた右端に関する [15] の (2.14) 式、を用いることで、Stieltjes-Wigert アンサンブルから無限粒子系すなわち無限次元行列式点過程を導出する。そこでは三角関数 q -拡張である $0 < |q| < 1, 0 < |z| < \infty$ に対して定義されるヤコビ・テータ関数 [40]

$$\Theta(z|q) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} q^{k^2} z^k \quad (1.0.55)$$

$$= \prod_{k=1}^{\infty} (1 - q^{2k})(1 + zq^{2k-1})(1 + z^{-1}q^{2k-1}), \quad (1.0.56)$$

および、エアリー関数の q -拡張である $0 < |q| < 1, z \in \mathbb{C}$ に対して定義されるラマヌジャン関数 [15, 16]

$$A_q(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^{k^2} (-z)^k}{(q; q)_k}, \quad (1.0.57)$$

によって記述される積分核（ヤコビ・テータ積分核およびラマヌジャン積分核）が導出される。Stieltjes-Wigert アンサンブルが GUE の q -拡張である [34] という事実に動機づけられて、こ

の論文ではさらに、得られた無限次元行列式点過程と (1.0.26) および (1.0.33) によって与えられる古典的な無限次元行列式点過程との関係も詳細に調べ、ヤコビ・テータ積分核およびラマヌジャン積分核をもつ無限次元行列式点過程（ヤコビ・テータ行列式点過程およびラマヌジャン行列式点過程）から、サイン積分核およびエアリー積分核をもつ無限次元行列式点過程（サイン行列式点過程およびエアリー行列式点過程）を導出する。

この論文は次のように構成されている。第2章で無限次元行列式点過程を導出するのに必要な Stieltjes-Wigert 直交多項式 (1.0.43) の漸近形を導入する。つづく第3章で、ヤコビ・テータ積分核およびラマヌジャン積分核を導出し、主結果である Stieltjes-Wigert アンサンブルの無限粒子極限の導出を行う。主結果からのサイン行列式点過程およびエアリー行列式点過程の導出は、ここで言及する。第4章では、 \mathbb{R}_+ 上の行列式点過程である主結果を、 \mathbb{R} 上へ写像して考えることによって、ヤコビ・テータ行列式点過程およびラマヌジャン行列式点過程を、それぞれサイン行列式点過程およびエアリー行列式点過程と比較する。

第2章 Stieltjes-Wigert 多項式の漸近形

2.1 バルク・スケーリング ($0 < \tau < 2$)

[15, 16] において, Ismail と Zhang は (1.0.49) で $0 < \tau < 2$ と置いたスケール変換を用いて, [15] における (2.19) 式および (2.23) 式 ([16] における (16) 式および (19) 式) で与えられる Stieltjes-Wigert 多項式の漸近展開を導出した. 次の Lemma は, 彼らの Stieltjes-Wigert 多項式に対する漸近展開の精度を上げたものである [35];

$0 < \tau < 2$, $n \in \mathbb{N}$ に対し, 次の記号を導入する.

$$\chi(n) = \begin{cases} 0 & (n \text{ が偶数}), \\ 1 & (n \text{ が奇数}), \end{cases} \quad (2.1.1)$$

$$m = \lfloor (2 - \tau)n \rfloor, \quad (2.1.2)$$

$$\lambda = (2 - \tau)n - m. \quad (2.1.3)$$

ここで, $x \in \mathbb{R}$ 対し, $\lceil x \rceil$ は x 以上の最小の整数を, $\lfloor x \rfloor$ は x の整数部分すなわち x 以下の最大の整数をあらわすとする. また集合 A の指示関数

$$\mathbf{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1 & (\omega \in A), \\ 0 & (\text{その他}), \end{cases}$$

を定義する.

Lemma 1 $0 < q < 1$, $0 < \tau < 2$ とする. そのとき, Stieltjes-Wigert 多項式 (1.0.43) の, 多項式次数 $n \rightarrow \infty$ における漸近形は以下のように与えられる:

$$\begin{aligned} & p_n(q^{-n\tau}u; q) \sqrt{w(q^{-n\tau}u; q)} \\ &= \frac{\sqrt{(q; q)_n}}{(q; q)_\infty^2} (-1)^{\lfloor m/2 \rfloor} q^{n+1/4 - \lfloor m/2 \rfloor/2} \sqrt{w(q^{\lambda+\chi(m)}u; q)} \left\{ \Theta\left(-q^{\lambda+\chi(m)+1/2}u \middle| q\right) \right. \\ & \quad \left. + \frac{q^{\lfloor m/2 \rfloor}}{1-q} \left(\frac{q^{1/2-(1-\tau)n}}{u} \mathbf{1}_{(0,4/3)}(\tau) - q \mathbf{1}_{(2/3,2)}(\tau) \right) \Theta\left(-q^{\lambda+\chi(m)-1/2}u \middle| q\right) \right. \\ & \quad \left. + \mathcal{O}\left(q^{\tau n + 2(1-\tau)n} \mathbf{1}_{[1,2)}(\tau)\right) \right\}. \quad (2.1.4) \end{aligned}$$

(2.1.4) は, ヤコビ・テータ関数によって与えられる第一項, ヤコビ・テータ関数と指示関数を含む第二項, そして誤差項からなっている. 第一項までの展開が, Ismail と Zhang によって導

かれたものであり、第二項が今回我々が彼らの漸近解析の精度を上げた結果導かれた項である。我々の目的は、Stieltjes-Wigert アンサンブルから無限粒子系を導出することであり、そのためには、積分核 (1.0.46), (1.0.48) を、Stieltjes-Wigert 多項式の漸近形を用いて計算する必要があるが、そこでは多項式の漸近形を用いて $p_N(x; q)p_{N-1}(y; q)$ という積を計算する必要があるが、その際に現れる (2.1.4) の第一項からなる項は、積分核を計算する際に他方の $p_N(y; q)p_{N-1}(x; q)$ から現れる項と相殺してしまう。そのため、(2.1.4) の第二項までの展開が必要である。ここで、(2.1.4) には $\lfloor m/2 \rfloor$ という整数部分をとる因子があるため、多項式の漸近形 (2.1.4) の $n \rightarrow \infty$ につれての振る舞いは、[15, 16] で議論されているように、パラメタ τ が有理数か無理数かによって性質が異なっている。

(2.1.4) におけるヤコビ・テータ関数の引数の n 依存性をスケール変換に担わせれば、(2.1.4) を次のように書くことができる：

$$\begin{aligned} p_n \left(q^{-\lceil \tau n \rceil - \chi(\lceil \tau n \rceil)} u; q \right) & \sqrt{w \left(q^{-\lceil \tau n \rceil - \chi(\lceil \tau n \rceil)} u; q \right)} \\ &= \frac{\sqrt{(q; q)_n}}{(q; q)_\infty^2} (-1)^n q^{n/2 + 1/4 + \lceil \tau n \rceil / 4 + \chi(\lceil \tau n \rceil) / 4} \sqrt{w(u; q)} \left\{ \Theta \left(-q^{1/2} u \middle| q \right) \right. \\ & \quad + \frac{q^{n - \lceil \tau n \rceil / 2 - \chi(\lceil \tau n \rceil) / 2}}{1 - q} \left(\frac{q^{1/2 - n + \lceil \tau n \rceil + \chi(\lceil \tau n \rceil)}}{u} \mathbf{1}_{(0, 4/3)}(\tau) - q \mathbf{1}_{(2/3, 2)}(\tau) \right) \Theta \left(-q^{-1/2} u \middle| q \right) \\ & \quad \left. + \mathcal{O} \left(q^{\tau n + 2(1 - \tau)n} \mathbf{1}_{[1, 2)}(\tau) \right) \right\}, \quad \text{as } n \rightarrow \infty. \quad (2.1.5) \end{aligned}$$

2.2 エッジ・スケーリング ($\tau = 0, 2$)

[15] における (2.14) 式 ([16] における (13) 式) から、(1.0.49) において $\tau = 2$ と置いたスケール変換についての、次のような Stieltjes-Wigert 多項式の $n \rightarrow \infty$ における漸近形を得ることができる [14]：

$$p_n(q^{-2n}u; q) \sqrt{w(q^{-2n}u; q)} = \frac{\sqrt{(q; q)_n}}{(q; q)_\infty} q^{n+1/4} \left\{ A_q \left(\frac{q^{-1/2}}{u} \right) + \mathcal{O}(q^{n/2}) \right\} \sqrt{w(u; q)}. \quad (2.2.1)$$

我々は $\tau = 0$ とおいた、つまり何もスケール変換を施さない場合についての Stieltjes-Wigert 多項式の漸近展開を導出した [36]：

Lemma 2 $0 < q < 1$ とする。そのとき、Stieltjes-Wigert 多項式 (1.0.43) は、多項式次数 $n \rightarrow \infty$ における次の漸近形をもつ：

$$p_n(x; q) = \frac{\sqrt{(q; q)_n}}{(q; q)_\infty} (-1)^n q^{n/2 + 1/4} \left\{ A_q \left(q^{1/2} x \right) - \frac{q^{1+n}}{1 - q} A_q \left(q^{-1/2} x \right) + \mathcal{O}(q^{2n}) \right\}. \quad (2.2.2)$$

この漸近展開は,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n(x; q)}{(-1)^n q^{n/2+1/4} \sqrt{(q; q)_n}} = \frac{A_q(q^{1/2}x)}{(q; q)_\infty} \quad (2.2.3)$$

という Stieltjes-Wigert 多項式の定義 (1.0.43) から得られる評価の精度を上げたものになっている. ここで, Lemma 2 において第二項までの展開が必要な理由は, 前節で説明した理由と同じである. 一方, Ismail と Zhang による $\tau = 2$ に対する Stieltjes-Wigert 多項式の漸近展開 (2.2.1) に関しては, 実は第一項までの展開で十分である. 積分核 (1.0.46), (1.0.48) を計算する際に, (2.2.1) の第一項どうしの積は, ラマヌジャン関数の引数にある q のべきの値が, 次数 n の公式 (2.2.1) とそれから導かれる次数 $n-1$ の公式の間でずれるために相殺されず残るのである. GUE では, (1.0.50) が示すように, 平均粒子数密度が \mathbb{R} 上の偶関数であった. そのため, (1.0.28) は粒子系 $(\Xi^{\text{GUE}}, P_N^{\text{GUE}})$ の右端に関するスケーリングを施したエルミート多項式の漸近形であったが, もしも左端に関するスケーリングを施した漸近形も見てみたいとすると, それは単に (1.0.28) で座標の反転 $x \rightarrow -x$ をしたものに他ならない. 一方, Ismail と Zhang の $\tau = 2$ に対する (2.2.1) 式と, 我々が導出した $\tau = 0$ についての (2.2.2) 式は見た目が異なっている. これは, Stieltjes-Wigert アンサンブルについては GUE の場合と異なり, 粒子数密度は \mathbb{R}_+ 上の関数であり, 見かけ上, 右端と左端に区別が生じて見えていることを反映している.

第3章 主結果

Stieltjes-Wigert アンサンブルの左端, バルク領域, 右端にそれぞれ関係する $\tau = 0, 0 < \tau < 2, \tau = 2$ に対する Stieltjes-Wigert 多項式の漸近解析の結果が出揃ったので, 粒子数 $N \rightarrow \infty$ における積分核 (1.0.46), (1.0.48) の漸近形を求めることで, Stieltjes-Wigert アンサンブルから無限次元行列式点過程を導出する [35, 36].

3.1 ヤコビ・テータ行列式点過程

はじめに条件付き極限を定義する. 以下では技術的な理由から, $2/3 < \tau < 2$ に制限して考える. さて,

$$\lceil \tau(N_j - 1) \rceil = \lceil \tau N_j \rceil + \lceil -\tau \rceil, \quad j \in \mathbb{N}, \quad (3.1.1)$$

なる条件を満たすような自然数からなるある単調増加列 $(N_j)_{j \in \mathbb{N}}$ を考える. すると, $\lceil \tau N_j^{(0)} \rceil$ が偶数であり $\lceil \tau N_j^{(1)} \rceil$ が奇数であるような, 単調増加列 $(N_j)_{j \in \mathbb{N}}$ の部分列 $(N_j^{(0)})_{j \in \mathbb{N}}, (N_j^{(1)})_{j \in \mathbb{N}}$ が定義される. 与えられた τ に対して, $(N_j^{(0)})_{j \in \mathbb{N}}$ および $(N_j^{(1)})_{j \in \mathbb{N}}$ に従って極限をとるとき, このような条件付き極限を $N \xrightarrow{\tau} \infty$ と書くことにする.

ヤコビ・テータ積分核を次で定義する: $0 < q < 1, (u, v) \in \mathbb{R}_+^2$ に対し,

$$K^\Theta(u, v) = \begin{cases} \frac{\Theta(-q^{1/2}u|q)\Theta(-q^{-1/2}v|q) - \Theta(-q^{1/2}v|q)\Theta(-q^{-1/2}u|q)}{u - v} \frac{\sqrt{w(u; q)w(v; q)}}{(q; q)_\infty^3}, & (u, v) \in \mathbb{R}_+^2, u \neq v, \\ \left(\frac{1}{\sqrt{q}} \Theta(-q^{1/2}u|q)\Theta'(-q^{-1/2}u|q) - \sqrt{q}\Theta'(-q^{1/2}u|q)\Theta(-q^{-1/2}u|q) \right) \frac{w(u; q)}{(q; q)_\infty^3}, & u = v \in \mathbb{R}_+. \end{cases} \quad (3.1.2)$$

ここで $\Theta'(\cdot|q)$ はヤコビ・テータ関数 (1.0.55) の導関数

$$\Theta'(z|q) = \frac{1}{z} \sum_{k=-\infty}^{\infty} kq^{k^2} z^k \quad (3.1.4)$$

で与えられる. Lemma 1 の漸近展開 (2.1.4) を用いて積分核 (1.0.46), (1.0.48) を計算することで, 次を得る.

Proposition 3 $(u, v) \in \mathbb{R}_+^2$, $2/3 < \tau < 2$ とする. そのとき, $N \xrightarrow{\tau} \infty$ において

$$q^{-[\tau N] - \chi([\tau N])} K_N \left(q^{-[\tau N] - \chi([\tau N])} u, q^{-[\tau N] - \chi([\tau N])} v \right) \rightarrow K^\Theta(u, v) \quad (3.1.5)$$

が成り立つ.

Proposition 3 は, 行列式点過程 (Ξ, P_N) の積分核 (1.0.46), (1.0.48) が, (3.1.5) に示されるようなスケーリング極限をとることによって, 任意の $2/3 < \tau < 2$ に対してヤコビ・テータ積分核 (3.1.2), (3.1.3) に収束することを示している. なお, Proposition 3 は, $0 < \tau \leq 2/3$ に対しても成立することが予想されるが, それを示すためには Lemma 1 の漸近展開の精度をさらに上げなければならないことが示される. これが $2/3 < \tau < 2$ に制限した理由である. Proposition 3 で得た積分核 (1.0.46), (1.0.48) のスケーリング極限に伴って, Stieltjes-Wigert アンサンブル (1.0.34) によって定義された粒子系 (Ξ, P_N) のモーメント母関数は, フレドホルム行列式

$$\text{Det}_{(u,v) \in \mathbb{R}_+^2} \left[\delta(u-v) + K^\Theta(u, v)g(v) \right], \quad (3.1.6)$$

に収束する. したがって, 以下が結論されることになる.

Theorem 4 $2/3 < \tau < 2$ とする. 行列式点過程 (Ξ, P_N) は, (1.0.34) において

$$x_j = q^{-[\tau N] - \chi([\tau N])} u_j, \quad u_j > 0, \quad 1 \leq j \leq N \quad (3.1.7)$$

と置いたスケーリング極限 $N \xrightarrow{\tau} \infty$ で, ヤコビ・テータ積分核 (3.1.2), (3.1.3) をもつ無限次元行列式点過程に収束する. 系の相関関数は, 任意の $N' \in \mathbb{N}$ に対し,

$$\rho_\Theta^{(N')} \left(\left\{ x_1^{(N')}, \dots, x_{N'}^{(N')} \right\} \right) = \det_{1 \leq j, k \leq N'} \left[K^\Theta \left(x_j^{(N')}, x_k^{(N')} \right) \right], \quad (3.1.8)$$

で与えられる. ここで $x_j^{(N')} \in \mathbb{R}_+$, $1 \leq j \leq N'$ である.

ここで注目すべきは, サイン積分核 (1.0.26) をもつ行列式点過程とは異なり, ヤコビ・テータ行列式点過程は, 付随する積分核 (3.1.2), (3.1.3) が二粒子間の距離の関数とはなっていないため, 系の相関関数が連続的な平行移動不変性をもっていないことである. ただし, ヤコビ・テータ関数 (1.0.55) の性質

$$\Theta(q^2 z | q) = q^{-1} z^{-1} \Theta(z | q) \quad (3.1.9)$$

を反映して, 次の離散的なスケール不変性を持っていることが示される.

Remark 5 ヤコビ・テータ積分核 (3.1.2), (3.1.3) は以下をを満たす:

$$q^{2n} K^\Theta(q^{2n} u, q^{2n} v) = K^\Theta(u, v), \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (3.1.10)$$

さらに次が示される:

Remark 6 $q = e^{-\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$, および $u = e^{2\varepsilon\phi}$, $v = e^{2\varepsilon\varphi}$, $(\phi, \varphi) \in \mathbb{R}^2$ とおく. するとヤコビ・テータ積分核 (3.1.2), (3.1.3) より次を得る:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 2\varepsilon K^\Theta(e^{2\varepsilon\phi}, e^{2\varepsilon\varphi}) = K_{\sin}(\phi, \varphi). \quad (3.1.11)$$

すなわち, パラメタ q を 1 にする極限で, ヤコビ・テータ行列式点過程からサイン行列式点過程が導出される. つまり, この結果は古典的なサイン行列式点過程がヤコビ・テータ行列式点過程によって q -拡張されたことを示している. ここでの q -拡張によって, 古典的なサイン行列式点過程の, 連続的である平行移動不変性 (粒子数密度を与える一点関数で言えば粒子数密度の一様性) が破れ, (3.1.10) のような, ある決まった q を単位とする拡大しか系を不変に保たないという離散化が生じたことは非常に興味深い.

3.2 ラマヌジャン行列式点過程

さて, 次にラマヌジャン積分核を定義する:

$$K^{A_q}(x, y) = \begin{cases} \frac{A_q(q^{1/2}x) A_q(q^{-1/2}y) - A_q(q^{1/2}y) A_q(q^{-1/2}x)}{x - y} \frac{\sqrt{w(x; q)w(y; q)}}{(q; q)_\infty}, & (x, y) \in \mathbb{R}_+^2, x \neq y, \quad (3.2.1) \\ \left(\sqrt{q} A'_q(q^{1/2}x) A_q(q^{-1/2}x) - \frac{1}{\sqrt{q}} A_q(q^{1/2}x) A'_q(q^{-1/2}x) \right) \frac{w(x; q)}{(q; q)_\infty}, & x = y \in \mathbb{R}_+. \quad (3.2.2) \end{cases}$$

ここで, $A'_q(\cdot)$ はラマヌジャン関数 (1.0.57) の導関数で

$$A'_q(z) = \frac{1}{z} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{kq^{k^2}(-z)^k}{(q; q)_k} \quad (3.2.3)$$

で与えられる. Lemma 2 を用いると, $\tau = 0$ を用いた次のような積分核 (1.0.46), (1.0.48) の $N \rightarrow \infty$ における漸近形を得る.

Proposition 7 $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ とする. すると $N \rightarrow \infty$ に対し, 次を得る:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} K_N(x, y) = K^{A_q}(x, y). \quad (3.2.4)$$

したがって, Proposition 7 で示された積分核の収束から, Stieltjes-Wigert アンサンブル (1.0.34) によって定義される粒子系 (Ξ, P_N) のモーメント母関数は, フレドホルム行列式

$$\text{Det}_{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2} \left[\delta(x - y) + K^{A_q}(x, y)g(y) \right] \quad (3.2.5)$$

へ収束するので, 次のような結論が得られたことになる.

Theorem 8 行列式点過程 (Ξ, P_N) は粒子数 $N \rightarrow \infty$ の極限で, ラマヌジャン積分核 (3.2.1), (3.2.2) をもつ無限次元行列式点過程に収束する. 系の相関関数は, 任意の $N' \in \mathbb{N}$ に対し

$$\rho_{A_q}^{(N')} \left(\left\{ x_1^{(N')}, \dots, x_{N'}^{(N')} \right\} \right) = \det_{1 \leq j, k \leq N'} \left[K^{A_q} \left(x_j^{(N')}, x_k^{(N')} \right) \right], \quad (3.2.6)$$

で与えられる. ここで, $x_j^{(N')} \in \mathbb{R}_+$, $1 \leq j \leq N'$ である.

続いて, $\tau = 2$ を用いた Ismail と Zhang の式 (2.2.1), ならびにラマヌジャン関数が満たす関数等式

$$zA_q(qz) - A_q(z) + A_q(z/q) = 0 \quad (3.2.7)$$

を用いると, 次のような積分核 (1.0.46), (1.0.48) の漸近形を得ることができる.

Remark 9 $(u, v) \in \mathbb{R}_+^2$ とする. そのとき積分核 (1.0.46) に対して次の極限を得る:

$$\begin{aligned} & \lim_{N \rightarrow \infty} q^{-2N} K_N(q^{-2N}u, q^{-2N}v) \\ &= \frac{A_q(q^{-1/2}u^{-1})A_q(q^{1/2}v^{-1}) - A_q(q^{-1/2}v^{-1})A_q(q^{1/2}u^{-1})}{u-v} \frac{\sqrt{w(u; q)w(v; q)}}{(q; q)_\infty} \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

$$= \frac{1}{uv} K^{A_q} \left(\frac{1}{u}, \frac{1}{v} \right). \quad (3.2.9)$$

したがって, 見かけの上で区別されるように思われた Stieltjes-Wigert アンサンブル (Ξ, P_N) のエッジ近傍での漸近的な振舞いに関して, 右端についての無限粒子極限もまた, 単一のラマヌジャン積分核 (3.2.1), (3.2.2) によって記述されることがわかった. ただし, 両端は逆数をとる変換 $x \rightarrow 1/x$, $x \in \mathbb{R}_+$ によって結ばれている. これは, たとえば $x = e^y$, $y \in \mathbb{R}$ なる写像によって, ラマヌジャン行列式点過程を \mathbb{R}_+ 上から \mathbb{R} 上に写して眺めたとき, 通常の座標反転 $y \rightarrow -y$ として理解できる. このことは, Stieltjes-Wigert アンサンブル (Ξ, P_N) を前述のように $y = \ln x$ によって \mathbb{R} 上へ写像すると, 原点に対して系の対称性が良く見えるという事実を反映しているが, これについては次章で議論する.

さらに, 次の結果を示すことができる:

Remark 10 $q = e^{-\delta^3}$, $\delta > 0$, $x = e^{-\delta^2\zeta}/4$, $y = e^{-\delta^2\xi}/4$, $(\zeta, \xi) \in \mathbb{R}^2$ と置く. すると $\delta \rightarrow 0$ の極限で次を得る:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\delta^2}{4} K^{A_q} \left(\frac{1}{4}e^{-\delta^2\zeta}, \frac{1}{4}e^{-\delta^2\xi} \right) = K_{\text{Ai}}(\zeta, \xi). \quad (3.2.10)$$

つまり, ラマヌジャン行列式点過程はエアリー行列式点過程を q -拡張している.

第4章 \mathbb{R} 上への写像

この章では, $g_s > 0$ なるパラメタを導入し,

$$q = e^{-g_s} \quad (4.0.1)$$

とおく [37]. 固有値分布 (1.0.34) に対して,

$$f_N^{-1} : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \phi \in \mathbb{R}, \quad \phi = f_N^{-1}(x) = \ln x - Ng_s, \quad (4.0.2)$$

という変換を施すと, (1.0.34) は次のような分布に変換される;

$$\tilde{\mathbb{P}}_N \left(\{\phi_j\}_{j=1}^N \right) = \tilde{c}_N \prod_{j=1}^N \frac{e^{-\phi_j^2/2g_s}}{\sqrt{2\pi g_s}} \prod_{1 \leq j < k \leq N} \left(2 \sinh \frac{\phi_k - \phi_j}{2} \right)^2. \quad (4.0.3)$$

この分布が, Stieltjes-Wigert アンサンブルのチャーレン・サイモンズ理論 [37, 22] や, ドリフト付き非衝突ブラウン運動 [34] との関係の架け橋となったのであるが, Stieltjes-Wigert アンサンブルそのものを対称性よく観察する際にも役に立つ. この分布によって与えられる粒子系を $(\tilde{\Xi}, \tilde{\mathbb{P}}_N)$ であらわすことにする.

[9]において, de Haro と Tierz は (4.0.3) が定義する粒子系 $(\tilde{\Xi}, \tilde{\mathbb{P}}_N)$ の一点関数すなわち粒子数密度について調べた. そこでは, 古典的な系である GUE と (4.0.3) で与えられる粒子系 $(\tilde{\Xi}, \tilde{\mathbb{P}}_N)$ の粒子数密度の台の N 依存性の違いに加えて, GUE とは異なり, $(\tilde{\Xi}, \tilde{\mathbb{P}}_N)$ では粒子数 $N \rightarrow \infty$ につれて粒子数密度に見られる振動が消えていかないという非古典的な現象が報告された. Stieltjes-Wigert アンサンブルを変換した系 $(\tilde{\Xi}, \tilde{\mathbb{P}}_N)$ の一点関数は, (1.0.48) を (4.0.2) により変換した

$$\tilde{\rho}_N(\phi) = e^{\phi + Ng_s} K_N(e^{\phi + Ng_s}, e^{\phi + Ng_s}), \quad \phi \in \mathbb{R}, \quad (4.0.4)$$

によって与えられる. 図 4.1 および図 4.2 は $(\tilde{\Xi}, \tilde{\mathbb{P}}_N)$ の一点関数 (4.0.4), および (1.0.17) で与えられる GUE の一点関数

$$\rho_N^{\text{GUE}}(x) = \rho_N^{(1)}(x) = K_N^{\text{GUE}}(x, x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (4.0.5)$$

をそれぞれプロットした図である. 図 4.1 において, de Haro と Tierz が指摘した, 粒子数 $N \rightarrow \infty$ につれて振動が均されず残る様子が観察される. 一方図 4.2 に示された GUE の場合は, 系の粒子数密度の振動は $N \rightarrow \infty$ につれて徐々に均されていく.

図 4.1 に図示されているように, (4.0.2) によって粒子系 (Ξ, \mathbb{P}_N) を \mathbb{R} 上へ写像すると, 系を原点について対称性よく観察することができる. このようにして粒子系 (Ξ, \mathbb{P}_N) を眺めると, Ismail と Zhang のスケーリング (1.0.49) の意味がよりはっきりする. 粒子数 N が大きいとき, 系 (Ξ, \mathbb{P}_N) の左端, 右端はそれぞれ $x = 1$, $x = q^{2N}$ と見積もられたが, これらはそれぞれ (4.0.2)

によって $(\tilde{\Xi}, \tilde{\mathbf{P}}_N)$ における $\phi = -Ng_s, \phi = Ng_s$ へ写される. Ismail と Zhang のスケーリング (1.0.49) と写像 (4.0.2) を組み合わせれば,

$$u = e^{\phi + Ng_s(1-\tau)} \quad (4.0.6)$$

を得るが, これより Ismail と Zhang のスケーリングにおいて $\tau = 0, \tau = 1, \tau = 2$ と置くことがそれぞれ, $(\tilde{\Xi}, \tilde{\mathbf{P}}_N)$ で眺めたときには系の原点を左端, 原点, 右端へシフトする変換に対応していることがわかる.

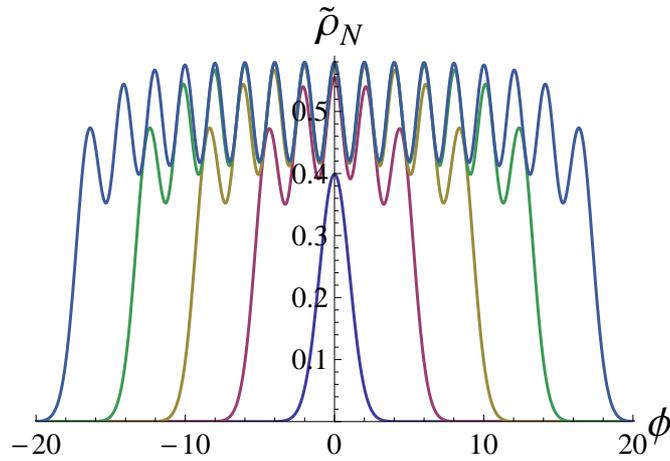


図 4.1: 粒子系 $(\tilde{\Xi}, \tilde{\mathbf{P}}_N)$ の一点関数 $\tilde{\rho}_N$ が, $N = 1, 5, 9, 13, 17$ の場合について, $g_s = 1$ としてプロットされている. 振動のピークの数も粒子数に等しくなっている. 内側から外側につれて粒子数 N が大きい場合がプロットされている. 粒子数 N が大きくなっても振動は保たれる. 粒子数 N が十分大きいとき, $\tilde{\rho}_N$ の台は $(-Ng_s, Ng_s)$ で近似され, 粒子数 N に比例して広がっていく.

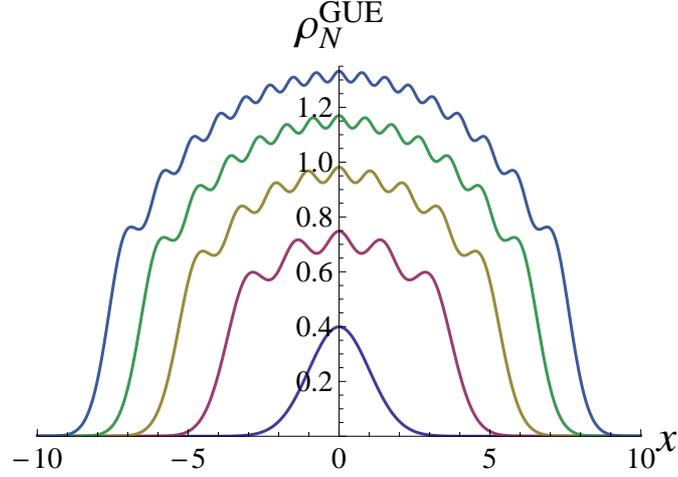


図 4.2: 粒子系 $(\Xi^{\text{GUE}}, \mathbb{P}_N^{\text{GUE}})$ の一点関数 ρ_N^{GUE} が, $N = 1, 5, 9, 13, 17$ に対してプロットされている. 内側から外側につれて粒子数 N が大きい場合がプロットされている. 粒子数 N が大きくなるにつれて振動は消えていく. 粒子数 N が十分大きいとき, ρ_N^{GUE} の台は $(-\sqrt{2N}, \sqrt{2N})$ で与えられ, \sqrt{N} で広がっていく.

4.1 \mathbb{R} 上に写したヤコビ・テータ行列式点過程

ヤコビ・テータ行列式点過程は, サイン行列式点過程が GUE の原点近傍の漸近の様子を記述するように, 粒子数 $N \rightarrow \infty$ にしたときの Stieltjes-Wigert アンサンブルのバルク領域の様子を記述している. (4.0.6) からわかるように, $\tau = 1$ と置くとそれはちょうど $(\tilde{\Xi}, \tilde{\mathbb{P}}_N)$ 系で原点周辺を見ることに相当する. そこで, ヤコビ・テータ行列式点過程を, (4.0.6) で $\tau = 1$ と置いた

$$u = e^\phi \quad (4.1.1)$$

によって \mathbb{R} 上に写像する. すなわち, $(\tilde{\Xi}, \tilde{\mathbb{P}}_N)$ の極限系として, ヤコビ・テータ行列式点過程を眺める. ヤコビ・テータ積分核 (3.1.2), (3.1.3) は次のように変換される;

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_\infty(\phi, \varphi) &= e^{(\phi+\varphi)/2} K^\Theta(e^\phi, e^\varphi) \\ &= \frac{e^{-(\phi^2+\varphi^2)/4g_s} / \sqrt{2\pi g_s}}{(e^{-g_s}; e^{-g_s})_\infty^3} \\ &\quad \times \frac{\Theta(-e^{\phi-g_s/2} | e^{-g_s}) \Theta(-e^{\varphi+g_s/2} | e^{-g_s}) - \Theta(-e^{\varphi-g_s/2} | e^{-g_s}) \Theta(-e^{\phi+g_s/2} | e^{-g_s})}{2 \sinh \frac{\phi - \varphi}{2}}, \end{aligned} \quad (\phi, \varphi) \in \mathbb{R}^2, \phi \neq \varphi, \quad (4.1.2)$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_\infty(\phi, \phi) &= e^\phi K^\Theta(e^\phi, e^\phi) \\
&= \frac{e^{-(\phi-g_s)^2/2g_s} / \sqrt{2\pi g_s}}{(e^{-g_s}; e^{-g_s})_\infty^3} \\
&\quad \times \left(e^{g_s} \Theta(-e^{\phi-g_s/2} | e^{-g_s}) \Theta'(-e^{\phi+g_s/2} | e^{-g_s}) - \Theta'(-e^{\phi-g_s/2} | e^{-g_s}) \Theta(-e^{\phi+g_s/2} | e^{-g_s}) \right), \\
&\qquad \qquad \qquad \phi \in \mathbb{R}. \quad (4.1.3)
\end{aligned}$$

この座標では, (3.1.10) の性質は, 完全な周期性

$$\mathcal{K}_\infty(\phi + 2ng_s, \varphi + 2ng_s) = \mathcal{K}_\infty(\phi, \varphi), \quad (\phi, \varphi) \in \mathbb{R}^2, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (4.1.4)$$

として観察される. 一点関数

$$\tilde{\rho}(\phi) = \mathcal{K}_\infty(\phi, \phi), \quad \phi \in \mathbb{R}, \quad (4.1.5)$$

は,

$$\tilde{\rho}(\phi + 2ng_s) = \tilde{\rho}(\phi), \quad \phi \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (4.1.6)$$

を満たす周期 $2g_s$ の周期関数である. $g_s = 1$ について (4.1.5) をプロットしたものが図 4.3 である. まさに (4.0.3) で与えられる粒子系で粒子数 $N \rightarrow \infty$ にしたときの原点近傍の様子を記述していることがわかる. パラメタ g_s を変えてプロットしたものが図 4.4, 図 4.5 である. $g_s \rightarrow 0$ つまり $q \rightarrow 1$ とすると, 粒子数密度は一様分布のサイン行列式点過程の一点関数へ近づいていく. 一方 $g_s \rightarrow \infty$ つまり $q \rightarrow 0$ とすると, 振動の谷の部分に注目すれば, そこがゼロへ漸近していくことから粒子の棲み分けが生じていく様子が見られる. 実際, 原点近傍での谷の様子は,

$$\tilde{\rho}(\phi) \sim \tilde{\rho}(0) \cosh \phi, \quad |\phi| \ll g_s, \quad (4.1.7)$$

のようになっており, ここで

$$\tilde{\rho}(0) \equiv \frac{2e^{-g_s/2}}{\sqrt{2\pi g_s}} \rightarrow 0, \quad \text{as } g_s \rightarrow \infty, \quad (4.1.8)$$

より, $g_s \rightarrow \infty$ につれて指数関数的に 0 へ近づいていくことがわかる. また, 振動の平均的な高さは

$$\tilde{\rho}^{\text{mf}}(\phi) = \frac{1}{2g_s}, \quad (4.1.9)$$

で与えられる.

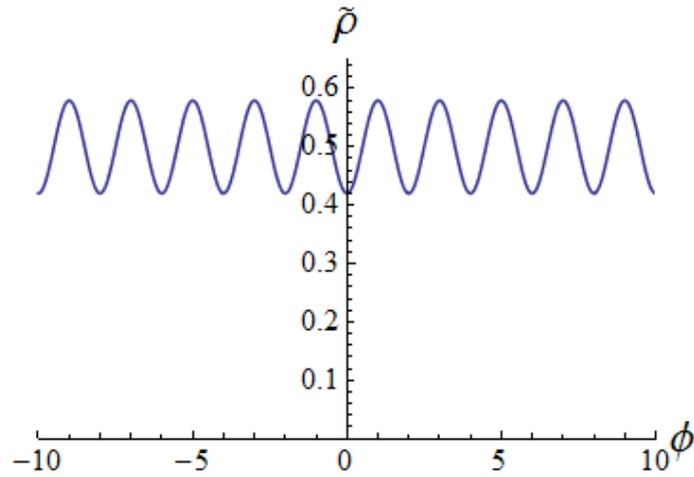


図 4.3: $g_s = 1$ としたときの $\tilde{\rho}(\phi)$ がプロットされている. 周期は $2g_s = 2$, 平均値は $1/2g_s = 0.5$ となっている. 図 4.1 で明瞭に観察された振動は, 粒子数 $N \rightarrow \infty$ において厳密にヤコビ・テータ積分核で記述される.

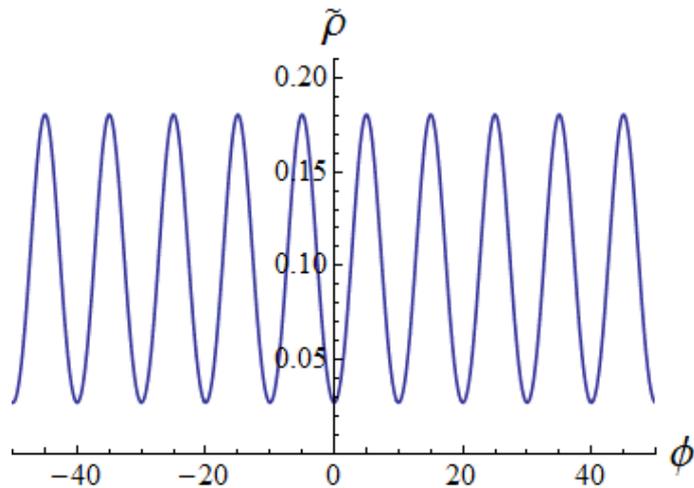


図 4.4: $g_s = 5$ としたときの $\tilde{\rho}(\phi)$ がプロットされている. 周期は $2g_s = 10$, 平均値は $1/2g_s = 0.1$ となっている.

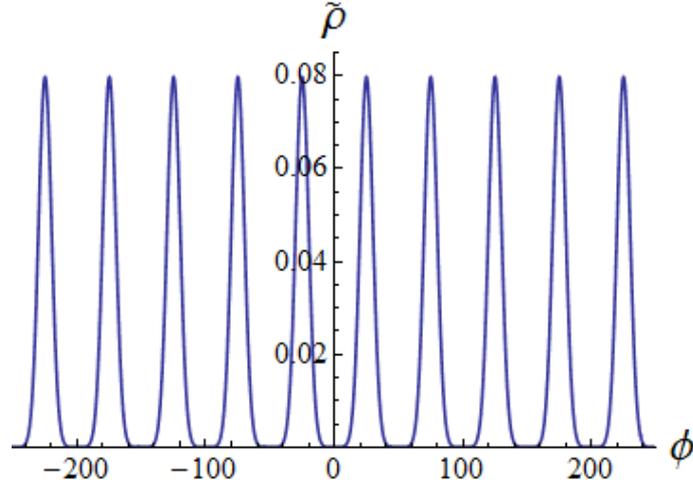


図 4.5: $g_s = 25$ としたときの $\tilde{\rho}(\phi)$ がプロットされている. 周期は $2g_s = 50$, 平均値は $1/2g_s = 0.02$ となっている.

4.2 \mathbb{R} 上に写したラマヌジャン行列式点過程

ラマヌジャン行列式点過程は, エアリー行列式点過程が GUE のエッジ部分の漸近の様子を記述するように, 粒子数 $N \rightarrow \infty$ にしたときの Stieltjes-Wigert アンサンブルのそこでの様子を記述している. それを見るために, ラマヌジャン行列式点過程も \mathbb{R} 上に写して眺めることにする. 今度は $(\tilde{\Xi}, \tilde{\mathbb{P}}_N)$ における左端 $\phi = -Ng_s$ の周りを見たいので, あらかじめ $(\tilde{\Xi}, \tilde{\mathbb{P}}_N)$ の原点を左端へシフトした系の極限として, ラマヌジャン行列式点過程を眺めることにする. つまり, (4.0.3) において

$$\phi_j = y_j - Ng_s, \quad 1 \leq j \leq N \quad (4.2.1)$$

とおいた

$$\bar{\mathbb{P}}_N(\{y_j\}_{j=1}^N) = \bar{c}_N \prod_{j=1}^N \frac{e^{-(y_j - Ng_s)^2/2g_s}}{\sqrt{2\pi g_s}} \prod_{1 \leq j < k \leq N} \left(2 \sinh \frac{y_k - y_j}{2}\right)^2 \quad (4.2.2)$$

なる位置の分布で定義されるような粒子系 $(\bar{\Xi}, \bar{\mathbb{P}}_N)$ の極限として眺める. すると, (4.0.6) から, ラマヌジャン行列式点過程と $(\bar{\Xi}, \bar{\mathbb{P}}_N)$ の極限系は

$$u = e^y \quad (4.2.3)$$

によって結ばれているので, ラマヌジャン積分核 (3.1.2), (3.1.3) を (4.2.3) で変換することでラマヌジャン行列式点過程を \mathbb{R} 上に写して観察することができる. ラマヌジャン積分核 (3.1.2),

(3.1.3) を (4.2.3) によって変換すれば,

$$\begin{aligned}\bar{K}(y, y') &= e^{(y+y')/2} K^{A_q}(e^y, e^{y'}) \\ &= \frac{e^{-(y^2+y'^2)/4g_s} / \sqrt{2\pi g_s}}{(e^{-g_s}; e^{-g_s})_\infty} \frac{A_q(e^{y-g_s/2}) A_q(e^{y'+g_s/2}) - A_q(e^{y'-g_s/2}) A_q(e^{y+g_s/2})}{2 \sinh \frac{y-y'}{2}}, \\ &\quad (y, y') \in \mathbb{R}^2, y \neq y', \quad (4.2.4)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{K}(y, y) &= e^y K^{A_q}(e^y, e^y) \\ &= \frac{e^{-(y-g_s)^2/2g_s} / \sqrt{2\pi g_s}}{(e^{-g_s}; e^{-g_s})_\infty} \left(A'_q(e^{y-g_s/2}) A_q(e^{y+g_s/2}) - e^{g_s} A_q(e^{y-g_s/2}) A'_q(e^{y+g_s/2}) \right), \\ &\quad y \in \mathbb{R}, \quad (4.2.5)\end{aligned}$$

を得る. 一点関数

$$\bar{\rho}(y) = \bar{K}(y, y), \quad y \in \mathbb{R} \quad (4.2.6)$$

を $g_s = 1$ に対してプロットしたものが図 4.6 である. ラマヌジャン積分核が系のエッジ近傍における漸近的振舞いを記述していることが観察できる.

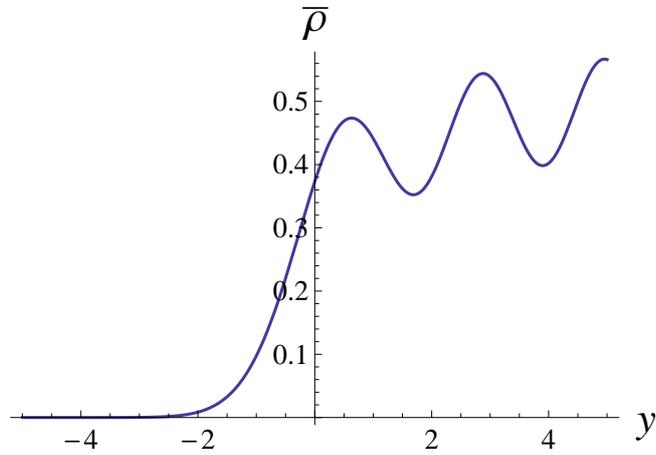


図 4.6: $g_s = 1$ としたときの $\bar{\rho}$ がプロットされている. 粒子系 $(\tilde{\Xi}, \tilde{P}_N)$ のエッジ近傍での振舞いは, 粒子数 $N \rightarrow \infty$ において厳密にラヌジャン積分核によって記述される.

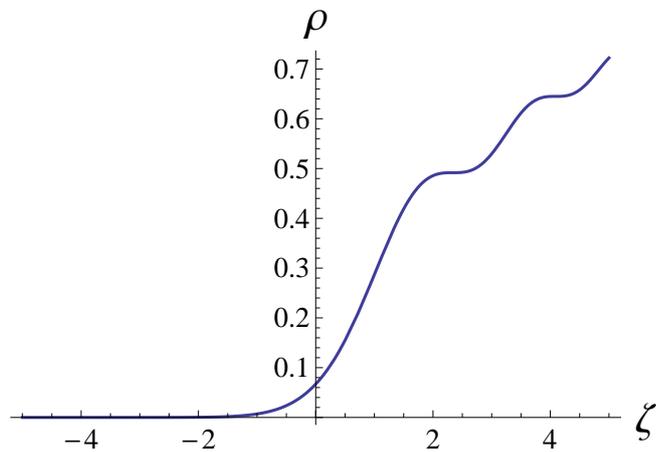


図 4.7: エアリー行列式点過程の一点関数がプロットされている. ただし, (1.0.33) は右端についてのスケール極限であるので, (1.0.33) で $\zeta \rightarrow -\zeta$ とおいた $\rho(\zeta) \equiv K_{Ai}(-\zeta, -\zeta)$ を図 4.6 との比較のために図示している. $(\Xi^{\text{GUE}}, P_N^{\text{GUE}})$ のエッジ近傍の漸近的振舞いがエアリー積分核によって記述される.

第5章 今後の課題

Tracy-Widom 分布の q -拡張

GUE の最大固有値を X_{\max} とおく. それを (1.0.27) によってスケール変換を施したものを Z とする. 次の確率分布関数は **Tracy-Widom 分布** と呼ばれる:

$$F_2(s) = \lim_{N \rightarrow \infty} P(Z < s), \quad s \in \mathbb{R}. \quad (5.0.1)$$

これは, (1.0.9) で特に $g(\cdot) = -\mathbf{1}_{[s, \infty)}(\cdot)$ とおくと,

$$\text{Det}_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} \left[\delta(x-y) - K_{\text{Ai}}(x,y) \mathbf{1}_{[s, \infty)}(y) \right] \quad (5.0.2)$$

と書けることがわかる. Tracy と Widom は GUE の最大固有値分布 (5.0.1) が, パンルヴェII 方程式 [28]

$$y'' = 2y^3 + sy + \alpha \quad (5.0.3)$$

の解を用いて

$$F_2(s) = \exp \left(- \int_s^\infty (x-s)y(x)^2 dx \right) \quad (5.0.4)$$

と書けることを示した [38]. ここで $y(x)$ はパラメタ $\alpha = 0$ のパンルヴェII 方程式の解で $x \rightarrow \infty$ において $y(x) \sim \text{Ai}(x)$ を満たすものとする.

さて, 我々は GUE におけるエアリー積分核 (1.0.33) に対応する, Stieltjes-Wigert アンサンブル (1.0.34) のエッジ・スケーリング極限を記述するラマヌジャン積分核 (3.2.1), (3.2.2) を導出した. (5.0.1) に倣って, Stieltjes-Wigert アンサンブルの最大固有値分布を, (1.0.49) でスケールした Stieltjes-Wigert アンサンブルの最大固有値 U を用いて

$$F_2^{\text{SW}}(s) = \lim_{N \rightarrow \infty} P(U < s), \quad s \in \mathbb{R}_+ \quad (5.0.5)$$

で定義する. すると (5.0.5) はラマヌジャン積分核 (3.2.1), (3.2.2) を用いて

$$\text{Det}_{(u,v) \in \mathbb{R}_+^2} \left[\delta(u-v) - \frac{1}{uv} K^{\text{A}_q} \left(\frac{1}{u}, \frac{1}{v} \right) \mathbf{1}_{[s, \infty)}(v) \right] \quad (5.0.6)$$

で与えられることになる. 我々はこの論文で, GUE のスケーリング極限の q -拡張を得た. ここで, その q -拡張はどこまで成り立っているのかという問題が考えられる. つまりそのアナロジーから, Tracy と Widom が行ったように, Stieltjes-Wigert アンサンブルの最大固有値分布 (5.0.5) はパンルヴェII 方程式の q -拡張として研究されている q -パンルヴェII 方程式 [13, 17, 18] のある特定の解を用いて表現されるのか, という問題が考えられる.

実は、パウルヴェII方程式とそのリッカチ解 [28] のレベルでは、 q -類似が成り立つことがわかっている。我々は、[13, 17, 18] で研究されている q -パウルヴェII方程式と関係する

$$\left(\Psi(qx)\Psi(x) + 1\right) \left(\Psi(x)\Psi\left(\frac{x}{q}\right) + 1\right) = \frac{q^{1/2}x\Psi(x)}{x^{1/2} - \Psi(x)}, \quad (5.0.7)$$

$$\xi(qx)\xi\left(\frac{x}{q}\right) = \frac{x(\xi(x) - x)}{\xi(x)(1 - \xi(x))} \quad (5.0.8)$$

という二つの q -差分方程式とラマヌジャン関数 (1.0.57) の関係を [36] において報告した。前者 (5.0.7) は [13] で研究されている $(A_1 + A_1')^{(1)}$ 型の q -パウルヴェII ([13] の (1) 式) に対応し、後者は [17, 18] で研究されている $(A_2 + A_1)^{(1)}$ 型の q -パウルヴェII ([17] および [18] の (1.1) 式) に対応する。(5.0.7) は $q = e^{-\epsilon^3/2}$, $\epsilon > 0$, $x = 4e^{-\epsilon^2 s/2}$, $s > 0$, $\Psi(x) = e^{-\epsilon y(s)}$ とおき、 $\epsilon \rightarrow 0$ とすることでパラメタ $\alpha = 1/2$ の古典パウルヴェII方程式 (5.0.3) に帰着することが示される。一方、(5.0.8) は $q = e^{-\epsilon^3/2}$, $\epsilon > 0$, $x = e^{\epsilon^2 s/2}/4$, $s > 0$, $\xi(x) = e^{\epsilon y(s)}/2$ の置きかえで、パラメタ $\alpha = 0$ の古典パウルヴェII方程式 (5.0.3) に帰着する。ラマヌジャン関数 (1.0.57) が満たす関数等式 (3.2.7) に注意すれば、(5.0.7) は

$$\Psi(x) = \frac{x^{1/2}A_q(q^{-1/2}/x)}{A_q(q^{1/2}/x)} = \frac{q^{1/4}A_q(q^{-1/2}/x)\sqrt{w(x;q)}}{A_q(q^{1/2}/x)\sqrt{w(x;q/q)}} \quad (5.0.9)$$

を解にもつことが示される。一方 (5.0.8) は

$$\xi(x) = \frac{x A_q(qx)}{A_q(x)} = \frac{q^{-1/4}x^{1/2}A_q(qx)\sqrt{w(qx;q)}}{A_q(x)\sqrt{w(x;q)}} \quad (5.0.10)$$

を解にもつ。この事実は、古典パウルヴェII方程式 (5.0.3) (パラメタ $\alpha = 1/2$ とする) は、リッカチ解

$$y(s) = -\frac{\text{Ai}'(-2^{-1/3}s)}{\text{Ai}(-2^{-1/3}s)} \quad (5.0.11)$$

をもつことの q -類似となっている。

Stieltjes-Wigert アンサンブルの最大固有値分布 (5.0.5) が q -パウルヴェII方程式 (5.0.7), (5.0.8) の解を用いて表現されるのかという問題は、興味深い今後の課題である。

時間依存 Stieltjes-Wigert アンサンブルの解析

Weyl 領域を

$$\mathbb{W}_N = \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N : x_1 < \dots < x_N\} \quad (5.0.12)$$

で定義する。Biane, Bougerol, O'Connell は、 $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_N) \in \mathbb{W}_N$ なるドリフト係数をもつ非衝突ブラウン運動の遷移確率密度関数が

$$p_N^\nu(t, \mathbf{y} | \mathbf{x}) = e^{-t|\nu|^2/2} \frac{\det_{1 \leq j, k \leq N} [e^{\nu_j y_k}]}{\det_{1 \leq j, k \leq N} [e^{\nu_j x_k}]} \det_{1 \leq j, k \leq N} [p(t, y_j | x_k)], \quad (5.0.13)$$

$\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_N) \in \mathbb{W}_N, t \geq 0$ という三つの行列式の積であらわされることを示した [5]. ここで, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{W}_N$ はブラウン運動の初期配置であり,

$$p(t, y|x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-(y-x)^2/2t} \quad (5.0.14)$$

である. これは, 初期配置 $\mathbf{x} \in \mathbb{W}_N$ に対して, 独立な N 個の一次元ブラウン運動が時間区間 $[0, t]$ の間に衝突せずに終配置 $\mathbf{y} \in \mathbb{W}_N$ に遷移する確率密度を記述する

$$q_N(t, \mathbf{y}|\mathbf{x}) = \det_{1 \leq j, k \leq N} [p(t, y_j|x_k)] \quad (5.0.15)$$

なる, ドリフトがない場合に成り立つ Karlin-McGregor 行列式 [19] をドリフトのある場合に拡張したものになっている. 我々は, Biane, Bougerol, O'Connell の公式 (5.0.13) を応用し, ドリフト係数および初期配置が, $1 \leq j \leq N$ に対し

$$x_j = a \left(j - \frac{N+1}{2} \right), \quad a > 0, \quad (5.0.16)$$

$$\nu_j = \sigma \left(j - \frac{N+1}{2} \right), \quad \sigma > 0 \quad (5.0.17)$$

で与えられるようなドリフト付き非衝突ブラウン運動を考えた [34]. そして, (5.0.16), (5.0.17) のように等間隔な配置を出発するドリフト付き非衝突ブラウン運動の多時刻分布が, 任意の時刻系列 $0 < t_1 < \dots < t_M < \infty, M \in \mathbb{N}$ に対し,

$$\begin{aligned} & \hat{p}_N(t_1, \mathbf{x}^{(1)}; \dots; t_M, \mathbf{x}^{(M)}) \\ &= c_N(a, \sigma, t_1, t_M) \prod_{1 \leq j < k \leq N} \left[2 \sinh \frac{\sigma(x_k^{(M)} - x_j^{(M)})}{2} \right] \prod_{m=1}^{M-1} q_N(t_{m+1} - t_m, \mathbf{x}^{(m+1)}|\mathbf{x}^{(m)}) \\ & \quad \times \prod_{j=1}^N p(t_1, x_j^{(1)}|0) \prod_{1 \leq j < k \leq N} \left[2 \sinh \frac{a(x_k^{(1)} - x_j^{(1)})}{2t_1} \right] \end{aligned} \quad (5.0.18)$$

で与えられることを示した. ここで, $\mathbf{x}^{(m)} = (x_1^{(m)}, \dots, x_N^{(m)}) \in \mathbb{W}_N, 1 \leq m \leq M$ は時刻 t_m での粒子配置であり, また

$$c_N(a, \sigma, t_1, t_M) = \frac{1}{\prod_{n=1}^{N-1} (e^{na\sigma} - 1)^{N-n}} \exp \left\{ -\frac{1}{24} N(N^2 - 1) \left(\sigma^2 t_M - 2a\sigma + \frac{a^2}{t_1} \right) \right\} \quad (5.0.19)$$

である. 特に一時刻分布は (5.0.18) で $M = 1$ とおいた

$$\hat{p}(t, \mathbf{x}) = c_N(a, \sigma, t, t) \prod_{j=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-x_j^2/2t} \prod_{1 \leq j < k \leq N} \left(2 \sinh \frac{\sigma(x_k - x_j)}{2} \right) \left(2 \sinh \frac{a(x_k - x_j)}{2t} \right) \quad (5.0.20)$$

で与えられる. ここで $t = t_1, \mathbf{x} = \mathbf{x}^{(1)}$ とした. この分布は, 適切な変数変換によって, 双直交 Stieltjes-Wigert アンサンブルと呼ばれる分布に変換され, 双直交 Stieltjes-Wigert 多項式という双直交多項式を用いることで行列式点過程であることが示される [34, 10]. この分布の係数

$c_N(a, \sigma, t, t)$ から, 自動的にチャーン・サイモンズ行列模型 [10, 22] の分配関数が計算されることに注意する.

この論文の主結果は, (5.0.20) におけるある特別な時刻

$$t = \frac{a}{\sigma} \tag{5.0.21}$$

に対するものである. したがって, 主結果を双直交 Stieltjes-Wigert アンサンブルへ, さらに多時刻の場合にまで拡張することは今後の重要な課題である.

付録A Lemma 1 および Lemma 2 の証明

q -二項定理 [1] より, q -Pochhammer 記号 (1.0.36) に対して,

$$(z; q)_n = \sum_{k=0}^n \frac{(q; q)_n q^{k(k-1)/2} (-z)^k}{(q; q)_k (q; q)_{n-k}}, \quad n \geq 0, \quad (\text{A.1})$$

$$(z; q)_\infty = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^{k(k-1)/2} (-z)^k}{(q; q)_k}. \quad (\text{A.2})$$

が成り立つ. 次の Lemma は [15] の Lemma 3.1 から得られる $(q; q)_\infty / (q; q)_n$ に対する展開の精度を上げたものである;

Lemma 11 $0 < q < 1$ とする. そのとき,

$$\frac{(q; q)_\infty}{(q; q)_n} = 1 - \frac{q^{n+1}}{1-q} + R(q; n) \quad (\text{A.3})$$

の剰余項 $R(q; n)$ に対して

$$|R(q; n)| < \frac{(-q; q)_\infty}{(1-q)(1-q^2)} q^{2n+2} \quad (\text{A.4})$$

が成り立つ.

Proof. (A.2) から

$$\frac{(q; q)_\infty}{(q; q)_n} = (q^{n+1}; q)_\infty = 1 - \frac{q^{n+1}}{1-q} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{q^{k(k-1)/2}}{(q; q)_k} (-1)^k q^{k(n+1)} \quad (\text{A.5})$$

を得る. したがって

$$\begin{aligned} R(q; n) &= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{q^{k(k-1)/2}}{(q; q)_k} (-1)^k q^{k(n+1)} \\ &= q^{2(n+1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^{(k+2)(k+1)/2}}{(q; q)_{k+2}} (-1)^k q^{k(n+1)} \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

の絶対値をとることで

$$\begin{aligned} |R(q; n)| &< q^{2(n+1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^{(k+2)(k+1)/2}}{(q; q)_{k+2}} q^{k(n+1)} \\ &= q^{2n+2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^{k(k-1)/2}}{(q; q)_k} q^k \frac{q^{2k+1+kn}}{(1-q^{k+1})(1-q^{k+2})} \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

を得る. 任意の $n, k \in \mathbb{N}_0$ に対し, $q^{2k+1+kn} < 1$ および $1/(1-q^{k+1})(1-q^{k+2}) \leq 1/(1-q)(1-q^2)$ が成り立つので,

$$\begin{aligned} |R(q; n)| &< \frac{q^{2n+2}}{(1-q)(1-q^2)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^{k(k-1)/2}}{(q; q)_k} q^k \\ &= \frac{(-q; q)_{\infty}}{(1-q)(1-q^2)} q^{2n+2} \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

が得られる. ■

以下の証明では簡単のため

$$S_n(x; q) = \sum_{k=0}^n \frac{q^{k^2} (-x)^k}{(q; q)_k (q; q)_{n-k}} = q^{n^2} (-x)^n \sum_{k=0}^n \frac{q^{k^2-2kn} (-x)^{-k}}{(q; q)_k (q; q)_{n-k}}, \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (\text{A.9})$$

とおく. 正規直交 Stieltjes-Wigert 多項式 (1.0.43) は

$$p_n(x; q) = (-1)^n q^{n^2/2+1/4} \sqrt{(q; q)_n} S_n(q^{1/2}x; q) \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (\text{A.10})$$

によって与えられる.

A.1 Lemma 1 の証明

$x = q^{-n\tau}u$, $u > 0$, $\tau \in (0, 2)$ とおき, (2.1.1), (2.1.2), (2.1.3) を仮定する. $m + \lambda = (2 - \tau)n$ に注意すると,

$$S_n(q^{-n\tau}u; q) = \frac{(-u)^n q^{n^2(1-\tau)}}{(q; q)_{\infty}^2} \sum_{k=0}^n \frac{(q; q)_{\infty}^2 q^{k^2}}{(q; q)_k (q; q)_{n-k}} \left(-q^{-m-\lambda}u^{-1}\right)^k \quad (\text{A.11})$$

を得る. ここで $S_n(q^{-n\tau}u; q)$ の和を二つに分けて

$$S_n(q^{-n\tau}u; q) = S_n^{(1)} + S_n^{(2)}, \quad (\text{A.12})$$

$$S_n^{(1)} = \frac{(-u)^n q^{n^2(1-\tau)}}{(q; q)_{\infty}^2} \sum_{k=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} \frac{(q; q)_{\infty}^2 q^{k^2}}{(q; q)_k (q; q)_{n-k}} \left(-q^{-m-\lambda}u^{-1}\right)^k, \quad (\text{A.13})$$

$$S_n^{(2)} = \frac{(-u)^n q^{n^2(1-\tau)}}{(q; q)_{\infty}^2} \sum_{k=\lfloor m/2 \rfloor+1}^n \frac{(q; q)_{\infty}^2 q^{k^2}}{(q; q)_k (q; q)_{n-k}} \left(-q^{-m-\lambda}u^{-1}\right)^k \quad (\text{A.14})$$

とおく. $S_n^{(1)}$ を

$$\begin{aligned} S_n^{(1)} &= \frac{q^{n^2(1-\tau) - \lfloor m/2 \rfloor (\lfloor m/2 \rfloor + \chi(m) + \lambda)}}{(-u)^{\lfloor m/2 \rfloor - n} (q; q)_{\infty}^2} \\ &\quad \times \sum_{k=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} q^{k^2} \left(-q^{\lambda + \chi(m)}u\right)^k \frac{(q; q)_{\infty}}{(q; q)_{\lfloor m/2 \rfloor - k}} \frac{(q; q)_{\infty}}{(q; q)_{n - \lfloor m/2 \rfloor + k}} \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

と書きなおし, Lemma 11 を適用すれば

$$\begin{aligned}
S_n^{(1)} &= \frac{q^{n^2(1-\tau)-\lfloor m/2 \rfloor(\lfloor m/2 \rfloor + \chi(m) + \lambda)}}{(-u)^{\lfloor m/2 \rfloor - n}(q; q)_\infty^2} \\
&\times \sum_{k=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} q^{k^2} \left(-q^{\lambda + \chi(m)} u\right)^k \left(1 - \frac{q^{n - \lfloor m/2 \rfloor + k + 1}}{1 - q} - \frac{q^{\lfloor m/2 \rfloor - k + 1}}{1 - q}\right. \\
&+ \frac{q^{n+2}}{(1 - q)^2} + R(q; n - \lfloor m/2 \rfloor + k) - \frac{q^{\lfloor m/2 \rfloor - k + 1}}{1 - q} R(q; n - \lfloor m/2 \rfloor + k) \\
&+ R(q; \lfloor m/2 \rfloor - k) - \frac{q^{n - \lfloor m/2 \rfloor + k + 1}}{1 - q} R(q; \lfloor m/2 \rfloor - k) \\
&\left. + R(q; \lfloor m/2 \rfloor - k) R(q; n - \lfloor m/2 \rfloor + k)\right) \quad (\text{A.16})
\end{aligned}$$

を得る. ここで $S_n^{(1)}$ を

$$\begin{aligned}
S_n^{(1)} &= \frac{q^{n^2(1-\tau)-\lfloor m/2 \rfloor(\lfloor m/2 \rfloor + \chi(m) + \lambda)}}{(-u)^{\lfloor m/2 \rfloor - n}(q; q)_\infty^2} \\
&\times \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} q^{k^2} \left(-q^{\lambda + \chi(m)} u\right)^k - \frac{q^{1+n-\lfloor m/2 \rfloor}}{1 - q} \sum_{k=0}^{\infty} q^{k^2+k} \left(-q^{\lambda + \chi(m)} u\right)^k \right. \\
&\quad \left. - \frac{q^{1+\lfloor m/2 \rfloor}}{1 - q} \sum_{k=0}^{\infty} q^{k^2-k} \left(-q^{\lambda + \chi(m)} u\right)^k + r_1(n) \right\} \quad (\text{A.17})
\end{aligned}$$

とおく. ここで $r_1(n)$ は

$$r_1(n) = \sum_{j=1}^9 r_{1j}(n) \quad (\text{A.18})$$

として, 以下の九つの項からなる:

$$\begin{aligned}
r_{11}(n) &= - \sum_{k=\lfloor m/2 \rfloor + 1}^{\infty} q^{k^2} \left(-q^{\lambda + \chi(m)} u\right)^k, \\
r_{12}(n) &= \frac{q^{1+n-\lfloor m/2 \rfloor}}{1 - q} \sum_{k=\lfloor m/2 \rfloor + 1}^{\infty} q^{k^2+k} \left(-q^{\lambda + \chi(m)} u\right)^k, \\
r_{13}(n) &= \frac{q^{1+\lfloor m/2 \rfloor}}{1 - q} \sum_{k=\lfloor m/2 \rfloor + 1}^{\infty} q^{k^2-k} \left(-q^{\lambda + \chi(m)} u\right)^k, \\
r_{14}(n) &= \frac{q^{2+n}}{(1 - q)^2} \sum_{k=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} q^{k^2} \left(-q^{\lambda + \chi(m)} u\right)^k,
\end{aligned}$$

および

$$r_{15}(n) = \sum_{k=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} q^{k^2} \left(-q^{\lambda + \chi(m)} u\right)^k R(q; n - \lfloor m/2 \rfloor + k),$$

$$\begin{aligned}
r_{16}(n) &= -\frac{q^{1+[m/2]}}{1-q} \sum_{k=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} q^{k^2-k} \left(-q^{\lambda+\chi(m)}u\right)^k R(q; n - \lfloor m/2 \rfloor + k), \\
r_{17}(n) &= \sum_{k=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} q^{k^2} \left(-q^{\lambda+\chi(m)}u\right)^k R(q; \lfloor m/2 \rfloor - k), \\
r_{18}(n) &= -\frac{q^{1+n-\lfloor m/2 \rfloor}}{1-q} \sum_{k=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} q^{k^2+k} \left(-q^{\lambda+\chi(m)}u\right)^k R(q; \lfloor m/2 \rfloor - k), \\
r_{19}(n) &= \sum_{k=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} q^{k^2} \left(-q^{\lambda+\chi(m)}u\right)^k R(q; \lfloor m/2 \rfloor - k) R(q; n - \lfloor m/2 \rfloor + k).
\end{aligned}$$

同様に $S_n^{(2)}$ を

$$S_n^{(2)} = \frac{q^{n^2(1-\tau)-\lfloor m/2 \rfloor(\lfloor m/2 \rfloor+\chi(m)+\lambda)}}{(-u)^{\lfloor m/2 \rfloor-n}(q; q)_\infty^2} \sum_{k=1}^{n-\lfloor m/2 \rfloor} \frac{(q; q)_\infty^2 q^{k^2} \left(-q^{\lambda+\chi(m)}u\right)^{-k}}{(q; q)_{\lfloor m/2 \rfloor+k} (q; q)_{n-\lfloor m/2 \rfloor-k}} \quad (\text{A.19})$$

と書きなおし, Lemma 11 を適用すると

$$\begin{aligned}
S_n^{(2)} &= \frac{q^{n^2(1-\tau)-\lfloor m/2 \rfloor(\lfloor m/2 \rfloor+\chi(m)+\lambda)}}{(-u)^{\lfloor m/2 \rfloor-n}(q; q)_\infty^2} \\
&\times \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} q^{k^2} \left(-q^{\lambda+\chi(m)}u\right)^{-k} - \frac{q^{1+n-\lfloor m/2 \rfloor}}{1-q} \sum_{k=1}^{\infty} q^{k^2-k} \left(-q^{\lambda+\chi(m)}u\right)^{-k} \right. \\
&\quad \left. - \frac{q^{1+\lfloor m/2 \rfloor}}{1-q} \sum_{k=1}^{\infty} q^{k^2+k} \left(-q^{\lambda+\chi(m)}u\right)^{-k} + r_2(n) \right\} \quad (\text{A.20})
\end{aligned}$$

を得る. ここで $r_2(n)$ は

$$r_2(n) = \sum_{j=1}^9 r_{2j}(n) \quad (\text{A.21})$$

として,

$$\begin{aligned}
r_{21}(n) &= - \sum_{k=n-\lfloor m/2 \rfloor+1}^{\infty} q^{k^2} \left(-q^{\lambda+\chi(m)}u\right)^{-k}, \\
r_{22}(n) &= \frac{q^{1+n-\lfloor m/2 \rfloor}}{1-q} \sum_{k=n-\lfloor m/2 \rfloor+1}^{\infty} q^{k^2-k} \left(-q^{\lambda+\chi(m)}u\right)^{-k}, \\
r_{23}(n) &= \frac{q^{1+\lfloor m/2 \rfloor}}{1-q} \sum_{k=n-\lfloor m/2 \rfloor+1}^{\infty} q^{k^2+k} \left(-q^{\lambda+\chi(m)}u\right)^{-k}, \\
r_{24}(n) &= \frac{q^{2+n}}{(1-q)^2} \sum_{k=1}^{n-\lfloor m/2 \rfloor} q^{k^2} \left(-q^{\lambda+\chi(m)}u\right)^{-k},
\end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned}
r_{25}(n) &= \sum_{k=1}^{n-\lfloor m/2 \rfloor} q^{k^2} \left(-q^{\lambda+\chi(m)}u\right)^{-k} R(q; n - \lfloor m/2 \rfloor - k), \\
r_{26}(n) &= -\frac{q^{1+\lfloor m/2 \rfloor}}{1-q} \sum_{k=1}^{n-\lfloor m/2 \rfloor} q^{k^2+k} \left(-q^{\lambda+\chi(m)}u\right)^{-k} R(q; n - \lfloor m/2 \rfloor - k), \\
r_{27}(n) &= \sum_{k=1}^{n-\lfloor m/2 \rfloor} q^{k^2} \left(-q^{\lambda+\chi(m)}u\right)^{-k} R(q; \lfloor m/2 \rfloor + k), \\
r_{28}(n) &= -\frac{q^{1+n-\lfloor m/2 \rfloor}}{1-q} \sum_{k=1}^{n-\lfloor m/2 \rfloor} q^{k^2-k} \left(-q^{\lambda+\chi(m)}u\right)^{-k} R(q; \lfloor m/2 \rfloor + k), \\
r_{29}(n) &= \sum_{k=1}^{n-\lfloor m/2 \rfloor} q^{k^2} \left(-q^{\lambda+\chi(m)}u\right)^{-k} R(q; \lfloor m/2 \rfloor + k)R(q; n - \lfloor m/2 \rfloor - k)
\end{aligned}$$

なる九つの項からなる。したがって

$$\begin{aligned}
S_n^{(1)} + S_n^{(2)} &= \frac{q^{n^2(1-\tau)-\lfloor m/2 \rfloor(\lfloor m/2 \rfloor+\chi(m)+\lambda)}}{(-u)^{\lfloor m/2 \rfloor-n}(q; q)_\infty^2} \\
&\times \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} q^{k^2} \left(-q^{\lambda+\chi(m)}u\right)^k - \frac{q^{1+n-\lfloor m/2 \rfloor}}{1-q} \sum_{k=-\infty}^{\infty} q^{k^2+k} \left(-q^{\lambda+\chi(m)}u\right)^k \right. \\
&\quad \left. - \frac{q^{1+\lfloor m/2 \rfloor}}{1-q} \sum_{k=-\infty}^{\infty} q^{k^2-k} \left(-q^{\lambda+\chi(m)}u\right)^k + r_1(n) + r_2(n) \right\} \quad (\text{A.22})
\end{aligned}$$

を得る。 (A.22) における三つの無限和が、ヤコビ・テータ関数 (1.0.55) で表現されることに注意すれば

$$\begin{aligned}
S_n(q^{-n\tau}u; q) &= \frac{q^{n^2(1-\tau)-\lfloor m/2 \rfloor(\lfloor m/2 \rfloor+\chi(m)+\lambda)}}{(-u)^{\lfloor m/2 \rfloor-n}(q; q)_\infty^2} \left\{ \Theta\left(-q^{\lambda+\chi(m)}u \middle| q\right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{q^{1+n-\lfloor m/2 \rfloor}}{1-q} \Theta\left(-q^{\lambda+\chi(m)+1}u \middle| q\right) - \frac{q^{1+\lfloor m/2 \rfloor}}{1-q} \Theta\left(-q^{\lambda+\chi(m)-1}u \middle| q\right) + r_1(n) + r_2(n) \right\} \quad (\text{A.23})
\end{aligned}$$

が得られる。ここで、 $0 < q < 1$ に注意すれば、 $r_1(n)$ の各項に対して以下の不等式を得ることができる；

$$\begin{aligned}
|r_{11}(n)| &< \sum_{k=\lfloor m/2 \rfloor+1}^{\infty} q^{k^2} \left(q^{\lambda+\chi(m)}u\right)^k \\
&= q^{\lfloor m/2 \rfloor^2+2\lfloor m/2 \rfloor} \left(q^{\lambda+\chi(m)}u\right)^{\lfloor m/2 \rfloor+1} \sum_{k=0}^{\infty} q^{k^2+2k+1} q^{2\lfloor m/2 \rfloor k} \left(q^{\lambda+\chi(m)}u\right)^k \\
&< q^{\lfloor m/2 \rfloor^2+2\lfloor m/2 \rfloor} \left(q^{\lambda+\chi(m)}u\right)^{\lfloor m/2 \rfloor+1} \sum_{k=0}^{\infty} q^{k^2-2k} \left(q^{\lambda+\chi(m)}u\right)^k \\
&< \frac{q^{\lfloor m/2 \rfloor^2+2\lfloor m/2 \rfloor}}{1-q} \left(q^{\lambda+\chi(m)}u\right)^{\lfloor m/2 \rfloor+1} \sum_{k=0}^{\infty} q^{k^2-2k} \left(q^{\lambda+\chi(m)}u\right)^k,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|r_{12}(n)| &< \frac{q^{\lfloor m/2 \rfloor^2 + 2\lfloor m/2 \rfloor + 1 + n}}{1-q} \left(q^{\lambda + \chi(m)} u \right)^{\lfloor m/2 \rfloor + 1} \sum_{k=0}^{\infty} q^{k^2 - 2k} \left(q^{\lambda + \chi(m)} u \right)^k, \\
|r_{13}(n)| &< \frac{q^{\lfloor m/2 \rfloor^2 + 2\lfloor m/2 \rfloor + 1}}{1-q} \left(q^{\lambda + \chi(m)} u \right)^{\lfloor m/2 \rfloor + 1} \sum_{k=0}^{\infty} q^{k^2 - 2k} \left(q^{\lambda + \chi(m)} u \right)^k, \\
|r_{14}(n)| &< \frac{(-q; q)_{\infty}^2}{(1-q)^2(1-q^2)^2} q^n \sum_{k=0}^{\infty} q^{k^2 - 2k} \left(q^{\lambda + \chi(m)} u \right)^k.
\end{aligned}$$

残りの項に対しては Lemma 11 を適用して

$$\begin{aligned}
|r_{15}(n)| &< \frac{(-q; q)_{\infty}}{(1-q)(1-q^2)} q^{2+2(n-\lfloor m/2 \rfloor)} \sum_{k=0}^{\infty} q^{k^2} \left(q^{\lambda + \chi(m)} u \right)^k \\
&< \frac{(-q; q)_{\infty}^2}{(1-q)^2(1-q^2)^2} q^{2(n-\lfloor m/2 \rfloor)} \sum_{k=0}^{\infty} q^{k^2 - 2k} \left(q^{\lambda + \chi(m)} u \right)^k, \\
|r_{16}(n)| &< \frac{(-q; q)_{\infty}^2}{(1-q)^2(1-q^2)^2} q^{2n-\lfloor m/2 \rfloor} \sum_{k=0}^{\infty} q^{k^2 - 2k} \left(q^{\lambda + \chi(m)} u \right)^k, \\
|r_{17}(n)| &< \frac{(-q; q)_{\infty}^2}{(1-q)^2(1-q^2)^2} q^{2\lfloor m/2 \rfloor} \sum_{k=0}^{\infty} q^{k^2 - 2k} \left(q^{\lambda + \chi(m)} u \right)^k, \\
|r_{18}(n)| &< \frac{(-q; q)_{\infty}^2}{(1-q)^2(1-q^2)^2} q^{n+\lfloor m/2 \rfloor} \sum_{k=0}^{\infty} q^{k^2 - 2k} \left(q^{\lambda + \chi(m)} u \right)^k, \\
|r_{19}(n)| &< \frac{(-q; q)_{\infty}^2}{(1-q)^2(1-q^2)^2} q^{2n} \sum_{k=0}^{\infty} q^{k^2 - 2k} \left(q^{\lambda + \chi(m)} u \right)^k
\end{aligned}$$

を得る. 同様に $r_2(n)$ の各項に対しても, $0 < q < 1$ に注意して

$$\begin{aligned}
|r_{21}(n)| &< \frac{q^{(n-\lfloor m/2 \rfloor)^2}}{1-q} \left(q^{\lambda + \chi(m)} u \right)^{-(n-\lfloor m/2 \rfloor)} \sum_{k=1}^{\infty} q^{k^2 - 2k} \left(q^{\lambda + \chi(m)} u \right)^{-k}, \\
|r_{22}(n)| &< \frac{q^{(n-\lfloor m/2 \rfloor)^2 + 1}}{1-q} \left(q^{\lambda + \chi(m)} u \right)^{-(n-\lfloor m/2 \rfloor)} \sum_{k=1}^{\infty} q^{k^2 - 2k} \left(q^{\lambda + \chi(m)} u \right)^{-k}, \\
|r_{23}(n)| &< \frac{q^{(n-\lfloor m/2 \rfloor)^2 + 1 + n}}{1-q} \left(q^{\lambda + \chi(m)} u \right)^{-(n-\lfloor m/2 \rfloor)} \sum_{k=1}^{\infty} q^{k^2 - 2k} \left(q^{\lambda + \chi(m)} u \right)^{-k}, \\
|r_{24}(n)| &< \frac{(-q; q)_{\infty}^2}{(1-q)^2(1-q^2)^2} q^n \sum_{k=1}^{\infty} q^{k^2 - 2k} \left(q^{\lambda + \chi(m)} u \right)^{-k}.
\end{aligned}$$

残りの項に対しては Lemma 11 を適用して

$$|r_{25}(n)| < \frac{(-q; q)_\infty^2}{(1-q)^2(1-q^2)^2} q^{2(n-\lfloor m/2 \rfloor)} \sum_{k=1}^{\infty} q^{k^2-2k} \left(q^{\lambda+\chi(m)} u \right)^{-k},$$

$$|r_{26}(n)| < \frac{(-q; q)_\infty^2}{(1-q)^2(1-q^2)^2} q^{2n-\lfloor m/2 \rfloor} \sum_{k=1}^{\infty} q^{k^2-2k} \left(q^{\lambda+\chi(m)} u \right)^{-k},$$

$$|r_{27}(n)| < \frac{(-q; q)_\infty^2}{(1-q)^2(1-q^2)^2} q^{2\lfloor m/2 \rfloor} \sum_{k=1}^{\infty} q^{k^2-2k} \left(q^{\lambda+\chi(m)} u \right)^{-k},$$

$$|r_{28}(n)| < \frac{(-q; q)_\infty^2}{(1-q)^2(1-q^2)^2} q^{n+\lfloor m/2 \rfloor} \sum_{k=1}^{\infty} q^{k^2-2k} \left(q^{\lambda+\chi(m)} u \right)^{-k},$$

$$|r_{29}(n)| < \frac{(-q; q)_\infty^2}{(1-q)^2(1-q^2)^2} q^{2n} \sum_{k=1}^{\infty} q^{k^2-2k} \left(q^{\lambda+\chi(m)} u \right)^{-k}$$

を得る. したがって

$$\begin{aligned} |r_1(n) + r_2(n)| &\leq \sum_{j=1}^9 |r_{1j}(n)| + \sum_{j=1}^9 |r_{2j}(n)| \\ &< (1 + q^{1+n} + q) \frac{q^{\lfloor m/2 \rfloor^2 + 2\lfloor m/2 \rfloor}}{1-q} \left(q^{\lambda+\chi(m)} u \right)^{\lfloor m/2 \rfloor + 1} \sum_{k=0}^{\infty} q^{k^2-2k} \left(q^{\lambda+\chi(m)} u \right)^k \\ &\quad + \left(q^n + q^{2(n-\lfloor m/2 \rfloor)} + q^{2n-\lfloor m/2 \rfloor} + q^{2\lfloor m/2 \rfloor} + q^{n+\lfloor m/2 \rfloor} + q^{2n} \right) \\ &\quad \times \frac{(-q; q)_\infty^2}{(1-q)^2(1-q^2)^2} \sum_{k=0}^{\infty} q^{k^2-2k} \left(q^{\lambda+\chi(m)} u \right)^k \\ &\quad + (1 + q + q^{1+n}) \frac{q^{(n-\lfloor m/2 \rfloor)^2}}{1-q} \left(q^{\lambda+\chi(m)} u \right)^{-(n-\lfloor m/2 \rfloor)} \sum_{k=1}^{\infty} q^{k^2-2k} \left(q^{\lambda+\chi(m)} u \right)^{-k} \\ &\quad + \left(q^n + q^{2(n-\lfloor m/2 \rfloor)} + q^{2n-\lfloor m/2 \rfloor} + q^{2\lfloor m/2 \rfloor} + q^{n+\lfloor m/2 \rfloor} + q^{2n} \right) \\ &\quad \times \frac{(-q; q)_\infty^2}{(1-q)^2(1-q^2)^2} \sum_{k=1}^{\infty} q^{k^2-2k} \left(q^{\lambda+\chi(m)} u \right)^{-k} \end{aligned}$$

が得られる.

$$\frac{(2-\tau)n}{2} - 1 < \lfloor m/2 \rfloor \leq \frac{(2-\tau)n}{2} \quad (\text{A.24})$$

に注意すれば

$$\begin{aligned}
& q^n + q^{2(n-\lfloor m/2 \rfloor)} + q^{2n-\lfloor m/2 \rfloor} + q^{2\lfloor m/2 \rfloor} + q^{n+\lfloor m/2 \rfloor} + q^{2n} \\
& < q^n + q^{\tau n} + q^{n+\tau n/2} + q^{(2-\tau)n-2} + q^{n+(2-\tau)n/2-1} + q^{2n} \\
& < q^{-2} \left(q^n + q^{\tau n} + q^{n+\tau n/2} + q^{(2-\tau)n} + q^{n+(2-\tau)n/2} + q^{2n} \right) \\
& < q^{-2} \left(q^{\tau n} + 4q^n + q^{(2-\tau)n} \right) \\
& \leq 6q^{-2} q^{\tau n+2(1-\tau)n} \mathbf{1}_{[1,2)}(\tau)
\end{aligned} \tag{A.25}$$

を得るので、 $1+q+q^{1+n} < 3$ および $\lambda + \chi(m) \in [0, 2)$ に注意すれば、誤差項 $r_1(n) + r_2(n)$ を

$$\begin{aligned}
|r_1(n) + r_2(n)| & < \frac{3q^{\lfloor m/2 \rfloor^2 + 2\lfloor m/2 \rfloor}}{1-q} \left(q^{\lambda + \chi(m)} u \right)^{\lfloor m/2 \rfloor + 1} \sum_{k=0}^{\infty} q^{k^2 - 2k} \left(q^{\lambda + \chi(m)} u \right)^k \\
& \quad + 6q^{-2} q^{\tau n + 2(1-\tau)n} \mathbf{1}_{[1,2)}(\tau) \frac{(-q; q)_{\infty}^2}{(1-q)^2(1-q^2)^2} \sum_{k=0}^{\infty} q^{k^2 - 2k} \left(q^{\lambda + \chi(m)} u \right)^k \\
& \quad + \frac{3q^{(n-\lfloor m/2 \rfloor)^2}}{1-q} \left(q^{\lambda + \chi(m)} u \right)^{-(n-\lfloor m/2 \rfloor)} \sum_{k=1}^{\infty} q^{k^2 - 2k} \left(q^{\lambda + \chi(m)} u \right)^{-k} \\
& \quad + 6q^{-2} q^{\tau n + 2(1-\tau)n} \mathbf{1}_{[1,2)}(\tau) \frac{(-q; q)_{\infty}^2}{(1-q)^2(1-q^2)^2} \sum_{k=1}^{\infty} q^{k^2 - 2k} \left(q^{\lambda + \chi(m)} u \right)^{-k} \\
& < \frac{3q^{\lfloor m/2 \rfloor^2 + 2\lfloor m/2 \rfloor}}{1-q} u^{\lfloor m/2 \rfloor + 1} \sum_{k=0}^{\infty} q^{k^2 - 2k} u^k \\
& \quad + 6q^{-2} q^{\tau n + 2(1-\tau)n} \mathbf{1}_{[1,2)}(\tau) \frac{(-q; q)_{\infty}^2}{(1-q)^2(1-q^2)^2} \sum_{k=0}^{\infty} q^{k^2 - 2k} u^k \\
& \quad + \frac{3q^{(n-\lfloor m/2 \rfloor)^2}}{1-q} (q^2 u)^{-(n-\lfloor m/2 \rfloor)} \sum_{k=1}^{\infty} q^{k^2 - 2k} (q^2 u)^{-k} \\
& \quad + 6q^{-2} q^{\tau n + 2(1-\tau)n} \mathbf{1}_{[1,2)}(\tau) \frac{(-q; q)_{\infty}^2}{(1-q)^2(1-q^2)^2} \sum_{k=1}^{\infty} q^{k^2 - 2k} (q^2 u)^{-k}
\end{aligned}$$

と評価できる。したがって、再び (A.24) に注意すれば

$$\begin{aligned}
|r_1(n) + r_2(n)| & < \frac{3q^{(2-\tau)^2 n^2 / 4 - 1}}{1-q} u^{\lfloor m/2 \rfloor + 1} \sum_{k=0}^{\infty} q^{k^2 - 2k} u^k \\
& \quad + 6q^{-2} q^{\tau n + 2(1-\tau)n} \mathbf{1}_{[1,2)}(\tau) \frac{(-q; q)_{\infty}^2}{(1-q)^2(1-q^2)^2} \sum_{k=0}^{\infty} q^{k^2 - 2k} u^k \\
& \quad + \frac{3q^{\tau^2 n^2 / 4 - \tau n - 2}}{1-q} u^{-(n-\lfloor m/2 \rfloor)} \sum_{k=1}^{\infty} q^{k^2 - 4k} u^{-k} \\
& \quad + 6q^{-2} q^{\tau n + 2(1-\tau)n} \mathbf{1}_{[1,2)}(\tau) \frac{(-q; q)_{\infty}^2}{(1-q)^2(1-q^2)^2} \sum_{k=1}^{\infty} q^{k^2 - 4k} u^{-k} \\
& \equiv M(n)
\end{aligned} \tag{A.26}$$

なる評価が得られる. 任意の $\alpha > 0, \beta > 0, 0 < q < 1$ に対して, $q^{\alpha n^2} \beta^n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) であるから, $n \rightarrow \infty$ に対し

$$\frac{M(n)}{q^{\tau n + 2(1-\tau)n} \mathbf{1}_{[1,2]}(\tau)} \rightarrow 6q^{-2} \frac{(-q; q)_\infty^2}{(1-q)^2 (1-q^2)^2} \left[\sum_{k=0}^{\infty} q^{k^2 - 2k} u^k + \sum_{k=1}^{\infty} q^{k^2 - 4k} u^{-k} \right] \quad (\text{A.27})$$

が得られる. ゆえに誤差項 $r_1(n) + r_2(n)$ は

$$r_1(n) + r_2(n) = \mathcal{O}\left(q^{\tau n + 2(1-\tau)n} \mathbf{1}_{[1,2]}(\tau)\right). \quad (\text{A.28})$$

と評価される. ここで (A.24) および

$$\frac{\tau n}{2} \leq n - [m/2] < \frac{\tau n}{2} + 1 \quad (\text{A.29})$$

なので, $\tau n/2, (2-\tau)n/2, \tau n, (2-\tau)n$ の大小関係に注意しなければならない. $2/3 < \tau < 4/3$ の場合, (A.23) で誤差項を (A.28) と置いた公式がそのまま成立することがわかる. $0 < \tau \leq 2/3$ の場合には, (A.23) の第二項と第三項の主要項は $-\frac{q^{1+n-[m/2]}}{1-q} \Theta(-q^{\lambda+\chi(m)+1} u | q)$ に, 誤差項は $\mathcal{O}(q^{\tau n})$ に置き換わる. $4/3 \leq \tau < 2$ の場合, 前者は $-\frac{q^{1+[m/2]}}{1-q} \Theta(-q^{\lambda+\chi(m)-1} u | q)$ に, 後者は $\mathcal{O}(q^{(2-\tau)n})$ に置き換わる. 以上より, 正規直交 Stieltjes-Wigert 多項式 (A.10) に対して次が得られる;

$$\begin{aligned} p_n(q^{-n\tau} u; q) &= (-1)^n q^{n/2+1/4} \sqrt{(q; q)_n} S_n(q^{-n\tau} q^{1/2} u; q) \\ &= \frac{(-1)^n q^{n/2+1/4+n^2(1-\tau)-[m/2]([m/2]+\chi(m)+\lambda)} \sqrt{(q; q)_n}}{(-q^{1/2} u)^{[m/2]-n} (q; q)_\infty^2} \\ &\quad \times \left\{ \Theta\left(-q^{\lambda+\chi(m)+1/2} u | q\right) - \frac{q^{1+n-[m/2]}}{1-q} \Theta\left(-q^{\lambda+\chi(m)+3/2} u | q\right) \mathbf{1}_{(0,4/3)}(\tau) \right. \\ &\quad \left. - \frac{q^{1+[m/2]}}{1-q} \Theta\left(-q^{\lambda+\chi(m)-1/2} u | q\right) \mathbf{1}_{(2/3,2)}(\tau) + \mathcal{O}\left(q^{\tau n + 2(1-\tau)n} \mathbf{1}_{[1,2]}(\tau)\right) \right\}. \quad (\text{A.30}) \end{aligned}$$

最後に, 関数等式 (3.1.9) および $[m/2] = m/2 - \chi(m)/2$ に注意すれば Lemma 1 を得る. ■

A.2 Lemma 2 の証明

$$\begin{aligned} (q; q)_\infty S_n(x; q) &= \sum_{k=0}^n \frac{q^{k^2} (-x)^k}{(q; q)_k} \frac{(q; q)_\infty}{(q; q)_{n-k}} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^{k^2} (-x)^k}{(q; q)_k} - \frac{q^{1+n}}{1-q} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^{k^2-k} (-x)^k}{(q; q)_k} + r(n) \quad (\text{A.31}) \end{aligned}$$

とおく. ここで

$$r(n) = - \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{q^{k^2} (-x)^k}{(q; q)_k} + \frac{q^{1+n}}{1-q} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{q^{k^2-k} (-x)^k}{(q; q)_k} + \sum_{k=0}^n \frac{q^{k^2} (-x)^k}{(q; q)_k} R(q; n-k) \quad (\text{A.32})$$

と置いた. $x > 0, 0 < q < 1$ に対し

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{q^{k^2} x^k}{(q; q)_k} = q^{n^2+2n+1} x^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^{k^2+2nk+2k} x^k}{(q; q)_{k+n+1}} < \frac{q^{n^2+2n+1} x^{n+1}}{(q; q)_{\infty}} \sum_{k=0}^{\infty} q^{k^2} x^k \quad (\text{A.33})$$

が成り立つ. これと Lemma 11 を用いれば

$$\begin{aligned} & |r(n)| \\ & < \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{q^{k^2} x^k}{(q; q)_k} + \frac{q^{1+n}}{1-q} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{q^{k^2-k} x^k}{(q; q)_k} + \sum_{k=0}^n \frac{q^{k^2} x^k}{(q; q)_k} |R(q; n-k)| \\ & < \frac{q^{n^2+2n+1} x^{n+1}}{(q; q)_{\infty}} \sum_{k=0}^{\infty} q^{k^2} x^k + \frac{q^{n^2+2n+1} x^{n+1}}{(1-q)(q; q)_{\infty}} \sum_{k=0}^{\infty} q^{k^2-k} x^k + \frac{(-q; q)_{\infty} q^{2n+2}}{(1-q)(1-q^2)} \sum_{k=0}^n \frac{q^{k^2-2k} x^k}{(q; q)_k} \end{aligned} \quad (\text{A.34})$$

を得る. (A.34) の最後の和に対して

$$\sum_{k=0}^n \frac{q^{k^2-2k} x^k}{(q; q)_k} < \frac{1}{(q; q)_{\infty}} \sum_{k=0}^{\infty} q^{k^2-2k} x^k \quad (\text{A.35})$$

を得るので, 誤差項 $r(n)$ の対し, 次の評価が得られる;

$$|r(n)| < \frac{q^{2n}}{(q; q)_{\infty}} \left[q^{n^2+1} x^{n+1} \left(1 + \frac{1}{1-q} \right) + \frac{(-q; q)_{\infty} q^2}{(1-q)(1-q^2)} \right] \sum_{k=0}^{\infty} q^{k^2-2k} x^k. \quad (\text{A.36})$$

ゆえに, (A.31) のはじめの二項がラマヌジャン関数 (1.0.57) で記述されることに注意すれば

$$(q; q)_{\infty} S_n(x; q) = A_q(x) - \frac{q^{1+n}}{1-q} A_q(q^{-1}x) + \mathcal{O}(q^{2n}). \quad (\text{A.37})$$

を得る. よって (A.10) から Lemma 2 が得られる. ■

付録B (3.1.11) の証明

[8] の (3.13) 式より, ヤコビ・テータ関数 (1.0.55), (1.0.56) の $q \rightarrow 1$ における漸近形が次のように与えられる:

$$\Theta(-z|q) = (q^2; q^2)_\infty 2 \cos\left(\frac{\pi \ln z}{2 \ln q}\right) \exp\left[-\frac{1}{2 \ln q} \left\{-\frac{\pi^2}{3} + \frac{1}{2}(\ln z)^2\right\} + \frac{1}{12} \ln q\right] \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi k \ln z / \ln q + \pi k) \exp(\pi^2 k / \ln q)}{k \sinh(\pi^2 k / \ln q)}, \quad \text{for } |\arg z| \leq 2\pi. \quad (\text{B.1})$$

さらに, q -Pochhammer 記号に対して, 次の漸近形が知られている ([24] の Theorem 2). $q = e^{-\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$ に対して

$$(q; q)_\infty = \sqrt{\frac{2\pi}{\varepsilon}} e^{-\pi^2/6\varepsilon} (1 + \mathcal{O}(\varepsilon)), \quad \text{as } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (\text{B.2})$$

$2\varepsilon K^\Theta(e^{2\varepsilon\phi}, e^{2\varepsilon\varphi})$ を (B.1), (B.2) を用いて展開することで, (3.1.11) が得られる. $\varepsilon \rightarrow 0$ において, (B.1) の最後の無限和で与えられている項は他の項に比べて無視できる. また, (B.1) から現れる $\exp(-\pi^2/6\varepsilon)$ の発散する項は, (B.2) から来るそれと完全に相殺するため, $\varepsilon \rightarrow 0$ において重要な因子は (B.1) の三角関数のみとなる. これより, $\varepsilon \rightarrow 0$ の極限で (3.1.11) を得る. ■

付録C (3.2.10)の証明

Lemma 12 $x > 0, 0 < q < 1, 0 < \rho < 1$ とする. そのときラマヌジャン関数 (1.0.57) は次の積分表示をもつ:

$$A_q(x) = \frac{(q; q)_\infty}{2\pi i} \int_{\rho-i\infty}^{\rho+i\infty} dz \frac{z^{-1/2}}{(z; q)_\infty} \exp \left[-\frac{1}{|\ln q|} \left\{ \frac{1}{2} (\ln z)^2 - \ln x \ln z \right\} \right]. \quad (\text{C.1})$$

Proof. $n \in \mathbb{N}$ に対して, 積分路 $C_n = C_n^0 \cup C_n^1$, $C_n^0 = \{q^{-n-\rho} e^{i\theta} : |\theta| < \pi/2\}$, $C_n^1 = \{iy : \rho \leq |y| \leq q^{-n-\rho}\} \cup \{\rho e^{i\phi} : |\phi| < \pi/2\}$ を定義する. C_n にわたる積分

$$\frac{(q; q)_\infty}{2\pi i} \oint_{C_n} dz \frac{z^{-1/2}}{(z; q)_\infty} \exp \left\{ -\frac{(\ln z)^2}{2|\ln q|} + \frac{\ln x \ln z}{|\ln q|} \right\} \quad (\text{C.2})$$

は,

$$\text{Res} \left[(z; q)_\infty^{-1} : z = q^{-k} \right] = \frac{(-1)^{k+1} q^{(k^2-k)/2}}{(q; q)_k (q; q)_\infty} \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad (\text{C.3})$$

に注意すると

$$-\sum_{k=0}^n \frac{q^{k^2} (-x)^k}{(q; q)_k} \quad (\text{C.4})$$

と等しいことがわかる.

$$\begin{aligned} & \left| \int_{C_n^0} dz \frac{z^{-1/2}}{(z; q)_\infty} \exp \left\{ -\frac{(\ln z)^2}{2|\ln q|} + \frac{\ln x \ln z}{|\ln q|} \right\} \right| \\ & \leq q^{(n+\rho)(n+\rho-1)/2} x^{n+\rho} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \frac{\exp(\theta^2/2|\ln q|)}{|(q^{-n-\rho} e^{i\theta}; q)_\infty|} \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

を得るので,

$$\left| (q^{-n-\rho} e^{i\theta}; q)_\infty^{-1} \right| \leq \left| (q^{-n-\rho}; q)_\infty^{-1} \right| \quad (\text{C.6})$$

および

$$(q^{-n-\rho}; q)_\infty = (-1)^{n+1} q^{-n(n+1)/2 - \rho(n+1)} (q^\rho; q)_{n+1} (q^{1-\rho}; q)_\infty \quad (\text{C.7})$$

に注意すれば

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{C_n^0} dz \frac{z^{-1/2}}{(z; q)_\infty} \exp \left\{ -\frac{(\ln z)^2}{2|\ln q|} + \frac{\ln x \ln z}{|\ln q|} \right\} \right| \\
& \leq q^{(n+\rho)(n+\rho-1)/2} x^{n+\rho} \left| (q^{-n-\rho}; q)_\infty^{-1} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \exp(\theta^2/2|\ln q|) \right| \\
& \leq q^{(n+\rho)(n+\rho-1)/2} x^{n+\rho} \left| (q^{-n-\rho}; q)_\infty^{-1} \right| \pi \exp(\pi^2/8|\ln q|) \\
& = q^{n^2+2\rho n+\rho(\rho+1)/2} x^{n+\rho} (q^\rho; q)_{n+1}^{-1} (q^{1-\rho}; q)_\infty^{-1} \pi \exp(\pi^2/8|\ln q|) \quad (\text{C.8}) \\
& = \mathcal{O}(q^{n^2})
\end{aligned}$$

が得られる。したがって

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^{k^2} (-x)^k}{(q; q)_k} &= -\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(q; q)_\infty}{2\pi i} \oint_{C_n^0 \cup C_n^1} dz \frac{z^{-1/2}}{(z; q)_\infty} \exp \left\{ -\frac{(\ln z)^2}{2|\ln q|} + \frac{\ln x \ln z}{|\ln q|} \right\} \\
&= \frac{(q; q)_\infty}{2\pi i} \int_{\rho-i\infty}^{\rho+i\infty} dz \frac{z^{-1/2}}{(z; q)_\infty} \exp \left\{ -\frac{(\ln z)^2}{2|\ln q|} + \frac{\ln x \ln z}{|\ln q|} \right\} \quad (\text{C.9})
\end{aligned}$$

を得る。ここで積分路 C_∞^1 を $\{\rho + iy : -\infty \leq y \leq \infty\}$ に変形し、積分の向きを変えた。よって Lemma が示された。 ■

[30] の Lemma 3.2 から、 q -Pochhammer 記号の $q \rightarrow 1$ における次の漸近形が得られる；

$$(z; q)_\infty = \exp \left\{ -\frac{1}{|\ln q|} \text{Li}_2(z) + \frac{1}{2} \ln(1-z) \right\} (1 + \mathcal{O}(|\ln q|)). \quad (\text{C.10})$$

ここで Li_2 はダイログ関数 [1]

$$\text{Li}_2(z) = -\int_0^z \frac{\ln(1-t)}{t} dt, \quad z \in \mathbb{C} \setminus [1, \infty) \quad (\text{C.11})$$

である。定義より

$$\text{Li}_2(z) + \text{Li}_2(1-z) = \frac{\pi^2}{6} - \log z \log(1-z), \quad (\text{C.12})$$

$$\text{Li}_2(z) + \text{Li}_2\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{\pi^2}{3} - \frac{1}{2}(\ln z)^2 + i\pi \ln z \quad (\text{C.13})$$

なる関数等式が示される。また特殊値

$$\text{Li}_2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2}(\log 2)^2 \quad (\text{C.14})$$

が得られる。(C.10) を (C.1) に代入すれば,

$$\begin{aligned}
A_q(x) &= \frac{(q; q)_\infty}{2\pi i} \int_{\rho-i\infty}^{\rho+i\infty} dz \frac{z^{-1/2}}{\sqrt{1-z}} \exp \left[\frac{1}{|\ln q|} \left\{ \text{Li}_2(z) - \frac{1}{2}(\ln z)^2 + \ln x \ln z \right\} \right] \\
&\quad \times (1 + \mathcal{O}(|\ln q|)) \quad x > 0 \quad (\text{C.15})
\end{aligned}$$

という積分表示を得る。

C.1 Chester, Friedman, Ursell の方法

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} g(z)\right) dz \quad (\text{C.16})$$

という形の積分を考える．ここで $\varepsilon > 0$ とし， f と g は積分路 C を含むある領域で z の解析関数とする．さらに g は二つの一致しうる鞍点 z_+ と z_- をもつとする．つまり， z_+ と z_- はあるパラメータ ν に依存し，ある値 $\nu = \nu_c$ で一致し， $\nu \neq \nu_c$ では異なっているとす．[6] において，Chester, Friedman, Ursell は積分 (C.16) の $\varepsilon \rightarrow 0$ における漸近展開を得た．以下ではその方法 [6, 42, 30, 13] を簡潔に述べ，その後ラマヌジャン関数に対する漸近展開の結果を示す．

まず，次の三次方程式を導入する：

$$g(z) = \frac{1}{3}\omega^3 - a\omega + b \quad (\text{C.17})$$

ここで a と b は未定係数である． w について (C.17) を微分すると

$$g'(z) \frac{dz(\omega)}{d\omega} = \omega^2 - a \quad (\text{C.18})$$

を得る．ここで $g'(z_{\pm}) = 0$ であるから， $z = z_{\pm}$ を $\omega = \pm a^{1/2}$ と同一視する．つまり $\omega(z_{\pm}) = \pm a^{1/2}$ を仮定する．すると，(C.17) から，係数 a と b を

$$\frac{4}{3}a^{3/2} = g(z_-) - g(z_+), \quad (\text{C.19})$$

$$2b = g(z_-) + g(z_+) \quad (\text{C.20})$$

より決めることができる．(C.17) を (C.16) に代入すると，

$$I = \frac{e^{b/\varepsilon}}{2\pi i} \int_{C'} f(z(\omega)) \frac{dz(\omega)}{d\omega} \exp\left\{\frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\omega^3}{3} - a\omega\right)\right\} d\omega \quad (\text{C.21})$$

を得る．ここで $C' = \omega(C)$ である．ここで $f(z(\omega))dz(\omega)/d\omega$ を

$$f(z(\omega)) \frac{dz(\omega)}{d\omega} = p_0 + q_0\omega + (\omega^2 - a)\psi_0(\omega) \quad (\text{C.22})$$

のように展開する．ここで $\psi_0(\omega)$ は ω の解析関数で，未定係数 p_0 および q_0 は

$$p_0 = \frac{1}{2} \left\{ f(z_+) \left(\frac{dz}{d\omega}\right)_{z=z_+} + f(z_-) \left(\frac{dz}{d\omega}\right)_{z=z_-} \right\}, \quad (\text{C.23})$$

$$q_0 = \frac{1}{2a^{1/2}} \left\{ f(z_+) \left(\frac{dz}{d\omega}\right)_{z=z_+} - f(z_-) \left(\frac{dz}{d\omega}\right)_{z=z_-} \right\} \quad (\text{C.24})$$

より決まる．したがって

$$\begin{aligned} e^{-b/\varepsilon} I &= \frac{p_0}{2\pi i} \int_{C'} \exp\left\{\frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\omega^3}{3} - a\omega\right)\right\} d\omega + \frac{q_0}{2\pi i} \int_{C'} \omega \exp\left\{\frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\omega^3}{3} - a\omega\right)\right\} d\omega \\ &\quad + \frac{1}{2\pi i} \int_{C'} (\omega^2 - a)\psi_0(\omega) \exp\left\{\frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\omega^3}{3} - a\omega\right)\right\} d\omega \end{aligned} \quad (\text{C.25})$$

という展開を得る. ここで, C' が $\infty e^{-i\pi/3}$ を始点とし $\infty e^{i\pi/3}$ を終点とするような積分路である場合, (C.25) のはじめの二項はエアリー関数 (1.0.31) とその導関数で与えられることに注意する. さらに, (C.25) の最後の項を部分積分し, そこで現れる $dw_0(\omega)/d\omega$ を (C.22) と同様に展開することで, (C.25) の最後の項は $\varepsilon^{4/3}$ のオーダーであることがわかる. よって, 前述の場合を仮定すれば,

$$e^{-b/\varepsilon} I = p_0 \varepsilon^{1/3} \text{Ai} \left(a \varepsilon^{-2/3} \right) - q_0 \varepsilon^{2/3} \text{Ai}' \left(a \varepsilon^{-2/3} \right) + \mathcal{O} \left(\varepsilon^{4/3} \right) \quad (\text{C.26})$$

という $\varepsilon \rightarrow 0$ における (C.25) のエアリー関数による展開が得られる. 一般には,

$$V(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C''} e^{\omega'^3/3 - \lambda \omega'} d\omega', \quad (\text{C.27})$$

$$V'(\lambda) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{C''} \omega' e^{\omega'^3/3 - \lambda \omega'} d\omega' \quad (\text{C.28})$$

なる積分を用いて (C.25) は

$$e^{-b/\varepsilon} I = p_0 \varepsilon^{1/3} V \left(a \varepsilon^{-2/3} \right) - q_0 \varepsilon^{2/3} V' \left(a \varepsilon^{-2/3} \right) + \mathcal{O} \left(\varepsilon^{4/3} \right) \quad (\text{C.29})$$

と展開される. ここで $C'' = \varepsilon^{-1/3} C'$ である.

Lemma 13 $q = e^{\delta^3}$, $\delta > 0$, $x = e^{-\delta^2 s}/4$, $s \in \mathbb{R}$ とおく. そのとき

$$A_q \left(q^{1/2} x \right) = -\sqrt{2} \delta (e^{-\delta^3}; e^{-\delta^3})_{\infty} e^{b/\delta^3} \left(\text{Ai}(s) + \frac{\delta}{2} \text{Ai}'(s) + \mathcal{O}(\delta^2) \right), \quad (\text{C.30})$$

$$A_q \left(q^{-1/2} x \right) = -\frac{\delta}{\sqrt{2}} (e^{-\delta^3}; e^{-\delta^3})_{\infty} e^{b/\delta^3} \left(\text{Ai}(s) - \frac{\delta}{2} \text{Ai}'(s) + \mathcal{O}(\delta^2) \right) \quad (\text{C.31})$$

を得る. ここで

$$b = (\ln 2)^2 + \frac{\pi^2}{12} + \delta^2 s \ln 2 + \frac{1}{4} \delta^4 s^2 + \mathcal{O}(\delta^5). \quad (\text{C.32})$$

Proof. 積分

$$A_q \left(q^{1/2} x \right) = \frac{(q; q)_{\infty}}{2\pi i} \int_{\rho-i\infty}^{\rho+i\infty} dz f(z) \exp \left(\frac{1}{|\ln q|} g(z) \right) (1 + \mathcal{O}(|\ln q|)), \quad (\text{C.33})$$

$$A_q \left(q^{-1/2} x \right) = \frac{(q; q)_{\infty}}{2\pi i} \int_{\rho-i\infty}^{\rho+i\infty} dz \tilde{f}(z) \exp \left(\frac{1}{|\ln q|} \tilde{g}(z) \right) (1 + \mathcal{O}(|\ln q|)) \quad (\text{C.34})$$

を考える. ここで

$$f(z) = \frac{z^{-1}}{\sqrt{1-z}}, \quad \tilde{f}(z) = \frac{1}{\sqrt{1-z}}, \quad (\text{C.35})$$

および

$$g(z) = \tilde{g}(z) = \text{Li}_2(z) - \frac{1}{2} (\ln z)^2 + \ln x \ln z, \quad x > 0 \quad (\text{C.36})$$

である. $g'(z) = 0$ から二次方程式 $z^2 - z + x = 0$ を得るので, $g(z)$ の鞍点は

$$z_+ = \frac{1 + \sqrt{1 - 4x}}{2}, \quad z_- = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2} \quad (\text{C.37})$$

で与えられる. これらは $x = 1/4$ で一致し, $x \neq 1/4$ で異なっている.

$q = e^{\delta^3}$, $\delta > 0$, $x = e^{-\delta^2 s}/4$, $s \in \mathbb{R}$ とおく. δ について (C.37) を展開すると

$$z_{\pm} = \frac{1}{2} \left(1 \pm \delta s^{1/2} \mp \frac{1}{4} \delta^3 s^{3/2} + \mathcal{O}(\delta^5) \right) \quad (\text{C.38})$$

を得るので,

$$\text{Li}_2(z_{\pm}) = \text{Li}_2\left(\frac{1}{2}\right) \pm \delta s^{1/2} \ln 2 + \frac{1}{2} \delta^2 s (1 - \ln 2) \mp \frac{1}{6} \delta^3 s^{3/2} \left(1 - \frac{1}{2} \ln 2\right) - \frac{1}{24} \delta^4 s^2 + \mathcal{O}(\delta^5), \quad (\text{C.39})$$

$$\ln z_{\pm} = -\ln 2 \pm \delta s^{1/2} - \frac{1}{2} \delta^2 s \pm \frac{1}{12} \delta^3 s^{3/2} + \mathcal{O}(\delta^5) \quad (\text{C.40})$$

が得られる. したがって $g(z_{\pm})$ に対して

$$g(z_{\pm}) = (\ln 2)^2 + \frac{\pi^2}{12} + \delta^2 s \ln 2 \mp \frac{2}{3} \delta^3 s^{3/2} + \frac{1}{4} \delta^4 s^2 + \mathcal{O}(\delta^5) \quad (\text{C.41})$$

を得る. よって, (C.19) および (C.20) から, a と b は

$$a^{3/2} = \frac{3}{4} (g(z_-) - g(z_+)) = \delta^3 s^{3/2} + \mathcal{O}(\delta^5), \quad (\text{C.42})$$

$$b = \frac{1}{2} (g(z_-) + g(z_+)) = (\ln 2)^2 + \frac{\pi^2}{12} + \delta^2 s \ln 2 + \frac{1}{4} \delta^4 s^2 + \mathcal{O}(\delta^5) \quad (\text{C.43})$$

より決めることができる. (C.42) より,

$$a^{1/2} = (a^{3/2})^{1/3} = \delta (s^{3/2})^{1/3} (1 + \mathcal{O}(\delta^2)) \quad (\text{C.44})$$

$$= \delta s^{1/2} e^{2\pi i k/3} (1 + \mathcal{O}(\delta^2)), \quad k \in \{-1, 0, 1\} \quad (\text{C.45})$$

を得る. さらに (C.17) より $m \in \{-1, 0, 1\}$ として

$$\begin{aligned} \omega(z) = & e^{2\pi i m/3} \left[\frac{3}{2} (g(z) - b) + \sqrt{\left\{ \frac{3}{2} (g(z) - b) \right\}^2 - a^3} \right]^{1/3} \\ & + a e^{-2\pi i m/3} \left[\frac{3}{2} (g(z) - b) + \sqrt{\left\{ \frac{3}{2} (g(z) - b) \right\}^2 - a^3} \right]^{-1/3} \end{aligned} \quad (\text{C.46})$$

を得る. ここで, (C.46) の解のうち, $m = 1$ に対するものを選ぶことにする. すると, (C.41), (C.42), (C.43) および $(-1) = e^{-i\pi}$ を用いることで, $\omega(z_{\pm})$ に対する展開

$$\omega(z_{\pm}) = \pm \delta (s^{3/2})^{1/3} (1 + \mathcal{O}(\delta)) \quad (\text{C.47})$$

を得るが、これは $\omega(z_{\pm}) = \pm a^{1/2}$ の仮定と整合している。 $m = 1$ の場合と同様に、 $m = -1$ の選択も前述の仮定と整合する。 他方、 $m = 0$ は整合しない。 続いて、

$$h(z) = \text{Li}_2(z) - (\ln z)^2/2 - 2 \ln 2 \ln z - (\ln 2)^2 - \pi^2/12 \quad (\text{C.48})$$

とおき、 $\delta \sim 0$ での写像 $w(z)$ について考える。 (C.36) と (C.43) から $g(z) - b = h(z) + \mathcal{O}(\delta^2)$ が得られる。 また、 (C.42) より $a = \mathcal{O}(\delta^2)$ を得る。 したがって、 $m = 1$ とおいた (C.46) から、

$$\omega(z) = e^{2\pi i/3} (3h(z))^{1/3} + \mathcal{O}(\delta^2) \quad (\text{C.49})$$

を得る。 ここで $y > 0$ とおく。 $y \sim \infty$ において

$$\ln(\rho \pm iy) \sim \ln y \pm \frac{i\pi}{2} \quad (\text{C.50})$$

および

$$\text{Li}_2(\rho \pm iy) \sim -\frac{1}{2}(\ln y)^2 \mp \frac{i\pi}{2} \ln y + i\pi \ln y \quad (\text{C.51})$$

を得るので、 $y \sim \infty$ において

$$h(\rho \pm iy) \sim -(\ln y)^2 + i\pi \ln y \mp i\pi \ln y \mp i\pi \ln 2 + \mathcal{O}(\delta^2) \quad (\text{C.52})$$

が得られる。 (C.51) を得る際には、 (C.13) を用いる。 したがって、 (C.49) および (C.52) から、 積分路 $C = \{\rho + iy : -\infty \leq y \leq \infty\}$ は、 $\infty e^{i\pi}$ を始点とし $\infty e^{i\pi/3}$ を終点とする積分路 C'' に写されることがわかる。 $f(z_{\pm})$ と $\tilde{f}(z_{\pm})$ に対する展開は

$$f(z_{\pm}) = 2^{3/2} \mp 2^{1/2} \delta s^{1/2} + 7 \cdot 2^{-3/2} \delta^2 s + \mathcal{O}(\delta^3), \quad (\text{C.53})$$

$$\tilde{f}(z_{\pm}) = 2^{1/2} \pm 2^{-1/2} \delta s^{1/2} + 3 \cdot 2^{-5/2} \delta^2 s + \mathcal{O}(\delta^3) \quad (\text{C.54})$$

で与えられる。 $(dz/dw)_{z=z_{\pm}}$ は

$$\left(\frac{dz}{dw}\right)_{z=z_{\pm}} = \frac{\left(\frac{dz}{d\delta}\right)_{z=z_{\pm}}}{\left(\frac{dw}{d\delta}\right)_{z=z_{\pm}}} = \frac{\frac{dz_{\pm}}{d\delta}}{\pm \frac{d\alpha^{1/2}}{d\delta}} = \frac{1}{2} e^{-2\pi i k/3} + \mathcal{O}(\delta^2) \quad (\text{C.55})$$

より得られる。 よって、 (C.23) と (C.24) から

$$p_0 = 2^{1/2} e^{-2\pi i k/3} + \mathcal{O}(\delta^2), \quad (\text{C.56})$$

$$q_0 = -2^{-1/2} e^{-4\pi i k/3} + \mathcal{O}(\delta^2) \quad (\text{C.57})$$

を得る．以上より，(C.33)における積分に対し，以下の展開を得る；

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2\pi i} \int_{\rho-i\infty}^{\rho+i\infty} f(z) \exp\left(\frac{1}{\delta^3} g(z)\right) dz \\
&= e^{b/\delta^3} \left\{ \frac{p_0 \delta}{2\pi i} \int_{\infty e^{i\pi}}^{\infty e^{i\pi/3}} \exp\left(\frac{\omega'^3}{3} - a\delta^{-2}\omega'\right) d\omega' \right. \\
&\quad \left. + \frac{q_0 \delta^2}{2\pi i} \int_{\infty e^{i\pi}}^{\infty e^{i\pi/3}} \omega' \exp\left(\frac{\omega'^3}{3} - a\delta^{-2}\omega'\right) d\omega' + \mathcal{O}(\delta^4) \right\} \\
&= e^{b/\delta^3} \left\{ \frac{2^{1/2} e^{-2\pi i k/3 + 2\pi i/3} \delta}{2\pi i} \int_{\infty e^{i\pi/3}}^{\infty e^{-i\pi/3}} \exp\left(\frac{\zeta^3}{3} - e^{4\pi i k/3 + 2\pi i/3} s \zeta\right) d\zeta \right. \\
&\quad \left. - \frac{2^{-1/2} e^{-4\pi i k/3 + 4\pi i/3} \delta^2}{2\pi i} \int_{\infty e^{i\pi/3}}^{\infty e^{-i\pi/3}} \zeta \exp\left(\frac{\zeta^3}{3} - e^{4\pi i k/3 + 2\pi i/3} s \zeta\right) d\zeta + \mathcal{O}(\delta^3) \right\} \\
&= e^{b/\delta^3} \left(-2^{1/2} e^{-2\pi i k/3 + 2\pi i/3} \delta \text{Ai}\left(e^{4\pi i k/3 + 2\pi i/3} s\right) \right. \\
&\quad \left. - 2^{-1/2} e^{-4\pi i k/3 + 4\pi i/3} \delta^2 \text{Ai}'\left(e^{4\pi i k/3 + 2\pi i/3} s\right) + \mathcal{O}(\delta^3) \right). \tag{C.58}
\end{aligned}$$

同様に，(C.34)における積分に対して

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2\pi i} \int_{\rho-i\infty}^{\rho+i\infty} \tilde{f}(z) \exp\left(\frac{1}{\delta^3} \tilde{g}(z)\right) dz \\
&= e^{b/\delta^3} \left\{ \frac{\tilde{p}_0 \delta}{2\pi i} \int_{\infty e^{i\pi}}^{\infty e^{i\pi/3}} \exp\left(\frac{\omega'^3}{3} - a\delta^{-2}\omega'\right) d\omega' \right. \\
&\quad \left. + \frac{\tilde{q}_0 \delta^2}{2\pi i} \int_{\infty e^{i\pi}}^{\infty e^{i\pi/3}} \omega' \exp\left(\frac{\omega'^3}{3} - a\delta^{-2}\omega'\right) d\omega' + \mathcal{O}(\delta^4) \right\} \\
&= e^{b/\delta^3} \left(-2^{-1/2} e^{-2\pi i k/3 + 2\pi i/3} \delta \text{Ai}\left(e^{4\pi i k/3 + 2\pi i/3} s\right) \right. \\
&\quad \left. + 2^{-3/2} e^{-4\pi i k/3 + 4\pi i/3} \delta^2 \text{Ai}'\left(e^{4\pi i k/3 + 2\pi i/3} s\right) + \mathcal{O}(\delta^3) \right) \tag{C.59}
\end{aligned}$$

が得られる．ここで

$$\tilde{p}_0 = \frac{1}{2} \left\{ \tilde{f}(z_+) \left(\frac{dz}{dw}\right)_{z=z_+} + \tilde{f}(z_-) \left(\frac{dz}{dw}\right)_{z=z_-} \right\} = 2^{-1/2} e^{-2\pi i k/3} + \mathcal{O}(\delta^2), \tag{C.60}$$

$$\tilde{q}_0 = \frac{1}{2a^{1/2}} \left\{ \tilde{f}(z_+) \left(\frac{dz}{dw}\right)_{z=z_+} - \tilde{f}(z_-) \left(\frac{dz}{dw}\right)_{z=z_-} \right\} = 2^{-3/2} e^{-4\pi i k/3} + \mathcal{O}(\delta^2) \tag{C.61}$$

である．よって，(C.58) および (C.59) において $k=1$ ととれば，(C.43) で与えられる b とともに Lemma を得る． ■

ここで、さらに (C.30), (C.31) に対し (B.2) を用いれば,

$$A_q(q^{1/2}x) = -2\sqrt{\frac{\pi}{\delta}} \exp\left\{-\frac{\pi^2}{12\delta^3} + \frac{(\ln 2)^2}{\delta^3} + \frac{s \ln 2}{\delta} + \frac{1}{4}\delta s^2\right\} \left(\text{Ai}(s) + \frac{\delta}{2}\text{Ai}'(s) + \mathcal{O}(\delta^2)\right), \quad (\text{C.62})$$

$$A_q(q^{-1/2}x) = -\sqrt{\frac{\pi}{\delta}} \exp\left\{-\frac{\pi^2}{12\delta^3} + \frac{(\ln 2)^2}{\delta^3} + \frac{s \ln 2}{\delta} + \frac{1}{4}\delta s^2\right\} \left(\text{Ai}(s) - \frac{\delta}{2}\text{Ai}'(s) + \mathcal{O}(\delta^2)\right) \quad (\text{C.63})$$

を得る.

C.2 (3.2.10) の証明

$q = e^{-\delta^3}$, $\delta > 0$, $x = e^{-\delta^2 s}/4$, $y = e^{-\delta^2 r}/4$, $(s, r) \in \mathbb{R}^2$ の置き換えとともに, (C.62) と (C.63) を (3.2.1) へ適用するとただちに

$$\begin{aligned} & A_q(q^{1/2}x) A_q(q^{-1/2}y) - A_q(q^{1/2}y) A_q(q^{-1/2}x) \\ &= -2\pi \exp\left\{-\frac{\pi^2}{6\delta^3} + \frac{2(\ln 2)^2}{\delta^3} + \frac{(s+r) \ln 2}{\delta} + \frac{\delta(s^2+r^2)}{4}\right\} (\text{Ai}(s)\text{Ai}'(r) - \text{Ai}'(s)\text{Ai}(r)) \\ & \quad \times (1 + \mathcal{O}(\delta)) \quad (\text{C.64}) \end{aligned}$$

を得る. ここで, 発散する因子 $\exp\{-\pi^2/6\delta^3 + 2(\ln 2)^2/\delta^3 + (s+r) \ln 2/\delta\}$ はまた (B.2) からの因子と完全に相殺し, 次を得る:

$$\frac{\delta^2}{4} K^{A_q} \left(\frac{1}{4} e^{-\delta^2 s}, \frac{1}{4} e^{-\delta^2 r} \right) = \frac{\text{Ai}(s) \text{Ai}'(r) - \text{Ai}(r) \text{Ai}'(s)}{s-r} \times (1 + \mathcal{O}(\delta)). \quad (\text{C.65})$$

よって $\delta \rightarrow 0$ の極限で (3.2.10) を得る. ■

参考文献

- [1] G. E. Andrews, R. Askey, and R. Roy, *Special functions* (Cambridge University Press, 1999).
- [2] G. E. Andrews and B. C. Berndt, *Ramanujan's lost notebook: part I* (Springer, 2005).
- [3] X. Arsiwalla, R. Boels, M. Mariño, and A. Sinkovics, Phase transitions in q -deformed 2D Yang-Mills theory and topological strings, *Phys. Rev. D* **73**, 026005 (2006).
- [4] J. Baik and T. M. Suidan, Random matrix central limit theorems for nonintersecting random walks, *Ann. Probab.* **35**, 1807-1834 (2007).
- [5] P. Biane, P. Bougerol, and N. O'Connell, Littelmann paths and Brownian paths, *Duke Math. J.* **130**, 127-167 (2005).
- [6] C. Chester, B. Friedman, and F. Ursell, An extension of the method of steepest descents, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **53**, 599-611 (1957).
- [7] T. S. Chihara, *An introduction to orthogonal polynomials* (Gordon and Breach, 1978).
- [8] A. B. O. Daalhuis, Asymptotic expansions for q -gamma, q -exponential, and q -Bessel functions, *J. Math. Anal. Appl.* **186**, 896-913 (1994).
- [9] S. de Haro and M. Tierz, Discrete and oscillatory matrix models in Chern-Simons theory, *Nucl. Phys. B* **731**, 225-241 (2005).
- [10] Y. Dolivet and M. Tierz, Chern-Simons matrix models and Stieltjes-Wigert polynomials, *J. Math. Phys.* **48**, 023507 (2007).
- [11] P. J. Forrester, The spectrum edge of random matrix ensembles, *Nucl. Phys. B* **402**, 709-728 (1993).
- [12] P. J. Forrester, *Log-gases and random matrices* (Princeton University Press, 2010).
- [13] T. Hamamoto, K. Kajiwara, and N. S. Witte, Hypergeometric solutions to the q -Painlevé equation of type $(A_1 + A_1')^{(1)}$, *Int. Math. Res. Not.* **2006**, 84619 (2006).
- [14] M. Ismail, Asymptotics of q -orthogonal polynomials and a q -Airy function, *Int. Math. Res. Not.* **2005**, 1063-1088 (2005).

- [15] M. E. H. Ismail and R. Zhang, Chaotic and periodic asymptotics for q -orthogonal polynomials, *Int. Math. Res. Not.* **2006**, 83274 (2006).
- [16] M. E. H. Ismail and R. Zhang, Scaled asymptotics for q -orthogonal polynomials, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **344**, 71-75 (2007).
- [17] N. Joshi and Y. Shi, Exact solutions of a q -discrete second Painlevé equation from its iso-monodromy deformation problem: I. Rational solutions, *Proc. R. Soc. A* **467**, 3443-3468 (2011).
- [18] N. Joshi and Y. Shi, Exact solutions of a q -discrete second Painlevé equation from its iso-monodromy deformation problem. II. Hypergeometric solutions, *Proc. R. Soc. A* **468**, 3247-3264 (2012).
- [19] S. Karlin and J. McGregor, Coincidence probabilities, *Pac. J. Math.* **9**, 1141-1164 (1959).
- [20] R. Koekoek and R. Swarttouw, The Askey-scheme of hypergeometric orthogonal polynomials and its q -analogue, arXiv:math.CA/9602214.
- [21] M. Mariño, Les Houches lectures on matrix models and topological strings, arXiv:hep-th/0410165.
- [22] M. Mariño, Chern-Simons theory, matrix integrals, and perturbative three-manifold invariants, *Commun. Math. Phys.* **253**, 25-49 (2005).
- [23] M. Mariño, *Chern-Simons theory, matrix models and topological strings* (Oxford University Press, 2005).
- [24] R. J. McIntosh, Some asymptotic formulae for q -shifted factorials, *Ramanujan J.* **3**, 205-214 (1999).
- [25] M. L. Mehta, *Random matrices*, 3rd edn. (Elsevier, 2004).
- [26] N. I. Muskhelishvili, *Singular integral equations: boundary problems of function theory and their application to mathematical physics* (P. Noordhoff, 1953).
- [27] T. Nagao, *Random matrices: an introduction* (University of Tokyo Press, 2005).
- [28] M. Noumi, *Painlevé equations through symmetry* (American Mathematical Society, 2004).
- [29] M. Plancherel and W. Rotach, Sur les valeurs asymptotiques des polynomes d'Hermite $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2} d^n e^{-x^2/2} / dx^n$, *Comment. Math. Helv.* **1**, 227-254 (1929).
- [30] T. Prellberg, Uniform q -series asymptotics for staircase polygons, *J. Phys. A: Math. Gen.* **28**, 1289-1304 (1995).

- [31] T. Shirai and Y. Takahashi, Random point fields associated with certain Fredholm determinants I: fermion, Poisson and boson point processes, *J. Funct. Anal.* **205**, 414-463 (2003).
- [32] A. Soshnikov, Determinantal random point fields, *Russian Math. Surveys* **55**, 923-975 (2000).
- [33] G. Szegő, *Orthogonal polynomials*, 4th edn. (American Mathematical Society, 1981).
- [34] Y. Takahashi and M. Katori, Noncolliding Brownian motion with drift and time-dependent Stieltjes-Wigert determinantal point process, *J. Math. Phys.* **53**, 103305 (2012).
- [35] Y. Takahashi and M. Katori, Oscillatory matrix model in Chern-Simons theory and Jacobi-theta determinantal point process, arXiv:math-ph/1312.5848.
- [36] Y. Takahashi and M. Katori, in preparation.
- [37] M. Tierz, Soft matrix models and Chern-Simons partition functions, *Mod. Phys. Lett. A* **19**, 1365-1378 (2004).
- [38] C. A. Tracy and H. Widom, Level-spacing distributions and the Airy kernel, *Commun. Math. Phys.* **159**, 151-174 (1994).
- [39] O. Vallée and M. Soares, *Airy functions and applications to physics* (Imperial College Press, 2004).
- [40] E. T. Whittaker and G. N. Watson, *A course of modern analysis*, 4th edn. (Cambridge University Press, 1969).
- [41] Z. Wang and R. Wong, Uniform asymptotics of the Stieltjes-Wigert polynomials via the Riemann-Hilbert approach, *J. Math. Pures Appl.* **85**, 698-718 (2006).
- [42] R. Wong, *Asymptotic Approximations of Integrals* (Academic Press, 1989).