グリーン関数 （Green function） 遅延と先進について

香取研究室発表担当者
添田　賢瑛

以前紹介したグリーン関数はジョージ・グリーンによって導入され、本来は微分方程式や偏微分方程式の解法として用いられるものを量子力学に拡張したものであった。

$$G(\overrightarrow{x_1} - \overrightarrow{x_0}) = \sum_{t_1=t_0}^{\infty} P(\overrightarrow{x_1}, t_1; \overrightarrow{x_0}, t_0)$$

左辺は　$t_1 = t_0 \sim \infty$　までの確率の総和＝*延べ回数*

右辺は　t_0で出発したランダムウォークがt_1で$\overrightarrow{x_1}$にいる*確立の総和*

今回は『遅延グリーン(retarded Green's function)』と『*先進グリーン関数*　(*advanced Green's function*)』について証明していきたいと思います。

遅延グリーン関数　$G_{ret}(r,t)$ とは

時刻 t に関するグリーン関数 $G(t;t')$ を考える時
$t < t'$ で $G(t;t') = 0$ となるもの

先進グリーン関数　$G_{adv}(r,t)$ とは

時刻 t に関するグリーン関数 $G(t;t')$ を考える時
$t > t'$ で $G(t;t') = 0$ となるもの

波動方程式

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\varphi(\vec{r},t) = -\rho(\vec{r},t)$$

ここで、

$$\nabla^2 \mathrm{G}(x,y{:}\,x',y') = -\delta(x-x')\delta(y-y')$$

より

上記波動方程式を満たすグリーン関数

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)G(\vec{r},t{:}\,\vec{r}',t') = -\delta(\vec{r}-\vec{r}')\delta(t-t')$$

と定義される。

今回は時間が方程式に入っているため**『因果律』**を考慮する必要がある。

因果律・・・結果は原因より時間的に先行することがなく、時刻tで起こる現象の原因はその時刻tよりも前の時刻にならなければならない。

また、グリーン関数G$(\vec{r}, t{:}\, \vec{r}', t')$を時空点$r', t'$の単一源作用が時空点 r , t に及ぼす 影響であるとすると、次の条件を満たさなければならない。

G$(\vec{r}, t{:}\, \vec{r}', t')$= 0 $(t < t')$…… 『遅延条件解』

G$(\vec{r}, t{:}\, \vec{r}', t')$= 0 $(t > 0)$…… 『先進条件解』

遅延グリーン関数を満たすための遅延条件解を求めることにする。

準備としてG$(\vec{r}, t{:}\, \vec{r}', t')$ を$\vec{r} - \vec{r}', t - t'$

のみの関数と仮定する。 $\vec{r}'$を位置座標の原点に取り、それに合わせ時間tも定義すると、$(\vec{r}' = 0, t' = 0)$

G$(\vec{r}, t{:}\, \vec{r}', t')$ $\{= G(\vec{r}, t)\}$ $= g(\vec{r} - \vec{r}', t - t') = g(\vec{r}, t)$

と書き直せる。

まず、遅延条件解を求めるためにtについてのフーリエ変換(時間、空間座標が変数の関数を周波数の関数に変換)をすることにする

参考

フーリエ変換：$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t} dt$

逆フーリエ変換：$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{+i\omega t}\, d\omega$

tについてのフーリエ変換したグリーン関数を

$\hat{g}(\vec{r}, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\vec{r}, t)\, e^{-i\omega t} dt$　と定義する。

前述した波動方程式を満たすグリーン関数は

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) g(\vec{r}, t) = -\delta(\vec{r})\delta(t)$$

と表記し直し、両辺に$e^{-i\omega t}$を掛け、tで積分する。

右辺は$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t^2}\right)g\left(\vec{r},t\right)\cdot e^{-i\omega t}$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\nabla^2\cdot g(\vec{r},t)\cdot e^{-i\omega t}dt-\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{C^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}g(\vec{r},t)\cdot e^{-i\omega t}\,dt$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\nabla^2\cdot g(\vec{r},t)\cdot e^{-i\omega t}dt-\frac{1}{c^2}\int_{-\infty}^{\infty}g(\vec{r},t)\cdot(-\omega^2)\,e^{-i\omega t}dt$$

$$=\left(\nabla^2+\frac{\omega^2}{c^2}\right)\int_{-\infty}^{\infty}g(\vec{r},t)\cdot e^{-i\omega t}dt$$

$\hat{g}(\vec{r},\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}g(\vec{r},t)\cdot e^{-i\omega t}dt$ と定義したので

$=\left(\nabla^2+\frac{\omega^2}{c^2}\right)\hat{g}(\vec{r},\omega)$ と書き表せる。

左辺は

$$-\int_{-\infty}^{\infty}dt\delta(\vec{r})\,\delta(t)\cdot e^{-i\omega t}=-\delta(\vec{r})\int_{-\infty}^{\infty}dt\delta(t)\cdot e^{-i\omega t}$$

$$=-\delta(\vec{r})$$

※$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\cdot e^{-ikx}dx=e^0=1$ ……デルタ関数のフーリエ変換

以上より、

$$\left(\nabla^2+\frac{\omega^2}{c^2}\right)\hat{g}(\vec{r},\omega)=-\delta(\vec{r})$$

また、$k = {}^{\omega}/_{c}$ とすると

$$(\nabla^2+k^2)\hat{g}(\vec{r},\omega)=-\delta(\vec{r})$$

この方程式の解で無限遠でグリーン関数が0となる条件

$\hat{G}(r,\omega)=\frac{1}{4\pi r}e^{i\frac{\omega}{c}r}$　・・・・・外向き球面波

(今村勤（１９７８）『物理とグリーン関数』p.36_40)

であるから、フーリエ逆変換すると、求めたいグリーン関数が得られる。

$$g(r,t)=\int_{-\infty}^{\infty}\hat{g}(r,\omega)e^{-i\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{4\pi r}e^{\left(i\omega\frac{r}{c}+(-i\omega t)\right)}d\omega$$

$$=\frac{1}{4\pi r}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)}d\omega$$

となる。

ここで、δ関数の公式

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm ik(x-x')}\,dk = \delta(x-x')$$　を用いると

$$g(r,t) = \frac{1}{4\pi r}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)}d\omega = \frac{1}{4\pi r}\delta\left(t-\frac{r}{c}\right)$$

この関係式より、$\delta\left(t-\frac{r}{c}\right) = 1 \qquad \left(t=\frac{r}{c}\right)$

$$= 0 \qquad \left(t \neq \frac{r}{c}\right)$$

$t < 0$に対してはδ関数は0となる。

以上より、$g(r,t) = \frac{1}{4\pi r}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)}d\omega$

は　遅延条件$G(\vec{r},t:\vec{r}',t')=o\ (t<t')$を満たす。

これを前述した『遅延グリーン』$\boldsymbol{G_{ret}(r,t)}$と表す。

$$\boldsymbol{G_{ret}(r,t) = \frac{1}{4\pi r}\delta\left(t-\frac{r}{c}\right)}$$

さて、次は**先進グリーン関数**$\boldsymbol{G_{adv}(r,t)}$を見てみることにする。

先進条件は　$g(\vec{r},t:\vec{r}',t')=0$ $(t>0)$　であったので、

無限遠で0となる条件は$(\nabla^2+k^2)g(\vec{r},\omega)=-\delta(\vec{r})$の解として

$$\hat{g}(r,\omega)=\frac{1}{4\pi r}e^{-i\frac{\omega}{c}r}$$

を用い、遅延グリーン関数と同様の計算を行うと

$\boldsymbol{G_{adv}(r,t)=\frac{1}{4\pi r}\delta\left(t+\frac{r}{c}\right)}$　が得られる。

r, c は両方とも正の値を取るので　$t>0$ に対しては

δ関数は0となるため、先進条件を満たす。

これを前述した『先進グリーン』$\boldsymbol{G_{adv}(r,t)}$と表す。

$$\boldsymbol{G_{adv}(r,t)=\frac{1}{4\pi r}\delta\left(t+\frac{r}{c}\right)}$$

以上よりまとめると

遅延グリーン関数： $G_{ret}(r,t) = \frac{1}{4\pi r}\delta\left(t - \frac{r}{c}\right)$

先進グリーン関数: $G_{adv}(r,t) = \frac{1}{4\pi r}\delta\left(t + \frac{r}{c}\right)$

となる。

上記から見てわかるように
$G_{ret}(r,t)$は時間の『過去』から『未来』へ行く時間順序
$G_{adv}(r,t)$は時間の『未来』から『過去』へ行く時間順序
を表していることになる