vicious walkersと半標準ヤング盤シューア関数への対応

中央大学　理工学部
物理学科　香取研究室

佐藤　史仁　山﨑　純一

2008年3月

目次

第 1 章　はじめに

vicious walkers とは，同じサイトを2つのウォーカーが占有することのないランダムウォーカーのことである．

ここでは下図のように，1次元で単位時間あたりに上に一歩進むか，またはその場に留まったままだとする vicious walkers が 1 列に並んでスタートする場合を考える．ただし，$t=t_0$ での初期配置は下から順にひとつずつ詰まっている状態であるとする．

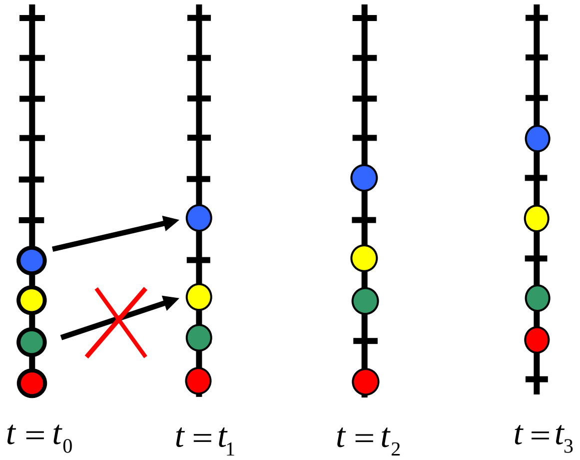


図 1.1

時間経過後，この配位数はどうなるだろうか．　ランダムウォーカーの数が少なく短時間の場合は数え上げることは容易だが，数を増やし長時間の場合数え上げることは困難となる．そこで vicious walkers の配位数と半標準ヤング盤が対応することを利用すれば、半標準ヤング盤の総数を与えるシューア関数の特殊値を考えることにより vicious walkers の配位数が求まることになる．

ここからは半標準ヤング盤の説明と，シューア関数のいくつかの具体的な表現を見ていくことにする．

第 2 章　半標準ヤング盤

2.1　分割

$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq 0$　なる整数のセット$(\lambda_1, \lambda_2, \cdots)$を分割という.
また$\sum_i \lambda_i$を　$|\lambda|$　と書き，$\lambda_i > 0$なるλ_iの数をλの長さという.
(2,2,1), (2,2,2,0), (2,2,1,0,0)などの尾についている0だけ違うものは区別しないで
同じものとする.

2.2　ヤング図形

分割$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots)$に対応させて，1行目 に水平に$\lambda_1$個の箱を2行目に
水平にλ_2個の箱等を順次左端を あわせて並べたものを，ヤング図形といい，
ヤング図形の形がλで あるという.
また図形を対角線に関 して反転させたものを，もとの図形の共役と いい，λ'で表す.
図2.1にその例を示す.

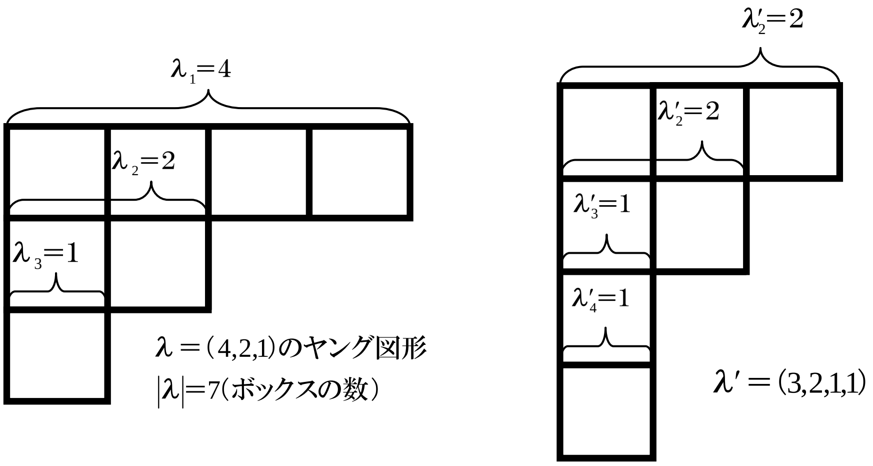


図 2.1　ヤング図形の例

2.3 半標準ヤング盤

ヤング図形に対して以下の規則に従って正整数を挿入したものを半標準ヤング盤という.

1. 水平方向に隣り合うペアは右側の数字(j)が左側の数字(i)以上である $i \le j$
2. 垂直方向に隣り合うペアは下側の数字(j)が上側の数字(i)より大きい $i < j$

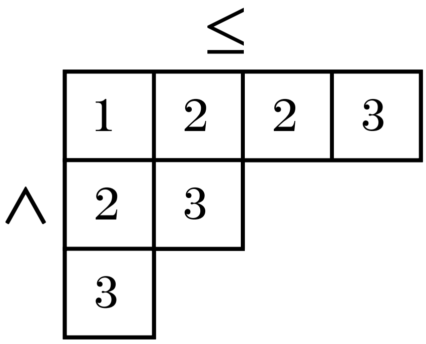


図 2.2　半標準ヤング盤の例

また半標準ヤング盤Tに対し，1がμ_1個、2がμ_2個、・・・と入っているとき，$\mu=(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_l)$をTの重みという. もちろん同じ形$\lambda$で，重み$\mu$をもつ半標準ヤング盤がいくつか存在する場合もある. そこで

$K_{\lambda,\mu}$ = 共通のλ，μを持つ半標準ヤング盤の総数

と書き，コストカ数と呼ぶ.

2.4 vicious walkers と半標準ヤング盤の対応

次にvicious walkersと半標準ヤング盤がどのように対応しているのかを示す. ここで，具体例として下図を考える.

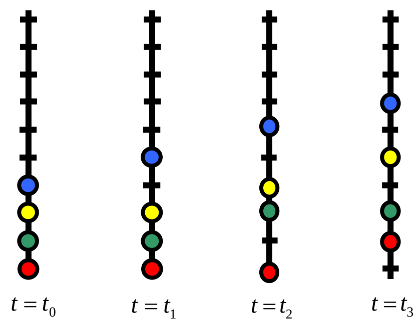


図 2.3

初期時刻$t=t_0$でランダムウォーカーが下から順に詰まっている状態だとする.
まず，一番上のランダムウォーカーが時刻$t=t_1$で初めて移動したとする.
そのとき，これに対応して1と書いた箱を用意する.
一番上のランダムウォーカーが次に移動した時刻が$t=t_2$としたら、これに対応して2と書いた箱を先ほどの箱の下につける.
同様に動いた時刻を書いた箱を続けて下につけていく.

二番目のランダムウォーカーについては、一番目のランダムウォーカーに対応させた箱の右側の列に，動いた時刻を書いた箱を縦に並べていく.

以下三番目，四番目についても同様の操作をしていく.

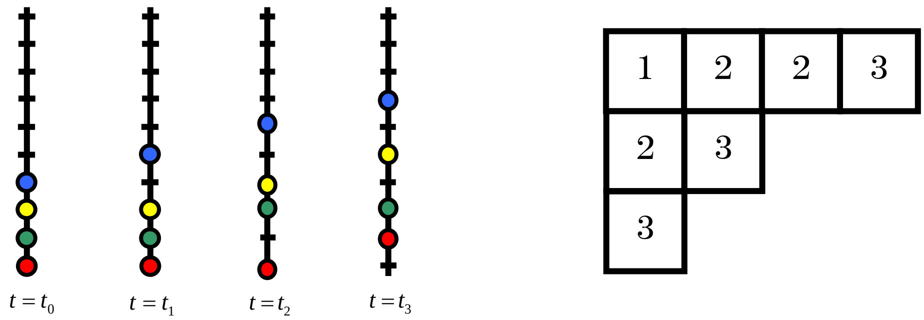


図 2.4

このようにすると一番上のランダムウォーカーが進んだサイトの数はλ'_1に対応し，二番目のランダムウォーカーが進んだサイトの数がλ'_2に対応する. 三番目，四番目についても同様である.
つまり今考えているようなvicious　walkersの最終位置はヤング図形の形に対応し，それぞれのランダムウォーカーがどの時刻で動いたかという情報を含んだものが半標準ヤング盤であることがわかる.
よってn　vicious　waklerのNステップ後の可能な配置の数は，最終位置によりその形が決まる盤の総数に等しい. 半標準ヤング盤の数え上げには、その形に対応して定義されるシューア関数が役に立つことが知られている.　次章からはシューア関数について説明していく.

第 3 章　シューア関数

3.1　シューア関数の定義式

シューア関数を表す式は以下のようなものがある.

・モノミアル対象関数を用いた定義式

$$s_\lambda(\mathrm{x}) = \sum_\mu K_{\lambda,\mu} m_\mu(\mathrm{x}) \qquad K_{\lambda,\mu}\text{:コストカ数} \qquad m_\mu(\mathrm{x})\text{:モノミアル対象関数} \tag{3.1}$$

・n変数反対称関数を用いた定義式

$$s_\lambda(\mathrm{x}) = \frac{a_{\lambda+\delta}(\mathrm{x})}{a_\delta(\mathrm{x})} \qquad a_\lambda(\mathrm{x}):\text{n変数反対称関数} \tag{3.2}$$

・完全対称式，基本対称式を用いた定義式

$$\begin{aligned} s_\lambda(\mathrm{x}) &= \det\left(h_{\lambda_i - i + j}(\mathrm{x})\right)_{1\le i,j\le \lambda'_1} && h_r:\text{完全対称式} \\ &= \det\left(e_{\lambda'_i - i + j}(\mathrm{x})\right)_{1\le i,j\le \lambda_1} && e_r:\text{基本対称式} \\ & r<0\text{なら} \quad h_r = e_r = 0 \end{aligned} \tag{3.3}$$

・半標準ヤング盤を用いた定義式

$$s_\lambda(\mathrm{x}) = \sum_{\text{半標準盤}} \mathrm{x}^\alpha \qquad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots) \tag{3.4}$$

次にこれらを順に説明していく.

3.2　モノミアル対象関数を用いたシューア関数の表示

$$\bullet\, s_\lambda(\mathrm{x}) = \sum_\mu K_{\lambda,\mu} m_\mu(\mathrm{x})$$

$m_\mu(\mathrm{x})$はモノミアル対称関数とよばれるもので、分割λに対してある置換を行った像αについてx^αの和をとったものをいう.

式で表すと

$$m_\lambda(\mathrm{x}) = \sum_{\text{異なる}\alpha} \mathrm{x}^\alpha$$

となる.

いくつか具体例を下記にあげることにする.

例1　$\lambda = (2,1,0)$で三変数のとき

$$m_\lambda = x_1^2 x_2 + x_1^2 x_3 + x_2^2 x_1 + x_2^2 x_3 + x_3^2 x_1 + x_3^2 x_2$$

例2　$\lambda = (1,1,1)$で三変数のとき

$$m_\lambda = x_1 x_2 x_3$$

次に、具体的にs_λを計算してみよう

$\lambda = (2,1,0)$で三変数の場合

$$\begin{aligned} s_\lambda(\mathrm{x}) &= K_{(2,1)(1,1,1)} m_{(1,1,1)}(\mathrm{x}) + K_{(2,1)(2,1,0)} m_{(2,1,0)}(\mathrm{x}) \\ &= 2x_1x_2x_3 + x_1^2 x_2 + x_1^2 x_3 + x_2^2 x_1 + x_2^2 x_3 + x_3^2 x_1 + x_3^2 x_2 \end{aligned} \qquad (3.5)$$

これを半標準ヤング盤で表すと次のようになる.

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array} \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array} \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 1 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array} \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 1 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array} \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 2 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array} \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array} \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 3 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array}$$

図 3.1

xの添え字が半標準ヤング盤内の数字に対応し，xの肩の数字がその数字が何個あるかに対応している. また同じ形λで，重みμをもつ半標準ヤング盤の数がコストカ数であるのだが，それについても図3.1よりよくわかるだろう.

3.3　反対称関数を用いたシューア関数の導入

反対称関数を用いたシューア関数の定義は(3.2)式で与えられるが $a_\lambda(\mathrm{x})$ については次のように定義する.

$$a_\lambda(\mathrm{x}) = \begin{vmatrix} x_1^{\lambda_1} & x_1^{\lambda_2} & \cdots & x_1^{\lambda_n} \\ x_2^{\lambda_1} & x_2^{\lambda_2} & \cdots & x_2^{\lambda_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n^{\lambda_1} & x_n^{\lambda_2} & \cdots & x_n^{\lambda_n} \end{vmatrix}$$

これは行の入れ替え，つまり変数の入れ替えを行うと行列式の性質より符号が変わるn変数の反対称関数である．

ここで　$\delta = (n-1, n-2, \cdots, 0)$ としたとき

$$a_\delta(\mathrm{x}) = \begin{vmatrix} x_1^{n-1} & x_1^{n-2} & \cdots & 1 \\ x_2^{n-1} & x_2^{n-2} & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n^{n-1} & x_n^{n-2} & \cdots & 1 \end{vmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_i - x_j) \qquad (3.6)$$

$a_\delta(\mathrm{x})$ をヴァンデルモンドの行列式といい，差積で表すことができる．

(3.3)式の証明を以下に記す．

（証明）

$$a_\delta(\mathrm{x}) = \begin{vmatrix} x_1^{n-1} & x_1^{n-2} & \cdots & 1 \\ x_2^{n-1} & x_2^{n-2} & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n^{n-1} & x_n^{n-2} & \cdots & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & x_1^{n-2} & \cdots & x_1 & 1 \\ x_2^{n-2}(x_2 - x_1) & x_2^{n-2} & \cdots & x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_n^{n-2}(x_n - x_1) & x_n^{n-2} & \cdots & x_n & 1 \end{vmatrix}$$

第2列に $-x_1$ を掛けたものを第1列に加える

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & x_1 & 1 \\ x_2^{n-2}(x_2 - x_1) & x_2^{n-3}(x_2 - x_1) & \cdots & x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_n^{n-2}(x_n - x_1) & x_n^{n-3}(x_n - x_1) & \cdots & x_n & 1 \end{vmatrix}$$

第3列に $-x_1$ を掛けたものを第2列に加える

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ x_2^{n-2}(x_2 - x_1) & x_2^{n-3}(x_2 - x_1) & \cdots & x_2 - x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_n^{n-2}(x_n - x_1) & x_n^{n-3}(x_n - x_1) & \cdots & x_n - x_1 & 1 \end{vmatrix}$$

以下順次繰り返す

$$= (-1)^{1+n} \begin{vmatrix} x_2^{n-2}(x_2 - x_1) & x_2^{n-3}(x_2 - x_1) & \cdots & (x_2 - x_1) \\ x_3^{n-2}(x_3 - x_1) & x_3^{n-3}(x_3 - x_1) & \cdots & (x_3 - x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n^{n-2}(x_n - x_1) & x_n^{n-3}(x_n - x_1) & \cdots & (x_n - x_1) \end{vmatrix}$$

第1行で余因子展開する

$$= (x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \cdots (x_1 - x_n) \begin{vmatrix} x_2^{n-2} & x_2^{n-3} & \cdots & 1 \\ x_3^{n-2} & x_3^{n-3} & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n^{n-2} & x_n^{n-3} & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

それぞれの行から共通因子を括りだす

$$
\begin{aligned}
&\vdots \\
&= (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)\cdots\cdots(x_{n-2} - x_n)\begin{vmatrix} x_{n-1} & 1 \\ x_n & 1 \end{vmatrix} \\
&= (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(x_1 - x_n) \\
&\qquad\qquad (x_2 - x_3)(x_2 - x_4)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(x_2 - x_n) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \ddots \qquad\qquad\qquad \vdots \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \ddots \qquad\qquad\quad \vdots \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (x_{n-2} - x_{n-1})(x_{n-2} - x_n) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (x_{n-1} - x_n) \\
&= \prod_{1 \le i < j \le n} (x_i - x_j)
\end{aligned}
$$

以下$x_2, x_3, x_4, \cdots\cdots, x_n$についても，$x_1$と同様な操作をしていく

証明終わり

ここで(3.2)式が，$\lambda = (2,1,0)$で3変数のときの具体的な計算がどうなるかみてみる．

$\lambda = (2,1,0)$なので$\delta = (2,1,0)$，$\lambda + \delta = (4,2,0)$である． よって$a_\delta(\mathrm{x})$と$a_{\lambda+\delta}(\mathrm{x})$はそれぞれ

$$
a_{\lambda+\delta}(\mathrm{x}) = \begin{vmatrix} x_1^4 & x_1^2 & 1 \\ x_2^4 & x_2^2 & 1 \\ x_3^4 & x_3^2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & x_1^2 & 1 \\ x_2^2(x_2^2 - x_1^2) & x_2^2 & 1 \\ x_3^2(x_3^2 - x_1^2) & x_3^2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x_2^2(x_2^2 - x_1^2) & x_2^2 - x_1^2 & 1 \\ x_3^2(x_3^2 - x_1^2) & x_3^2 - x_1^2 & 1 \end{vmatrix}
$$

$$
= (x_2^2 - x_1^2)(x_3^2 - x_1^2)\begin{vmatrix} x_2^2 & 1 \\ x_3^2 & 1 \end{vmatrix} = (x_2^2 - x_1^2)(x_3^2 - x_1^2)(x_2^2 - x_3^2)
$$

$$
a_\delta(\mathrm{x}) = \begin{vmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \end{vmatrix} = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)
$$

となる．

これらより$s_\lambda(\mathrm{x})$は次のように計算される．

$$
\begin{aligned}
s_\lambda(\mathrm{x}) &= \frac{a_{\lambda+\delta}(\mathrm{x})}{a_\delta(\mathrm{x})} = \frac{a_{(4,2,0)}(\mathrm{x})}{a_{(2,1,0)}(\mathrm{x})} = \frac{(x_2^2 - x_1^2)(x_3^2 - x_1^2)(x_2^2 - x_3^2)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)} \\
&= (x_1 + x_2)(x_1 + x_3)(x_2 + x_3) \\
&= x_1^2 x_2 + x_1^2 x_3 + x_2^2 x_1 + x_2^2 x_3 + x_3^2 x_1 + x_3^2 x_2 + 2x_1 x_2 x_3
\end{aligned} \tag{3.7}
$$

これは(3.5)式の結果と一致する．

3.4 基本対称式と完全対称式によるシューア関数の表示

(3.3)式はヤコビ・トルーディの公式という.

3.4.1 基本対称式と完全対称式

(1)基本対称式

基本対称式$e_r(\mathrm{x})$とは全て異なる変数からなる項の次数がどれも同じである多項式のことであり次式で示される.

$$e_r(\mathrm{x}) = \sum_{1\le i_1<i_2\cdots<i_r\le n} x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_r}$$

具体例としては

$r=2 \quad n=3$ のとき

$$e_r(\mathrm{x}) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$$

nが変数の数でrがその変数から選び出す数となっていることがわかる. n変数からr個の変数を選び出すとき同じ変数を重複して選び出さないのが特徴.

また$e_0(\mathrm{x})=1$として生成母関数を

$$E(\mathrm{x},t) = \sum_{r=0}^{n} e_r t^r = \prod_{i=1}^{n}(1+x_i t)$$

と定義する.

$\sum_{r=0}^{n} e_r t^r = \prod_{i=1}^{n}(1+x_i t)$については次の様に示すことができる.

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{n}(1+x_i t) &= (1+x_1t)(1+x_2t)\cdots(1+x_nt)\\ &= 1+(x_1+x_2+\cdots+x_n)t+(x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_{n-1}x_n)t^2+\cdots+x_1x_2\cdots x_nt^n\\ &= e_0t^0+e_1t+e_2t^2+\cdots+e_nt^n\\ &= \sum_{r=0}^{n} e_r t^r\end{aligned}$$

(2)完全対称式

完全対称式とは,どの変数の積からできていてもいいがどの項も次数が同じである多項式のことであり次式のように示すことができる.

$$h_r(\mathrm{x}) = \sum_{\alpha}{}' \mathrm{x}^{\alpha}$$

ただし $0\le \alpha_j \le r \quad \sum_{j=1}^{n}\alpha_j = r$ となる条件で和をとる.

例として$r=2$　$n=3$　のときには

$$h_r = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$$

のようになる．nは変数の数でありrはその変数から選び出す数を表す．基本対称式と異なる点は　，変数を選び出すとき重複してもよい点である．

また$h_0(\mathrm{x})=1$として生成母関数を

$$H(\mathrm{x},t)a = \sum_{r=0}^{\infty} h_r t^r = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{(1-x_i t)}$$

と定義する．

$\sum_{r=0}^{\infty} h_r t^r = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{(1-x_i t)}$は次のように示せる．

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{(1-x_i t)} = \prod_{i=1}^{n} \sum_{\alpha_i=0}^{\infty} x_i^{\alpha_i} t^{\alpha_i}$$　（無限等比級数の和の公式またはテイラー展開による)

$$= \left(\sum_{\alpha_1=0}^{\infty} x_1^{\alpha_1} t^{\alpha_1}\right)\left(\sum_{\alpha_2=0}^{\infty} x_2^{\alpha_2} t^{\alpha_2}\right)\cdots\left(\sum_{\alpha_n=0}^{\infty} x_n^{\alpha_n} t^{\alpha_n}\right)$$

$$= \sum_{\alpha_1}^{\infty}\sum_{\alpha_2}^{\infty}\cdots\sum_{\alpha_n}^{\infty}\left(x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n}\right) t^{\sum_{j=1}^{n}\alpha_j}$$

$$= \sum_{\alpha_1}^{\infty}\sum_{\alpha_2}^{\infty}\cdots\sum_{\alpha_n}^{\infty}\left(x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n}\right)\sum_{r=0}^{\infty} t^r \delta_{(\sum_{j=1}^{n}\alpha_i) r}$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} t^r {\sum_{\alpha}}' \mathrm{x}^{\alpha}$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} h_r t^r$$

3.4.2 $s_\lambda(\mathrm{x}) = \det\left(h_{\lambda_i - i + j}(\mathrm{x})\right)_{1\le i,j\le \lambda'_1}$ の証明

まず$s_\lambda(\mathrm{x}) = \dfrac{a_{\lambda+\delta}(\mathrm{x})}{a_\delta(\mathrm{x})}$を定義だとして　$a_\delta(\mathrm{x}) s_\lambda(\mathrm{x}) = a_{\lambda+\delta}(\mathrm{x})$　と書き直す．

あるkに対して$e_r^{(k)}(\mathrm{x})$を　$e_r^{(k)}(\mathrm{x}) = e_r(\mathrm{x})|_{x_k \to 0}$　と定義する．

対応する母関数を　$E^k(\mathrm{x},t) = \sum_{r=0}^{n} e_r^{(k)} t^r$とすれば

$$E(\mathrm{x},t) = \prod_{i=1}^{n}(1+x_i t) = (1+x_1 t)(1+x_2 t)\cdots(1+x_k t)\cdots(1+x_n t) = E^k(\mathrm{x},t)(1+x_k t)$$

であるから

$$H(\mathrm{x},t)E^{k}(\mathrm{x},-t)=\prod_{i=1}^{\mathrm{n}}\frac{1}{(1-x_i t)}\frac{E(\mathrm{x},-t)}{(1-x_k t)}$$

$$=\left\{\frac{1}{(1-x_1 t)}\frac{1}{(1-x_2 t)}\cdots\frac{1}{(1-x_n t)}\right\}\{(1-x_1 t)(1-x_2 t)\cdots(1-x_n t)\}\frac{1}{(1-x_k t)}$$

$$=\frac{1}{(1-x_k t)}=\sum_{\alpha=0}^{\infty}x_k^{\alpha}t^{\alpha}\quad(3.8)$$

となる.

一方

$$H(\mathrm{x},t)E^{k}(\mathrm{x},-t)=\sum_{r=0}^{\infty}h_r t^r\sum_{r=0}^{n}e_r^{(k)}(-t)^r$$

$$=\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{n}(-1)^r e_r^{(k)}h_s t^{r+s}$$

$\alpha=r+s$ とおくと図(2.3)より和のとり方を左のように変形出来る

$$=\sum_{\alpha=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{\alpha}(-1)^r e_r^{(k)}h_{\alpha-r}t^{\alpha}$$

$h_{\alpha-r<0}=0$ を用いれば r の和は nまでとればよい

$$=\sum_{\alpha=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{n}(-1)^r e_r^{(k)}h_{\alpha-r}t^{\alpha}$$

r を$0\to n$の順に和をとるのを $n-r$とすることによって$n\to 0$の順に和をとるように変えた

$$=\sum_{\alpha=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{n}(-1)^{n-r}e_{n-r}^{(k)}h_{\alpha-n+r}t^{\alpha}$$

$$=\sum_{\alpha=0}^{\infty}\left\{\sum_{r=1}^{n}(-1)^{n-r}e_{n-r}^{(k)}h_{\alpha-n+r}\right\}t^{\alpha}\quad(3.9)$$

$e_n^{(k)}$は必ずx_kの項を含むので0 よって$r=1$から和をとることにした

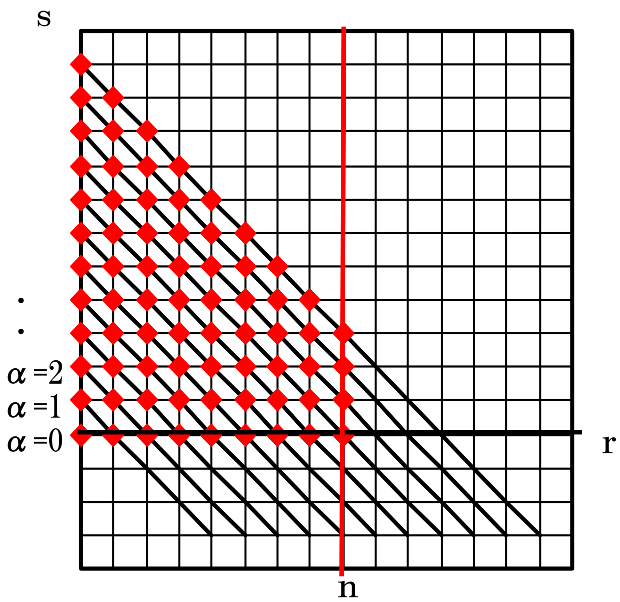


図 3.2

よって(3.8)　(3.9)より

$$\sum_{\alpha=0}^{\infty}\left\{\sum_{r=1}^{n}(-1)^{n-r}e_{n-r}^{(k)}h_{\alpha-n+r}\right\}t^{\alpha}=\sum_{\boldsymbol{\alpha}=0}^{\infty}x_k^{\boldsymbol{\alpha}}t^{\boldsymbol{\alpha}}$$

両辺のt^{α}の係数を見比べて

$$\sum_{r=1}^{n}(-1)^{n-r}e_{n-r}^{(k)}h_{\alpha-n+r}=x_k^{\boldsymbol{\alpha}}\cdots(\ast)$$

となることがわかる.

ここで, ある$\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\in \mathrm{Z}_{\geq 0}^{n}$に対して$n\times n$行列　$\mathbf{M},\mathbf{H}_{\alpha},\mathbf{A}_{\alpha}$を

$$(\mathbf{M})_{i,j}=(-1)^{n-j}e_{n-j}^{(i)}(\mathrm{x}) \qquad (\mathbf{H}_{\alpha})_{\mathrm{i,j}}=h_{\alpha_j-n+i}(\mathrm{x})$$

$$(\mathbf{A}_{\alpha})_{i,j}=x_i^{\alpha_j}$$

で定義するならば

$$(\mathbf{MH}_{\alpha})_{i,j}=\sum_{r=1}^{n}(\mathbf{M})_{i,r}(\mathbf{H}_{\alpha})_{\mathrm{r,j}}=\sum_{r=1}^{n}(-1)^{n-r}e_{n-r}^{(i)}(\mathrm{x})h_{\alpha_j-n+r}(\mathrm{x})$$

$$=x_i^{\alpha_j}=(\mathbf{A}_{\alpha})_{i,j} \qquad \because (\ast)\text{式より}$$

よって$\mathbf{MH}_{\alpha}=\mathbf{A}_{\alpha}$が成立する.

両辺の行列式をとれば

$$\det(\mathbf{MH}_{\alpha})=\det\mathbf{M}\det\mathbf{H}_{\alpha}=\det\mathbf{A}_{\alpha}=\begin{vmatrix} x_1^{\alpha_1} & x_1^{\alpha_2} & \dots & x_1^{\alpha_n}\\ x_2^{\alpha_1} & x_2^{\alpha_2} & \cdots & x_2^{\alpha_n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ x_n^{\alpha_1} & x_n^{\alpha_2} & \cdots & x_n^{\alpha_n}\end{vmatrix}=a_{\alpha}(\mathrm{x})$$

となる.

$$\text{特に}\alpha=\delta\text{と選ぶと},\det\mathbf{H}_{\delta}=\begin{vmatrix} h_{n-1-n+1} & h_{n-2-n+1} & \cdots & h_{-n+1}\\ h_{n-1-n+2} & h_{n-2-n+2} & \cdots & h_{-n+2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ h_{n-1} & h_{n-2} & \cdots & h_0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0\\ h_{n-1-n+2} & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ h_{n-1} & h_{n-2} & \cdots & 1\end{vmatrix}=1$$

対角成分　$h_0=1$　右上の成分　$h_{r<0}=0$

ゆえに$\det\mathbf{M}=a_{\delta}(\mathrm{x})$　これを$\det\mathbf{M}\det\mathbf{H}_{\alpha}=a_{\alpha}(\mathrm{x})$　に代入して$\alpha=\lambda+\delta$ととれば

$$\det\mathbf{H}_{\lambda+\delta}=\frac{a_{\lambda+\delta}(\mathrm{x})}{a_{\delta}(\mathrm{x})}=s_{\lambda}(\mathrm{x})$$

一方$\det\mathbf{H}_{\lambda+\delta}=\det\left(h_{\lambda_j+n-j-n+i}(\mathrm{x})\right)=\det\left(h_{\lambda_j-j+i}(\mathrm{x})\right)$

よって$s_{\lambda}(\mathrm{x})=\det\left(h_{\lambda_i-i+j}(\mathrm{x})\right)_{1\leq i,j\leq\lambda_1'}$が示せた.

3.4.3 $s_\lambda = \det\left(e_{\lambda'_i - i + j}(\mathrm{x})\right)_{1\le i,j\le \lambda_1}$ の証明

$\mathrm{H} = \left(h_{i-j}\right)_{1\le i,j\le N}$ と $\mathrm{E} = \left((-1)^{i-j} e_{i-j}\right)_{1\le i,j\le N}$ という2つの行列を考える。

これらの行列式は 行に対して余因子行列 をつかっていけばすぐにわかるように，

$$\det \mathrm{H} = \begin{vmatrix} h_0 & 0 & \cdots & 0 \\ h_1 & h_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{N-1} & h_{N-2} & \cdots & h_0 \end{vmatrix} = h_0 \begin{vmatrix} h_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{N-2} & \cdots & h_0 \end{vmatrix} = \cdots = \left(h_0(\mathrm{x})\right)^n = 1$$

$$\det \mathrm{E} = \begin{vmatrix} e_0 & 0 & \cdots & 0 \\ -e_1 & e_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^{N-1} e_{N-1} & (-1)^{N-2} e_{N-2} & \cdots & e_0 \end{vmatrix} = e_0 \begin{vmatrix} e_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^{N-2} e_{N-2} & \cdots & e_0 \end{vmatrix} = \cdots = \left(e_0(\mathrm{x})\right)^n = 1$$

となる。

また

$$\mathrm{HE} = \begin{pmatrix} h_0 & 0 & \cdots & 0 \\ h_1 & h_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{N-1} & h_{N-2} & \cdots & h_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_0 & 0 & \cdots & 0 \\ -e_1 & e_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^{N-1} e_{N-1} & (-1)^{N-2} e_{N-2} & \cdots & e_0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} h_0 e_0 & 0 & \cdots & 0 \\ h_1 e_0 - h_0 e_1 & h_0 e_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{N-1} e_0 - h_{N-2} e_1 + \cdots + (-1)^{N-1} h_0 e_{N-1} & h_{N-2} e_0 - h_{N-3} e_1 + \cdots + (-1)^{N-2} h_0 e_{N-2} & \cdots & h_0 e_0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \sum_{r=0}^{1} (-1)^r h_{1-r} e_r & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{r=0}^{N-1} (-1)^r h_{N-1-r} e_r & \sum_{r=0}^{N-2} (-1)^r h_{N-2-r} e_r & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

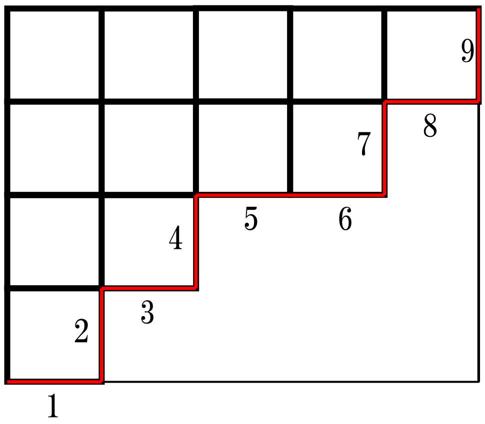
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \quad \because \sum_{r=0}^{l} (-1)^r h_{l-r} e_r = 0$$

よって$\mathrm{H}^{-1} = \mathrm{E}$となる

次に、Hの行$\lambda_i+n+1-i(1\le i\le n)$,列$\mu_i+n+1-i(1\le j\le m)$からなる小行列式を考える. これらは補集合の関係にある.

なぜならλを分割として$m\ge\lambda_1, n\ge\lambda_1^{'}$としたとき，横$m$，縦$n$の長方形の中にヤング図形$\lambda$を左隅にあうように埋め込んで ，左下の隅から出発して右上の隅まで，ヤング図形の縁をなぞって一歩一歩に0から始まって$m+n-1$まで数を書きこんでやれば，上に一歩移動するステップに対応する組が$\{\lambda_i+n-i\}$であり，横ステップに対応する組が$\{n-1+j-\lambda_j^{'}\}$であることがわかる. またこれらの和集合は$\{1,\cdots,m+n-1\}$になっていることもわかる.

例　$m=5$　　$n=4$　　$\lambda=(5,4,2,1)$　　$\lambda'=(4,3,2,2,1)$のとき



縦ステップ

$\lambda_1+4+1-1=5+5-1=9$

$\lambda_2+4+1-2=4+5-2=7$

$\lambda_3+4+1-3=2+5-3=4$

$\lambda_4+4+1-4=1+5-4=2$

横ステップ

$4+1-\lambda'_1=4+1-4=1$

$4+2-\lambda'_2=4+2-3=3$

$4+3-\lambda'_3=4+3-2=5$

$4+4-\lambda'_4=4+4-2=6$

$4+5-\lambda'_5=4+5-1=8$

よって添え字を1つずつずらせば$\{\lambda_i+n+1-i\}$と$\{n+j-\lambda_j^{'}\}$は互いに$\{1,\cdots,m+n\}$に関する補集合となっているといえる.

この関係と次に示すラプラスの展開定理を用いればHの小行列式は${}^tE$の対応する余因子に等しいことがわかる. よって

$$\det\left(h_{(\lambda_i+n+1-i)-(\mu_j+n+1-j)}\right)=(-1)^{\sum(\lambda_i+n+1-i)+\sum(\mu_j+n+1-j)}\times\det\left((-1)^{(n+j-\mu'_j)-(n+i-\lambda'_i)}e_{(n+j-\mu'_j)-(n+i-\lambda'_i)}\right)$$

$$\Leftrightarrow\det\left(h_{\lambda_i-\mu_j-i+j}\right)=\det\left(e_{\lambda'_i-i-\mu'_j+j}\right)$$

ここで$\mu=0$とすれば

$$\det\left(h_{\lambda_i-i+j}\right)=\det\left(e_{\lambda'_i-i+j}\right)$$

よって

$$s_\lambda(\mathrm{x})=\det\left(h_{\lambda_i-i+j}(\mathrm{x})\right)_{1\le i,j\le\lambda'_1}=\det\left(e_{\lambda'_i-i+j}(\mathrm{x})\right)_{1\le i,j\le\lambda_1}$$

が成り立つ

ラプラスの展開定理

$\underset{\sim}{N}\times N$の行列$A=(a_{i,j})$を考える．$(i_1,\cdots,i_n)$をある部分集合とし$\{i\}$で表す．またその補集合を$\{\bar{i}\}$とかくとする．また$|i|:=i_1+\cdots+i_n$とする．ここで行も列も$\{i\},\{j\}$なる$n$個ずつだけ取り出して作った行列の行列式を$a_{\{i\},\{j\}}$とかき，それに対応する余因子$(-1)^{|i|+|j|}a_{\{\bar{i}\},\{\bar{j}\}}$を$\bar{a}_{\{i\},\{j\}}$とかく．これらの表記を用いてラプラスの展開定理を表すと次のようになる．

$$\sum_{\{j\}} a_{\{i\},\{j\}}\bar{a}_{\{k\},\{j\}} = \det A\,\delta_{\{i\},\{k\}}$$

とくに$\det A=1$であるなら$a_{\{i\},\{j\}}$の逆行列は対応する余因子の転置行列となる．

3.4.4 (3.3)式の具体的計算

$\lambda=(2,1,0)$で三変数の場合　　$\lambda'=(2,1,0)$

(i)

$$\begin{aligned} s_\lambda(\mathrm{x}) = \begin{vmatrix} h_2 & h_3 \\ h_0 & h_1 \end{vmatrix} &= h_2h_1 - h_3h_0 \\ &= (x_1+x_2+x_3)(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1) \\ &\quad -(x_1^3+x_2^3+x_3^3+x_1^2x_2+x_1^2x_3+x_2^2x_1+x_2^2x_3+x_3^2x_1+x_3^2x_2+x_1x_2x_3) \\ &= 2x_1x_2x_3+x_1^2x_2+x_1^2x_3+x_2^2x_1+x_2^2x_3+x_3^2x_1+x_3^2x_2 \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} s_\lambda(\mathrm{x}) = \begin{vmatrix} e_2 & e_3 \\ e_0 & e_1 \end{vmatrix} &= e_2e_1 - e_3e_0 \\ &= (x_1+x_2+x_3)(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1) - x_1x_2x_3 \\ &= 2x_1x_2x_3+x_1^2x_2+x_1^2x_3+x_2^2x_1+x_2^2x_3+x_3^2x_1+x_3^2x_2 \end{aligned}$$

これは(3.5)式の結果と一致する．

3.5 半標準ヤング盤によるシューア関数の表示

• $s_\lambda(\mathrm{x}) = \sum_{\text{半標準盤}} \mathrm{x}^\alpha \qquad \alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots)$

α_kはk番目のステップで移動したランダムウォーカーの数

例　　$\lambda=(2,1,0)$のとき

ランダムウォーカーの数3個　　ステップ数3

$\lambda=(2,1,0)$を持つ全てのヤング盤を考える

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array}$$
$\alpha = (1,1,1)$
$\mathrm{x}^{\alpha} = x_1 x_2 x_3$

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array}$$
$\alpha = (1,1,1)$
$\mathrm{x}^{\alpha} = x_1 x_2 x_3$

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 1 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array}$$
$\alpha = (2,1,0)$
$\mathrm{x}^{\alpha} = x_1^2 x_2$

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array}$$
$\alpha = (1,2,0)$
$\mathrm{x}^{\alpha} = x_2^2 x_1$

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 3 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array}$$
$\alpha = (0,1,2)$
$\mathrm{x}^{\alpha} = x_3^2 x_2$

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 2 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array}$$
$\alpha = (0,2,1)$
$\mathrm{x}^{\alpha} = x_2^2 x_3$

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array}$$
$\alpha = (1,0,2)$
$\mathrm{x}^{\alpha} = x_3^2 x_1$

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 1 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array}$$
$\alpha = (2,0,1)$
$\mathrm{x}^{\alpha} = x_1^2 x_3$

以上より

$$s_\lambda(\mathrm{x}) = \sum_{\text{半標準盤}} \mathrm{x}^{\alpha} = 2x_1x_2x_3 + x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + x_2^2x_1 + x_2^2x_3 + x_3^2x_1 + x_3^2x_2$$

これは(3.5)式の結果と一致する.

第4章　まとめ

シューア関数の4つの表現について$s_\lambda(\mathrm{x})=\dfrac{a_{\lambda+\delta}(\mathrm{x})}{a_\delta(\mathrm{x})}$と

$$
\begin{aligned}
s_\lambda(\mathrm{x}) &= \det\left(h_{\lambda_i-i+j}(\mathrm{x})\right)_{1\le i,j\le\lambda'_1}\\
&= \det\left(e_{\lambda'_i-i+j}(\mathrm{x})\right)_{1\le i,j\le\lambda_1}
\end{aligned}
$$

の同等性を示した.

$s_\lambda(\mathrm{x})=\sum_\mu K_{\lambda,\mu}m_\mu(\mathrm{x})$と$s_\lambda(\mathrm{x})=\sum_{\text{半標準盤}}\mathrm{x}^\alpha$と$s_\lambda(\mathrm{x})=\dfrac{a_{\lambda+\delta}(\mathrm{x})}{a_\delta(\mathrm{x})}$の同等性は示していないが

具体的な計算が一致することは確認できた.

$s_\lambda(\mathrm{x})=2x_1x_2x_3+x_1^2x_2+x_1^2x_3+x_2^2x_1+x_2^2x_3+x_3^2x_1+x_3^2x_2$　で　$\mathrm{x}=1$

とすればそのシューア関数の値が

$\lambda=(2,1,0)$半標準ヤング盤の総数になっていることがわかる.

つまりシューア関数の特殊値　$s_\lambda(1)$　が半標準ヤング盤の総数になっているのである.

参考文献

鈴木　淳史,「現代物理学への招待」 サイエンス社　2006.