

SIRモデル

中央大学工学部物理学科学部4年香取研究室

赤池 誠

感染症モデル

2020年新型コロナウイルスが流行し、感染拡大における数理モデルについて興味を持った。この数理モデルはここ100年の間に考えられたモデルで、現在では様々な感染症数理モデルが存在する。2020年における新型コロナウイルスにおいても、この数理モデルを使用した論文が多く報告されている。今回、感染症数理モデルにおいて最も基本的なSIRモデルというものについて調査・まとめたいと考える。

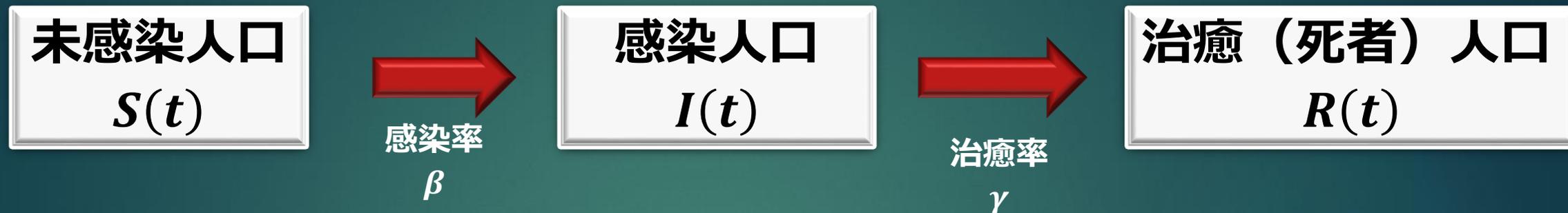
COVID-19とはcorona-virus disease-2019を由来とする。

SIRモデル1

SIRモデルとは、ケルマック氏とマッケンドリック氏らが考えた代表的な感染症数理モデルである。

SIRモデルというのは、閉じた系（地域）であるとき、**未感染人口** $S(t)$ 、**感染人口** $I(t)$ 、**治癒（死者）人口** $R(t)$ の3つの準位系で考えるモデルである。このとき、これら3つの人口は時間に依存する。未感染者から感染者になり、感染者から治癒者になる関係である。注意点として、未感染者は免疫を獲得していない、治癒者が再感染しないししないと仮定している。

SIRモデル2



未感染人口 $S(t)$ が感染率 β で**感染人口 $I(t)$** になり、**感染人口 $I(t)$** が治癒率 γ で**治癒 (死者) 人口 $R(t)$** になるようなモデルを考える。このとき以下の3つの式が成り立つ[1]。

$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI \quad \dots (1)$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I \quad \dots (2)$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I \quad \dots (3)$$

SIRモデルを解く 1

SIRモデルにおける(2)式を解く。**未感染人口** S が全体人口 $N(=S+I+R)$ と等しいと考える(初期感染段階)、すなわち $S \approx N$ であるとする。 β, γ は定数であると考えたと

$$\begin{aligned}\frac{dI}{dt} &= \beta NI - \gamma I \\ \frac{dI}{dt} &= (\beta N - \gamma)I\end{aligned}$$

となるから、

$$I = I_0 e^{(\beta N - \gamma)t}$$

となる。ただし I_0 は定数である。

すなわち、感染人口とは指数関数的な変化をすると言える。

SIRモデルを解く 2

(2)式について解いたので、(3)式について解くと

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I_0 e^{(\beta N - \gamma)t}$$
$$R = \frac{\gamma I_0}{\beta N - \gamma} e^{(\beta N - \gamma)t}$$

と導かれる。ここで、 $I + R$ (感染者人口と治癒人口を足した値)は陽性者(感染者)全体と考えられるので、

$$I + R = \left(I_0 + \frac{\gamma I_0}{\beta N - \gamma} \right) e^{\gamma(R_0 - 1)t}$$

となり、陽性者全体も指数関数に従っていることになる。

基本再生産数 R_0 1

$I = I_0 e^{(\beta N - \gamma)t}$ を考察する際、 $\beta N - \gamma$ について考えればよい。
 $\beta N - \gamma = 0$ であるとする、 $\frac{\beta}{\gamma} N = 1$ と与えられる。ここで現れる式を

$$R_0 = \frac{\beta}{\gamma} N$$

と定義し、これを**基本再生産数**と呼ぶ。

この基本再生産数 R_0 とは人口学、疫学など幅広く現れ、感染症数理モデルにおいても重要な考え方になる。今回の $I = I_0 e^{(\beta S - \gamma)t}$ を考察すると、 $R_0 > 1$ であれば感染拡大し、 $R_0 < 1$ であれば自然消滅するという、感染拡大に関するパラメータとなる[2]。感染症数理モデルでの基本再生産数は「一次感染者が感染させる平均の二次感染者の人数」のことを表している。

基本再生産数 R_0 2

COVID-19の基本再生産数 R_0 は1.4から6.49、
平均値3.28、中央値2.79であると見積もられている[3]。

基本再生産数 R_0 に関わる式

総感染者割合を z とすると

$$R_0 = -\frac{\ln(1-z)}{z} \quad \dots (4)$$

収束に必要な最低限の免疫獲得率 r とすると

$$r = 1 - \frac{1}{R_0} \quad \dots (5)$$

が成立する[1]。

(4)の証明

(1)と(3)より

$$\frac{dS}{dR} = -R_0 S$$

すなわち

$$\int_1^{1-z} \frac{1}{S} dS = -R_0 \int_0^z dR$$
$$R_0 = -\frac{\ln(1-z)}{z}$$

ただし、 $N = 1$ である。

(5)の証明

実行再生産数の定義より

$$1 = (1-r)R_0$$

すなわち

$$r = 1 - \frac{1}{R_0}$$

実行再生産数とは、免疫獲得率 v として

$$R_t = (1-v)R_0$$

で求められる数値のことである。

「すでに感染が広がっている状況において、1人の感染者が次に平均で何人にうつすか」という意味である[4]。

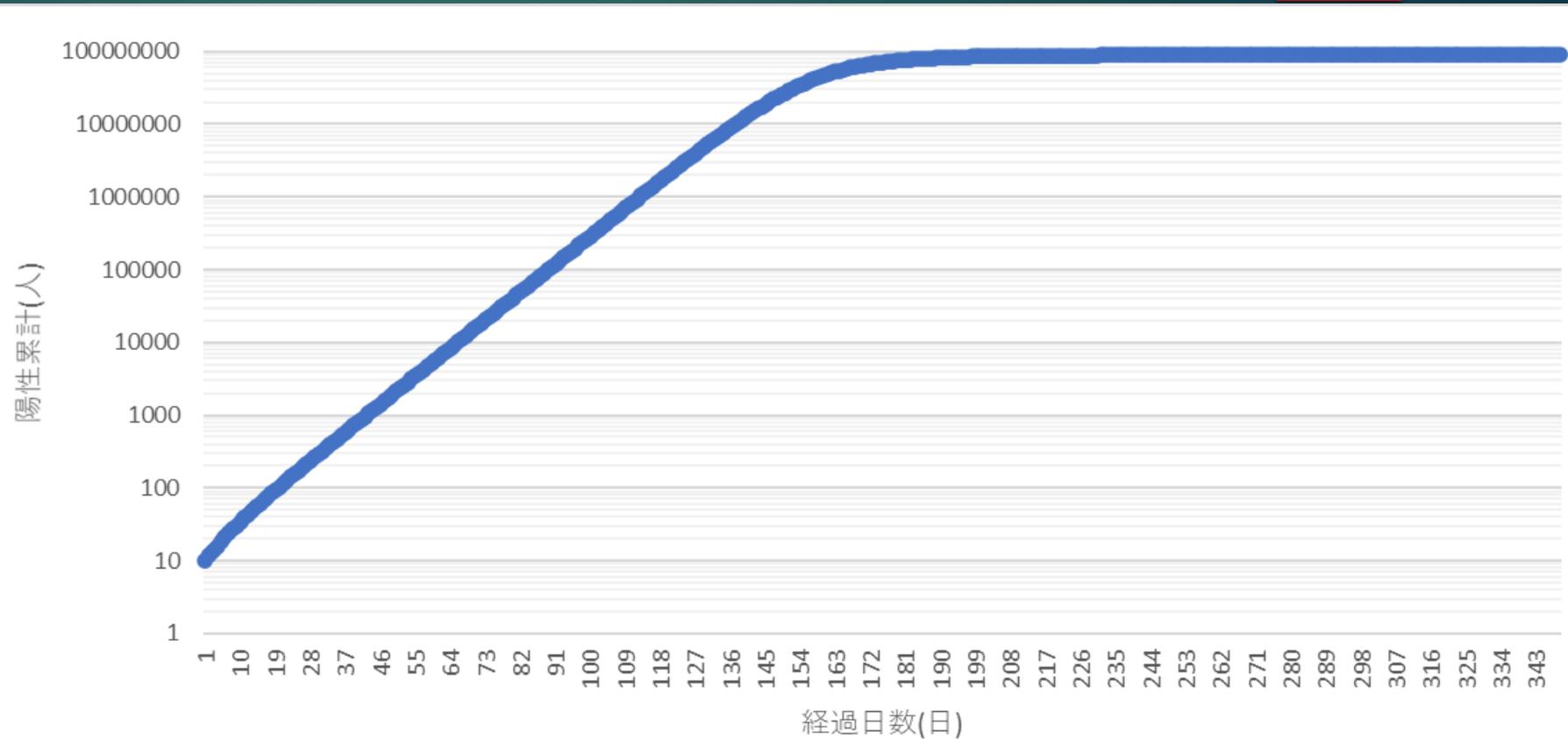
検証 1

グラフ1は $N = 1.0 \times 10^8$, $\beta = 1.75 \times 10^{-9}$, $\gamma = 1/14$ を初期条件とした片対数グラフである。

$R_0 = \frac{\beta}{\gamma} N$ から、 $R_0 = 2.45$ を得る。

グラフ1から R_0 値の推定をする。1から150の傾きは0.098640であるので、 $R_0 = 2.38$ と推定できる。

$R_0 = 2.45$ では(4),(5)によると、最終的に総感染者割合が88.6%、最終免疫獲得率が58.0%になると見積もられる。

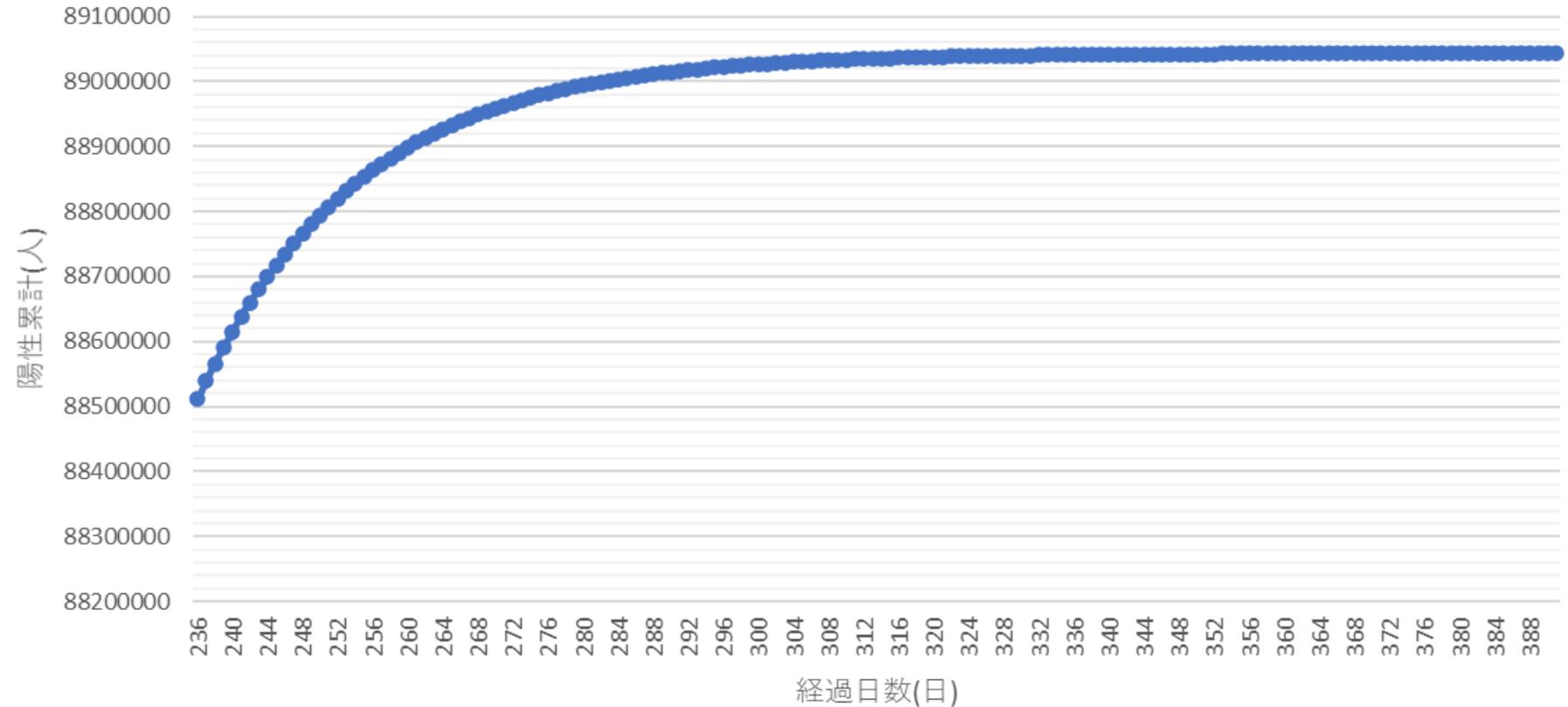


グラフ1:陽性累計の片対数グラフ

検証 2

グラフ2はグラフ1の212からの陽性累計のグラフである。

総感染者割合が88.6%であり、グラフ2から8900万人あたりに収束していると考えられる。



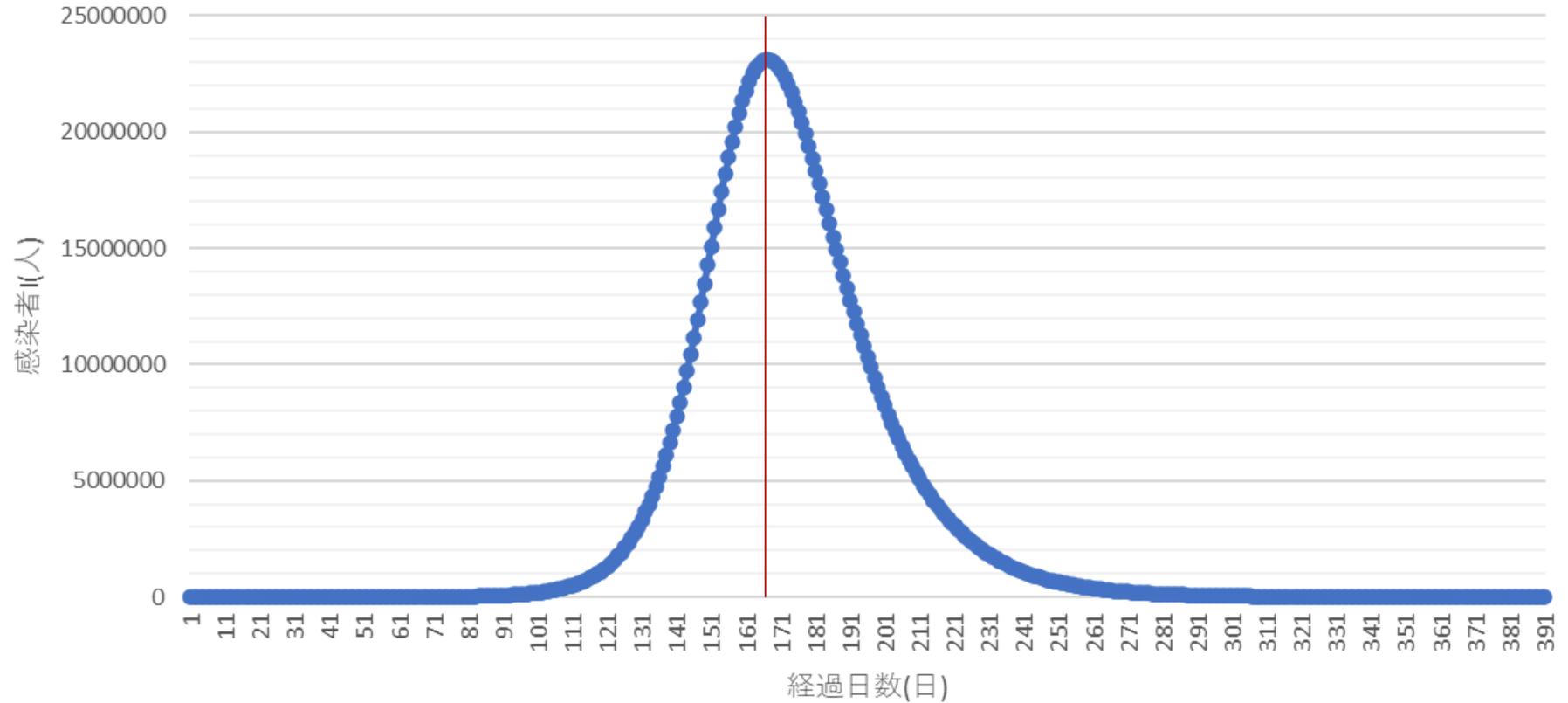
グラフ2:236からの陽性累計のグラフ

検証 3

グラフ3は感染者のグラフである。

最終免疫獲得率が58.0%であり、陽性累計が5800万人のとき抑えられると考えられる。5800万人は経過日数が166日あたりである。

グラフ3から166,167日あたりから減少していることがわかる。



グラフ3:感染者グラフ

日本の基本再生産数 R_0

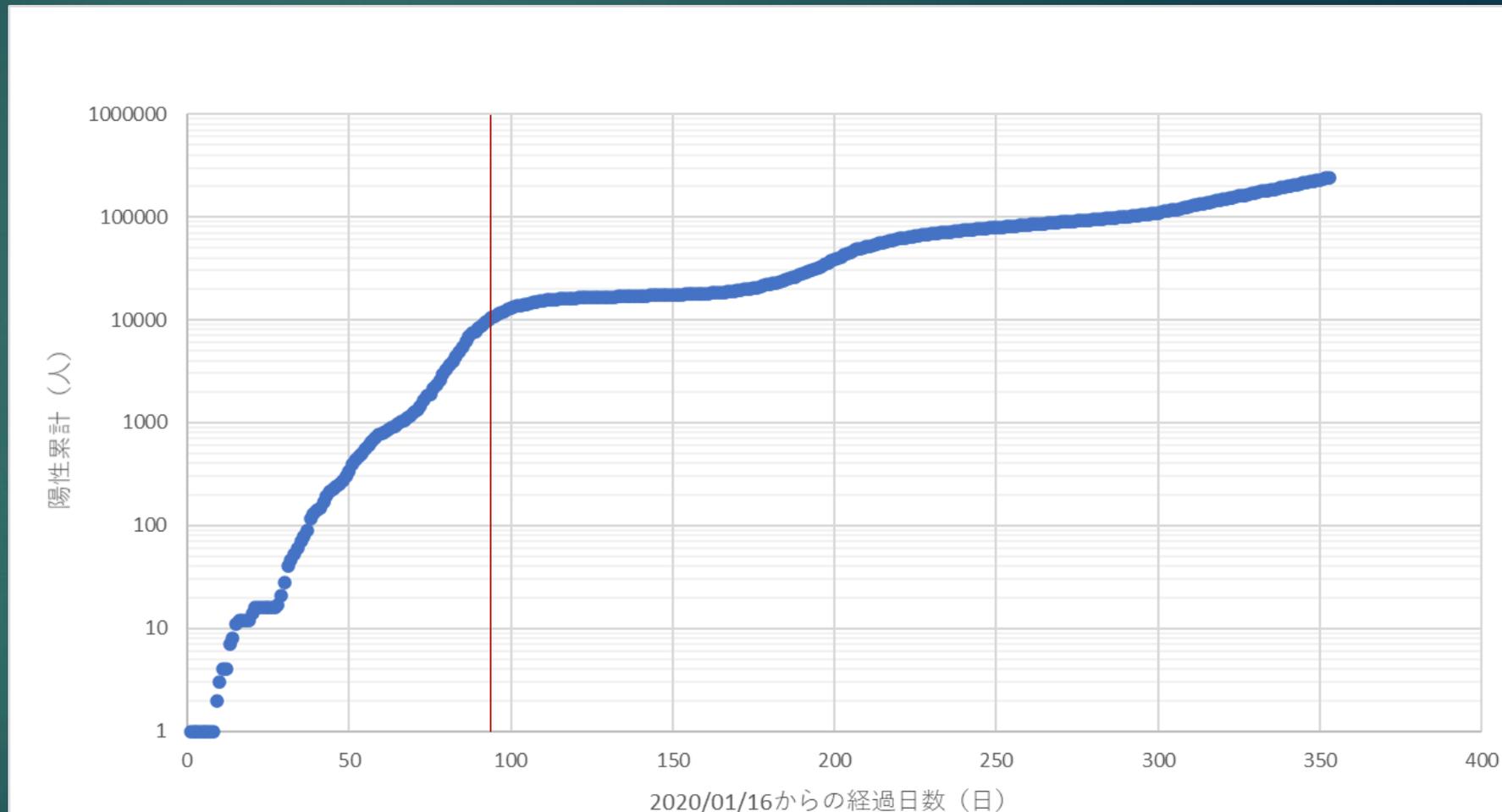
グラフ4は2020/01/16から2021/01/02までの日本の陽性累計の片対数グラフである[5]。

$I + R = \left(I_0 + \frac{\gamma I_0}{\beta N - \gamma} \right) e^{\gamma(R_0 - 1)t}$ であるから、傾きを求める。

2020/04/16以前の傾きは0.099796、以後は0.011912である。

ここで γ であるが、平均的な感染性期間の逆数に等しいので $\gamma = \frac{1}{14}$ であると仮定する[1]。

したがって、 $R_0 = 2.40$ であると見積もることができる。これは(4),(5)によると、最終的に総感染者割合が87.9%、感染収束に必要な最終免疫獲得率が58.3%になると見積もられる。



グラフ4:日本の陽性累計(2021/01/02まで)

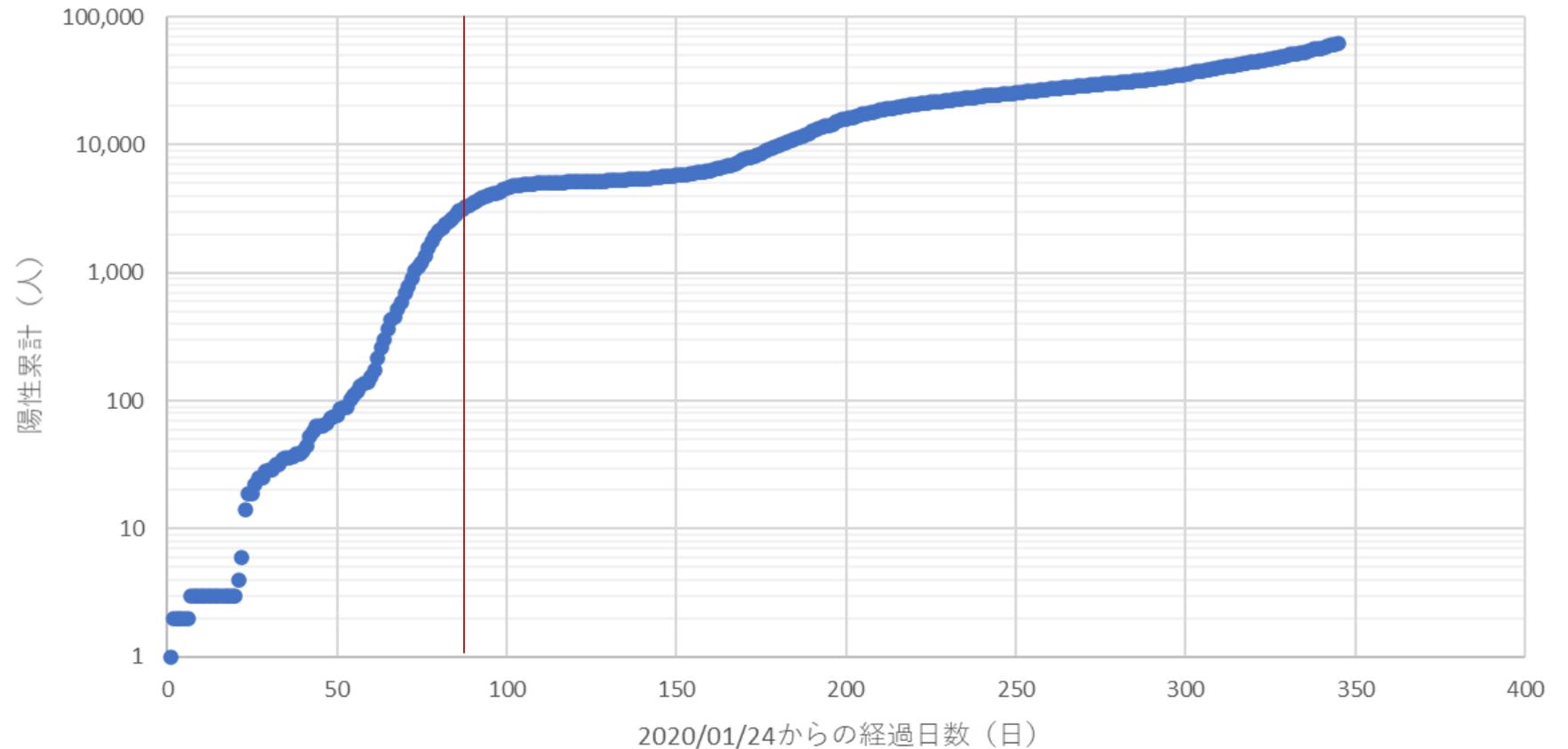
ただし傾きはExcelのSLOPE関数を使用し傾きを求める。2020/04/16は緊急事態宣言が全国へ発令された日である。

日本各地の基本再生産数 R_0 1

グラフ5は2020/01/24から2021/01/02までの東京都の陽性累計の片対数グラフである[6]。

2020/04/16以前の傾きは0.090357、以後は0.011299である。

$R_0=2.26$ であると見積もることができる。これは(4),(5)によると、最終的に総感染者割合が85.5%、感染収束に必要な最終免疫獲得率が55.8%になると見積もられる。



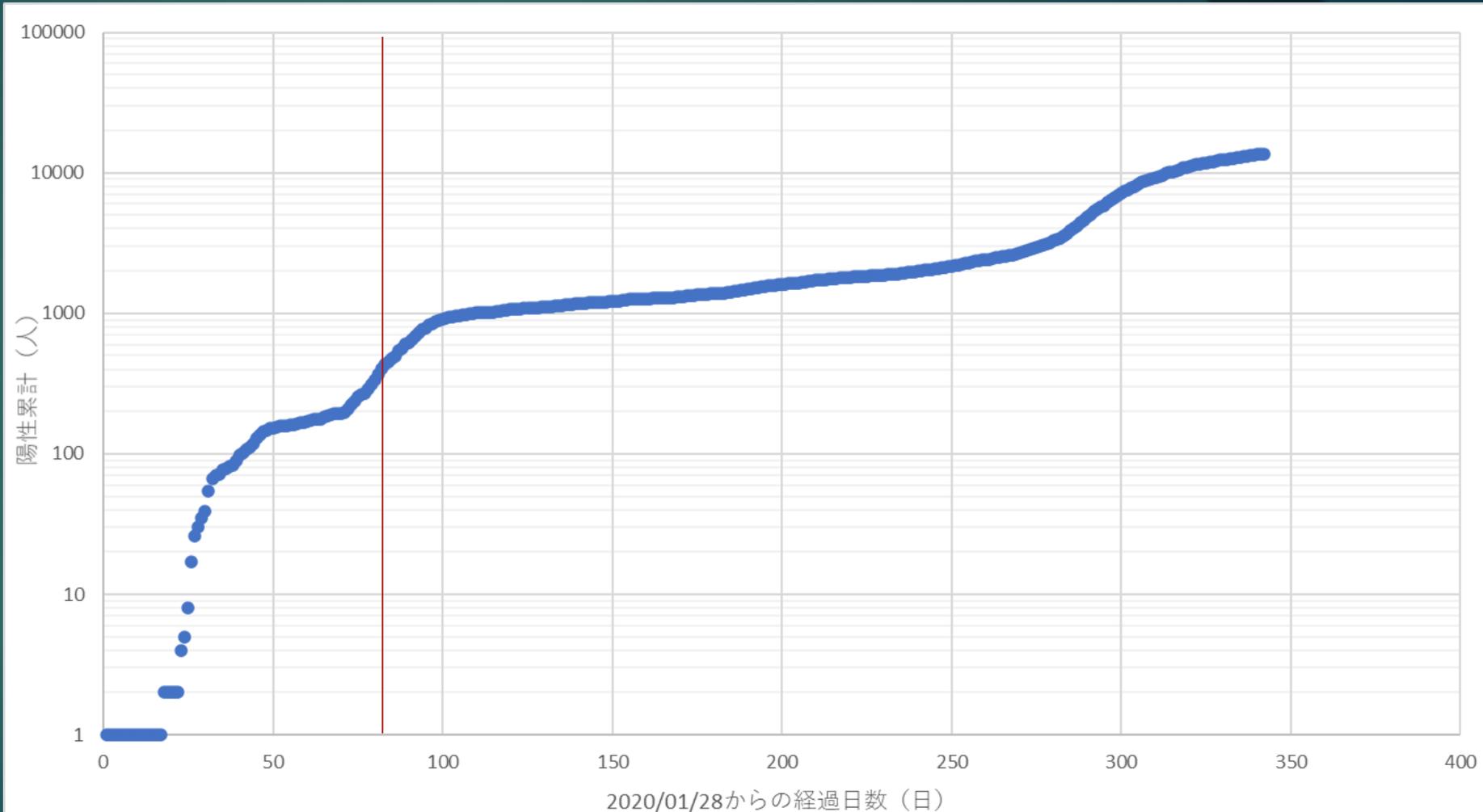
グラフ5:東京都の陽性累計
(2021/01/02まで)

日本各地の基本再生産数 R_0 2

グラフ6は2020/01/28から2021/01/03までの北海道の陽性累計の片対数グラフである[7]。

2020/04/16以前の傾きは0.086474、以後は0.010728である。

$R_0=2.21$ であると見積もることができる。これは(4),(5)によると、最終的に総感染者割合が84.6%、感染収束に必要な最終免疫獲得率が54.8%になると見積もられる。



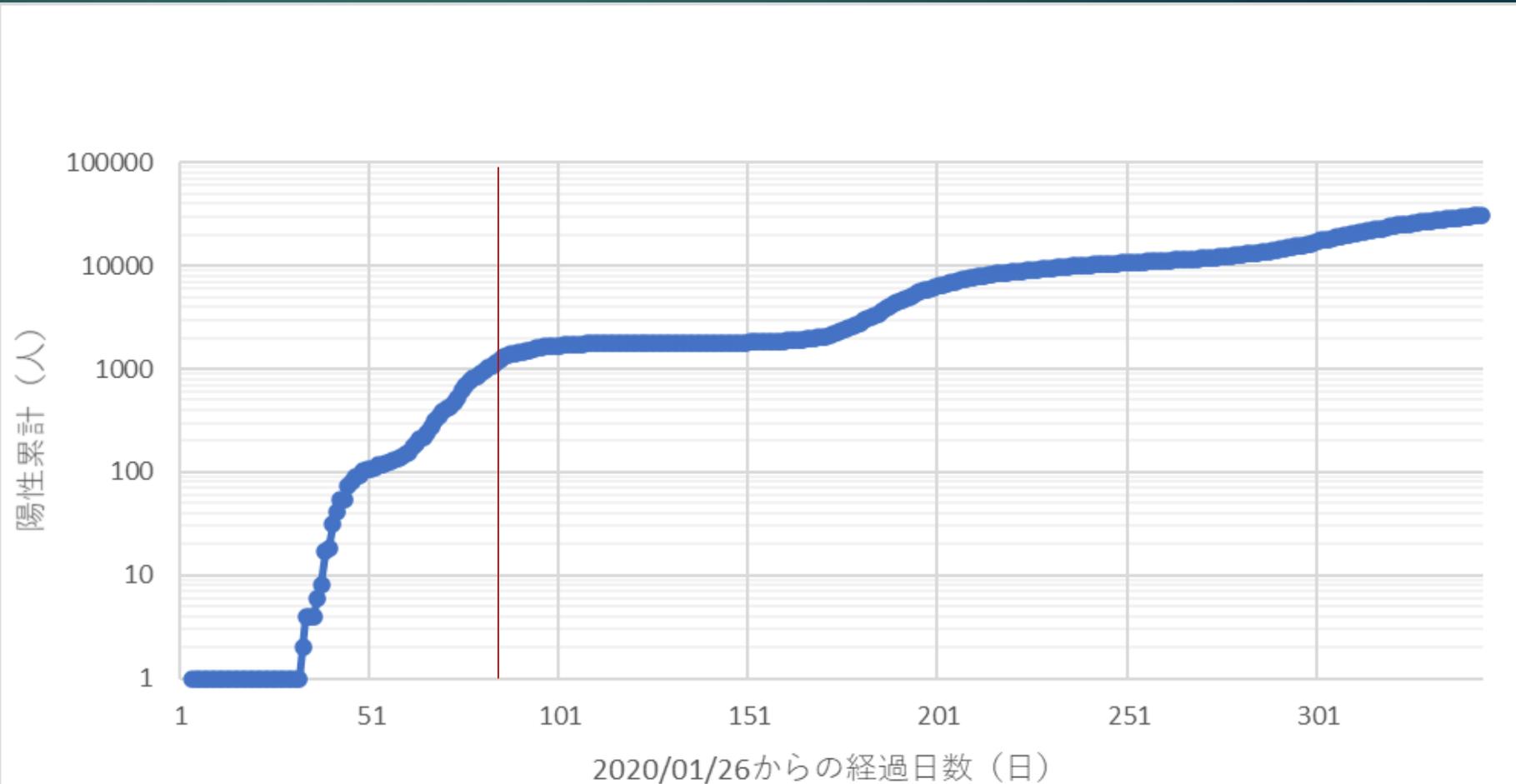
グラフ6:北海道の陽性累計(2021/01/03まで)

日本各地の基本再生産数 R_0 3

グラフ7は2020/01/26から2021/01/03までの大阪府の陽性累計の片対数グラフである[8]。

2020/04/16以前の傾きは0.109886、以後は0.013168である。

$R_0=2.54$ であると見積もることができる。これは(4),(5)によると、最終的に総感染者割合が89.8%、感染収束に必要な最終免疫獲得率が60.6%になると見積もられる。



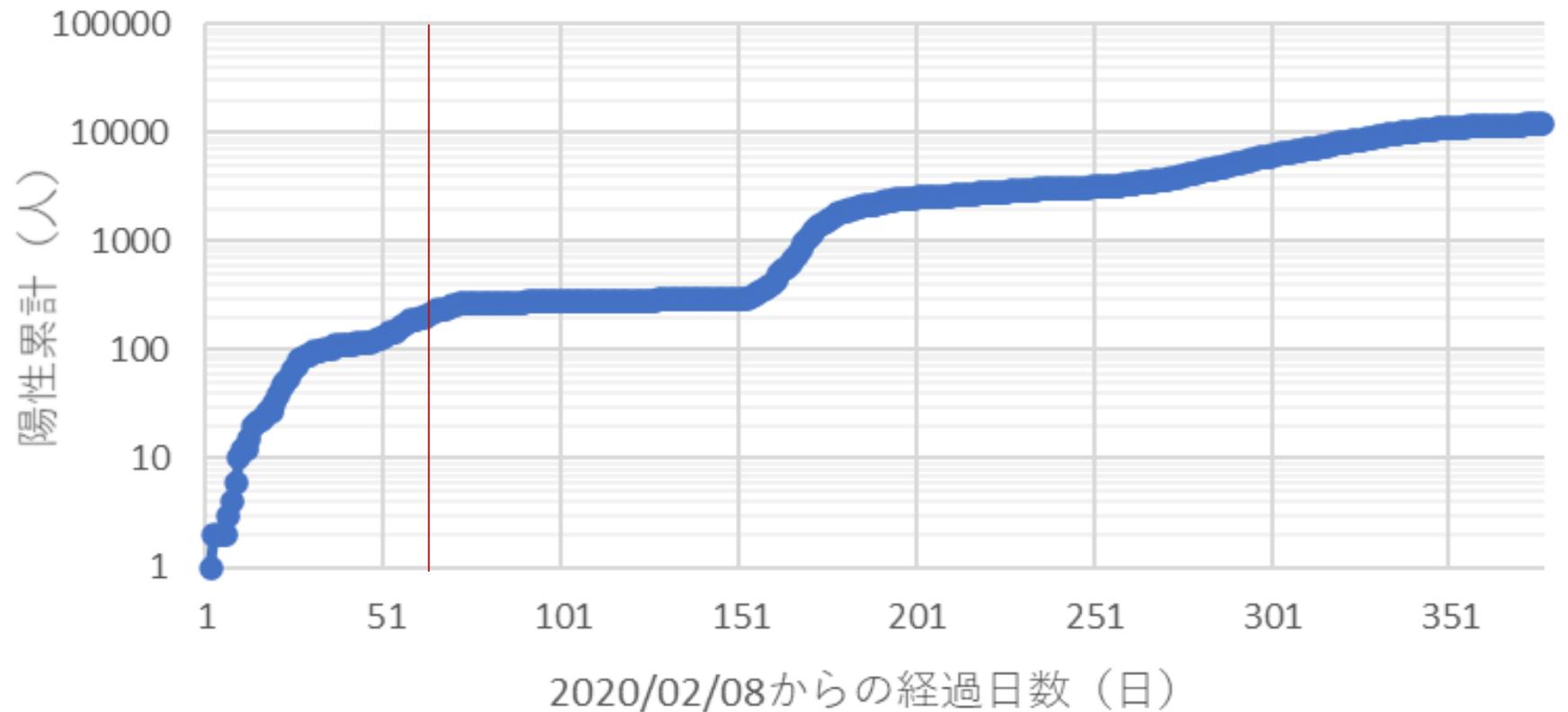
グラフ7:大阪府の陽性累計(2021/01/03まで)

日本各地の基本再生産数 R_0 4

グラフ8は2020/02/08から2021/02/23までの名古屋市の陽性累計の片対数グラフである[9]。

2020/04/16以前の傾きは0.068661、以後は0.014867である。

$R_0=1.96$ であると見積もることができる。これは(4),(5)によると、最終的に総感染者割合が78.6%、感染収束に必要な最終免疫獲得率が49.0%になると見積もられる。



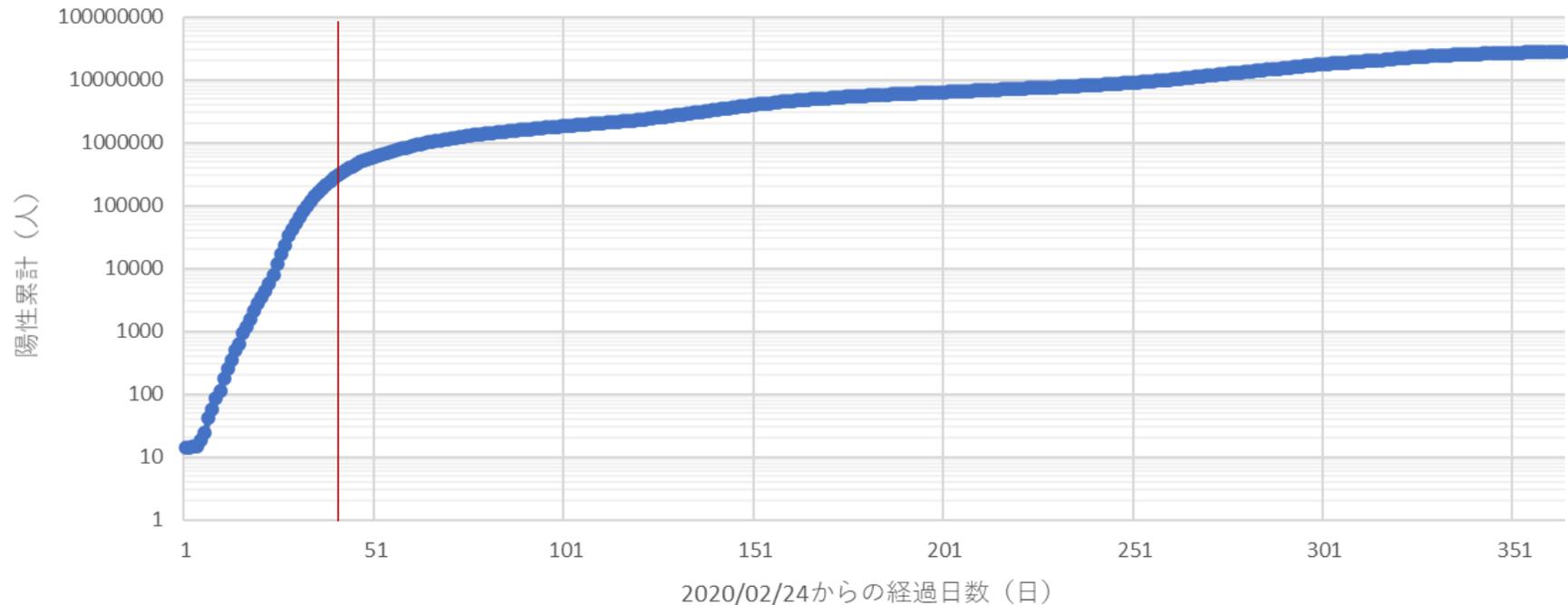
グラフ8:名古屋市の陽性累計(2021/02/23まで)

世界の基本再生産数 R_0 1

グラフ9は2020/02/24から2021/02/21までのアメリカの陽性累計の片対数グラフである[10]。

2020/04/03以前の傾きは0.282691、以後は0.011614である。

$R_0=4.96$ であると見積もることができる。これは(4),(5)によると、最終的に総感染者割合が99.3%、感染収束に必要な最終免疫獲得率が79.8%になると見積もられる。



グラフ9:アメリカの陽性累計(2021/02/21まで)

世界の基本再生産数 R_0 2

グラフ10は2020/02/21から2021/02/21までのフランスの陽性累計の片対数グラフである[10]。

2020/03/16以前の傾きは0.297578、以後は0.014724である。

$R_0=5.17$ であると見積もることができる。これは(4),(5)によると、最終的に総感染者割合が99.4%、感染収束に必要な最終免疫獲得率が80.6%になると見積もられる。



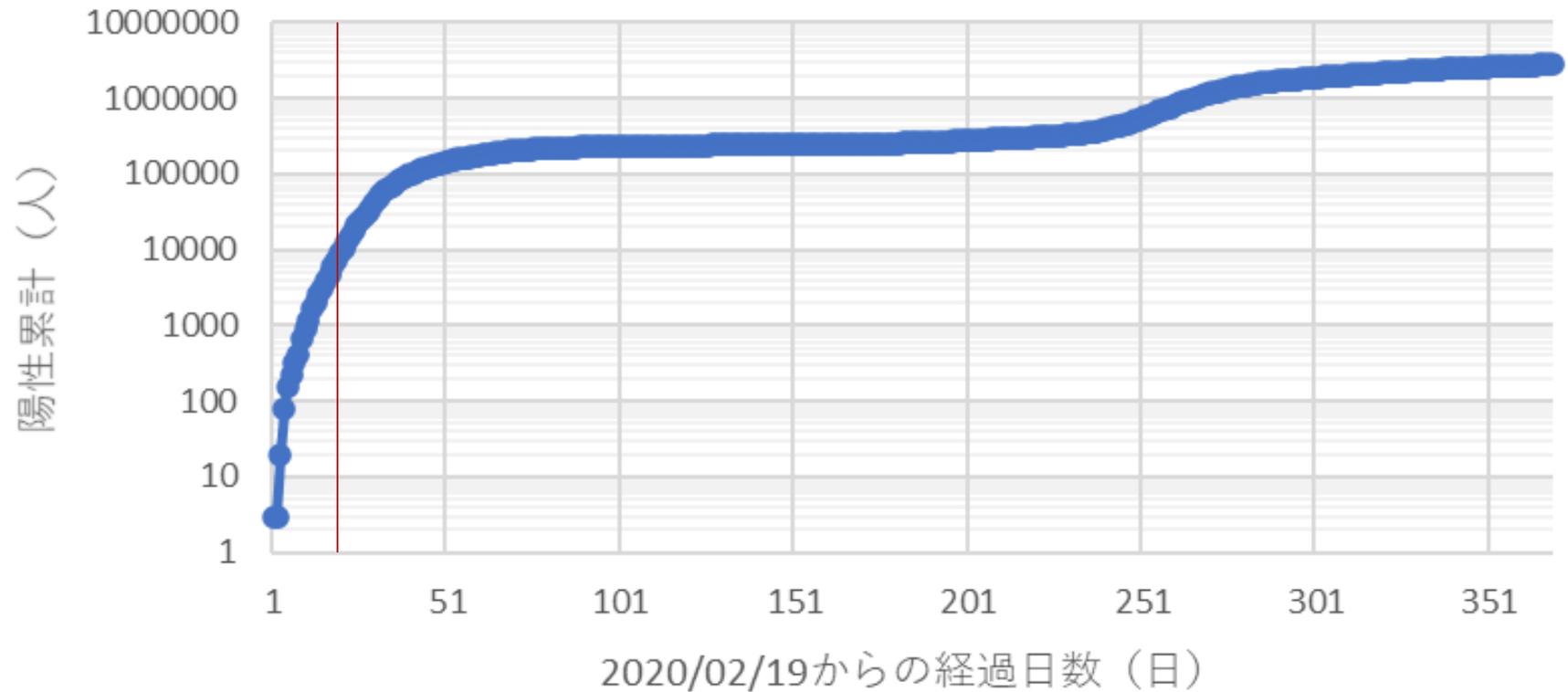
グラフ10:フランスの陽性累計(2021/02/21まで)

世界の基本再生産数 R_0 3

グラフ11は2020/02/19から2021/02/21までのイタリアの陽性累計の片対数グラフである[10]。

2020/03/09以前の傾きは0.381952、以後は0.0106556である。

$R_0=6.35$ であると見積もることができる。これは(4),(5)によると、最終的に総感染者割合が99.8%、感染収束に必要な最終免疫獲得率が84.2%になると見積もられる。



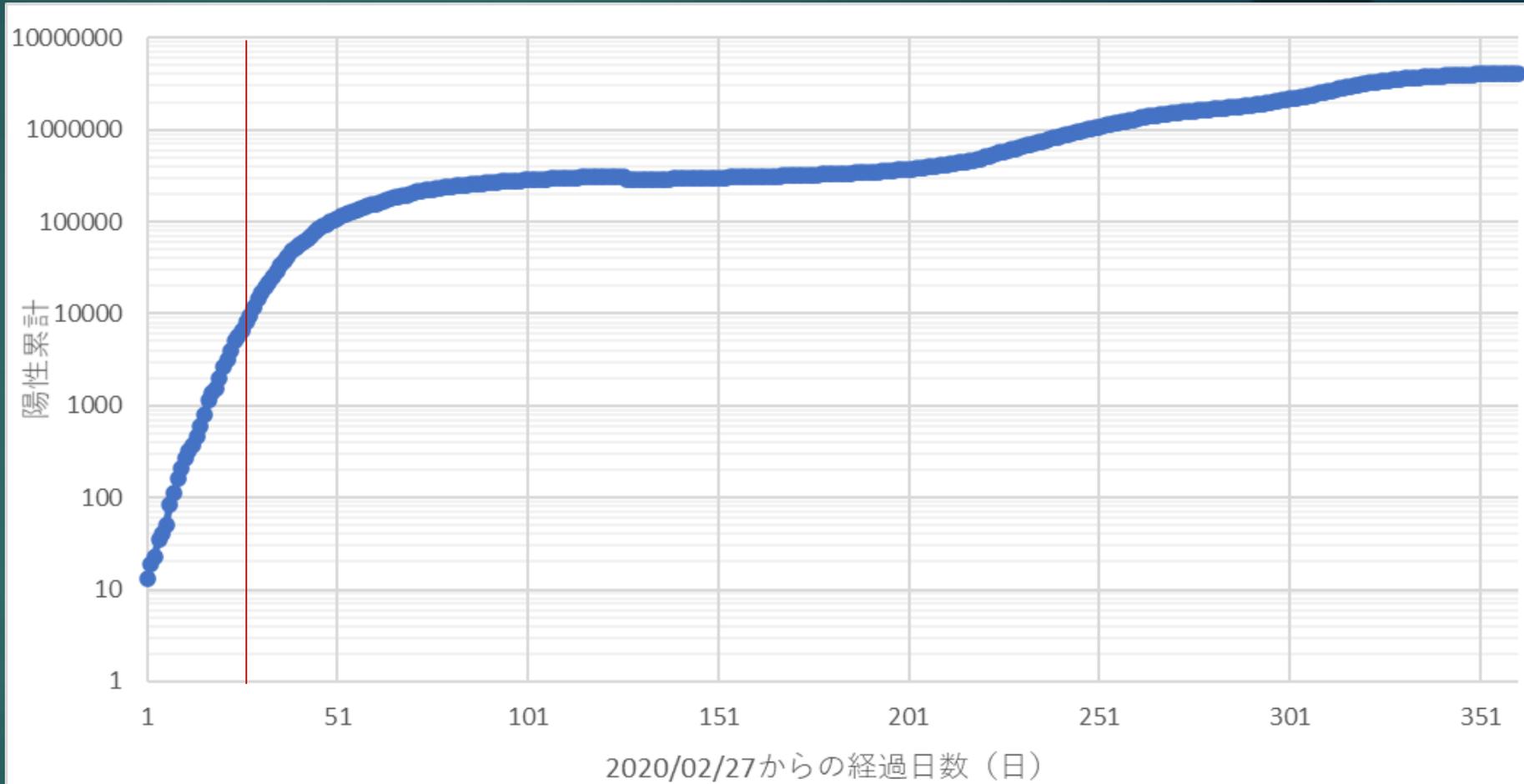
グラフ11:イタリアの陽性累計 (2021/02/21まで)

世界の基本再生産数 R_0 4

グラフ12は2020/02/27から2021/02/21までのイギリスの陽性累計の片対数グラフである[10]。

2020/03/23以前の傾きは0.250286、以後は0.012370である。

$R_0=4.50$ であると見積もることができる。これは(4),(5)によると、最終的に総感染者割合が98.9%、感染収束に必要な最終免疫獲得率が77.8%になると見積もられる。



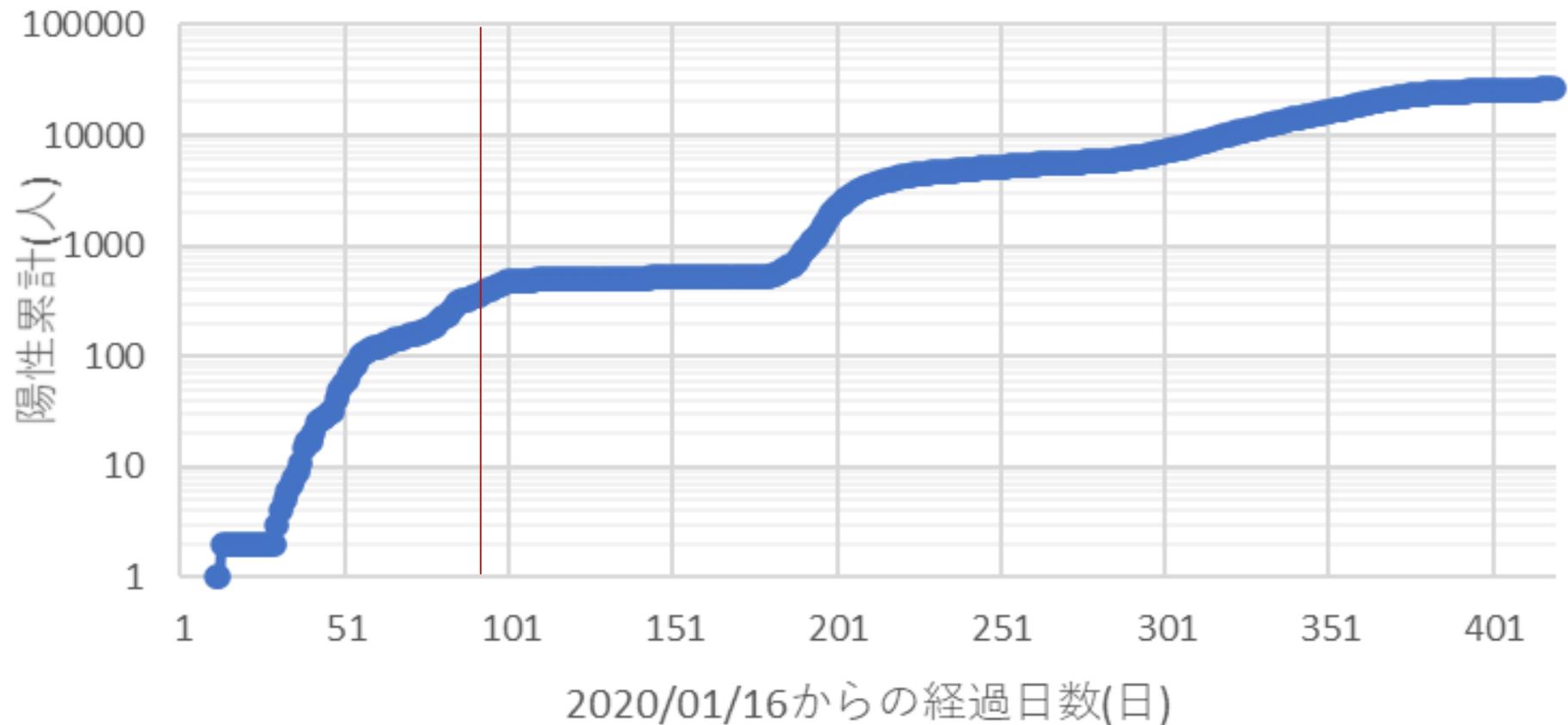
グラフ12:イギリスの陽性累計 (2021/02/21まで)

補足(愛知県)

グラフ13は
2020/01/16から
2021/03/09までの愛知
県の陽性累計の片対数
グラフである[11]。

2020/04/16以前の傾
きは0.078081、以後は
0.015018である。

$R_0=2.09$ であると見積
もることができる。これ
は(4),(5)によると、
最終的に総感染者割合
が82.0%、感染収束に必
要な最終免疫獲得率が
52.2%になると見積もら
れる。



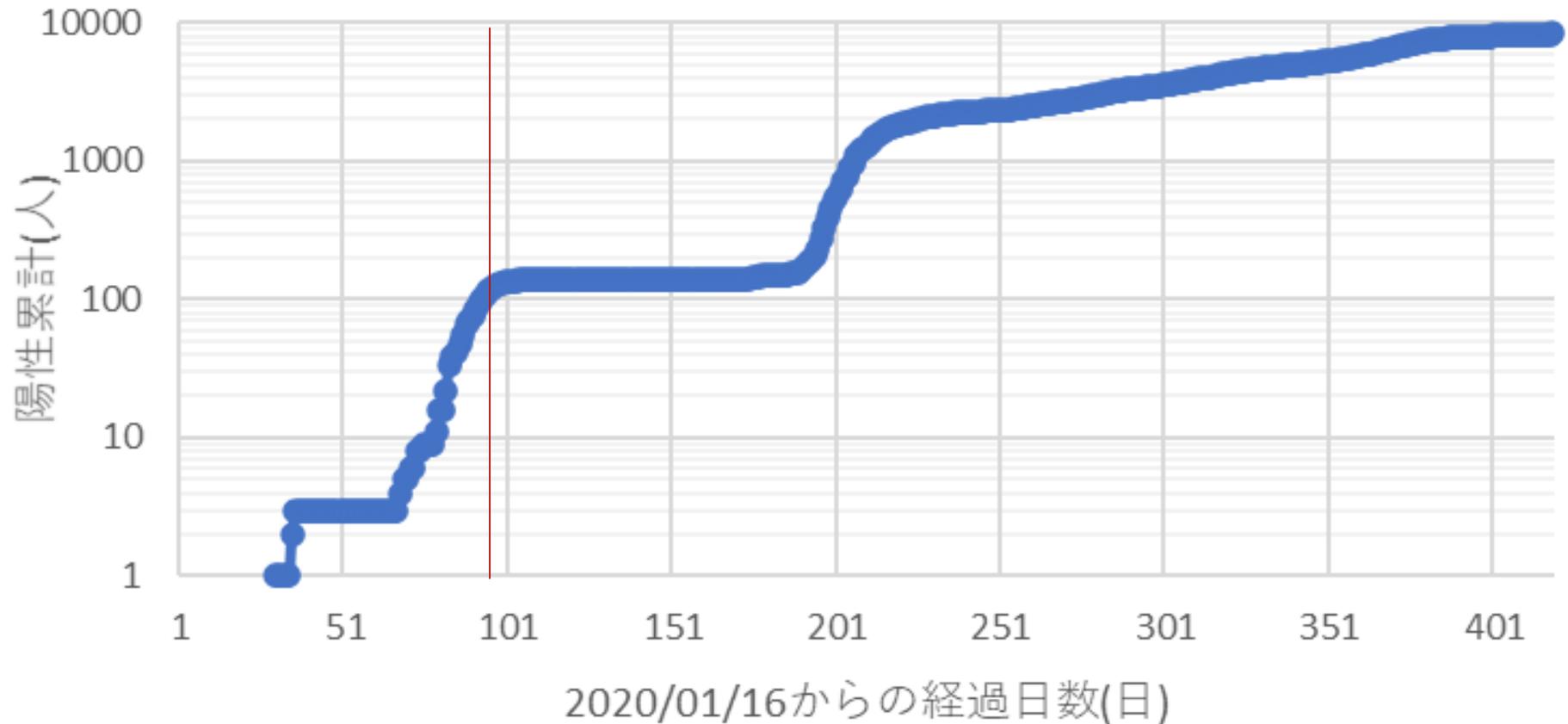
グラフ13:愛知県の陽性累計の片対数グラフ

補足(沖縄県)

グラフ14は
2020/01/16から
2021/03/09までの沖縄
県の陽性累計の片対数
グラフである[11]。

2020/04/16以前の傾
きは0.068269、以後は
0.015924である。

$R_0=1.96$ であると見積
もることができる。こ
れは(4),(5)によると、最
最終的に総感染者割合が
78.6%、感染収束に必要
な最終免疫獲得率が
48.9%になると見積もら
れる。



グラフ14:沖縄県の陽性累計の片対数グラフ

基本再生産数 R_0 のまとめ

	東京都	北海道	大阪府	愛知県	沖縄県	名古屋市
感染初期段階の傾き	0.090357	0.086474	0.109886	0.078081	0.068269	0.068661
感染初期段階後の傾き	0.011299	0.010728	0.013168	0.015018	0.015924	0.014867
基本再生産数 R_0 推定	2.26	2.21	2.54	2.09	1.96	1.96
総感染者割合(%)	85.5	84.6	89.8	82.0	78.6	78.6
感染収束に必要な 最終免疫獲得率(%)	55.8	54.8	60.6	52.2	48.9	49.0
	日本	アメリカ	フランス	イタリア	イギリス	
感染初期段階の傾き	0.099796	0.282691	0.297578	0.381952	0.250286	
感染初期段階後の傾き	0.011912	0.011614	0.014724	0.0106556	0.012370	
基本再生産 R_0 数推定	2.40	4.96	5.17	6.35	4.50	
総感染者割合(%)	87.9	99.3	99.4	99.8	98.9	
感染収束に必要な 最終免疫獲得率(%)	58.3	79.8	80.6	84.2	77.8	

考察 1

- ▶ R_0 値(感染初期段階)は違う地域(環境)によって異なる。

→ウイルスの特性、宿主の特性がある。

ウイルスの特性とは、ウイルス自体の感染力の強さや環境による変化があり、 R_0 値に大きく関係していると考えられる。しかし今回の調査では世界各地によって R_0 値が異なる。また日本国内では、日本の R_0 値が2.40であり、どの地域であってもその値前後の値を得る。これは北海道から沖縄までの様々な環境がある中で、気温や湿度などの環境だけではない宿主自体の特性も考えるべきであると考えられる。宿主の特性として、免疫力・免疫獲得、血液型のような身体的違い、その集団の習慣などある。その特性が地域による R_0 値の違いになるといえる。

考察 2

▶ 感染初期段階

→感染初期段階を考える際、主に3つあると考えている。感染者が発見されてから1か月などの一定期間を考える場合、統計グラフから傾きが変わるところまでを考える場合、緊急事態やロックダウンなどの政策を考える場合がある。本研究では、日本は緊急事態宣言が全国に拡大された日、海外はロックダウンが実施された日を境に感染初期段階と採用している。

▶ 感染初期段階後の傾きが、地域によらず似たような値で感染拡大する。

→地域によらず、片対数グラフではある程度の傾きをもって感染拡大する。これは感染初期段階後の感染拡大人数が、感染初期段階にどれだけ抑え込めたかによると捉えることができる。また感染対策を実行したとしても最低限の関りがあり、感染拡大していくと考えられる。

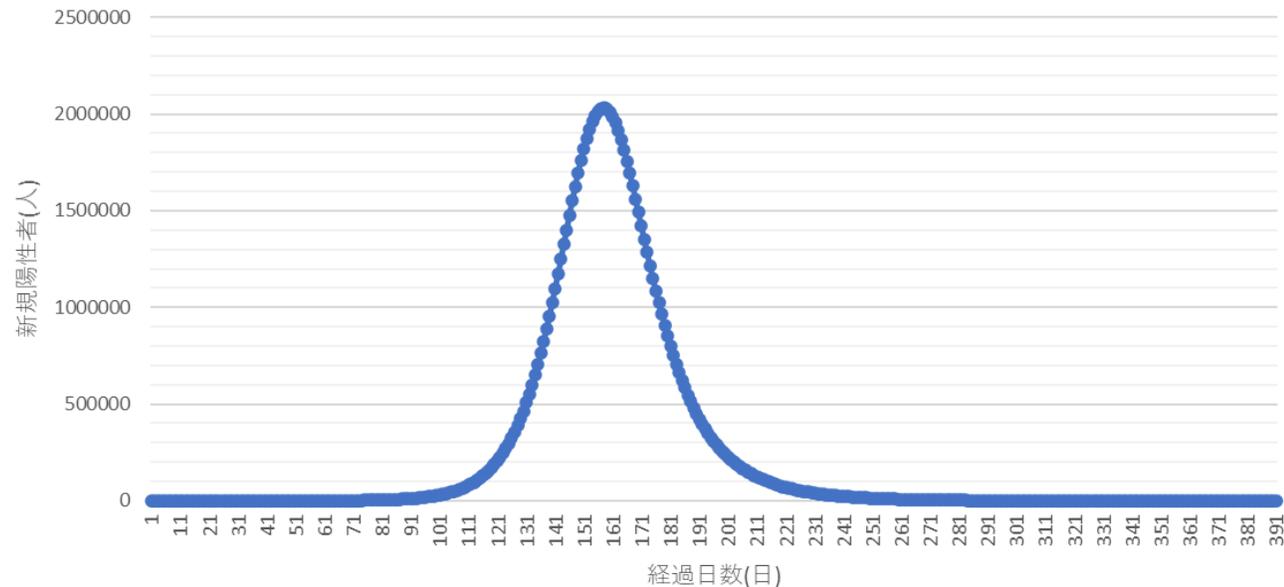
考察 3

▶ ロックダウン後の感染拡大

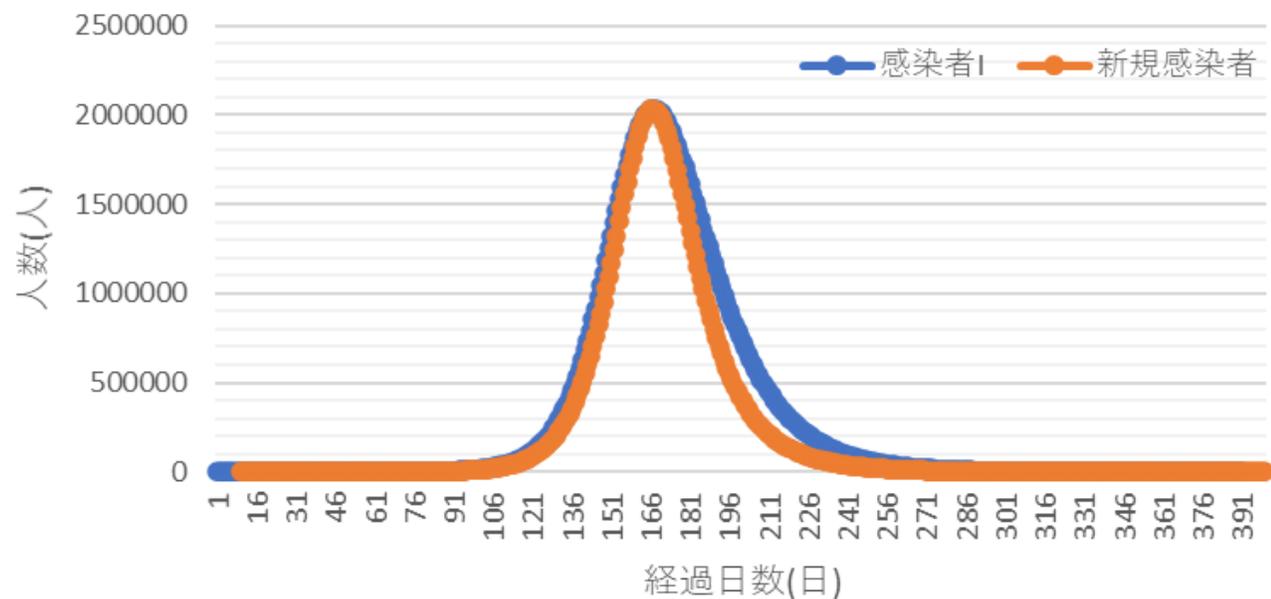
→フランス、イタリア、イギリスがロックダウン後も大きく感染拡大している点に着目し、決定論的に考える。

検証2から感染者Iの増加から減少に生じるころが分かれば、 R_0 値の決定論的な特性から逆算的に最終的な感染者累計が推測できる。しかし一般的に新規感染者のデータが公開されているので、そこから考える。

まず、検証で使用したデータをもとに新規感染者から推測する差を考える。グラフ15は新規感染者のグラフであり、グラフ16は感染者Iを0.0879倍し9日間平行移動したグラフである。グラフ16から新規感染者も似たような挙動を得るということが分かる。グラフ15から158日に最大値を迎え、この時の陽性累計は42739650.6人である。これを総感染者割合とみなして逆算すると、最終免疫獲得率が58.0%であったため、全体の人数は73689052.8人である。また総感染者割合が88.6%であるので、65288500.7人である。2000万人以上の差が生じている。



グラフ15:新規感染者のグラフ



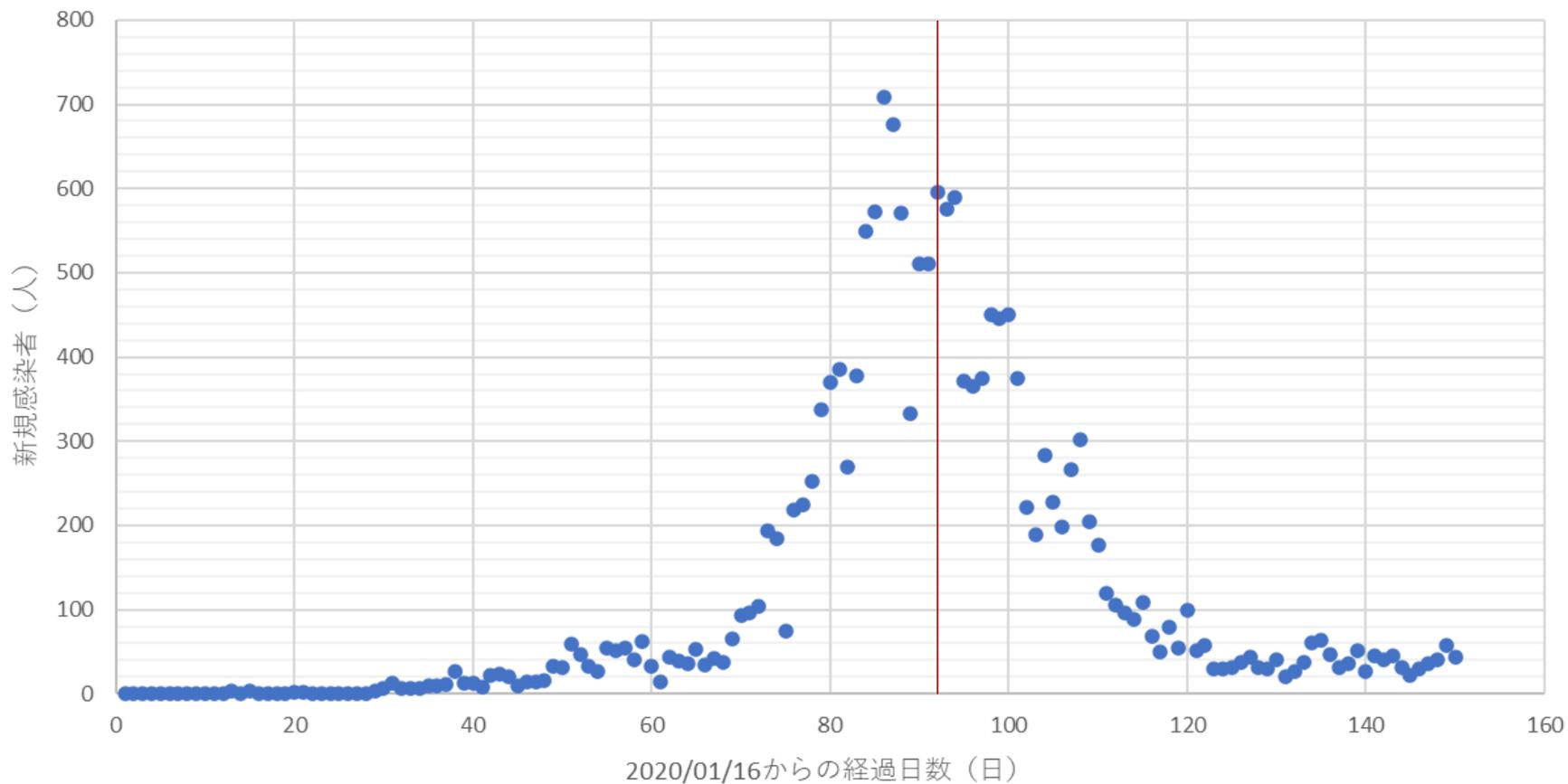
グラフ16:新規感染者と感染者Iのグラフ

考察 4

・日本

グラフ17は日本の新規感染者グラフである[5]。赤線は2020/04/16(緊急事態宣言が全国に発令された日)を示している。

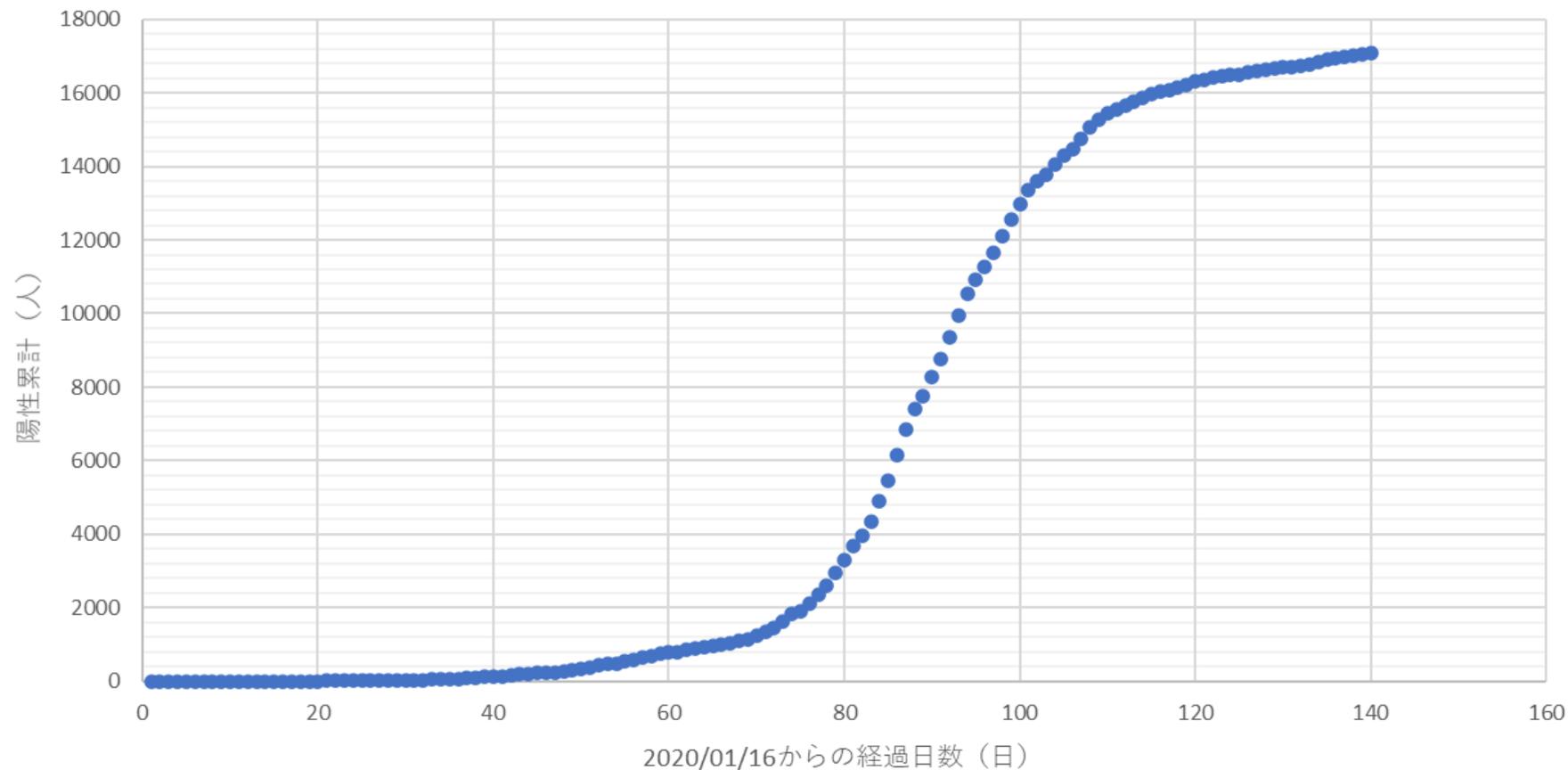
2020/04/10に最大値を迎え減少しているのので、ここを感染収束に必要な最終免疫獲得率とみなす。このときの陽性累計人数を6171人である。最終的に総感染者割合が87.9%、感染収束に必要な最終免疫獲得率が58.3%であったため、陽性累計が9307人まで増えると予想される。また、9日間の差があるならば、2020/04/19の陽性累計は10906人であるため16448人まで増加すると予想される。



グラフ17:日本の新規感染者のグラフ(2020/06/13まで)

考察 5

グラフ18は2020/06/03までの日本の陽性累計である。考察4で9307人、9日間の差を考えると16448人であり、グラフ18から16000人あたりで増加が少なくなっているため、SIRモデルの決定論的に得ていると考えられる。



グラフ18:日本の陽性累計(2020/06/03まで)

考察 6

・イタリア

グラフ19は2020/05/28までのイタリアの新規感染者のグラフである[10]。赤線は2020/03/09(ロックダウンした日)を示している。

グラフ19より2020/03/21の時に最大値を迎え緩やかに減少している。この時の陽性累計は53578人である。ここでグラフ15とグラフ19を比べると、最大値以降の挙動に違いが見られる。この違いが第一波の人数に大きく影響したと考えられる。これは03/09以前に感染した人が新たに発見されたり、小さなコミュニティに対して少しずつ感染が広がっていったのではないかと考えている。



2020/02/19からの経過日数 (日)
グラフ19:イタリアの新規陽性者 (2020/05/28まで)

今後の展望

- ▶ 確率モデルについて学び、それをシミュレーションする形で研究していきたいと考えている。

参考文献1

[1]小林鉄郎,西浦博,感染症数理モデル入門,数学セミナー59(9),2020-09,pp.14-18

[2]稲葉寿,基本再生産数,東京大学大学院理学系研究科・理学部,閲覧日
2020/10/21

<<https://www.s.u-tokyo.ac.jp/ja/story/newsletter/keywords/07/01.html>>

[3]感染症疫学の用語解説,一般社団法人日本疫学会、閲覧日2020/12/10

< <https://jeaweb.jp/covid/glossary/index.html> >

[4]実行再生産数ってなに？,社会福祉法人恩賜財団済生会、閲覧日2021/03/03

<https://www.saiseikai.or.jp/feature/covid19/data_q01/>

[5]国内の発生状況など,厚生労働省, 閲覧日2021/01/03

<<https://www.mhlw.go.jp/stf/covid-19/kokunainohasseijoukyou.html>>

[6]都内の最新感染動向,東京都,閲覧日2021/01/03

<<https://stopcovid19.metro.tokyo.lg.jp/>>

参考文献2

[7]道内の最新感染動向,北海道新型コロナウイルスまとめサイト,閲覧日2021/01/03

<<https://stopcovid19.hokkaido.dev/>>

[8]大阪府の最新感染動向,大阪府,閲覧日2021/01/03

<<https://covid19-osaka.info/>>

[9]市内の新型コロナウイルス発生状況,名古屋市,閲覧日2021/02/23

<<https://www.city.nagoya.jp/kenkofukushi/page/0000126920.html>>

[10] COVID-19 CASES IN EUROPE | LIVE UPDATE | WORLD, ITALY, FRANCE, GERMANY, UK, SPAIN, SWITZERLAND, SOUTH KOREA, USA
,CORONAVIRUSSTATISTIQUES,閲覧日2021/02/22

<<https://www.coronavirus-statistiques.com/stats-globale/covid-19-cases-europe/>>

[11]新型コロナ データ一覧,新設サイト新型コロナウイルス,閲覧日2021/02/22

<<https://www3.nhk.or.jp/news/special/coronavirus/data-widget/>>