マルチェンコ・パスツール則

香取研究室

17D2102028D 樋口凌

マルチェンコ・パスツール則について

- 順序無正規化固有値分布で与えられる式で、漸近固有値分布とも呼ばれる。また、順序無正規化固有値分布とは順序付固有値の順序を無視してまとめた固有値全体の分布である[1]。
- ウィシャート行列のサイズと自由度を（それらの比を一定に保ったまま）無限に大きくしていった極限で収束する固有値分布である[2]。
- ランダム行列の各要素が従う確率分布の詳細によらない普遍性を有する[2]。

マルチェンコ・パスツール則を考える

- N×Mの行列 A の N と M の比をβとし、そのもとでM→∞での順序無正規化固有値 $\hat{\lambda}$ の 漸近固有値分布 $f(\hat{\lambda})$ を考えていく

$$\beta = \frac{N}{M}$$

$$\hat{\lambda} = \frac{\lambda}{M} \qquad (\lambda\text{は固有値})$$

$$f(\hat{\lambda}) = \lim_{M\to\infty} M f_i^{unord}\left(M\hat{\lambda}\right)$$

これらからマルチェンコ・パスツール則は次のように与えられる[1]。

$$f(\hat{\lambda}) = (1-\beta)^{+}\delta(\hat{\lambda}) + \frac{\sqrt{(\hat{\lambda}-\hat{\lambda}_{-})^{+}(\hat{\lambda}_{+}-\hat{\lambda})^{+}}}{2\pi\hat{\lambda}} \qquad ー①$$

ただし

$$\hat{\lambda}_{\pm} = \left(1 \pm \sqrt{\beta}\right)^{2}$$

$$(z)^{+} \equiv max(0, z)$$

①の右辺の第一項はデルタ関数δは、M>Nではこの行列のエルミーと行列$A^{H}A$の固有値を求める場合に、値が 0 となる固有値を含むことに よるものであるため、以下では、M≤Nすなわちβ≥1に限定して、右辺第２項のみで考える。

β≥1に限定して、右辺第２項のみで考えると①式は次のようにも書ける

$$f(\hat{\lambda}) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{4\beta - \left(\hat{\lambda} - 1 - \beta\right)^2}}{2\pi\hat{\lambda}} & -② \quad \left(\left(1-\sqrt{\beta}\right)^2 \leq \hat{\lambda} \leq \left(1+\sqrt{\beta}\right)^2\right) \\ 0 & (\text{other}) \end{cases}$$

さらにβ=1,(M=N)の場合には簡単になって

$$f(\hat{\lambda}) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{4}{\hat{\lambda}} - 1} & (0 \leq \hat{\lambda} \leq 0) \\ 0 & (\text{other}) \end{cases}$$

となる(1)。

次に②の累積分布関数を求めてみる。

$$F(\hat{\lambda}) = \int_{(1-\sqrt{\beta})^2}^{(1+\sqrt{\beta})^2} \frac{\sqrt{4\beta-(\hat{\lambda}-1-\beta)^2}}{2\pi\hat{\lambda}} d\hat{\lambda} = \frac{1}{2\pi}\int_{(1-\sqrt{\beta})^2}^{(1+\sqrt{\beta})^2} \frac{\sqrt{-\hat{\lambda}^2+2\hat{\lambda}(1+\beta)-(1-\beta)^2}}{\hat{\lambda}} d\hat{\lambda}$$

ここで上の積分は（文献(3)p122,124より）

$$\int \frac{\sqrt{ax^2+bx+c}}{x} dx = \sqrt{ax^2+bx+c} + \frac{b}{2} I_F + \mathrm{c} J_G$$

$$\begin{cases} I_F = -\frac{1}{\sqrt{|a|}} \sin^{-1} \frac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}} & (a < 0) \\ J_G = \frac{1}{\sqrt{|c|}} \sin^{-1} \frac{bx+2}{x\sqrt{b^2-4ac}} & (c < 0) \end{cases}$$

という公式に当てはまるのでそれぞれ$a = -\hat{\lambda}^2$, b=2 $(1+\beta)$, c= $-(1-\beta)^2$

を代入して計算していく。

すると累積分布関数は次のように求まる

$$F(\hat{\lambda}) = \left\{ \sqrt{-\hat{\lambda}^2 + 2(1+\beta)\hat{\lambda} - (1-\beta)^2} - (1+\beta)\sin^{-1}\left(\frac{1+\beta-\hat{\lambda}}{2\sqrt{\beta}}\right) - |1-\beta| \sin^{-1}\left(\frac{(1-\beta)\hat{\lambda}-(1-\beta)^2}{2\sqrt{\beta}\hat{\lambda}}\right) + \pi \right\} \quad \text{----③}$$

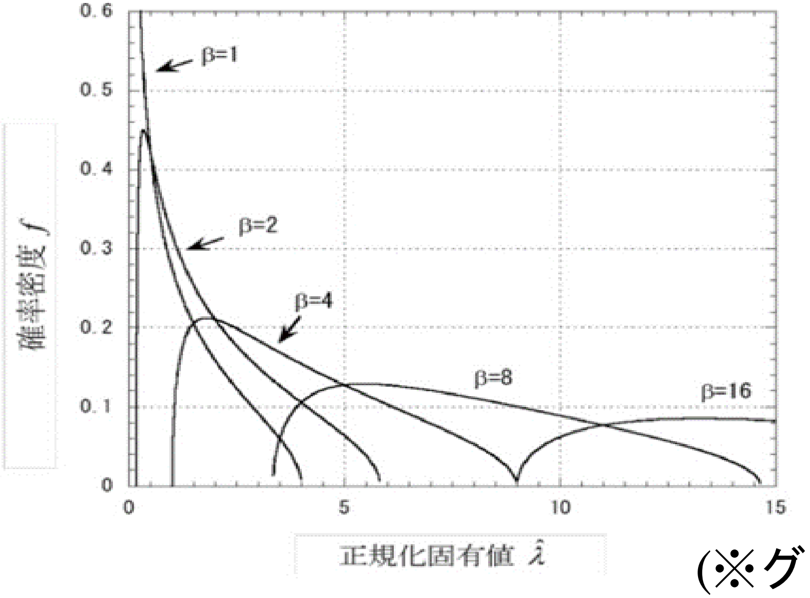
β=1,(M=N)の場合には

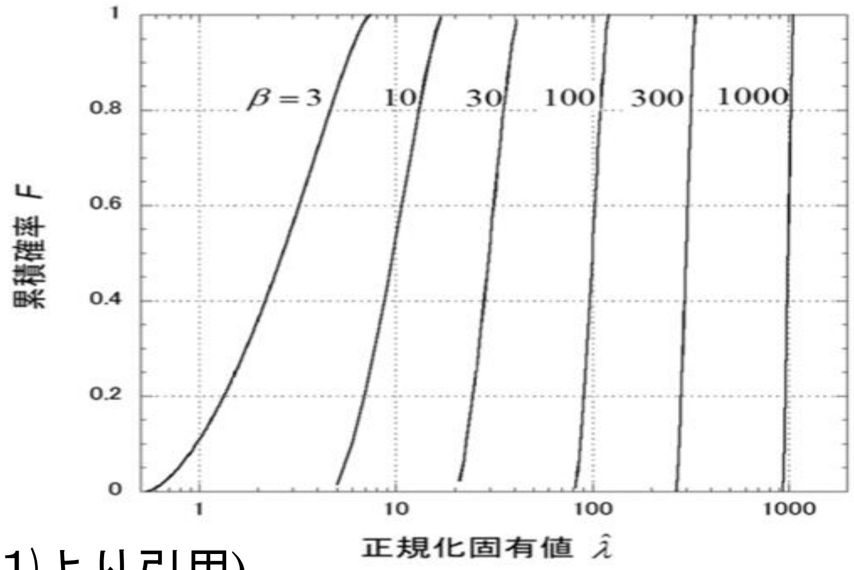
$$F(\hat{\lambda}) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\hat{\lambda}(1-\hat{\lambda})} - \frac{1}{\pi}\sin^{-1}\left(1-\frac{\hat{\lambda}}{2}\right) + \frac{1}{2}$$

となる(1)。

②式より与えられる固有値の確率密度関数βをパラメータとして表示すると左下のグラフのようになり、それぞれ正規化固有値が限定された範囲に収まる。また②式はMが十分に大きいと仮定された状態で導き出されたものであるが、小さい規模でも高い精度で漸近固有値分布に近づくことが調べられている[1]。

③式から与えられる正規化固有値の累積分布関数をβをパラメータとして表示すると右下のグラフのようになる。βが大きくなるにつれて固有値の相対的な変化の幅が小さくなっているのがわかる。





(※グラフは文献(1)より引用)

マルチェンコパスツール則の利用

マルチェンコパスツール則は情報学、工学分野で利用されることがあり、例を挙げるとMIMOと呼ばれる無線通信を高速化する技術の固有値解析や平均通信容量などで利用される。

具体的には、前のスライドの前半で述べたことを利用すると大きいサイズのMIMOの通信容量を漸近固有値分布から近似的に求めようとする場合などは、小さいサイズのMIMOからの近似でも高い精度で行うことができる。また、前のスライドの後半で述べたことはMINOのおいて、通信基地局側と端末側との素子数に大きな差ができるつまり、β>>1という値になるためあのようなグラフになる。これはMIMOにおいては安定した通信路を確保できるということを意味している。

参考文献

⑴唐沢好男(2017) 「伝搬モデルに現れる確率分布（～レイリーフェージングからマッシブ MIMO まで～）」
http://www.radio3.ee.uec.ac.jp/ronbun/TR_YK_005_Probability_distribution.pdf

⑵渡辺澄夫、永尾太郎、樺島祥介、田中利幸、中島伸一(2014)「ランダム行列の数理と科学」森北出版株式会社

⑶森口繁一、松一信、宇田川銈久(1987)「岩波数学公式Ｉ　微分積分・平面曲線」岩波書店

⑷唐沢好男(2015) 「大規模MIMOチャンネルの漸近固有値分布と通信容量（そこから見えてくるもの）」
http://www.radio3.ee.uec.ac.jp/Massive%20MIMO_AP_ken_karasawa.pdf