最も歴史の古いランダム行列
～ウィシャート行列～

中央大学　物理学科　学部4年
香取研究室　池田大輝

ランダム行列とは

- 各成分が乱数で与えられる行列のこと。
- 乱数は独立した同一の確率分布に従っている。
- ランダム行列の固有値や固有ベクトルは、行列のサイズ N を無限大にすると普遍的な法則が現れる。

ウィシャート行列

・1928年に多変量解析における共分散の研究のため、統計学者ジョン・ウィシャートにより導入されたランダム行列。

行列A：$K \times L$とすると以下の2つのエルミート行列を作ることができる。

$$\begin{pmatrix} \text{行列} R_K = AA^{\mathrm{T}} : K \times K \text{行列} \\ \text{行列} R_L = A^{\mathrm{T}}A : L \times L \text{行列} \end{pmatrix}$$

このように表される行列をウィシャート行列という

各成分は平均0の確率変数$\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_k)^T \in \boldsymbol{R}^K$に従うとする。

行列の固有値λは非負の実数（$\lambda \geqq \mathbf{0}$）である。[1] [2]

ウィシャート分布

$\mathbf{z} \in \boldsymbol{R}^K$が平均$\boldsymbol{\mu}$、共分散$\Sigma$のd次元正規分布に従うこととすると、$z$の密度関数は

$$p(z) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}\det(\Sigma)^{\frac{1}{2}}}\exp\left(-\frac{1}{2}(z-\mu)^{\mathrm{T}}\Sigma^{-1}(z-\mu)\right)$$

で与えられる。

$K\times L$行列Aの各列ベクトルが独立に$\boldsymbol{x}^{(i)}\sim N_K\ (0,\Sigma)$に従うとき、 $K\times K$行列R_Kが従う分布を、自由度L、パラメータΣのK次元ウィシャート分布と呼び、

$$AA^{\mathrm{T}}\sim W_K\ (L,\Sigma)$$

と書く。

ウィシャート行列の極限固有値分布（1）

$W_K(L, I_K)$ および $W_K(K, I_L)$ に従う2種類のウィシャート行列の固有値の大きい方から$\min(K, L)$個の分布は同一であり、次元の大きい残りの固有値はすべて0である。ここで$L \geq K$とする。 [2]

$AA^{\mathrm{T}} \sim W_K(L, I_K)$ となるランダム行列 $A \in \boldsymbol{R}^{K \times L}$のサイズを$\alpha = \frac{K}{L}$ の比を保ったまま無限大にしていくとAA^{T}の固有値分布がある分布に収束することが知られており、この固有値の極限分布はマルチェンコ－パスツール則と呼ばれている。

※この極限分布はウィシャート行列を数多く観測してすべての固有値について調べた時だけではなく、ひとつだけ観測し、その（無限個の）固有値について調べたときにも観測される分布である。（自己平均性）[2] [3]

ウィシャート行列の極限固有値分布（2）

$AA^{\mathrm{T}} \sim W_K\ (L, \sigma^2 I^K)$ に従う1つの行列を考える。この行列の固有値の集合を $\{\tau_1, \cdots, \tau_K\}$ とし、これらを

$$u_k = \frac{\tau_K}{L} \quad , \quad (k = 1, \ldots, K)$$

によってスケーリングした値を考える。u の経験分布を

$$\delta P = \frac{1}{K}\{\delta(u_1) + \cdots + \delta(u_k)\}$$

で定義する。

※ここで$\delta(u)$はu を中心とするDirac測度である。これは適当な集合 X 上で点 x ∈ X に対して定義される測度 δ_xであり、任意の（可測）部分集合 A ⊆ X に対して

$$\delta_x(A) = 1_A(x) = \begin{cases} 0, x \notin A; \\ 1, x \in A \end{cases}$$

を満たすものを指す。ただし 1_A は A の指示関数を表す。 [3]

ウィシャート行列の極限固有値分布（3）

前頁で定義した経験分布δPは次のような条件の下で$p(u)du$に概収束（確率1で収束）する。ただし密度関数 $p(u)$ は

$$u_{min} = \sigma^2(1 - \sqrt{\alpha})^2, \quad u_{max} = \sigma^2(1 + \sqrt{\alpha})^2$$

を用いて

$$p(u) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi\sigma^2\alpha} \dfrac{\sqrt{(u - u_{min})(u_{max} - u)}}{u} & (u_{min} \leqq u \leqq u_{max}) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

で与えられる。[2][3]

おわりに

今回はウィシャート行列、ウィシャート分布について文献、参考書籍等を使用して調べ、まとめあげた。
行列Aの各要素の分布が（行列の要素が独立、平均がゼロで分散が同一、高次モーメントが存在する）の条件を満たすとき行列AA^{T}の固有値密度が前項で与えた

$$p(u)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi\sigma^2\alpha}\dfrac{\sqrt{(u-u_{min})(u_{max}-u)}}{u} & (u_{min}\leqq u\leqq u_{max})\\ 0 & (\text{その他})\end{cases}$$

に収束することが知られており、グラフとして確認することができる。
文献[4]では一例が示されており、マルチェンコーパスツール則との比較も行われている。今回は数式を主に扱ったが、収束の様子を確認するための有効な手段であるグラフも以後活用していきたい。

参考文献

[1] 唐沢 好男：「ランダム行列と漸近固有値分布 ～マッシブ MIMO 基礎理解のための～ 」（Sept. 03, 2018）
http://www.radio3.ee.uec.ac.jp/ronbun/Random_Matrix-YK-014.pdf

[2] 唐沢好男：「伝搬モデルに現れる確率分布 ～レイリーフェージングからマッシブ MIMO まで～」（Dec. 11, 2017）
http://www.radio3.ee.uec.ac.jp/ronbun/TR_YK_005_Probability_distribution.pdf

[3] 渡辺澄夫、永尾太郎、樺島祥介、田中利幸、中島伸一：「ランダム行列の数理と科学」　森北出版（2014）

[4]唐沢 好男：「ウィシャート行列と固有値分布 」（Jan. 18, 2021 ）
http://www.radio3.ee.uec.ac.jp/ronbun/Wishart_Matrix_TR-YK-057.pdf