

# Instantonの統計力学

2013年1月21日

香取研究室  
中央大学物理学科4年  
梶ヶ谷 宜之

# 目次

- Yang-Mills理論
- Instanton解 (自己双対接続)
- Belavin-Polyakov-Schwartz-Tyupkin Instanton
- 自己双対接続のModuli空間
- Atiyah-Drinfeld-Hitchin-Manin構成法
- Nekrasovの分配関数
- Seiberg-Witten曲線
- Prepotential
- Nekrasovの公式

# Yang-Mills理論

- 向き付き4次元多様体  $(M, h) = \mathbf{R}^4$  or  $S^4$
- Compact Lie群 (gauge群)  $G = SU(n)$
- $G$ -主fibre束 $P$ 上の接続を $A$ , その曲率を $F(A)$ として
- Yang-Mills作用汎関数

$$S_{YM}(A) := \frac{1}{2} \int_M (F, F) dvol_M = \frac{1}{2} \int_M \text{tr} (F \wedge *F)$$

停留値をとるとき



$$D * F(A) = 0$$

**Yang-Mills方程式**

$\left\{ \begin{array}{l} * ; \text{Hodge作用素} \\ D ; \text{共変外微分} \end{array} \right.$

$$DF(A) = 0$$

任意の接続に対し, **Bianchi恒等式**

# Gauge変換

- Gauge変換群の元  $g \in \mathcal{G}(P)$  の接続への作用 (gauge変換)

$$A \mapsto g^*(A) = Ad(g^{-1})(A) + g^{-1}dg$$

$$F(A) \mapsto F(g^*(A)) = Ad(g^{-1})(F(A))$$

- この変換の元, Yang-Mills作用は不変  $S_{YM}(g^*(A)) = S_{YM}(A)$
- YM接続のgauge変換もYM接続

例.  $G = U(1)$  ( $P = \mathbb{R}^4 \times U(1)$ )

**電流・電荷無し**のMaxwell方程式

Yang-Mills方程式  $\longrightarrow$  Gaussの法則, Ampèreの法則

Bianchi恒等式  $\longrightarrow$  Faradayの法則, 磁場のGaussの法則

- Gauge変換は,  $A$ にscalar関数  $\chi(x)$  の任意性があるって,

$$g^*(A_\mu(x)) = A_\mu + \partial_\mu \chi(x)$$

# Instanton解 (自己双対接続)

- 空間が4次元のとき,  $* \cdot * = id.$  なので固有値は $\pm 1$
- 固有空間による分解  $\Lambda^2 = \Lambda_+^2 \oplus \Lambda_-^2$
- 随伴束値2-形式の空間の分解  $\Omega^2(adP) = \Omega_+^2(adP) \oplus \Omega_-^2(adP)$   
————▶  $F(A) = F_+(A) + F_-(A)$

反自己双対 (Anti Self-Dual) 方程式

$$F_+(A) = 0 \Leftrightarrow *F(A) = -F(A)$$



**反instanton (ASD接続)**

自己双対 (Self-Dual) 方程式

$$F_-(A) = 0 \Leftrightarrow *F(A) = F(A)$$



**instanton (SD接続)**

**ASD (SD) 接続はYM接続になっている**

※ASD (SD) 接続以外のYM接続はあるか? → 4次元球面上に存在している

# Instanton数

- YM作用は下限で抑えられる

$$S_{YM}(A) = \frac{1}{2} \int_M \text{tr}(F \wedge *F) \geq \pm \frac{1}{2} \int_M \text{tr}(F \wedge F)$$

- ASD (SD) 接続のとき等号が成り立ち,
- 右辺の符号は, SD接続のとき正, ASD接続のとき負

- SU(n)-主fibre束  $P$ の不変量は, 第2Chern類を用いて,

$$\begin{aligned} \int_M \text{tr}(F \wedge F) &= -8\pi^2 \int_M c_2(P \times_{\rho} \mathbf{C}^n) \\ &= -8\pi^2 k \end{aligned}$$

**kはinstanton数と呼ばれる整数  
P上のASD接続は同じinstanton数を持つ**

SD接続全体をgauge変換群で割った商空間を  
**SD接続のmoduli空間**という

$$\mathcal{M}_{n,k} := \mathcal{A}_D / \mathcal{G}(P)$$

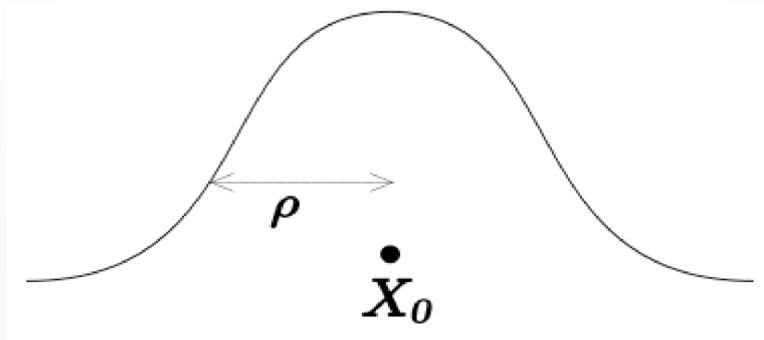
# BPST Instanton

- Belavin-Polyakov-Schwartz-Tyupkin instantonは,
- 構造群が  $G = SU(2)$  で,  $R^4$  上のinstanton

$$A(x) = \text{Im} \left( \frac{(x - X_0) d\bar{x}}{\rho^2 + |x - x_0|^2} \right)$$

$$x, X_0 \in \mathbf{H} \quad (4\text{元数})$$
$$\rho \in \mathbf{R}$$

- $(\rho, X_0)$  はそれぞれinstantonの大きさと中心を表す径数
- BPST instantonの自由度は, (大きさ)+(中心)=1+4=5
- Instanton数は,  $k=1$



# ADHM構成法

- Atiyah-Drinfeld-Hitchin-Manin構成法 ~  $S^4$  上の多重instantonの構成

- $B_1, B_2 \in \text{End}(\mathbf{C}^k), I \in \text{Hom}(\mathbf{C}^n, \mathbf{C}^k), J \in \text{Hom}(\mathbf{C}^k, \mathbf{C}^n)$

$$\mu_R := \sum_{\alpha=1}^2 [B_\alpha, B_\alpha^\dagger] + II^\dagger - J^\dagger J$$

- 運動量写像

$$\mu_C := [B_1, B_2] + IJ$$

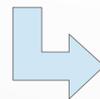
- Dirac作用素

$$\Delta := \begin{pmatrix} I & B_2 + z_2 & B_1 + z_1 \\ J^\dagger & -B_1^\dagger - \bar{z}_1 & B_2^\dagger + \bar{z}_2 \end{pmatrix}$$

- ADHM方程式  $\mu_R = 0, \mu_C = 0 \Leftrightarrow \Delta\Delta^\dagger = \begin{pmatrix} \square & 0 \\ 0 & \square \end{pmatrix}$

- $\text{Ker}(\Delta)$  の正規直交基底を横に並べた  $(2k+n) \times n$  行列  $U$  を用いて

$$A_\mu = U^\dagger \partial_\mu U$$



**SU(n)のk-instanton**

# ADHM構成法

- Atiyah-Drinfeld-Hitchin-Manin構成法 ~  $S^4$  上の多重instantonの構成

- $B_1, B_2 \in \text{End}(\mathbf{C}^k), I \in \text{Hom}(\mathbf{C}^n, \mathbf{C}^k), J \in \text{Hom}(\mathbf{C}^k, \mathbf{C}^n)$

$$\mu_R := \sum_{\alpha=1}^2 [B_\alpha, B_\alpha^\dagger] + II^\dagger - J^\dagger J$$

- 運動量写像

$$\mu_C := [B_1, B_2] + IJ$$

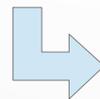
- Dirac作用素

$$\Delta := \begin{pmatrix} I & B_2 + z_2 & B_1 + z_1 \\ J^\dagger & -B_1^\dagger - \bar{z}_1 & B_2^\dagger + \bar{z}_2 \end{pmatrix}$$

- ADHM方程式  $\mu_R = 0, \mu_C = 0 \Leftrightarrow \Delta\Delta^\dagger = \begin{pmatrix} \square & 0 \\ 0 & \square \end{pmatrix}$

- $\text{Ker}(\Delta)$  の正規直交基底を横に並べた  $(2k+n) \times n$  行列  $U$  を用いて

$$A_\mu = U^\dagger \partial_\mu U$$



**SU(n)のk-instanton**

# Instanton Moduli空間

- ADHM座標  $(B_1, B_2, I, J)$  への  $U(k)$  作用

$$(B_1, B_2, I, J) \mapsto (gB_1g^{-1}, gB_2g^{-1}, gI, Jg^{-1}) \quad (g \in U(k))$$

- hyper-Kähler商としてinstanton moduli空間が構成される

$$\mathcal{M}_{n,k} = \{(B_1, B_2, I, J) \mid \mu_{\mathbf{R}} = 0, \mu_{\mathbf{C}} = 0\} / U(k)$$

- $\mathcal{T} = T^2 \times T^{n-1} \subset SO(4) \times SU(n)$  はmoduli空間に次のように作用する

$$(B_1, B_2, I, J) \mapsto (t_1B_1, t_2B_2, Ie^{-1}, t_1t_2eJ)$$

$$e = \text{diag}(e^{\sqrt{-1}a_1}, \dots, e^{\sqrt{-1}a_n}) \in T^{n-1}, (t_1, t_2) \in T^2$$

- Instanton moduli空間の特異点の解消  $\rightarrow$  非可換時空へ変形

$$\mathcal{M}_{n,k}^{(\zeta)} = \{(B_1, B_2, I, J) \mid \mu_{\mathbf{R}} = \zeta, \mu_{\mathbf{C}} = 0\} / U(k)$$

# Nekrasovの分配関数

- Nekrasovの分配関数とは、次の同変積分のこと

$$Z_{Nek}^{SU(n)}(\vec{a}, \epsilon_1, \epsilon_2; q) := \sum_{k=0}^{\infty} q^k \int_{\mathcal{M}_{n,k}} \mathbf{1}$$

- $\mathcal{T}$ -作用の固定点は、合計k個の箱を持つn枚のYoung図で特徴づけられる
- 局所化定理によって、積分は固定点の周りに局所化し、

$$Z_{Nek}^{SU(n)}(\vec{a}, \epsilon_1, \epsilon_2; q) = \sum_{\vec{\lambda}} q^{|\vec{\lambda}|} Z_{\vec{\lambda}}(\vec{a}, \epsilon_1, \epsilon_2)$$

$$Z_{\vec{\lambda}}(\vec{a}, \epsilon_1, \epsilon_2) = \frac{1}{\epsilon_2^{2n|\vec{\lambda}|}} \prod_{(l,i) \neq (m,j)} \frac{\Gamma(\lambda_i^{(l)} - \lambda_j^{(m)} + \nu(j-i+1) + b_{lm}) \Gamma(\nu(j-i) + b_{lm})}{\Gamma(\lambda_i^{(l)} - \lambda_j^{(m)} + \nu(j-i) + b_{lm}) \Gamma(\nu(j-i+1) + b_{lm})}$$

$$b_{lm} := \frac{a_l - a_m}{\epsilon_2}, \quad \nu := -\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}, \quad \vec{\lambda} = (\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(n)}), \quad |\vec{\lambda}| := \sum_{l,i} \lambda_i^{(l)}$$

# Nekrasov分配関数の例

- $\nu = 1, \epsilon_2 = \hbar$  のとき, Nekrasovの分配関数は,

$$Z_{Nek}^{SU(n)}(\vec{a}, -\hbar, \hbar; q = \Lambda^{2n}) = \sum_{\vec{\lambda}} \left(\frac{\Lambda}{\hbar}\right)^{2n|\vec{\lambda}|} \prod_{(l,i) \neq (m,j)} \left( \frac{a_l - a_m + \hbar(\lambda_i^{(l)} - \lambda_j^{(m)} + j - i)}{a_l - a_m + \hbar(j - i)} \right)$$

- 特に  $n = 1$  とすると,  $h(\square)$ をYoung図の□でのhook-lengthとして,

$$\begin{aligned} Z_{Nek}^{U(1)}(\vec{a}, -\hbar, \hbar; \Lambda^{2n}) &= \sum_{\lambda} \left(\frac{\Lambda}{\hbar}\right)^{2|\lambda|} \prod_{i < j} \left( \frac{\lambda_i - \lambda_j + j - i}{j - i} \right)^2 \\ &= \sum_{\lambda} \left(\frac{\Lambda}{\hbar}\right)^{2|\lambda|} \prod_{h(\square) \in \lambda} \frac{1}{h(\square)^2} \end{aligned}$$

7	5	4	2	1
4	2	1		
1				

各箱のhook-length

- 類似の統計力学のモデルとして,  $2n$ 歩後に元の位置に戻る $m$ 個のvicious walker

$$Z_{RVW} = \sum_{\lambda \subset (m)^n} \prod_{i < j} \left( \frac{\lambda_i - \lambda_j + j - i}{j - i} \right)^2$$

# Seiberg-Witten曲線

- Seiberg-Witten曲線～Riemann面の族

$$\Lambda^n \left( w + \frac{1}{w} \right) = P_n(z) = z^n + \sum_{l=0}^{n-2} u_{l+2} z^{n-(l+2)}$$

$$P_n(z)^2 - (2\Lambda^n)^2 = \prod_{l=1}^n (z - z_l^+)(z - z_l^-)$$

- 分岐は  $[z_l^-, z_l^+]$  にとる
- $[z_l^-, z_l^+]$  を囲む周回を  $\alpha_l$ -cycle , 分岐の間を囲む周回を  $\beta_l$ -cycle
- 次のようなu-平面上の関数を考える

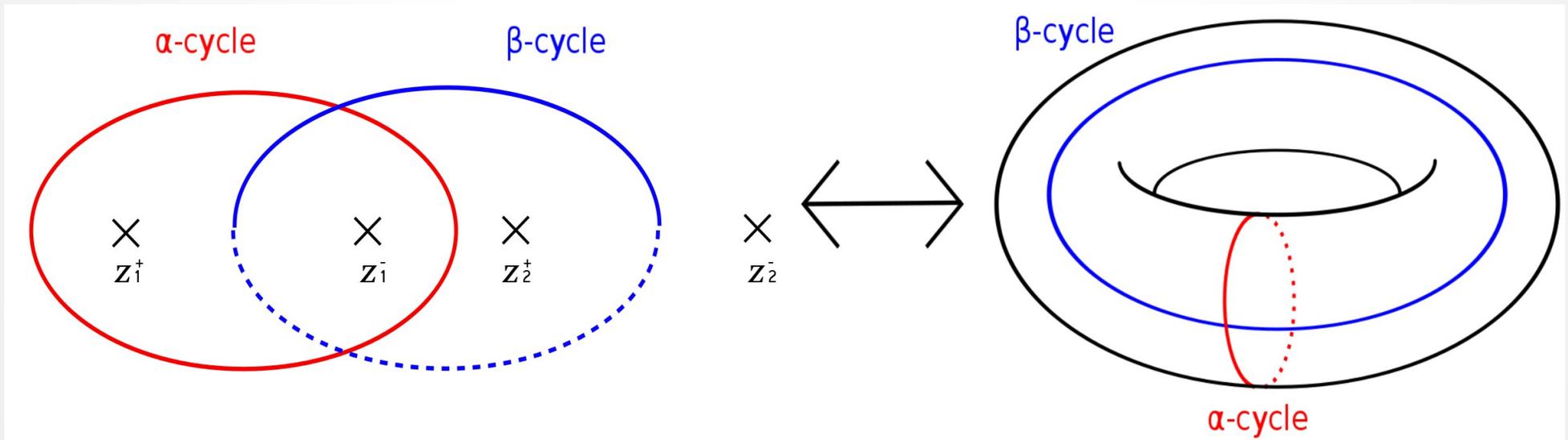
$$a_l = \oint_{\alpha_l} ds, \quad a_l^D = \oint_{\beta_l} ds$$

Seiberg-Witten微分  $ds := \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} z \frac{dw}{w}$

# SU(2)のSW曲線

- SU(2) Sw曲線のRiemann面はtorusに対応
- 周回は図のようになっている

$$y^2 = (z^2 - u)^2 - 4\Lambda^2$$



# Prepotential

- prepotentialと呼ばれる関数  $\mathcal{F}$  が存在して,

$$a_l^D = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial a_l}$$

➡ 積分することでprepotentialを決定できる



- $N=2$  超対称SU(2) Yang-Mills理論の低エネルギー有効作用の決定
- 有効作用の形はprepotentialで決まっています,

$$L_{eff} = \frac{1}{4\pi\sqrt{-1}} \left( \frac{1}{2} \int d^2\theta \frac{\partial^2 \mathcal{F}(\Phi)}{\partial \Phi^2} W^\alpha W_\alpha + \int d^2\theta d^2\bar{\theta} \Phi^\dagger \frac{\partial \mathcal{F}(\Phi)}{\partial \Phi} \right) + \text{(Hermite共役)}$$

prepotentialの決定方法が他にあるか? → Nekrasovの公式

# Nekrasovの公式

- Nekrasov関数を改めて,

$$Z_{Nek}^{SU(n)}(\vec{a}, \epsilon_1, \epsilon_2; q) = Z_{pert}(\vec{a}, \epsilon_1, \epsilon_2; \Lambda) \sum_{\vec{\lambda}} q^{|\vec{\lambda}|} Z_{\vec{\lambda}}(\vec{a}, \epsilon_1, \epsilon_2)$$

$$Z_{pert}(\vec{a}, \epsilon_1, \epsilon_2; \Lambda) = \exp \left( \sum_{l,m} \gamma_{\epsilon_1, \epsilon_2}(a_l - a_m; \Lambda) \right)$$

$$\gamma_{\epsilon_1, \epsilon_2}(a; \Lambda) := \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \frac{\Lambda^s}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{dt}{t} t^s \frac{e^{-ta}}{(e^{\epsilon_1 t} - 1)(e^{\epsilon_2 t} - 1)}$$

- $\epsilon_1 \epsilon_2 \log Z_{Nek}^{SU(n)}(\vec{a}, \epsilon_1, \epsilon_2; q)$  は  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0$  で正則で

$$\mathcal{F} = \lim_{\epsilon_\alpha \rightarrow 0} \epsilon_1 \epsilon_2 \log Z_{Nek}^{SU(n)}(\vec{a}, \epsilon_1, \epsilon_2; q)$$