量子力学２ 期末テスト（２００７年度）

教科書・ノートなどの持ち込み不可.
裏面も使って良いので，解答はなるべく解答用紙一枚に収めること.

裏面もあるので注意 (小問は (5) まであります).

問題　h をプランク定数として，$\hbar = h/2\pi$ とする．また $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$ とする．質量 m の 1 次元自由粒子のハミルトニアンは $\mathcal{H} = -\dfrac{\hbar^2}{2m}\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$ で与えられる．以下の設問に答えよ．ただし必要な場合は，次の積分公式を用いてよいものとする.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\Big(-ax^2 + bx\Big)dx = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{1/2} \exp\left(\frac{b^2}{4a}\right). \tag{1}$$

ここで a, b は一般に複素数 (ただし a の実部は正とする).

(1)　p を実数として $\phi_p(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{\mathrm{i}px/\hbar}$ とする．これが，p のある実関数 $E(p)$ に対して

$$\mathcal{H}\phi_p(x) = E(p)\phi_p(x)$$

を満たすとき，$E(p)$ をエネルギー固有値という．$E(p)$ を求めなさい.

(2)　1 次元のシュレーディンガー方程式は

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = \mathcal{H}\psi(x,t)$$

である．$A(p)$ を x には依らない，p の関数とすると

$$\psi(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(p)\phi_p(x)\exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}E(p)t\right)dp \tag{2}$$

は，この 1 次元自由粒子のシュレーディンガー方程式を満たすことを示せ.

(3)　(2) 式で $t = 0$ とすると

$$\psi(x,0) = \int_{-\infty}^{\infty} A(p)\phi_p(x)dp = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty} A(p)e^{\mathrm{i}px/\hbar}dp$$

となる．このことから，$A(p)$ は，初期 $t = 0$ での波動関数 $\psi(x,0)$ のフーリエ変換

$$A(p) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\xi,0)\phi_p^*(\xi)d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty} \psi(\xi,0)e^{-\mathrm{i}p\xi/\hbar}d\xi \tag{3}$$

として与えられることが分かる．(3) 式を (2) 式の $A(p)$ に代入して，p についての積分と ξ についての積分の順序を交換して p についての積分を先に実行すると

$$\psi(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x,\xi,t)\psi(\xi,0)d\xi \tag{4}$$

という表式が得られる．$G(x,\xi,t)$ を求めよ．ただしここでは，a が純虚数である場合にも積分公式 (1) を用いてよいものとする.

(4)　初期 $t=0$ での波動関数として $\psi(x,0)=\dfrac{1}{(2\pi\delta^2)^{1/4}}\exp\left(-\dfrac{x^2}{4\delta^2}\right)$ を考えることにする．ただし δ は長さの次元をもつ正の定数とする．これを (4) 式に代入して ξ の積分を実行すれば時刻 $t>0$ での波動関数 $\psi(x,t)$ が求められる．そして粒子の確率密度は,

$$|\psi(x,t)|^2 = C\exp\left(-\frac{x^2}{2(\delta^2+v^2t^2)}\right)$$

という形になることが分かる（C は規格化定数）．下記のヒントを参考にして，v を定めなさい．

ヒント：α と β がともに実数のとき，積分公式 (1) より

$$J=\int_{-\infty}^{\infty}\exp\Big(-\alpha\xi^2+i\beta(\xi-x)^2\Big)d\xi=\left(\frac{\pi}{\alpha-\mathrm{i}\beta}\right)^{1/2}\exp\left[-\frac{\alpha}{1+\alpha^2/\beta^2}\left(1-\frac{\alpha}{\beta}\mathrm{i}\right)x^2\right] \qquad (5)$$

という積分公式が導かれる．両辺の複素数の意味での二乗を計算すると

$$|J|^2 = J\times J^* = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\exp\left(-\frac{2\alpha}{1+\alpha^2/\beta^2}x^2\right) \qquad (6)$$

となる．公式 (5) の α と β をどのようにとれば，問 (4) で計算すべき ξ の積分に一致するか考えよ．そして公式 (6) を用いれば，v が定まるはずである．

(5)　上で求めた v は速度の次元をもつ．これに m をかければ，運動量の次元をもつ量が得られる．以上のことに注意して，上で求めた v の値について,「位置と運動量の間の不確定性原理」に基づいて考察を加えよ．