量子力学２ 期末テスト（２００８年度）

教科書・ノートなどの持ち込み不可．
裏面も使って良いので，解答はなるべく解答用紙一枚に収めること．

裏面もあるので注意.

問題１ [計 80 点]　h をプランク定数として，$\hbar = h/2\pi$ とする．また $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$ とする．質量 m, 角振動数 ω の 1 次元調和振動子のシュレーディンガー方程式は

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,t) + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2\psi(x,t) = 0 \tag{1}$$

で与えられる．これを解いて波動関数 $\psi(x,t)$ が求められると，この調和振動子の位置 x が時刻 t で $a \leq x \leq b$ である確率が，$p(x,t) = |\psi(x,t)|^2$ として，

$$\int_a^b p(x,t)dx$$

で与えられる．$p(x,t)$ を確率密度関数という．以下の設問に答えよ．必要に応じて次の積分公式を用いてよいものとする．(ただし $\alpha > 0$.)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\alpha x^2}dx = \frac{1}{2\alpha}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

(1) [5 点]　E を実数として

$$\psi(x,t) = u(x)e^{-\mathrm{i}Et/\hbar}$$

が (1) の解であるとする．このときは $p(x,t)$ は t によらず x だけの関数になることを示せ．(時間によらない確率分布を**定常分布**という.)

(2) [5 点]　このとき $u(x)$ の満たすべき方程式は

$$\frac{d^2}{dx^2}u(x) = \left\{\left(\frac{m\omega x}{\hbar}\right)^2 - \frac{2m}{\hbar^2}E\right\}u(x) \tag{2}$$

となることを導け.

(3) [10 点]　E の値を固定して，x の絶対値が大きい場合を考えると，(2) は $\dfrac{d^2}{dx^2}u(x) \fallingdotseq \left(\dfrac{m\omega x}{\hbar}\right)^2 u(x)$ と近似できる．さらにこの 2 階の微分方程式を次の 1 階の微分方程式で置き換えて考えてみることにしよう.

$$\frac{d}{dx}u_0(x) = -\frac{m\omega x}{\hbar}u_0(x). \tag{3}$$

この方程式の解は

$$u_0(x) = C_0 \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2\right)$$

で与えられることを示せ．ただし C_0 は定数である．

(4) [10 点]　規格化条件

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u_0(x)|^2 dx = 1$$

を満たすように，定数 C_0 を定めよ．ただし C_0 は正の実数とする．

(5) [10 点]　上で定めた $u_0(x)$ は，元来解くべき方程式 (2) を近似して簡単化した方程式 (3) の解であるから，一般には元来の方程式 (2) の解ではない．しかし実は, (2) 式で E の値をある特別な値 $E = E_0$ にすると，$u_0(x)$ は (2) 式の解になる．E_0 の値を求めよ．

(6) [10 点]　次に

$$u_1(x) = C_1 x \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2\right)$$

としてみよう．($u_0(x)$ に x をかけたような形.) これも (2) 式で E をある特別な値 $E = E_1$ にしたときの解になっている．E_1 の値を求めよ．

(7) [10 点]　規格化条件を満たすように C_1 を定めよ．ただし C_1 は正の実数とする．

(8) [10 点]　上で求めた $u_1(x)$ で定義される

$$p_1(x) = |u_1(x)|^2$$

は，エネルギーが $E = E_1$ である調和振動子の定常分布の確率密度関数である．この関数の概略をグラフに描きなさい．

(9) [10 点]　これまでの計算で，**時間によらないシュレーディンガー方程式** (2) に対して，**エネルギー固有値**が $E = E_0$ である**固有状態波動関数** $u_0(x)$ と，エネルギー固有値が $E = E_1$ である固有状態波動関数 $u_1(x)$ が求められたことになる．別のエネルギー固有値とそれに対する固有状態波動関数はどのようにして求められるであろうか．もう一つ別のエネルギー固有値と固有状態波動関数を求めてみよ．

問題 2 [計 20 点]　次の問いに答えよ．

(1) [5 点]　演算子のエルミート共役とは何か説明せよ．

(2) [5 点]　エルミート演算子とは何か定義を述べよ．

(3) [10 点]　エルミート演算子の固有値は実数であることを証明せよ．