

量子力学3 期末テスト(2007年度)

教科書・ノートなどの持ち込み不可。

裏面も使って良いので、解答はなるべく解答用紙一枚に収めること。

次の3問に答えなさい。(裏面にも問題があるので注意しなさい。)

問題 I. 角運動量演算子 $\vec{L} = (L_x, L_y, L_z)$ を \vec{r} と \vec{p} を演算子として

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

で定義する。

- (1) L_x を x, y, z, p_x, p_y, p_z を用いて表しなさい。
- (2) L_z を x, y, z, p_x, p_y, p_z を用いて表しなさい。
- (3) 次の交換関係が成り立つことを示しなさい。

$$[L_x, L_z] = -i\hbar L_y.$$

ここで、 $i = \sqrt{-1}$ であり、 \hbar をプランク定数として $\hbar = h/2\pi$ 。また、 $[A, B] = AB - BA$ (交換子) である。

- (4) 上の結果から、角運動量演算子の x 成分 L_x と z 成分 L_z に対して同時に固有状態となるような状態は、一般には存在できないことを証明しなさい。

問題 II. 角運動演算子 $\vec{L} = (L_1, L_2, L_3)$ は、 $[L_j, L_k] = i\hbar \sum_{\ell=1}^3 \varepsilon_{jkl} L_\ell$, $j, k = 1, 2, 3$ という交換関係を満たす。ここで、 ε_{jkl} は完全反対称テンソルである。以下、

$$L^2 = L_1^2 + L_2^2 + L_3^2, \quad L_+ = L_1 + iL_2, \quad L_- = L_1 - iL_2$$

とする。次の設問に答えなさい。

- (1) L^2 と L_3 とは可換であること、すなわち $[L^2, L_3] = 0$ であることを示しなさい。
- (2) 次の2つの関係式が成り立つことを証明しなさい。

$$[L_3, L_+] = \hbar L_+, \quad [L_3, L_-] = -\hbar L_-.$$

- (3) 次の2つの関係式が成り立つことを証明しなさい。

$$L_+ L_- = L^2 - L_3^2 + \hbar L_3, \quad L_- L_+ = L^2 - L_3^2 - \hbar L_3.$$

問題 III $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ を, 各成分 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ が定数である定ベクトルとする. $\vec{\lambda}$ の大きさを $\lambda = |\vec{\lambda}|$ と書き, $\vec{\lambda}$ 向きの単位ベクトルを $\hat{\lambda}$ と書くと, $\vec{\lambda} = \lambda \hat{\lambda}$ と表される. ある定ベクトル \vec{r} に対して,

$$\vec{r}(\vec{\lambda}) = \exp\left(\frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot \vec{\lambda}\right) \vec{r} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot \vec{\lambda}\right) \quad (1)$$

とする.

(1) $\vec{r}(\vec{\lambda})$ は次の方程式を満たすことを示しなさい.

$$i\hbar \frac{d}{d\lambda} \vec{r}(\vec{\lambda}) = [\vec{r}(\vec{\lambda}), \vec{p} \cdot \hat{\lambda}]. \quad (2)$$

(2) $[r_1, \vec{p} \cdot \hat{\lambda}]$, $[r_2, \vec{p} \cdot \hat{\lambda}]$, $[r_3, \vec{p} \cdot \hat{\lambda}]$ を求めなさい. その結果を用いると, (2) 式は

$$\frac{d}{d\lambda} \vec{r}(\vec{\lambda}) = \hat{\lambda} \quad (3)$$

と書き直せることを示しなさい.

(3) 微分方程式 (3) の解を求めなさい.

(4) 以上のことから, 量子力学における運動量演算子 \vec{p} の役割について論じなさい.