量子力学３　期末テスト（２００８年度）

教科書・ノートなどの持ち込み不可.
裏面も使って良いので，解答はなるべく解答用紙一枚に収めること.

次の 2 問に答えなさい.（裏面にも問題があるので注意しなさい.）

問題 I　$\mathrm{i} = \sqrt{-1}$ とし，h をプランク定数として $\hbar = h/2\pi$ とする．角運動量演算子 $\vec{L} = (L_1, L_2, L_3)$ は,

$$[L_j, L_k] = \mathrm{i}\hbar \sum_{\ell=1}^{3} \varepsilon_{jk\ell} L_\ell, \qquad j, k = 1, 2, 3 \tag{1}$$

という交換関係を満たす．ここで，$\varepsilon_{jk\ell}$ は完全反対称テンソルである．以下

$$L^2 = L_1^2 + L_2^2 + L_3^2, \quad L_+ = L_1 + \mathrm{i}L_2, \quad L_- = L_1 - \mathrm{i}L_2$$

とする．次の設問に答えなさい.

(1)　完全反対称テンソル $\varepsilon_{jk\ell}$ とは何か説明して，(1) 式から具体的に，3 つの交換子

$$[L_1, L_2], \quad [L_2, L_3], \quad [L_3, L_1]$$

を書き下しなさい.

(2)　交換子の間に一般的に成り立つ関係式

$$[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$$

を証明しなさい．またこれを用いて，L^2 と L_3 とは可換であること

$$[L^2, L_3] = 0$$

を示しなさい.

(3)　次の 2 つの関係式が成り立つことを証明しなさい.

$$[L_3, L_+] = \hbar L_+, \qquad [L_3, L_-] = -\hbar L_-.$$

(4)　次の 2 つの関係式が成り立つことを証明しなさい.

$$L_+L_- = L^2 - L_3^2 + \hbar L_3, \qquad L_-L_+ = L^2 - L_3^2 - \hbar L_3.$$

(5)　L^2 と L_3 の同時固有状態ベクトルを $|\ell, m\rangle$ と書き,

$$L^2|\ell, m\rangle = \hbar^2 \ell(\ell+1)|\ell, m\rangle, \qquad L_3|\ell, m\rangle = \hbar m|\ell, m\rangle$$

であるとする．ここで，ℓ, m は実数であり，$\ell \geq 0$ である．次の 2 つの関係式を導きなさい.

$$\langle \ell, m|L_+L_-|\ell, m\rangle = \hbar^2 \Big\{ \ell(\ell+1) - m(m-1) \Big\} \langle \ell, m|\ell, m\rangle,$$
$$\langle \ell, m|L_-L_+|\ell, m\rangle = \hbar^2 \Big\{ \ell(\ell+1) - m(m+1) \Big\} \langle \ell, m|\ell, m\rangle.$$

(6) $\langle \ell, m | L_+ L_- | \ell, m\rangle \geq 0$, $\langle \ell, m | L_- L_+ | \ell, m\rangle \geq 0$, $\langle \ell, m | \ell, m\rangle \geq 0$ であるので，上の関係式から

$$\ell(\ell+1) - m(m-1) \geq 0 \qquad \text{かつ} \qquad \ell(\ell+1) - m(m+1) \geq 0.$$

という条件が導かれる．この 2 つの条件式はそれぞれ次のように書きなおせることを示しなさい．

$$\left(\ell + \frac{1}{2}\right)^2 \geq \left(m - \frac{1}{2}\right)^2, \qquad \left(\ell + \frac{1}{2}\right)^2 \geq \left(m + \frac{1}{2}\right)^2.$$

また，これら 2 つの不等式を連立させると，次の条件に等しくなることを証明しなさい．

$$-\ell \leq m \leq \ell. \tag{2}$$

(7) $L_-|\ell, m\rangle$ は $|\ell, m-1\rangle$ に比例すること，つまり c_- を定数として $L_-|\ell, m\rangle = c_-|\ell, m-1\rangle$ であることを示しなさい．

(8) $L_+|\ell, m\rangle$ は $|\ell, m+1\rangle$ に比例すること，つまり c_+ を定数として $L_+|\ell, m\rangle = c_+|\ell, m+1\rangle$ であることを示しなさい．

(9) $\langle \ell, m | \ell, m\rangle = 1$, $\langle \ell, m-1 | \ell, m-1\rangle = 1$, $\langle \ell, m+1 | \ell, m+1\rangle = 1$ となるように係数 c_-, c_+ を定めなさい．ただし c_-, c_+ は，不等式 (2) が成り立つときには非負の実数であるように決めなさい．

(10) 次を示しなさい． $L_-|\ell, -\ell\rangle = 0$, $L_+|\ell, \ell\rangle = 0$.

(11) 以上の結果から，ℓ は整数か半奇数でなければならないことを導きなさい．

問題 II.

量子力学における系の並進，回転，および時間発展は，一般的にそれぞれどのように表されるか，運動量演算子 $\vec{p}$, 角運動量演算子 $\vec{L}$，およびハミルトニアン $\mathcal{H}$ を用いて答えなさい．また，古典力学で習った運動量保存則，角運動量保存則，エネルギー保存則は，それぞれ量子力学ではどのような物理的な意味を持つのか，上で与えた表式を用いて説明しなさい．