

臨界現象・フラクタル研究の新世紀——SLE の発見——

香取眞理 <中央大学理工学部物理学科 112-8551 東京都文京区春日 1-13-27 e-mail: katori@phys.chuo-u.ac.jp>

2次元上に話を限るならば、ちょうど臨界温度でのイジング模型の相境界も、臨界密度でのパーコレーション・クラスターの境界も、自己回避ウォークの軌跡も、平面を埋めつくすペアノ曲線も、たった一つの方程式で記述できることが分かってきた。その方程式の名は SLE。1次元ブラウン運動を駆動関数とする1階の微分方程式であり、ただ一つの実数パラメータを持つ。数理物理学でいま大きな話題となっている。

1. フィールズ賞フィーバー

一昨年はAINシュタインの奇跡の年から100年、昨年はボルツマンの自殺から100年であった。ブラウン運動の研究に代表される確率解析も、統計物理学も、20世紀の産物ということである。その20世紀最後の年であった2000年に出版されたシュラム (O. Schramm) の論文に、複素関数 $g_t(z), z=x+iy$ に対する

$$\frac{\partial}{\partial t} g_t(z) = \frac{2}{g_t(z) - U_t} \quad (1)$$

という微分方程式が登場した。ただし、 $t=0$ で原点をスタートして実軸上を運動するブラウン粒子の時刻 $t>0$ での位置を B_t として

$$U_t = \sqrt{\kappa} B_t \quad (2)$$

とする。 κ は正のパラメータである。¹⁾ κ の値をうまく調節しさえすればこの簡単な確率微分方程式一つで、2次元平面上のさまざまな統計物理学模型の臨界現象やランダムなフラクタル曲線の統計を表現できることが、その後数年の間に、シュラム、ローラー (G. Lawler), ベルナー (W. Werner) という3人の数学者たちの論文で明らかにされた。²⁾ 2006年の国際数学者会議 (ICM 2006) で、この3人のうち唯一40歳以下であるベルナーにフィールズ賞^{*1}が与えられた。³⁾ 1936年の創設以来、確率論の分野にフィールズ賞が与えられたのは今回が初めてである。このことはまた、相転移・臨界現象、フラクタル物理、複雑系と研究の対象を広げてきた現代統計物理学⁴⁾が、数学的にも重要であることが広く認知されたことを意味するようにも思われる。

シュラムらの理論は数学的に深いものであるが、その基

*1 カナダ人数学者フィールズによって提唱され設立されたこの賞は「数学のノーベル賞」とも称されるが、受賞者は「40歳以下」という制限がある点がノーベル賞とは異なる。すでに約50名の受賞者がいるが、1998年にワイルズ (フェルマーの最終定理の証明) が45歳で特別表彰された以外は、この年齢制限が厳密に守られてきた。なお今回の ICM 2006 では、確率微分方程式の創始者である伊藤清氏に第1回ガウス賞が贈られた。

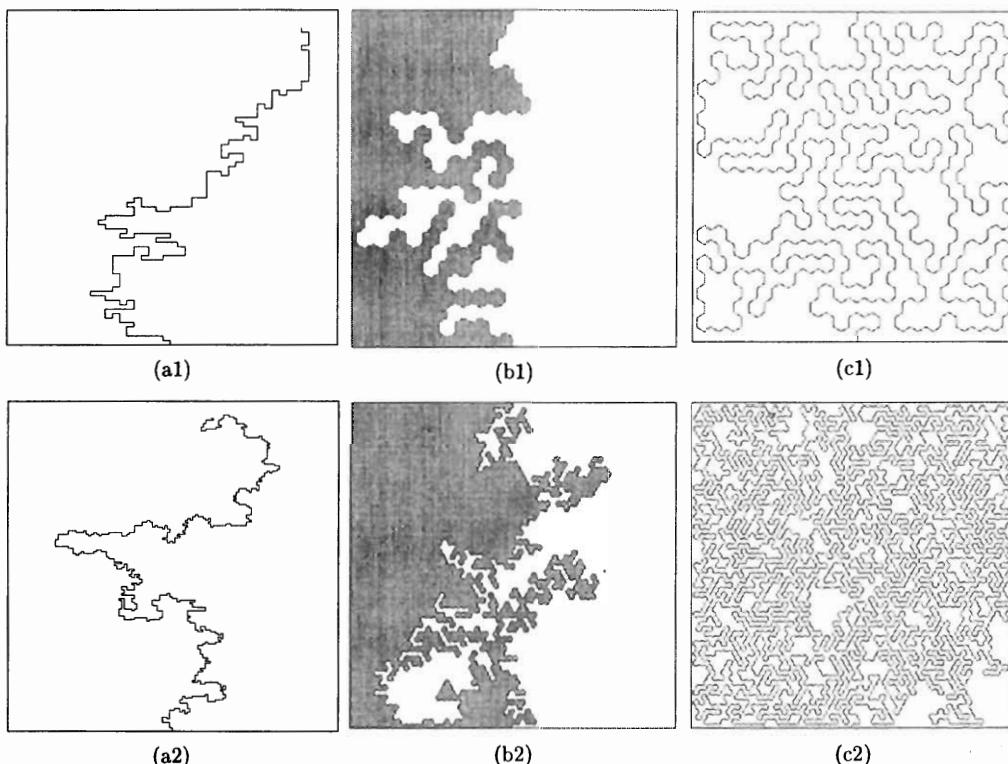


図1 計算機シミュレーションによって描いた2次元格子上のフラクタル曲線。左の上下2図は正方形格子上の自己回避ウォーク (SAW) の軌跡。(a1) は200ステップ、(a2) は800ステップ。中央の上下2図は臨界点におけるサイト・パーコレーション模型の浸透領域 (グレーの部分) の界面。(b1) は35×35サイト、(b2) は100×100サイトの三角格子上。右の上下2図は Harmonic Anti-Navigator (HAN) の描く図。(c1) は35×35サイト、(c2) は100×100サイトの六角格子上。

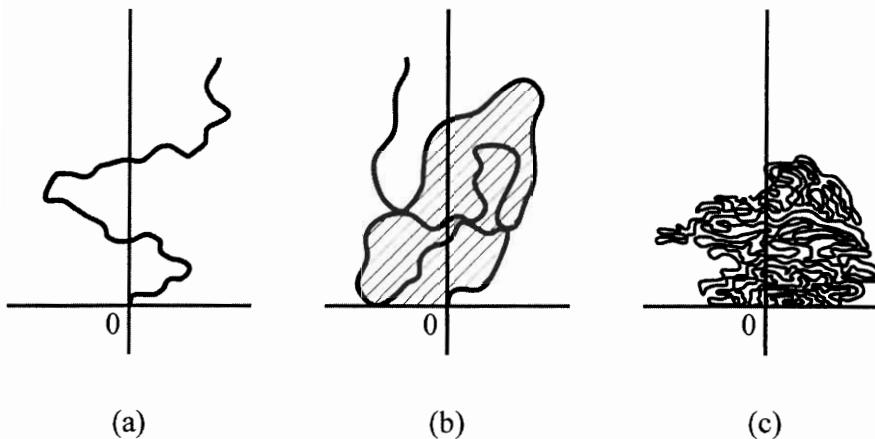


図2 (a) 単純曲線. $0 < \kappa \leq 4$ のときの SLE 曲線の様子. (b) 自分自身や実軸に接するが交わることはない曲線. 曲線が伸びていくと, 曲線で囲まれた領域(斜線部分)は上半平面を覆いつくしていくが, 曲線自身で半平面が埋めつくされることはない. $4 < \kappa \leq 8$ のときの SLE 曲線の様子. (c) 上半平面を埋めつくしていく曲線. $\kappa \geq 8$ のときの SLE 曲線の様子.

礎となっているアイデアは明快である. そのことをここで紹介してみたい.

2. フラクタル曲線と共形変換

研究室の大学院生が計算機シミュレーションをして描いてくれた図1の六つの図を見てほしい. 左の上下二つの図は, 自己回避ウォーク (Self Avoiding Walk; SAW) の軌跡である. 中央の上下2図は, 臨界点におけるサイト・パーコレーション模型の浸透領域の界面を表す. また, 右の上下2図は, Harmonic Anti-Navigator という名前の界面成長模型(ここではHANと略すことにする)で現れる図である.⁵⁾ いずれも上図に比べて下図ではウォークのステップ数や格子のサイト数を増してある.

ステップ数やサイト数をさらに多くしていくとそれらが無限大となる極限で得られるパターンを, これらと同じサイズの図に描くことができたとしよう. もともとは離散的な格子上の図であったが, この極限で得られるものは連続平面の上に曲線が描くパターンとなるはずである. SAWからは図2(a)のような(自分自身と接したり交わったりすることのない)単純曲線が, 浸透領域界面からは図2(b)のように自分自身と何度も接するが交わることはない曲線が得られるであろう. (b)図の曲線は込み合ってはいるが隙間もたくさんある. これらに対して, HANからは平面を埋めつくしていくような曲線が得られることであろう(図2(c)を参照). こういったランダムな曲線を, (上述のように格子模型の連続極限としてではなく)直接平面上に描きだすことはできないものであろうか.

これらの曲線に共通する特性がフラクタル性である. 全体を相似変換(並進, 回転, 膨張・収縮)させてもその統計性は変わらないという対称性である. 実は, 全体を一斉にではなく場所ごとにそれぞれ異なる相似変換をしても不变なのである. この一般化された相似変換は(各点において交わ

る2曲線のなす角を保存する)等角写像によって実現することができる. これを共形変換と呼ぶ. ここで, 「微分可能な複素関数(正則関数)は, 微分の値が零でない領域に対して共形変換を与える」という複素関数論で習った事実を思い出した人は幸いである. 複素平面上の問題として定式化するのが正しいことに気がつくからである.

さて原点をスタートして, 時間が経つにつれて複素上半平面 $\mathbf{H} = \{z = x + iy: y > 0\}$ 内を単調に伸びていく曲線 γ を考えることにしよう.

この曲線は図3(a)に太線で記したようなものであり, 自分自身や実軸と接することはあっても, 実軸の下の領域にはみ出さることはないとする. 時刻 t で時間をいったん止めて, このときの曲線の先端を γ_t と書くこととする. この曲線の弧と, 曲線で囲まれた領域, および曲線と実軸とで囲まれた領域を合わせて K_t とする(図3(a)の斜線領域と, 実軸との接点から γ_t に至る曲線の最後の部分の和). リーマンの写像定理を応用すると, 上半平面 \mathbf{H} から K_t を差し引いて得られる領域 $\mathbf{H} \setminus K_t$ (図3(a)の白の領域)を \mathbf{H} 全体に1対1に写す共形変換が必ず存在することがいえるが, そのうちで特に $|z| \gg 1$ で $g_t(z) = z + a(t)/z + \mathcal{O}(1/|z|^2)$ という形^{*2}に展開できる(z についての定数項がない)ものは, 唯一であることが証明できる. この共形変換 $g_t(z)$ によって, K_t は \mathbf{H} 内には跡形もなくなってしまうというわけである. 変換前を表す図3(a)において, K_t の

*2 \mathbf{H} の境界である実軸上の点は $g_t(z)$ で実軸上の点に写されるので, 係数 $a(t)$ は実数である. 時間の経過とともに K_t は \mathbf{H} 内を広がっていくが, それに伴って $a(t)$ の値も増大していく. $a(t)$ は K_t のある種の容量(half-plane capacity)を表すのである. 以下では, この容量の増加をもって時間の進み具合を測ることにして, $a(t) = 2t$ と定めることにする.

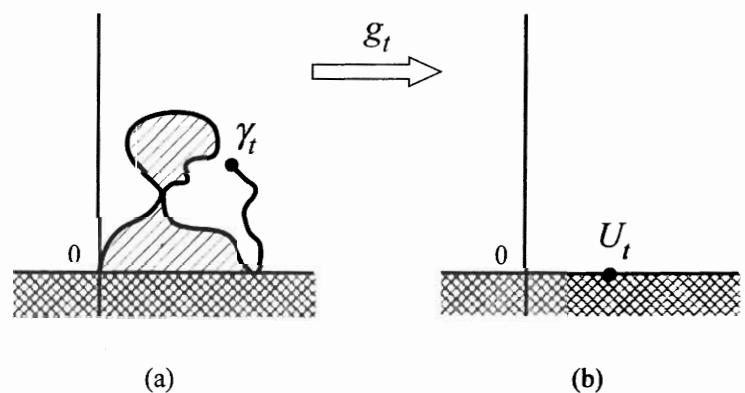


図3 曲線 γ に伴う共形変換. 時刻 t での曲線の先端を γ_t とする. (a) 斜線の領域と, 実軸との接点から γ_t に至る曲線の最後の部分の和が K_t , K_t の縁というときには, この曲線の最後の部分も含めて考えることにする. (b) 共形変換 $g_t(z)$ により, $\mathbf{H} \setminus K_t$ ((a)の白の領域)は \mathbf{H} 全体 ((b)の白の領域)に写される. γ_t は K_t の縁の1点であり, これは \mathbf{H} の境界(実軸)上の1点 U_t に写される.

縁は(実軸とともに)白の領域の境界の一部をなしていた。したがって K_t の縁の像は(b)図の白の領域の境界、つまり実軸の一部をなすことになる。特に曲線の先端 γ_t の像は実軸上のどこか1点となるが、(b)図ではそれを U_t と記した。ここで先ほどいったん止めておいた時間を再び進めて、時刻 t からさらに ϵ だけ時間を経過させることにする。曲線はその間伸びて先端は $\gamma_{t+\epsilon}$ となる。曲線が作る領域は $K_{t+\epsilon}$ となるが、これを**H**からきれいさっぱり消し去ってしまう共形変換 $g_{t+\epsilon}(z)$ も一意的に定まる。先端 $\gamma_{t+\epsilon}$ のこの変換による像は実軸上の別の点 $U_{t+\epsilon}$ となる。このように考えると、時間とともに伸びていく曲線 $\gamma=\{\gamma_t; 0 \leq t < \infty\}$ が与えられると、それに伴って時間的に発展する共形変換 $g_t(z)$ が定まり、その結果として実軸上の質点運動 U_t が一つ定まることになる。

γ が単純曲線であり、任意ではあるが確定して与えられている場合には、 U_t の運動も確定する。このとき共形変換 $g_t(z)$ は(1)の微分方程式の(初期条件 $g_0(z)=z \in \mathbf{H}$ の下での)解として与えられる。このことは今から80年以上も前から知られていて(1)式はレブナー(Loewner)方程式と呼ばれている。ここで注意すべきのは、(1)式には曲線 γ_t が陽に現れないことである。上の説明の中では変換の副産物といった感じの U_t が、この方程式においては $g_t(z)$ を生成する駆動関数として重要な役割をするのである。⁶⁾

3. SLE とベッセル過程

シュラムの発明は U_t としてランダムなプロセスを採用したことにある。これにより共形変換 $g_t(z)$ もランダムに生成されることになる。 $g_t(z)$ はある曲線から作られる領域 K_t を消し去る共形変換だったので、これで陰にランダムな曲線 γ_t が生成されることになるのである。 $\gamma_t \rightarrow g_t \rightarrow U_t$ の逆問題を解くことによって、 $U_t \rightarrow g_t \rightarrow \gamma_t$ という具合にランダムな曲線を平面上に描きだそうという逆転の発想である。(2)式は U_t として、時刻 $t > 0$ での位置が原点を中心とした平均0、分散 κt の正規分布に従うブラウン運動を採用したことである。シュラムはこれを確率的レブナー方程式(Stochastic Loewner Evolution)と名づけSLEと略記した。今日では、上述のフィールズ賞受賞者であるベルナーをはじめ多くの数学者は、SLEをシュラム・レブナー方程式(Schramm-Loewner Evolution)と読むようである。

パラメータ κ の値を増しても拡散速度が増すだけで $U_t = \sqrt{\kappa} B_t$ の振舞いは定量的に変化するだけである。ところがSLEで定まる曲線 γ の**H**上での振舞いは定性的にも変化するのである。まずは結果を述べてしまうことにする。 γ は、(a) $0 < \kappa \leq 4$ では図2(a)のような単純曲線、(b) $4 < \kappa < 8$ では図2(b)のように自分自身や実軸と何度も接する曲線、そして(c) $\kappa \geq 8$ では**H**のすべての点を埋めつくす曲線(図2(c))となるのである。言い換えると、 $\kappa_c = 4$ と $\kappa'_c = 8$ という二つの臨界値があり、SLE曲線 γ には(a), (b), (c)という三つの相があることになる。このパラメータ依存性は、こ

こまで考えてきた実軸(1次元)や複素平面(2次元)とは全く別の、以下で説明するもっと一般的な次元を持つ空間におけるブラウン運動の性質を反映したものである。

d 次元空間でのブラウン運動は、粒子の位置ベクトルの d 個の成分がそれぞれ独立な1次元標準(平均0、分散 t)ブラウン運動として時間変化するプロセス $B_t = (B_t^{(1)}, B_t^{(2)}, \dots, B_t^{(d)})$ として定義される。その原点からの距離を $X_t = \sqrt{\sum_{j=1}^d (B_t^{(j)})^2}$ と書くことになると、伊藤の公式³⁾より、これが次の確率微分方程式に従うことが導かれる。

$$dX_t = \frac{d-1}{2} \frac{1}{X_t} dt + d\hat{B}_t \quad (3)$$

ここで \hat{B}_t は、 $B_t^{(j)} (1 \leq j \leq d)$ とは別の1次元標準ブラウン運動である。 d 次元空間中で原点から距離 r だけ離れた点は r^{d-1} に比例した体積を持つ $d-1$ 次元球表面をなす。よって $d > 1$ の場合、 X_t は大きな値をとることの方が多い、零にはなりにくい。この傾向は次元 d が高ければ高いほど強い。(3)式の右辺第1項はこの効果を表すものである。このドリフト項は原点からの距離に反比例して働く斥力を表し、その強さは $d-1$ に比例している。第2項は揺動を表す。 X_t を実軸上の非負の領域を運動する確率過程と見なすことができる。変形されたベッセル関数で推移確率密度が書けることから、 X_t はベッセル過程と呼ばれている。確率論では d は正の実数パラメータとみなされ、(3)式の確率微分方程式の解として定義された d 次元ベッセル過程の振舞いが詳しく研究されている。⁷⁾

初期値 $x > 0$ の d 次元ベッセル過程が初めて原点に到達する時間を T_x と書くこととする。 T_x は確率変数であるが、任意の $x > 0$ に対して $d \geq 2$ では $T_x = \infty$, $d < 2$ では $T_x < \infty$ であることが確率1で成り立つことが知られている。2次元はブラウン運動の再帰性に関する臨界次元なのである($d_c = 2$)。 $d < 2$ の場合に、 $0 < x < y$ として x からスタートしたベッセル過程 X_t^x と y からスタートしたベッセル過程 X_t^y とを比較してみることにする。両者に対して(3)式で同じ揺動 \hat{B}_t を用いることになると、かならず $X_t^x \leq X_t^y$ となるから $T_x \leq T_y$ は確かである。初期条件として $x < y$ としたのだから $T_x < T_y$ であると思えるが、実はそれが確率1で成り立つのは $d \leq 3/2$ の場合だけであり、 $3/2 < d < 2$ のときには $T_x = T_y$ となる確率が正であることが証明できる。2次元の下に $d_c = 1.5$ 次元というもう一つ別の臨界次元があること

*3 多変数解析関数 $f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ をテイラー展開すると、一般には

$$df(\mathbf{x}) = \sum_j \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j + \frac{1}{2} \sum_j \sum_k \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} dx_j dx_k + \dots$$

という形の無限級数が得られる。しかし x_j として $dZ_t^{(j)} = v_t^{(j)} dt + dB_t^{(j)}$ に従う確率過程 $Z_t^{(j)}$ を代入すると、 $df(Z_t)$ は

$$df(Z_t) = \sum_j \frac{\partial f}{\partial x_j} (Z_t) (v_t^{(j)} dt + dB_t^{(j)}) + \frac{1}{2} \sum_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2} (Z_t) dt$$

で与えられる。これを伊藤の公式という。 $(dB_t^{(j)} dB_t^{(k)}) = \delta_{jk} dt$ であることに注意せよ。)微小時間 dt での変動は、 dt に比例する(よって移動速度が定義できる)ドリフト項の部分と $dB_t^{(j)}$ に比例する揺動の部分(これは平均すれば零である)の和で与えられるという意味。

になる。

さて SLE に話を戻すことにしてよう。各 z ごとに (1) 式で $\hat{g}_t(z) = (g_t(z) - \sqrt{\kappa} B_t)/\sqrt{\kappa}$ という変数変換 $g_t(z) \rightarrow \hat{g}_t(z)$ を施すことにする。そして $-B_t$ を \hat{B}_t と書き改めることになると、 $\hat{g}_t(z)$ は次の確率微分方程式に従うことになる。

$$d\hat{g}_t(z) = \frac{2}{\kappa} \frac{1}{\hat{g}_t(z)} dt + d\hat{B}_t \quad (4)$$

この式は $\mathbf{H} \setminus \mathbf{K}_t$ 内の点 z に対してのものであったが、実軸上の点 x に拡張して考えることができる。すると実関数 $\hat{g}_t(x)$ に対する確率微分方程式になるが、これは (3) 式で

$$d = \frac{4}{\kappa} + 1 \iff \kappa = \frac{4}{d-1} \quad (5)$$

したものに他ならない。関係式 (5) によって $d_c = 2$ は $\kappa_c = 4$ に、 $d'_c = 1.5$ は $\kappa'_c = 8$ にそれぞれ対応することになる。²⁾ $4 < \kappa < 8$ のとき SLE 曲線は図 3(a) のように実軸と接する。接した瞬間に τ に、SLE 曲線と実軸とで囲まれた領域は変換 $g_\tau(z)$ で \mathbf{H} 内から消されてしまう。この領域は接点の像 $g_\tau(\gamma_\tau) = \sqrt{\kappa} B_\tau$ に呑み込まれてしまうのである。このとき、この領域の境界の一部をなす実軸上の 2 点 $x < y$ では同時に $\hat{g}_\tau(x) = \hat{g}_\tau(y) = 0$ となってしまい、 $T_x = T_y (= \tau)$ となるのである。

4. 高尚な「次元の低い」話

パラメータ κ の値によって SLE 曲線の振舞いが定性的に変わることを述べたが、 κ を特別な値に設定すると、特定の格子模型に現れるフラクタル曲線の連続極限を定量的にも正確に実現する。例えば図 1 の三つの例、(a) SAW の軌跡、(b) 臨界パーコレーション模型の浸透領域の境界、および(c) HAN の描く図の連続極限は、それぞれ $\kappa = 8/3, 6$ 、および 8 の SLE 曲線 γ で与えられるのである。これら三つの例を含めて、現在知られている主な対応を図 4 にまとめておいた。⁸⁾ 前節の関係式 (5) を適用すると、臨界点での 3 状態ポツツ模型 ($\kappa = 24/5$) は $d = 11/6 = 1.83$ 、臨界イジング模型 ($\kappa = 16/3$) は $d = 7/4 = 1.75$ 、臨界パーコレーション模

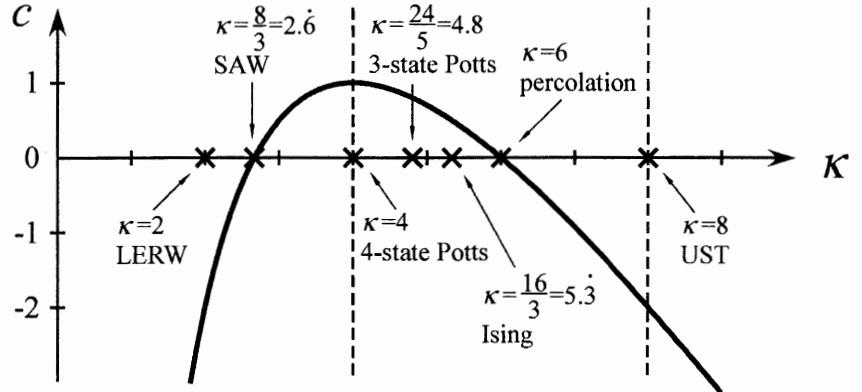


図 4 2 次元格子上のフラクタル曲線の連続極限が特定の κ の値の SLE 曲線で実現される。LERW は Loop Erased Random Walk, UST は平面上一様ランダムな全域木のグラフ (Uniform Spanning Trees) を表す。平面を埋めつくすスペアノ曲線を UST から得る方法が知られている。中心電荷 c の値を縦軸にとって (8) 式もプロットした。

型 ($\kappa = 6$) は $d = 5/3 = 1.6$ と、いずれも半端な次元が得られる。これらの統計物理学模型の臨界状態で見られる複雑性は、「次元の低い」ブラウン運動 (ベッセル過程) の原点近傍での微妙な振舞いに起因しているということであろうか。

共形場理論⁴⁾との関係も述べておくことにする。⁹⁾ 実軸上に x_1, x_2, \dots, x_N という N 点をとり、 $\hat{g}_t(x_j)$ がそれぞれ (4) 式で $z \rightarrow x_j$ したものに従うとする。これとは別に N 変数の実関数 $F(x_1, \dots, x_N)$ を用意して各変数 x_j に $\hat{g}_t(x_j)$ を代入すると、得られる $F_t \equiv F(\hat{g}_t(x_1), \dots, \hat{g}_t(x_N))$ は一つの確率過程となる。伊藤の公式を用いると、これは

$$dF_t = -\frac{2}{\kappa} \left(L_{-2} - \frac{\kappa}{4} (L_{-1})^2 \right) F_t dt + L_{-1} F_t d\hat{B}_t \quad (6)$$

という確率微分方程式に従って運動することが導かれる。ただしここで、微分演算子に対して $L_n = -\sum_{j=1}^N x_j^{n+1} \partial/\partial x_j$ という記法を用いた。例えば、 $L_{-2} F_t$ は関数 $-\sum_{j=1}^N x_j^{-1} (\partial/\partial x_j) F(x_1, \dots, x_N)$ に $x_j = \hat{g}_t(x_j)$ ($1 \leq j \leq N$) を代入して得られる確率変数を表す。この式から、関数 F として $(L_{-2} - (\kappa/4)(L_{-1})^2) F = 0$ となるようなものを選ぶと、確率過程 F_t に対してはドリフト項が働くことが分かる。このような確率過程は、初期に与えられた値の周りで揺動するだけであり、特に局所マルチングール⁵⁾と呼ばれている。この局所マルチングール条件の左辺は、ビラソロ代数の最高ウェイト表現 $\mathcal{H}_{1,2}$ における特異ベクトル (null 状態)

$$|\chi_{1,2}\rangle = \left(L_{-2} - \frac{3}{2(2h_{1,2}+1)} (L_{-1})^2 \right) |h_{1,2}\rangle \quad (7)$$

と同じ形をしている。ただしここで、 $h_{1,2}$ はこの表現の最高ウェイト (共形次元)、 $|h_{1,2}\rangle$ はプライマリー状態を表す。これをビラソロ代数の中心電荷 c と $h_{1,2} = \{5-c \pm \sqrt{(1-c)(25-c)}\}/16$ という関係 (カツ公式) で結ぶことにより、 $|\chi_{1,2}\rangle$ は状態ベクトルとして零となり (縮退)，表

⁴⁾ 調和振動子のエネルギー固有状態は消滅演算子 a で消される ($a|0\rangle = 0$) 基底状態 $|0\rangle$ に生成演算子 a^\dagger をかけていくことで作ることができた。調和振動子の量子力学は、 $[a, a^\dagger] = 1$ という代数 (ハイゼンベルク代数) の表現になっているのである。無限個の消滅演算子 L_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) と生成演算子 L_n ($n = -1, -2, -3, \dots$)、そして L_0 が

$$[L_n, L_m] = (n-m)L_{n+m} + \frac{c}{12} n(n^2-1)\delta_{n+m,0}$$

という代数 (中心電荷 c を持つビラソロ代数) を満たすとき、これを表現する量子力学は無限自由度の場の理論となる。これが共形場理論である。調和振動子のときと同様に、すべての消滅演算子で消される ($L_n|h\rangle = 0, n \geq 1$) 状態 $|h\rangle$ に生成演算子 L_n ($n \leq -1$) をかけて状態を作っていく。ただし $L_0|h\rangle = h|h\rangle$ とする。 h を最高ウェイト、あるいは共形次元といいう。また、 $|h\rangle$ は最高ウェイトベクトル、あるいはプライマリー状態 (第 1 番目の状態という意味) と呼ばれる。

⁵⁾ マルチングールとは、元々は勝ち負けが半々の賭けでの「倍賭け」という必勝法のこと。まず 1 万円を賭け、負けたら 2 万円、以下 4 万円、8 万円、16 万円、…と続ける。勝ったときにやめることにすれば、いつも 1 万円儲かる。(ただしこれは、無限の賭け金を持っていればの話なので要注意。) 転じて、各時刻での期待値が過去の歴史にはよらずに一定であるような確率過程をマルチングールと呼ぶ。

現は既約になるのであった。そこで、 $\kappa/4=3/(2(2h_{1,2}+1))$ として局所マルチングール条件と表現の縮退条件とを等置してみると

$$c = \frac{(3\kappa-8)(6-\kappa)}{2\kappa}, \quad h_{1,2} = \frac{6-\kappa}{2\kappa} \quad (8)$$

という関係式が得られる。⁹⁾ 図4には中心電荷 c の SLE パラメータ κ 依存性もグラフ表示しておいた。すぐに分かることは、 $\kappa=8/3$ と $\kappa=6$ では $c=0$ となることである。これに呼応して、 $\kappa=8/3$ の SLE には制限性 (restriction property), $\kappa=6$ の SLE には局所性 (locality property) と呼ばれる特別な性質があり、それがゆえに、この各々が SAW と臨界パーコレーション模型の連続極限と対応するということが導かれるのである。²⁾

最後は抽象的な代数的話になってしまった。また、SLE を用いると重要な物理量が簡単に計算できることも説明できなかった。^{10, 11)} しかし本稿で伝えたかったことは、この新理論の示唆する自然の不可思議さである。ゆらゆらと頼りなく揺動するブラウン運動から、すべてが生みだされるかのように見えるではないか。100年後が楽しみである。

本稿の執筆にあたり福井隆裕氏、種村秀紀氏、笹本智弘氏にお世話になった。図1は院生の渡部恭平君と佐藤充規君が作成してくれた。ここに感謝する。

参考文献

- 1) O. Schramm: Israel J. Math. **118** (2000) 221. 正確にいうと $g_i(z)$ の逆関数 $g_i^{-1}(z)$ に対する方程式が書かれている。
- 2) G. F. Lawler: *Conformally Invariant Processes in the Plane* (American Mathematical Society, 2005).

- 3) Werner については、白井朋之:『数学セミナー』545号(2007年2月, 日本評論社) pp. 46–51 を参照。
- 4) 例えば、鈴木増雄:「統計力学」(岩波書店, 2000). 西森秀穂:「相転移・臨界現象の統計物理学」(培風館, 2005). 松下 貢:「フラクタルの物理 I, II」(裳華房, 2004) を参照。
- 5) 各モデルの定義や境界条件の設定など詳しくは M. Bauer and D. Bernard: Phys. Rep. **432** (2006) 115 を参照。
- 6) 日本語の教科書として詳しいのは、戦中に出版された小松勇作:「等角寫像論上巻」(共立出版, 1944) ということである。旧仮名遣いなので筆者にはよく読めないが、とにかくここまで古い話である。
- 7) ベッセル過程はランダム行列とも関係が深く興味深いプロセスである。次の解説とそこであげた文献を参照されたい。香取眞理、種村秀紀:「ランダム行列と非衝突過程、「数理物理への誘い6」(小嶋泉編, 遊星社, 2006) pp. 148–175.
- 8) この対応を厳密に証明するには、SLE の話とは別に、格子模型の連続極限の存在とそこでの共形不変性を示さなければならない。三角格子上の臨界パーコレーションに対しては Smirnov によって証明が与えられた。S. Smirnov: C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **333** (2001) 239.
- 9) M. Bauer and D. Bernard: Phys. Lett. B **557** (2003) 309; Commun. Math. Phys. **239** (2003) 493. R. Friedrich and W. Werner: Commun. Math. Phys. **243** (2003) 105.
- 10) 鈴木淳史:「現代物理数学への招待」(サイエンス社, 2006) には、臨界点でのパーコレーション横断確率 (Cardy の公式) などの、SLE による計算が解説されている。臨界現象と boundary CFT との関連については、Cardy 自身による日本での講義録 math-ph/0103018 を一読することを薦める。
- 11) 本稿では上半平面内に定義されるバージョン (chordal SLE) のみを述べたが、単位円内 (あるいは円筒上) の radial SLE、帯状領域内の dipolar SLE など別のバージョンもある。SLE 曲線の出発点と $t \rightarrow \infty$ の到達点の設定と $g_i(z)$ の規格化条件によって分類される。また、駆動関数としてドリフト項付きのブラウン運動 ($U_i = \sqrt{\kappa}B_i + vt$) を用いた場合に相当するものは SLE (κ, ρ) と呼ばれている。一見異なる定義でも、共形変換と (ランダムな) 時間変更によって互いに移り変われる場合は等価であることに注意。SLE 全般についてのレビューは上記の参考文献 5 以外に次もある。W. Kager and B. Nienhuis: J. Stat. Phys. **115** (2004) 1149. J. Cardy: Ann. Phys. **318** (2005) 81.

(2007年2月20日原稿受付)



「論文捏造」取材の現場から

村 松 秀 <NHK 科学・環境番組部 150-8001 東京都渋谷区神南 2-2-1 e-mail: muramatsu.s-lg@nhk.or.jp>

絶えない「論文捏造」

科学論文の捏造事件が国内外で絶えない。この数年だけでも、米・ベル研究所、韓国・ソウル大学、わが国でも東京大学、大阪大学、理化学研究所など、世界を代表する研究機関で次々と重篤な科学的不正行為・疑惑が報告されている。私たちの暮らしを豊かにし知的好奇心を喚起してくれるはずの科学の屋台骨が、いま大きく揺らいでいるのだ。

捏造・不正行為は科学界だけのことではない。マンションやホテルで相次ぐ耐震偽装や、全国の電力会社による一連の原発データ改ざん・隠蔽、三井物産のディーゼル排ガスデータ改ざんなど、産業界での事件も相次ぐ。今年1月に発覚した、関西テレビ制作によるフジテレビ系全国ネット

トの番組「発掘！あるある大事典 II」が、複数回にわたり科学的データを捏造していた事件は、同業の者として大変遺憾な事態と感じている。そもそも昨年末に発表された流行語大賞には「捏造」という言葉がノミネートされており、それほどに科学を取り巻く捏造・不正の頻発は、社会全体からも極めて重大事として注視されているのだ。

筆者は NHK のディレクターとして、科学論文捏造に関する取材・番組制作を続けてきた。ベル研の事件については「史上空前の論文捏造」と題した「BS ドキュメンタリー」(2004年10月放送)、「ハイビジョン特集」(05年3月)の2本を取材・構成・演出し、さらに事件の詳細を書籍¹⁾にまとめた。また、内外の事件を報じた「クローズアップ現代」