ランダム行列とはなにか

香取眞理
◉中央大学理工学部

ランダム行列とは，成分が乱数で与えられる行列のことである[1,2,3]．例えば，$N \times M$ 行列を考えたとすると，その NM 個の各成分にどのようなルールで乱数を割り振るのかを指定すれば，ランダム行列の統計集団が定義されたことになる．

ここでは，$M=N$，すなわち，正方行列 $\mathsf{X}=(X_{jk})_{1\leq j,k\leq N}$ の場合を考えることにする．各成分を与える乱数を自然数 $\mathbb{N}$ とするのか，実数 $\mathbb{R}$ とするのか．あるいは，複素数 $\mathbb{C}$ や四元数 $\mathbb{Q}$ にするのかをまず決めなければならない．

いま，成分は複素数 $\mathbb{C}$ であるものとしよう．それでは，各成分の実部と虚部を独立な乱数とするのか，相関を持たせるのか．また，異なる成分を与える乱数の間に相関を持たせるのか．乱数の独立性についての設定が求められる．$1 \leqq j < k \leqq N$ として，仮に，(k,j)-成分を与える乱数 X_{kj} を，対角成分に対して対称な位置にある (j,k)-成分を与える乱数 X_{jk} の複素共役であるものとすると(そして，対角成分は実乱数とすると)，我々はランダムなエルミート行列の統計集団を得ることになる．行列成分を与える乱数の間に従属性を持たせることにより，ランダム行列に対称性を与えることができる．

さて，サイズ N のランダム正方行列 $\mathsf{X}=(X_{jk})$ を1つ指定するのに必要な独立な実乱数が n 個だったとする．それでは，その n 個の実乱数の分布をどのように指定するのがよいだろうか．例えば，それらがガウス分布で与えられるものとしても，その平均値と分散を与えるルールを定めなければならない．

このように考えると，ランダム行列の統計集団は無数に存在することになる．ところが，ランダム行列理論では，いくつかの限定された統計集団について，詳しい研究がなされているというのが実際である．その理由として，多くの場合我々は，その統計集団に属するランダム行列の固有値や固有ベクトルの確率法則が，行列サイズ N を無限大としたときに従う極限定理に興味を持っていることが挙げられる．任意のサイズ N に対して，固有値や固有ベクトルの性質がある程度容易に調べられるような行列の統計集団であることが望まれるのである．

ランダム行列の確率法則の極限定理[1)]には**普遍性**(universality)があることが期待されている[2]．行列サイズ $N \to \infty$ での極限定理は，有限サイズのランダム行列の統計集団を指定するルールの「詳細」には依存しないという予想である．そこでは，($\mathbb{R}$ か，$\mathbb{C}$ か，それとも $\mathbb{Q}$ かといった)各行列成分の代数構造や，(上述のエルミート性のような)ランダム行列の対称性が極限定理を決めており，乱数の独立性の度合いや，独立な乱数の分布の与え方は「詳細」であると見なされる．この予想を信じるならば，解析が簡単な統計集団に対して導いた極限定理が，より複雑な統計集団でも成り立つことになる．したがって，ランダム行列の**普遍クラス**(universality class)の分類とその特徴づけは，各々のクラスに属する可解な統計集団を見出して，それらを詳しく解析することでなされるはずである．

このような予想は，統計力学での臨界現象の研究に由来するものと思われる．**臨界現象**とは，連続相転移に伴い自由エネルギーなどの物理量の解析性に

1） ウィグナーの半円則やトレーシー–ウィダム分布則，あるいは，ジニーブルの円則など，種村氏の記事や白井氏の記事に解説があるので参照のこと．

異常が現れる現象である．その特異性を表す臨界指数は，系の内部自由度と，相互作用の長距離での振る舞い，および，系の空間次元だけに依存し，物理系やそれを表す模型の「詳細」には依存しないというのが，そこでいう普遍性である[4]．この普遍性予想の下，イジング模型やパーコレーション模型といった，各々の普遍クラスを代表するミニマル(最小)模型の研究が重要となるが，これらのモデル系に対応するものとして，ランダム行列理論においては，いくつかの「典型的な統計集団」が中心的な役割を担うことになるのである．

以下では，ガウス型統計集団，その中でも特に，ガウス型ユニタリ統計集団(GUE)とよばれるものを例にして，ランダム行列理論における典型的な統計集団とはどのようなものなのか説明する．その後で，最近の発展について解説する．

1……ガウス型統計集団

サイズ N のランダム正方行列 $\mathsf{X}=(X_{jk})$ にエルミート条件 $\mathsf{X}^{\dagger}\ (\equiv {}^t\overline{\mathsf{X}})=\mathsf{X}$ を課すことにする．そうすれば，X はユニタリ変換によって対角化でき，固有値はすべて実数であることが保証される．サイズ N のエルミート行列の独立な実成分は $n=N^2$ 個ある．そこで，互いに独立で，どれも標準正規分布 $\mathrm{N}(0,1)$ に従う N^2 個の乱数を用意することにする[2]．ただしそれらを，便宜上，$\{G_j, G_{k\ell}, \widetilde{G}_{k\ell}\}$ と表記して，$1\leqq j\leqq N$，$1\leqq k<\ell\leqq N$ に対して，$G_j\sim\mathrm{N}(0,1)$，$G_{k\ell}\sim\mathrm{N}(0,1)$，$\widetilde{G}_{k\ell}\sim\mathrm{N}(0,1)$ とする．これでちょうど，$N+N(N-1)/2\times 2=N^2$ 個である．その上で，ランダム行列 $\mathsf{X}=(X_{jk})$ の各成分は

$$X_{jj}=G_j,\qquad X_{k\ell}=\overline{X_{\ell k}}=\frac{1}{\sqrt{2}}(G_{k\ell}+i\widetilde{G}_{k\ell}) \tag{1}$$

で与えることにする．ただし，$i=\sqrt{-1}$ である．エルミート条件を課した上で許される N^2 個の自由度すべてに独立な乱数を与えたのであるから，「最もランダムなエルミート行列の統計集団」が得られたことになる．計算を容易にするために各乱数はガウス分布に従うものとした．しかし，各成分に乱数を割り振るルール(1)で最も大切なのは，非対角項の定義式に $1/\sqrt{2}$ という因子が入っているところなのである．このことを以下説明しよう．

本稿では一般に，大文字で表した実乱数 G_{jk} やランダム行列 X，あるいはその成分 X_{jk} の実現値を，g_{jk} や x や x_{jk} のように小文字で表して区別することにする．また，実乱数 R の実現値が微小区間 $[r, r+dr)$ に含まれているという事象を $R\in dr$ と略記する．

$G\sim\mathrm{N}(0,1)$ に対して，$G\in dg$ の確率は

$$\mathrm{P}(G\in dg)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-g^2/2}dg \tag{2}$$

で与えられる．サイズ N のエルミート行列全体の空間中の x を含む体積要素を $d\mathsf{x}$ と書くことにする．すると，上述のランダム行列 X の定義より，$\mathsf{X}\in d\mathsf{x}$ である確率は(2)の N^2 重積

$$\prod_{j=1}^{N}\mathrm{P}(G_j\in dg_j)\prod_{1\leq k<\ell\leq N}\{\mathrm{P}(G_{k\ell}\in dg_{k\ell})\mathrm{P}(\widetilde{G}_{k\ell}\in d\tilde{g}_{k\ell})\}$$
$$\propto\exp\left[-\frac{1}{2}\left\{\sum_{j=1}^{N}g_j^2+\sum_{1\leq k<\ell\leq N}(g_{k\ell}^2+\tilde{g}_{k\ell}^2)\right\}\right]$$

に比例することになる．ところが，(1)のようにしたことにより，実現値の間に

$$\sum_{j=1}^{N}g_j^2+\sum_{1\leq k<\ell\leq N}(g_{k\ell}^2+\tilde{g}_{k\ell}^2)$$
$$=\sum_{j=1}^{N}x_{jj}^2+2\sum_{1\leq k<\ell\leq N}\overline{x_{k\ell}}x_{k\ell}$$
$$=\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\overline{x_{kj}}x_{kj}=\mathrm{Tr}\,\mathsf{x}^{\dagger}\mathsf{x}$$

という等式が成り立つのである．したがって，我々の「最もランダムなエルミート行列統計集団」の確率測度は，c_1 を規格化因子として，

$$\mathrm{P}(\mathsf{X}\in d\mathsf{x})=c_1\exp\left(-\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\,\mathsf{x}^{\dagger}\mathsf{x}\right)d\mathsf{x} \tag{3}$$

で与えられることになる．

エルミート行列を $\mathsf{x}\to\mathsf{v}^{\dagger}\mathsf{x}\mathsf{v}$ とユニタリ変換する．

2）平均 μ，分散 σ^2 の正規分布(ガウス分布)を $\mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$ と記し，乱数(確率変数) G が $\mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$ に従うことを $G\sim\mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$ と表す．平均 0，分散 1 の正規分布 $\mathrm{N}(0,1)$ を特に，標準正規分布という．

そうしても，$\mathrm{Tr}\,\mathrm{x}^\dagger\mathrm{x}$ も $d\mathrm{x}$ も不変である．よって，(3)で与えられる確率測度は，ユニタリ変換不変である．このことより，(1)のルールによって成分が与えられるランダムなエルミート行列の統計集団は，**ガウス型ユニタリ統計集団**(GUE)とよばれる．

サイズ N のエルミート行列 x が与えられたとき，その実固有値を $\lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \cdots \leqq \lambda_N$ というように小さい順に並べたものを $\boldsymbol{\lambda}$ と書き，これをベクトル $(\lambda_1, \cdots, \lambda_N)$，あるいは対角行列 $\mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_N)$ と見なすことにする．この $\boldsymbol{\lambda}$ を与えると，対応する固有ベクトルの列が成すユニタリ行列 u が一意的に定まり，$\mathrm{x} = \mathrm{u}^\dagger \boldsymbol{\lambda} \mathrm{u}$ を得る．そこで，(3)において $\mathrm{x} \to (\boldsymbol{\lambda}, \mathrm{u})$ という変数変換を行うことにする．すると，$\mathrm{Tr}\,\mathrm{x}^\dagger\mathrm{x} = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j^2 = |\boldsymbol{\lambda}|^2$ であり，$d\mathrm{x} = \prod_{1\leq j<k\leq N} (\lambda_k - \lambda_j)^2 d\boldsymbol{\lambda} d\mathrm{u}$ となることが示せる[1,2]．ここで，$\prod_{1\leq j<k\leq N} (\lambda_k - \lambda_j)^2$ はこの変数変換に伴うヤコビアンであり，$d\boldsymbol{\lambda} = \prod_{j=1}^{N} d\lambda_j$ である．また，$d\mathrm{u}$ はサイズ N のユニタリ行列全体の空間(これは実 $N(N-1)$ 次元である)上の一様測度(ハール測度)である．

以上のことより，GUE は $\Lambda_1 \leqq \Lambda_2 \leqq \cdots \leqq \Lambda_N$ を満たす実 N 次元乱数 $\boldsymbol{\Lambda} = (\Lambda_1, \cdots, \Lambda_N)$ とランダムなユニタリ行列 U の対 $(\boldsymbol{\Lambda}, \mathrm{U})$ の統計集団と等価になるように，ルール設定されたものであるといえる．対の後者のランダムなユニタリ行列 U に関しては，その一様分布で均すことにすると，GUE におけるランダムな固有値 $\boldsymbol{\Lambda}$ の統計集団が得られる．その確率測度は，c_2 を規格化因子とし，$\beta = 2$ としたときの次式で与えられることになる．

$$\mathrm{P}(\boldsymbol{\Lambda} \in d\boldsymbol{\lambda}) = c_2 \exp\left(-\frac{\beta}{4}|\boldsymbol{\lambda}|^2\right) \prod_{1\leq j<k\leq N} (\lambda_k - \lambda_j)^\beta d\boldsymbol{\lambda} \qquad (4)$$

任意の $j \neq k$ に対して，$|\lambda_k - \lambda_j| \to 0$ とすると，$\mathrm{P}(\boldsymbol{\Lambda} \in d\boldsymbol{\lambda}) \to 0$ となる．よって，ランダムな固有値は，互いに斥力的な相関をもって分布していることになる．

これまでは，ランダムなエルミート行列の独立な成分が複素数 $\mathbb{C}$ で与えられる場合を説明してきたが，$\mathbb{R}$ や $\mathbb{Q}$ で与えられる場合にも同様の計算をすることができる．そしてそれぞれ，直交変換とシンプレクティック変換に対して不変な確率測度を導くように，行列成分を与えるルールを設定することができる．得られたランダム行列の統計集団は，**ガウス型直交統計集団**(GOE)と**ガウス型シンプレクティック統計集団**(GSE)とよばれる．固有値の確率測度は，(4)でそれぞれ $\beta = 1$ と 4 とおいたもので与えられる．GOE, GUE, GSE の 3 つを，ウィグナー–ダイソンの古典的統計集団とよぶ．

$\beta = 1, 2, 4$ に限らず，一般の $\beta > 0$ の値に対して，固有値分布が(4)で与えられるランダム行列の統計集団も知られている．これは**ガウス型 β 統計集団**とよばれるが，そこでの行列成分を与えるルールは，以下のように古典的な場合と大きく異なっている[2]．$\mathrm{X} = (X_{jk})$ は 3 重対角行列(したがって，$|j-k| \geqq 2$ では $X_{jk} = 0$)であり，$1 \leqq j \leqq N$，$1 \leqq k \leqq N-1$ に対して $G_j \sim \mathrm{N}(0,1)$，$C_k \sim \chi((N-k)\beta)$ とした上で，

$$X_{jj} = \sqrt{\frac{2}{\beta}} G_j, \qquad X_{kk+1} = X_{k+1k} = \frac{1}{\sqrt{\beta}} C_k \qquad (5)$$

とする．ただし，$\chi(\alpha)$ は自由度 α のカイ分布とよばれる正値乱数の分布を表し，$C \sim \chi(\alpha)$ は $c > 0$ に対して，

$$\mathrm{P}(C \in dc) = \frac{2^{1-\alpha/2}}{\Gamma(\alpha/2)} c^{\alpha-1} e^{-c^2/2} dc$$

であることを意味する(Γ はガンマ関数)．$\alpha \in \mathbb{N}$ のときは，α 個の独立な $\widehat{G}_j \sim \mathrm{N}(0,1)$ $(1 \leqq j \leqq \alpha)$ で与えられる正値乱数 $\sqrt{\sum_{j=1}^{\alpha} \widehat{G}_j^2}$ が $\chi(\alpha)$ に従う．ガウス型 β 統計集団のランダム行列は，対角成分とそのすぐ上下の成分以外の成分は零である疎行列であるが，成分中に正規乱数が束ねられているのである．

ここで，統計力学になじみのある読者向けにコメントを 1 つ加えておくことにする．(4)をギブス測度の形 $e^{-\beta\mathscr{H}(\boldsymbol{\lambda})}/Z$ に書き直すと，ハミルトニアンは

$$\mathscr{H}(\boldsymbol{\lambda}) = \frac{1}{4}|\boldsymbol{\lambda}|^2 - \sum_{1\leq j<k\leq N} \log(\lambda_k - \lambda_j)$$

で与えられる．2 体力相互作用はすべての固有値間

にはたらき，2体ポテンシャルは短距離極限でも長距離極限でも発散する対数関数で与えられることになる．この系は**1次元対数ガス系**とよばれる．このとき，β は逆温度と見なされる．

2……動的拡張から多重SLEへ

時刻 $t=0$ に $b\in\mathbb{R}$ をスタートした1次元標準ブラウン運動(以下BMと略称)を $B^b(t)$，$t\geqq 0$ と記すことにする．各時刻 $t>0$ で，$B^b(t)\sim \mathrm{N}(b,t)$ である．そこで，$1\leqq j\leqq N$，$1\leqq k<\ell\leqq N$ に対して，$B_j^{b_j}, B_{k\ell}^0, \widetilde{B}_{k\ell}^0$ というそれぞれ独立な N^2 個のBMを用意して(ただし，$b_1<b_2<\cdots<b_N$ とする)，

$$X_{jj}(t)=B_j^{b_j}(t),$$

$$X_{k\ell}(t)=\overline{X_{\ell k}(t)}=\frac{1}{\sqrt{2}}(B_{k\ell}^0(t)+i\widetilde{B}_{k\ell}^0(t)) \quad (6)$$

とおくと，(1)の自然な形での動的拡張 $\mathsf{X}(t)=(X_{jk}(t))$，$t\geqq 0$ が得られる．これは，対角行列 $\boldsymbol{b}=\mathrm{diag}(b_1,\cdots,b_N)$ を初期値として時間発展する「GUEの拡散過程」である．

伊藤の公式を適用することにより，固有値の時間発展 $\boldsymbol{\Lambda}(t)=(\Lambda_1(t),\cdots,\Lambda_N(t))$，$t\geqq 0$ は，次の確率微分方程式系で $\beta=2$ としたものに従うことが導ける[5,6]．$1\leqq j\leqq N$，$t\geqq 0$ に対して，

$$d\Lambda_j(t)=d\widehat{B}_j^{b_j}(t)+\frac{\beta}{2}\sum_{1\leqq k\leqq N, k\neq j}\frac{dt}{\Lambda_j(t)-\Lambda_k(t)} \quad (7)$$

ただし，$\{\widehat{B}_j^{b_j}(t)\}$ は上述の $\{B_j^{b_j}(t), B_{k\ell}^0(t), \widetilde{B}_{k\ell}^0(t)\}$ とは別の，互いに独立な N 個のBMである．同様にして，GOEとGSEの動的拡張に対しては，それぞれ(7)で $\beta=1$ と4としたものが導かれる．

一般に(7)で与えられる確率過程は**ダイソン模型**とよばれる．これは対数ガスの確率的なダイナミクスを表す[2]．特に $\beta=2$ のときのダイソン模型は，各々がブラウン運動する多粒子系に非衝突条件を課した系として実現される．これは，白井氏の記事にある行列式点過程を動的に拡張した**行列式過程**であり，「多粒子可積分確率過程」の典型例である[2,5,6][3)]．

$\beta=8/\kappa$ とおき，$1\leqq j\leqq N$ に対して，

$$V_j(t)=\Lambda_j(\kappa t/N) \quad (8)$$

とする．つまり，κ の値と粒子数 N に依存して，ダイソン模型の時間尺度を変更する．その上で，複素上半平面 $\mathbb{H}=\{z\in\mathbb{C}:\mathrm{Im}\, z>0\}$ 上で定義される，時刻 t に依存した複素関数 F_t として，初期条件 $F_0(z)=z\in\mathbb{H}$ の下，次の確率的な常微分方程式を満たすものを考えることにする．

$$\frac{dF_t(z)}{dt}=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N\frac{2}{F_t(z)-V_j(t)}, \quad t\geqq 0. \quad (9)$$

$N=1$ のとき，$V_1(t)=\widehat{B}^0(\kappa t)$ とすると，(9)は $\sqrt{\kappa}B^0(t)$ で駆動される**シュラム-レヴナー発展**(SLE)に等しい[6,7]．$N\geqq 2$ のときは，ダイソン模型(7)の解の時間変更(8)で駆動されることになる．このランダムな解 F_t は，次の意味で $\mathbb{H}$ 内の N 本の曲線 $\boldsymbol{\Gamma}(t)=(\Gamma_1(t),\cdots,\Gamma_N(t))$，$0<t<\infty$，のランダムな時間発展を与える．ただし，以下では $0<\kappa\leqq 4$ $(\beta\geqq 2)$ の場合に限って述べることにする．また，$\Gamma_j(0,t]=\bigcup_{0<s\leqq t}\Gamma_j(s)$，$\Gamma_j=\lim_{t\to\infty}\Gamma_j(0,t]$ という記法を用いる．

各 $1\leqq j\leqq N$ に対して，曲線 $\Gamma_j(t)$ の出発点は $\mathbb{R}$ 上であり，ダイソン模型(7)で記述される対数ガス系の j 番目の粒子の初期位置 $\Lambda_j(0)=\widehat{B}_j^{b_j}(0)=b_j$ に等しく，また，終点はどれも $\lim_{t\to\infty}\Gamma_j(t)=\infty$ である．各 Γ_j は $\mathbb{H}$ 内の単純曲線であり，また，N 本の曲線は互いに交差しない．(次ページ図1を参照．)そして，各時刻 $t\in(0,\infty)$ において $F_t(\Gamma_j(t))=V_j(t)$ $(1\leqq j\leqq N)$ であり，F_t は

$$\text{等角写像(共形変換)}:\quad \mathbb{H}\setminus\bigcup_{j=1}^N\Gamma_j(0,t]\to\mathbb{H}$$

を与える．ランダムな等角写像 F_t の定義域の $\mathbb{H}$ 内の境界として，$\boldsymbol{\Gamma}(t)$，$0<t<\infty$ が与えられるのである．(9)は**多重SLE**とよばれる[8]．

3) ただし，一般の β の値に対して固有値過程が(7)で与えられるように，ガウス型 β 統計集団(5)を動的に拡張する正しい方法は，未だ見つけられていない．

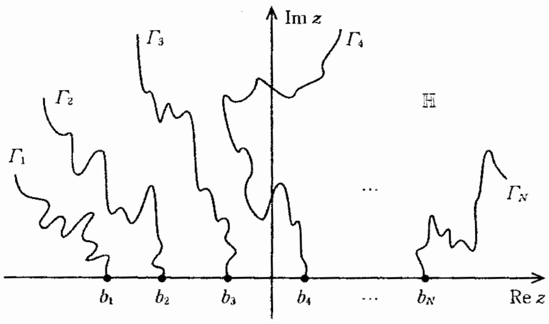

図 1　多重 SLE ($0<\kappa\leqq 4$) で与えられる $\mathbb{H}$ 内のランダム曲線の様子

3……おわりに

SLE は連続パラメータ κ を持つが，これが特別な値をとるごとに，（境界を有する 2 次元平面上の）臨界現象における普遍クラスを記述することが予想され，部分的に証明されている．例えば，$\kappa=3$ および 16/3 はイジング模型の，$\kappa=4$ はガウス自由場の，また，$\kappa=6$ はパーコレーション模型の普遍クラスに対応する[6, 7]．多重 SLE に対する研究はまだ始まったばかりである．筆者は，本稿の冒頭に述べたランダム行列の統計集団における普遍性と，臨界現象における普遍性とが，ダイソン模型の「上位機種」である多重 SLE を通じて，協奏的に研究されることを夢見ている．

参考文献

[1] 永尾太郎，『ランダム行列の基礎』，東京大学出版会(2005)．

[2] 長田博文，「ランダム行列」(伊藤清 企画・監修，渡辺信三，重川一郎 編『確率論ハンドブック』，丸善出版(2012)の 11.5 節)．

[3] 渡辺澄夫，永尾太郎，樺島祥介，田中利幸，中島伸一，『ランダム行列の数理と科学』，森北出版(2014)．

[4] 田崎晴明，原隆，『相転移と臨界現象の数理』，共立出版(2015)．

[5] 香取眞理，種村秀紀，「非衝突過程・行列値過程・行列式過程」，『数学』，**61** (3)，225-247(2009)．

[6] M. Katori, "*Bessel Processes, Schramm–Loewner Evolution, and the Dyson Model*", Springer (2015).

[7] 白井朋之，香取眞理，「SLE (Schramm–Loewner Evolution)」(伊藤清 企画・監修，渡辺信三，重川一郎 編『確率論ハンドブック』，丸善出版(2012)の 11.4 節)．

[8] I. Hotta and M. Katori, Hydrodynamic limit of multiple SLE. *J. Stat. Phys.* **171** (2018), 166–188.

[かとり まこと]