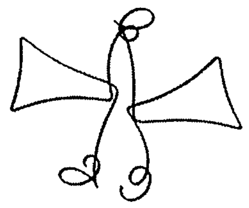
ランダムな面からランダムな点と線のダイナミクスへ

ガウス自由場，ダイソン模型，多重 SLE



香取 眞理

1. はじめに

まず，本稿のあらすじを一通り述べてしまうことにする．詳細は次節以降で順次説明する．本稿で扱う領域 D は，複素平面 $\mathbb{C}$ の真部分集合であり**単連結領域**に限るものとする．この $D \subsetneq \mathbb{C}$ 上の**ディリクレ境界ガウス自由場** H から話を始める．

これは粗い曲面の揺らぎを表す数理モデルである（図 1 参照）．そのため，$H(z)$ が各点 $z \in D$ での高さを表すと言いたいところだが，H は**超関数**に値をとる場であり，その定義には数学的な議論が必要である．領域 D の境界 ∂D 上に N 個の特異点 $\{X_j\}_{j=1}^{N}$ をもつ調和関数を D 上で H に付加することにより，**拡張ガウス自由場** $\widehat{H}$ というものを定義する．超関数なので解析的には決して滑らかではないのだが，特性としては「のっぺりとした」場に，目鼻立ちを整えた感じである．そして，この N 点配置を連続的に時間変化させた N 粒子系で**多重シュラム–レヴナー発展（SLE）**を駆動する[7~9]．

ガウス自由場は**共形変換**に対して不変である．そこで，$\mathbb{C}$ 内の単連結領域の代表として上半平面 $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\, z > 0\}$ を採用し，N 粒子系 $\boldsymbol{X}_t = (X_t^{(1)}, \ldots, X_t^{(N)})$, $t \geq 0$ は $\mathbb{H}$ の境界を与える実軸 $\mathbb{R}$ 上を動くものとしても理論の一般性は失われない．$\mathbb{H}$ 上の多重 SLE とは，恒等変換 $g_0(z) = z \in \mathbb{H}$ を初期条件とした常微分方程式

$$\frac{dg_t(z)}{dt} = \sum_{j=1}^{N} \frac{2}{g_t(z) - X_t^{(j)}}, \quad t \geq 0 \tag{1}$$

の解 $(g_t)_{t \geq 0}$ を意味する．(1) の右辺を見ると，ある時刻 $t > 0$ で $g_t(z) = X_t^{(j)}$ となるような点 $z \in \mathbb{H}$ があると，それ以降この方程式もその解も定義できなくなることが分かる．そこで，時間経過とともに，そのような点を $g_t(z)$ の定義域から除いていくことにする．時刻 t において定義域から除かれる領域は，$\mathbb{R}$ 上の N 点 $X_0^{(j)} = X_j$ を始点とする $\mathbb{H} \cup \mathbb{R}$ 上の N 本の連続な曲線 $\gamma^{(j)}[0, t] := \{\gamma^{(j)}(s) : 0 \leq s \leq t\}$ $(j = 1, \ldots, N)$ と，それらで囲まれる有界領域である*1)．

こうして，各時刻 $t > 0$ において (1) の解として，$\mathbb{H}$ の部分領域 $\mathbb{H}_t$ から $\mathbb{H}$ への写像 g_t が得られるが，これが常に**共形変換**を与えるというのが複素関数論における**レヴナー理論**の主張することである[1,6]．

賢明なる読者は，ここまでの説明で多重 SLE 方程式 (1) を駆動する N 粒子系 $(\boldsymbol{X}_t)_{t \geq 0}$ の定義がなかったことに気が付いたことであろう．多重 SLE に対する駆動過程の「選定問題」には，未だ統一的な解答はない．我々は，拡張ガウス自由場と多重 SLE との間に**結合状態**が成立すべしという条件を課すことにする．拡張ガウス場と元来の SLE（つまり，$N = 1$ の場合）に対して，Dubédat[3] や Miller と Sheffield[11] などが与えた条件を，$N \geq 2$ の場合に拡張するというごく自然な発想である．しかし，以下に述べるように，その

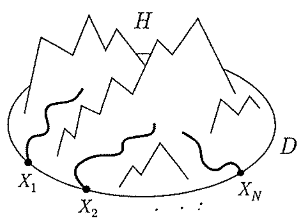


図 1　H のイメージは険しい山脈，後出の多重 SLE 曲線は渓谷を流れる河川群．

*1)　$g_t^{-1}(X_t^{(j)})$, $j = 1, \ldots, N$, $t \geq 0$ が N 本の連続曲線を成すことは一般には保証されない．しかし，以下で述べるようなダイソン模型で $(\boldsymbol{X}_t)_{t \geq 0}$ を与えた場合には，このことが証明できるのである[9]．

結果は共形場と動的ランダム行列理論を結びつける新しいものであった[7~9].

$(B_t^{(j)})_{t\geq 0}$, $j=1,\dots,N$ は N 個の互いに独立な1次元標準ブラウン運動を表すものとする．$\beta>0$ のとき，確率微分方程式

$$dY_t^{(j)} = dB_t^{(j)} + \frac{\beta}{2}\sum_{1\leq k\leq N, k\neq j}\frac{dt}{Y_t^{(j)}-Y_t^{(k)}} \qquad (2)$$

の解 $\boldsymbol{Y}_t=(Y_t^{(1)},\dots,Y_t^{(N)})$, $t\geq 0$ をダイソンのブラウン運動模型，あるいは短くダイソン模型とよぶ．新たにパラメタ κ を

$$\kappa = \frac{8}{\beta} \qquad (3)$$

と定義した上で，時間変更

$$\boldsymbol{X}_t = \boldsymbol{Y}_{\kappa t}, \quad t\geq 0 \qquad (4)$$

を行う．以下本稿でも示すように，結合条件を課すと，多重SLE駆動過程 $(\boldsymbol{X}_t)_{t\geq 0}$ は(4)，すなわち，パラメタ $\beta=8/\kappa$ のダイソン模型の時間変更として一意的に定まるのである[9]．ダイソン模型は動的なランダム行列理論において中心的に研究されてきた確率過程である[*2)].

(2)の右辺第2項（有界変動項）は，すべての2粒子間に斥力がはたらく様子を表している．ある時刻 t で粒子の衝突が起こり $Y_t^{(j)}=Y_t^{(k)}$ となると，それ以降この方程式の解は定義できなくなってしまう．しかし，$\beta\geq 1$ であれば，衝突が起こる確率は零であることが証明できる．この事実と(3)より，$\kappa\leq 8$ のときには，ダイソン模型で駆動される多重SLE (1) から，N 本の曲線（これを**多重SLE曲線**とよぶ）の確率法則が定められることになる．結合状態という拡張ガウス過程と多重SLEとの関係性は共形不変ではなく共形共変である．その性質を利用することにより，多重SLE曲線は図2に示したような**3つの相**をもつことが証明できる[9].

ガウス自由場 H というランダムな曲面の静的な確率法則から，多粒子相互作用ブラウン運動系と，それによって駆動される多重SLE曲線の時間発展という動的現象が導き出されたことになる．

*2) 「N 粒子がすべて原点にある」という特異的な初期状態からも(2)を解くことができる．その解が与える時刻 $t=1$ での粒子分布は，$\beta=1,2,4$ に対してそれぞれ，ガウス型ランダム行列の固有値アンサンブルとして有名なGOE, GUE, GSEに等しい．特に $\beta=2$ のGUEは行列式点過程であるが，その時間発展系(2)は，一般の初期配置に対して時空行列式点過程となっている[6,10].

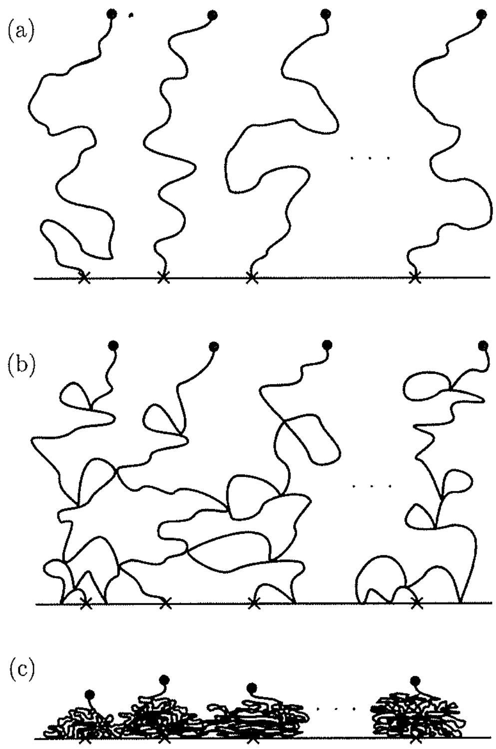


図2 (a) $\kappa\in(0,4]$ のとき，確率1で $(\gamma^{(j)})_{j=1}^N$ は各々単純曲線であり，互いに接触することはなく，また，$\gamma^{(j)}\setminus\{X_j\}\subset\mathbb{H}$ である．(b) $\kappa\in(4,8)$ のとき，正の確率で $(\gamma^{(j)})_{j=1}^N$ は自己接触してループを作るとともに，隣同士は接触し，また実軸 $\mathbb{R}$ とも接触する．(c) $\kappa=8$ のとき，$(\gamma^{(j)})_{j=1}^N$ は確率1で $\mathbb{H}\cup\mathbb{R}$ を充填する．

2. 共形不変な内積

$z=x+iy$, $x,y\in\mathbb{R}$, $i:=\sqrt{-1}$ として，$\mathbb{C}$ のルベーグ測度を $\mu(dz)=dxdy$ と記す．単連結な領域 $D\subsetneq\mathbb{C}$ 上に L^2 空間として実現される実ヒルベルト空間 $\mathcal{H}=L^2(D,\mu(dz))$ として，内積が

$$\langle f,g\rangle := \int_D f(z)g(z)\mu(dz) \qquad (5)$$

で与えられるものを考えるのが普通である．しかしここでは，それとは異なるディリクレ内積ヒルベルト空間を考えることにする．D 上のコンパクトな台をもつ滑らかな関数全体を $\mathcal{C}_c^\infty(D)$ とし，$f,g\in\mathcal{C}_c^\infty(D)$ に対して，$\nabla f(z)\cdot\nabla g(z):=\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial g}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial g}{\partial y}$ とし，

$$\langle f,g\rangle_\nabla := \frac{1}{2\pi}\int_D \nabla f(z)\cdot\nabla g(z)\mu(dz) \qquad (6)$$

とする．(6)をディリクレ内積とよび，ノルムを $\|f\|_\nabla := \sqrt{\langle f,f\rangle_\nabla}$ で与える．この内積に対して

$C_c^\infty(D)$ を完備化して得られるヒルベルト空間を $W(D)$ と記すことにする．

2つの単連結領域 D, D' に対して，D' を D の上へと一対一に写す正則関数を D' から D への**共形変換**という．共形変換を φ と書くことにする：

$$D' \ni z = x + iy \xrightarrow{\varphi} \varphi(z) = u + iv \in D.$$

この変換のヤコビアンは $J := \partial(u,v)/\partial(x,y) = (\partial u/\partial x)(\partial v/\partial y) - (\partial u/\partial y)(\partial v/\partial x)$ であるが，φ は正則関数であり**コーシー--リーマン方程式**

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \tag{7}$$

を満たすので，$J = (\partial u/\partial x)^2 + (\partial v/\partial y)^2$ と書き直せる．D 上の関数 f に対して，φ との合成により定義される D' 上の関数

$$(\varphi^* f)(z) := f(\varphi(z))$$

を，f の φ による**引き戻し**という．この定義より，$f, g \in W(D)$ に対して，

$$\langle \varphi^* f, \varphi^* g \rangle_\nabla = \frac{1}{2\pi} \int_{D'} \nabla f(\varphi)(z) \cdot \nabla g(\varphi)(z) \mu(dz)$$

であるが，微分の連鎖則とコーシー--リーマン方程式 (7) を用いると，この被積分関数は $\nabla f(\varphi) \cdot \nabla g(\varphi) J$ に等しいことが容易に示せる．従って，

$$\langle \varphi^* f, \varphi^* g \rangle_\nabla = \langle f, g \rangle_\nabla \tag{8}$$

という等式が証明されたことになる．この等式はディリクレ内積 (6) が共形変換で不変であるということを意味する．

3. ガウス自由場の共形不変性とグリーン関数

領域 D が例えば単位円であるというような特別な場合ではなく，単連結な領域 $D \subsetneq \mathbb{C}$ 一般に対して議論したい．このような領域は，**リーマンの写像定理**により，共形変換によって互いに移り変わることができる．それらの上の場 H もまた，共形不変なものとして定義したい*3)．場というのは座標 $z \in D$ の関数のことであるから $W(D)$ の元として定式化したいところであるが，それは無理である．共形不変な場 H は**超関数**に値をとる場なのである．しかし，$W(D)$ 中の関数 f を**テスト関数**として，これと H とのペアリング $\langle H, f \rangle_\nabla$ を考えることは可能である．つまり，各点 $z \in D$ ごとに曲面の高さ $H(z)$ を与える代わりに，各テスト関数 $f \in W(D)$ ごとに $\langle H, f \rangle_\nabla$ という値を与えることで，場 H を定義しようというわけである．2節で導入したヒルベルト空間 $W(D)$ を，場そのものではなく，そのテスト関数の空間として用いるのである．

場 H の棲む空間を Ω^{GFF} と書くことにする．すると，任意の $f \in W(D)$ に対して，

$$e^{-\theta^2 \|f\|^2/2} = \int_{\Omega^{\mathrm{GFF}}} e^{i\theta \langle h, f \rangle_\nabla} \mathbf{P}^{\mathrm{GFF}}(dh) \tag{9}$$

を満たすような Ω^{GFF} の上の非負測度 $\mathbf{P}^{\mathrm{GFF}}(dh)$ が唯一存在することが証明できる．ただし，θ は実パラメタである．これを**ボホナー--ミンロスの定理**という[8]．特に $\theta = 0$ とした式から $\mathbf{P}^{\mathrm{GFF}}$ が正規化されていることが分かるので，これを確率測度と見なすことができる．つまり，$\langle H, f \rangle_\nabla$ は乱数であり，その**特性関数**が

$$\mathbf{E}[e^{i\theta \langle H, f \rangle_\nabla}] = e^{-\theta^2 \|f\|^2/2} \tag{10}$$

で与えられると解釈するのである．こうして，任意の $f \in W(D)$ に対して，$\langle H, f \rangle_\nabla$ は平均零の**ガウス確率変数**を与えることになる．(10) はモーメント母関数でもある．両辺を θ で微分してから $\theta = 0$ とおくと，$\mathbf{E}[\langle H, f \rangle_\nabla] = 0$ となり，平均が零であることが確認できる．また，θ で2回微分した後で $\theta = 0$ とおくと，分散 $\mathrm{Var}[\langle H, f \rangle_\nabla] := \mathbf{E}[\langle H, f \rangle_\nabla^2]$ が

$$\mathrm{Var}[\langle H, f \rangle_\nabla] = \|f\|_\nabla^2 \tag{11}$$

というように求められる．(11) は等式

$$\frac{1}{2\pi} \int_D |\nabla f(z)|^2 \mu(dz) = \int_{\Omega^{\mathrm{GFF}}} \langle h, f \rangle_\nabla^2 \mathbf{P}^{\mathrm{GFF}}(dh)$$

を意味するので，H は $W(D)$ から $L^2(\Omega^{\mathrm{GFF}}, \mathbf{P}^{\mathrm{GFF}})$ への**等長変換**と見なせる．この等長変換 H をもって，**ディリクレ境界ガウス自由場**を定義する．

分散の式 (11) で $f \to f + g$ と置き直した等式から $f \to f - g$ と置き直した等式を引いて整理すると，共分散 $\mathrm{Cov}[\langle H, f \rangle_\nabla, \langle H, g \rangle_\nabla] := \mathbf{E}^{\mathrm{GFF}}[\langle H, f \rangle_\nabla \langle H, g \rangle_\nabla]$ に対して，

$$\mathrm{Cov}[\langle H, f \rangle_\nabla, \langle H, g \rangle_\nabla] = \langle f, g \rangle_\nabla \tag{12}$$

*3) 並進対称性や回転対称性に加えて局所的な拡大・縮小変換に対する不変性をもった量子場のイメージは，連続相転移に伴なう臨界現象やフラクタル幾何学に関する統計力学や確率論の研究に基づくものである．

が得られる．特性関数 (10) と合わせることにより，ガウス自由場はこの共分散式 (12) により定まるということができる．

このようにして定義されたガウス自由場 H の共形変換 φ による変換性を見てみよう．上述のように H は超関数であり関数ではないので，その共形変換を $\varphi(H(z))$ というようには定義できない．しかし，テスト関数 $f \in W(D)$ とのペアリングを使って，H の φ による引き戻し $\varphi_* H$ を $\langle \varphi_* H, f\rangle_\nabla := \langle H, \varphi^* f\rangle_\nabla$ によって定義することは自然である．$f, g \in W(D)$ に対して，等式

$$\begin{aligned}&\mathrm{Cov}[\langle \varphi_* H, f\rangle_\nabla, \langle \varphi_* H, g\rangle_\nabla]\\ &= \mathrm{Cov}[\langle H, f\rangle_\nabla, \langle H, g\rangle_\nabla] \qquad (13)\end{aligned}$$

を証明することができる．実際，左辺は共分散と引き戻しの定義より，$\mathbf{E}^{\mathrm{GFF}}[\langle H, \varphi^* f\rangle_\nabla \langle H, \varphi^* g\rangle_\nabla]$ であるが，(12) よりこれは $\langle \varphi^* f, \varphi^* g\rangle_\nabla$ に等しい．ところが，ディリクレ内積の共形不変性 (8) が成り立つので，これは右辺に等しいことになる．よって，ガウス自由場 H は共形変換で不変であることが結論される．

$H(z)$ という記法を許して，ディリクレ内積に対して形式的に部分積分を行うと，

$$\langle H, f\rangle_\nabla = \frac{1}{2\pi}\int_D H(z)(-\Delta f)(z)\mu(dz)$$

が得られる．ただし，$\Delta := \nabla \cdot \nabla$ はラプラシアンであり，この右辺は 2 節の冒頭で述べた通常の内積と見なせる．この等式で $-\Delta f =: F$ とおいて整理すると，$\langle H, F\rangle = 2\pi \langle H, (-\Delta)^{-1} F\rangle_\nabla$ を得る．$(-\Delta)^{-1}$ は積分演算子であり，その積分核を G_D と書きグリーン関数とよぶ：

$$(-\Delta)^{-1} F(z) = \frac{1}{2\pi}\int_D G_D(z, w) F(w)\mu(dw).$$

以上の設定より，少し計算すると，等式

$$\begin{aligned}&\mathrm{Cov}[\langle H, f\rangle, \langle H, g\rangle]\\ &= \int_{D\times D} f(z) G_D(z, w) g(w)\mu(dz)\mu(dw)\end{aligned}$$

を導くことができる．したがって，ガウス自由場の共形不変性 (13) はグリーン関数に対しては

$$G_{D'}(z, w) = G_D(\varphi(z), \varphi(w))$$

と表される．ただし，$z, w \in D$ であるが，$z \neq w$ とする．つまり，領域 D' 上のグリーン関数 $G_{D'}$ は共形変換 φ による領域 D' の像である領域 $D = \varphi(D')$ の上のグリーン関数 G_D と関数としては全く同じであり，ただ，この 2 点関数の引数を $(z, w) \to (\varphi(z), \varphi(w))$ というように座標変換しただけである．

$\mathbb{C}$ 内の単連結領域の代表である $\mathbb{H}$ 上のグリーン関数は次式で与えられる（$z, w \in \mathbb{H}$, $z \neq w$）：

$$G_{\mathbb{H}}(z, w) = \log\left|\frac{z - \overline{w}}{z - w}\right|. \qquad (14)$$

$z = w$ に対してはグリーン関数を定義することができない．ガウス自由場が超関数であることは，このことに起因している．

4. 拡張ガウス自由場の共形共変性

単連結領域 D の部分集合 K として，コンパクト D-包とよばれる形状のものを考える．これは，図 3 に示したように，領域 D の境界 ∂D から「生えている」（$\overline{K} \cap D = K$）．K はいくつかの部分に分かれていてもよいが，D 内の K の補集合 $D \setminus K$ は単連結であるものとする．

D 上のガウス自由場 H をコンパクト D-包 K 上に制限したものを $H|_K$ と書き，これによって生成される σ-加法族を $\mathcal{F}_K^{\mathrm{GFF}}$ とする．そして，$\mathcal{F}_K^{\mathrm{GFF}}$ を与えた下で，$D \setminus K$ 上に制限したガウス自由場 $H|_{D\setminus K}$ を考えることにする．これは $D \setminus K$ という領域上のガウス自由場（これを $H_{D\setminus K}$ と書くことにする）ではない．3 節で定義したガウス自由場はディリクレ境界条件を満たすものであり，よって $H_{D\setminus K}$ においては $D \to D \setminus K$ という領域縮小で新たに生じた境界 ∂K の上でもその値は零でなければならない．それに対して，$H|_{D\setminus K}$ は D 上のガウス自由場 H を単に $D \setminus K$ に制限しただけであるので，その値は ∂K 上で零ではない．結局，$\mathcal{F}_K^{\mathrm{GFF}}$ を与えた下での $H|_{D\setminus K}$ は，$H_{D\setminus K}$ に「$H|_{\partial K}$ を $D \setminus K$ に調和拡張して得られる関数」を加えたものとなる．これをガウス自由場の領域マルコ

図 3　単連結領域 D 内のコンパクト D-包 K の 1 例．この場合，K は斜線を施した領域 2 つと右上の曲線の 3 つの部分から成っている．$D \setminus K$ は単連結である．

フ性という．この調和関数は $W(D\setminus K)$ の直交補空間 $W^{\perp}(D\setminus K)$ の元である．我々のガウス自由場は平均零のものであったので，$H|_{D\setminus K}$ に対して条件付き期待値 $\mathbf{E}^{\rm GFF}[\cdot|\mathcal{F}_K^{\rm GFF}]$ をとると，ガウス自由場 $H_{D\setminus K}$ の部分は消えて，この付加的な調和関数だけを取り出すことができる．

以下では，時刻 t が経過するごとに，コンパクト D-包 K_t が D 内で単調に増大していく場合を考える $(K_s\subset K_t,\ 0<s<t)$．これに伴なって，$\mathcal{F}_{K_t}^{\rm GFF}$ も単調増大していくが，これを「過去」に関する情報系（フィルトレーション）と見なすことにする．そして，過去のすべての情報の下で，「未来」の状態 $H|_{D\setminus K_t}$ を予測する，という設定を考えることにする．上で説明したように，その期待値は

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}^{\rm GFF}[H|_{D\setminus K_t}|\mathcal{F}_{K_t}^{\rm GFF}]\\&=H|_{\partial K_t}\ \text{を調和拡張して得られる関数}\end{aligned}$$

で与えられることになるが，∂K_t は D 内の「過去」を表す領域 K_t と「未来」を表す領域 $D\setminus K_t$ の境界であるので，「現在」を表すことになる．「未来」は「過去」には依らず，「現在」の状態（とランダムネス）のみで決まるということである．

ここで再び，$\mathbb{C}$ 内の単連結領域の代表として $\mathbb{H}$ を考える．いま，$N\in\mathbb{N}:=\{1,2,\dots\}$ として，コンパクト $\mathbb{H}$-包が $\mathbb{R}$ 上の N 点から生えていて，それらの付け根は $\mathbb{R}$ 上に $-\infty<X_1<\cdots<X_N<\infty$ というように順序付けられているものとする．境界点として無限遠点 ∞ も付け加えた $C:=(\mathbb{H};X_1,\dots,X_N;\infty)$ を**境界付き配置**とよぶことにする．そして，次の形の調和関数を導入する*4)：

$$\begin{aligned}\mathfrak{h}_C(z)&:=\sum_{j=1}^{N}a_j\mathrm{Im}\ \log(z-X_j)\\&=\sum_{j=1}^{N}a_j\arg(z-X_j),\quad z\in\mathbb{H}.\end{aligned}\tag{15}$$

ただし，$\boldsymbol{a}=(a_1,\dots,a_N)\in\mathbb{R}^N$ は未定係数である．

ここで，共形変換 $\varphi: D'\to\mathbb{H}$ を考える．この逆写像により領域 $D'=\varphi^{-1}(\mathbb{H})$ の $N+1$ 個の境界点 $x_j=\varphi^{-1}(X_j)$, $j=1,\dots,N$, $y=\varphi^{-1}(\infty)$ を定め，$\varphi^{-1}(C):=(D';x_1,\dots,x_N;y)=:C'$ とする．$\mathfrak{h}_C$ の φ による引き戻しを定義する際には，引数を $z\to\varphi(z)$ とするだけでなく，境界点も上のように φ で変換する必要があるので，結局

$$\begin{aligned}\varphi^*\mathfrak{h}_C(\cdot)&=\sum_{j=1}^{N}a_j\arg(\varphi(\cdot)-\varphi(\varphi^{-1}(X_j)))\\&=\sum_{j=1}^{N}a_j\arg(\varphi(\cdot)-X_j)\end{aligned}$$

となる．この調和関数をガウス自由場に加えたものを**拡張ガウス自由場**とよび

$$\widehat{H}_C=H+\mathfrak{h}_C\tag{16}$$

と記すことにする．ガウス自由場 H の φ による引き戻しを φ_*H と書くことにしたので，共形変換 φ により，拡張ガウス自由場 $\widehat{H}_C$ は $\varphi_*H+\varphi^*\mathfrak{h}_C$ と変換されるように思われるが，これでは不十分である．以下のように，φ^{-1} の導関数 $(\varphi^{-1})'(z):=d\varphi^{-1}(z)/dz$ の項を付加する必要がある：

$$\begin{aligned}\widehat{H}_{C'}&=\varphi_*H+\varphi^*\mathfrak{h}_C-\chi\arg(\varphi^{-1})'\\&=:\varphi_*H+\mathfrak{h}_{C'}.\end{aligned}\tag{17}$$

χ は実パラメタである．この付加項は場の理論でいう**アノマリー**である．Miller と Sheffield は，このアノマリー項を込めた拡張ガウス自由場の同値類を**虚曲面** (imaginary surface) とよんでいる[11]．

ガウス自由場 H は超関数に値をとる場であるので，その指数関数は定義されないが，ある種の繰り込み操作をすることで，これに対応したものを定義することができる[4]．これを含みとして，"$e^{H(\cdot)}$" と書くことにする*5)．さらに (15) で複素化 $\arg(\cdot)\to\log(\cdot)$ してしまうと，(16) の指数関数化は次式となる：

$$\text{“}e^{\widehat{H}_C(\cdot)}\text{”}=\text{“}e^{H(\cdot)}\text{”}\prod_{j=1}^{N}(\cdot-X_j)^{a_j}.$$

$\{X_j\}_{j=1}^N$ は $\mathbb{H}$ の境界である実軸 $\mathbb{R}$ 上の点であったので，虚曲面とはこれら境界点からの摂動による "$e^{H(\cdot)}$"

*4) 複素数 $z\in\mathbb{C}$ は $z\neq 0$ のとき $z=|z|e^{i\theta}$ という極座標表示をもつ．$|z|>0$ は絶対値であり，$\theta\in[0,2\pi)$ は偏角を表す．この極座標表示において対数 log をとると $\log z=\log|z|+i\theta$ となる．この虚部，すなわち偏角 θ を $\arg z$ と記す．

*5) $z\in\mathbb{H}$ を中心とする半径 ε の円周上でガウス自由場 H を平均化するとガウス確率変数が得られる．これを H_ε と書くことにする．パラメタ $\gamma\in[0,2)$ を導入し，$\mathbb{H}$ 上のランダムな測度を $\mu_\varepsilon^H(dz)=e^{\gamma^2/2}e^{\gamma H_\varepsilon(z)}\mu(dz)$ とする．Duplantier と Sheffield[4] はこの $\varepsilon\to 0$ 極限の存在を証明している．極限として得られた確率測度は，Polyakov の **2 次元 Liouville 重力**の確率論的な実現と解釈されている．

のデフォルメを意味するものと考えられる．

5. レヴナー鎖との結合問題

代表的境界付き配置 $C = (\mathbb{H}; X_1, \ldots, X_N; \infty)$ に対して，$\{X_j\}_{j=1}^N$ を始点とする**レヴナー鎖**とは，時刻 $t \in [0, \infty)$ をパラメタとするコンパクト $\mathbb{H}$-包の増大族 $(K_t)_{t \geq 0}$ であり，次の条件を満たすものである．各 $j = 1, \ldots, N$ に対して，X_j を出発点とする連続な非交差曲線（ただし，自己接触や実軸 $\mathbb{R}$，あるいは隣の曲線との接触は可能）がある．これを $\gamma^{(j)} := \{\gamma^{(j)}(t) : t \in [0, \infty)\}$ と書くと，始点は $\gamma^{(j)}(0) = X_j$ であり，$t > 0$ で $\gamma^{(j)}[0, t] := \{\gamma^{(j)}(s) : s \in [0, t]\} \subset \mathbb{H} \cup \mathbb{R}$ である．そして，各時刻 $t \geq 0$ において，$\mathbb{H} \setminus \bigcup_{j=1}^N \gamma^{(j)}(0, t]$ の非有界領域として単連結領域 $\mathbb{H}_t := \mathbb{H} \setminus K_t$ を定義することができる．

いま，パラメタ $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_N)$ と χ が定められているものとする．時刻 $t \in [0, \infty)$ に依存した拡張ガウス自由場 $\widehat{H}_t$ と $\{X_j\}_{j=1}^N$ を出発点とするレヴナー鎖 $(K_t)_{t \geq 0}$ に対して，この 2 つの**結合状態**を定義することにする．これは，両者を定義するフィルター付き確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, $\mathcal{F} = \bigcup_{t \geq 0} \mathcal{F}_t$ があり，拡張ガウス自由場に対して，次の形の領域マルコフ性が成立することをいう：

$$\mathbf{E}[\widehat{H}_t|_{\mathbb{H}_t} | \mathcal{F}_t] = \mathfrak{h}_{C_t}, \quad t \geq 0. \tag{18}$$

ただし，各時刻 $t \geq 0$ での境界付き配置は

$$C_t = (\mathbb{H}_t; \gamma^{(1)}(t), \ldots, \gamma^{(N)}(t); \infty) \tag{19}$$

で与える．

ガウス自由場と結合状態が成立する確率的なレヴナー鎖を定める問題をここでは**結合問題**とよぶことにする．代表的境界付き配置 C において，$\widehat{H}_C = H + \mathfrak{h}_C$ と $(K_t)_{t \geq 0}$ が結合状態にあると，共形変換 $\varphi : C' \to C$ の引き戻しで得られる境界付き配置 $C' = \varphi^{-1}(C)$ に対して，(17) で与えられる $\widehat{H}_{C'}$ と $(\varphi^{-1}(K_t))_{t \geq 0}$ も結合状態にあることになる．(17) の変換にはアノマリー項があるので，その含みで，この特性を結合問題の**共形共変性**ということにする．

$N = 1$ のときの結合問題は，Dubédat[3] や Miller–Sheffield[11] によって次のような形で解かれている．$a_1 = -2/\sqrt{\kappa}$，かつ，

$$\chi = \frac{2}{\sqrt{\kappa}} - \frac{\sqrt{\kappa}}{2} \tag{20}$$

のとき[*6)]，パラメタ κ をもつシュラム–レヴナー発展 ($\mathbf{SLE}_\kappa$)[1,6] が拡張ガウス自由場と結合する．

6. ダイソン模型で駆動される多重 SLE

我々は一般の $N \in \mathbb{N}$ に対して，結合問題を解くことに成功した[7~9]．ただし，パラメタは上述の先行研究に従って

$$a_j = -\frac{2}{\sqrt{\kappa}}, \quad j = 1, \ldots, N, \tag{21}$$

および (20) と定める．

レブナー鎖に対する一般的な考察から，求めたい $(K_t)_{t \geq 0}$ は**多重 SLE** (1) で与えられることが結論される．問題は，これを駆動する実軸 $\mathbb{R}$ 上の N 粒子確率過程 $(X_t)_{t \geq 0}$ を**結合条件** (18) と (19) を満たすように定めるところにある．その必要十分条件は次で与えられる[7~9]．$(\mathfrak{h}_{C_t}(\cdot))_{t \geq 0}$ は**連続マルチンゲール**の（連続パラメタ $z \in \mathbb{H}$ をもつ）族であり，その**相互変動**の増分は，$z, w \in \mathbb{H}$ に対して，

$$d\langle \mathfrak{h}_{C_\cdot}(z), \mathfrak{h}_{C_\cdot}(w) \rangle_t = -dG_{\mathbb{H}}(g_t(z), g_t(w)) \tag{22}$$

である．グリーン関数の増分が相互変動で打ち消されることになり，結合状態はある種の**定常性**を実現することになる[8]．(14) に (1) を用いることにより，

$$dG_{\mathbb{H}}(g_t(z), g_t(w)) = -4 \sum_{j=1}^N \mathrm{Im} \frac{1}{g_t(z) - X_t^{(j)}} \mathrm{Im} \frac{1}{g_t(w) - X_t^{(j)}} dt \tag{23}$$

を導くことができる．$\mathfrak{h}_{C_t}$ の代わりにこれを複素化した

$$\widetilde{\mathfrak{h}}_{C_t} = -\frac{2}{\sqrt{\kappa}} \sum_{j=1}^N \log(g_t - X_t^{(j)}) - \chi \log(g_t')$$

を考えることにする．**陰関数定理**と**伊藤の公式**より，

*6) このとき，パラメタ χ とビラソロ代数の中心元 c との間に $c = 1 - 6\chi^2$ という関係式が成立する．$\kappa = 4$ のとき $\chi = 0$ であり $c = 1$ となる．c は場の理論に含まれるボソンの数であり，このとき自由ボソン場とよばれる．本稿でいうガウス自由場はこれに等しい．それに対して，拡張ガウス自由場では一般に $\chi \neq 0$ である．よって自由場とは異なる量子場に相当することになり，アノマリー項が生じる．なお，$\kappa = 3$ のとき，$\chi = 1/(2\sqrt{3})$ となるので $c = 1/2$ となる．“ボソンの半分はフェルミオン” であり，この場合は自由フェルミ場を意味する．Smirnov は臨界イジング界面のスケーリング極限が SLE_3 で与えられること[2] などを証明して，2010 年にフィールズ賞を受賞している．

$X_t^{(j)}, j=1,\dots,N$ は，$X_t^{(j)} = M_t^{(j)} + F_t^{(j)}$ というように，マルチンゲール部分 $M_t^{(j)}$ と有界変動部分 $F_t^{(j)}$ とに分解できることが結論される（半マルチンゲール）．すると，伊藤の公式より，

$$d\widetilde{\mathfrak{h}}_{C_t}(z) = \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{(g_t(z) - X_t^{(j)})^2} \times \left\{ \left(-\frac{4}{\sqrt{\kappa}} + 2\chi \right) dt + \frac{1}{\sqrt{\kappa}} d\langle M_\cdot^{(j)}, M_\cdot^{(j)} \rangle_t \right\}$$
$$+ \frac{2}{\sqrt{\kappa}} \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{g_t(z) - X_t^{(j)}} \times \left\{ dF_t^{(j)} - 4 \sum_{1 \le k \le N, k \ne j} \frac{dt}{X_t^{(j)} - X_t^{(k)}} \right\}$$
$$+ \frac{2}{\sqrt{\kappa}} \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{g_t(z) - X_t^{(j)}} dM_t^{(j)}$$

という等式が導かれる．これがマルチンゲールであるためには，右辺第 1 項と第 2 項の和が零でなければならないが，前者は $g_t(z) = X_t^{(j)}$ に位置する位数 2 の極からの寄与であるのに対して，後者は位数 1 の極からの寄与であるので，それぞれ独立に零でなければならない．(20) としたので，$t \ge 0, j = 1, \dots, N$ に対して，$d\langle M_\cdot^{(j)}, M_\cdot^{(j)} \rangle_t = \kappa dt$ であり，かつ，

$$dF_t^{(j)} = 4 \sum_{1 \le k \le N, k \ne j} \frac{dt}{X_t^{(j)} - X_t^{(k)}}$$

が結論される．これらの結果と (23) より，$\mathfrak{h}_{C_t} = \mathrm{Im}\, \widetilde{\mathfrak{h}}_{C_t}$ の相互変動は

$$d\langle \mathfrak{h}_{C_\cdot}(z), \mathfrak{h}_{C_\cdot}(w) \rangle_t = -dG_{\mathbb{H}}(g_t(z), g_t(w))$$
$$+ \frac{4}{\kappa} \sum_{1 \le j,k \le N, j \ne k} \mathrm{Im}\, \frac{1}{g_t(z) - X_t^{(j)}} \mathrm{Im}\, \frac{1}{g_t(w) - X_t^{(k)}} \times d\langle M_\cdot^{(j)}, M_\cdot^{(k)} \rangle_t$$

と計算されるが，これが (22) となるためには，$\langle M_\cdot^{(j)}, M_\cdot^{(k)} \rangle_t = 0, j \ne k$ でなければならない．以上より，次の定理が証明されたことになる．

定理　パラメタに関して (20) と (21) を仮定する．$N \ge 2$ の場合，ガウス自由場と多重 SLE との結合状態は，多重 SLE の駆動過程 $\boldsymbol{X}_t = (X_t^{(1)}, \dots, X_t^{(N)})$，$t \ge 0$ が，確率微分方程式

$$dX_t^{(j)} = \sqrt{\kappa} dB_t^{(j)} + 4 \sum_{1 \le k \le N, k \ne j} \frac{dt}{X_t^{(j)} - X_t^{(k)}},$$

$j = 1, \dots, N$，$t \ge 0$ の解で与えられるときに限り成立する．

パラメタ β のダイソン模型の方程式 (2) において，$\beta = 8/\kappa$ として時間変更 $\boldsymbol{X}_t = \boldsymbol{Y}_{\kappa t}$ したものは，ブラウン運動の拡散スケーリング則 $(B_{\kappa t})_{t \ge 0} \overset{(\mathrm{law})}{=} (\sqrt{\kappa} B_t)_{t \ge 0}$ より，上の確率微分方程式に等しい．

7. おわりに

ダイソン模型で駆動された多重 SLE 曲線の相転移（図 2 参照）によって，高分子鎖集団における**コイル・グロビュール転移**や，濡れや融解現象で重要な**整合・不整合転移**を記述できないだろうか．$\kappa > 8$ $(\beta < 1)$ での様子は未知である．また，$N \to \infty$ に伴なう流体力学的極限[5]や無限粒子系の系統的な研究が待たれる．

本稿は越田真史氏（Aalto 大学）との共同研究に基づく．また，本研究は科研費学術変革領域 (A) 22H05105 の一環として行っている．

参考文献

1) 白井朋之，香取眞理：SLE (Schramm–Loewner Evolution)，『確率論ハンドブック』（伊藤清 企画・監修，渡辺信三，重川一郎 編）11.4 節，丸善出版，東京 (2012).
2) D. Chelkak, S. Smirnov: *Invent. Math.* **189** (2012) 515–580.
3) J. Dubédat: *J. Amer. Math. Soc.*, **22** (2009) 995–1054.
4) B. Duplantier, S. Sheffield: *Invent. Math.* **185** (2011) 333–393.
5) I. Hotta, M. Katori: *J. Stat. Phys.* **171** (2018) 166–188.
6) M. Katori: *Bessel Processes, Schramm–Loewner Evolution, and the Dyson Model*, SpringerBriefs in Mathematical Physics 11, Springer, Tokyo (2016).
7) M. Katori, S. Koshida: *J. Math. Phys.* **61** (2020) 083301/1–25.
8) M. Katori, S. Koshida: *Advanced Studies in Pure Mathematics* **87** (2021) 315–340.
9) M. Katori, S. Koshida: *J. Phys. A: Math. Theor.* **54** (2021) 325002 (19 pages).
10) M. Katori, H. Tanemura: *Commun. Math. Phys.* **293** (2010) 469–497.
11) J. Miller, S. Sheffield: *Probab. Theory Relat. Fields* **164** (2016) 553–705.

（かとり・まこと，中央大学理工学部）