

非衝突過程・行列値過程・行列式過程*

香取 眞理 種村 秀紀

0 はじめに

互いに独立な N 本の 1 次元拡散過程を, 粒子間衝突が起こらないという条件の下で考えると, 粒子間に強い斥力相互作用をもつ多粒子拡散過程が得られる. これを非衝突拡散過程とよぶ. 1 次元拡散過程として特にブラウン運動を考えると, 得られる非衝突拡散過程は, ある行列値過程と関係することを Dyson が 1962 年に示している [10]. 彼は, 対角成分が実ブラウン運動に従って変動し, 非対角成分が複素ブラウン運動に従って変動する, エルミート行列に値をもつ確率過程を考案した. 行列のサイズを $N \times N$ とする. エルミート行列値なので N 個の固有値は実軸上を運動することになるが, Dyson はその運動を記述する N 連立の確率微分方程式を導いた. 本稿では, この固有値の確率過程を Dyson モデルとよぶことにする. 実軸上の固有値をそれぞれ 1 次元上の粒子の位置とみなすことにすると, Dyson モデルは 1 次元 N 粒子系を記述することになる. Dyson は, これが非衝突ブラウン運動に他ならないことを結論している.

相関関数が行列式で表される粒子配置空間上の分布およびその分布に従う確率過程は行列式点過程 (determinantal point process) またはフェルミ粒子点過程 (Fermion point process) とよばれている [50, 51]. 非衝突ブラウン運動は, ある初期分布の下で, 任意の時刻での同時刻分布が行列式点過程となっているが, このとき任意の多時刻結合分布に対して定義される多時刻相関関数も行列式で表すことができる. このような確率過程を本稿では行列式過程とよぶことにする.

ブラウン運動の本数 N を無限大にしたときの系の漸近挙動を調べる問題を考える. 非衝突ブラウン運動は, 上述のように行列値過程の固有値過程と等価であり, また行列式過程であるので, この問題はランダム行列のサイズを無限大にしたときの固有値分布の様子を調べる問題と関連し, サイズ無限大の行列の行列式の性質を詳しく調べることが求められる. これは, ランダム行列理論 [38, 39] を応用して無限粒子系を構成するという研究課題である [28, 33, 34].

本稿では, これらの結果をブラウン運動以外の拡散過程から成る非衝突過程への一般化を含めて紹介する. まず第 1 節では, 本稿で扱う 1 次元拡散過程として, ブラウン運動, ブラウン橋, 吸収壁ブラウン運動, ベッセル過程, ベッセル橋および彷徨過程に関する基本的な事柄を紹介する. 非衝突拡散過程の推移確率密度は 1 次元拡散過程の推移確率密度を成分とする行列式を用いて表すことができる (Karlin-McGregor の公式). この表現が非衝突拡散過程の解析に有効な手段を与える. 第 2 節では, Karlin-McGregor の公式を述べて, 非衝突拡散過程の性質を纏める. エルミート行列値過程の各成分をブラウン運動以外の確率過程を用いて与えたときに, その固有値はどのような確率微分

* 「数学」第 61 巻 第 3 号 2009 年 7 月 夏季号掲載 pp.225-247.

方程式を満足すべきか，という基本的な問いに答えるものとして Bru による定理 [4, 5] とその一般化となる定理 [30, 31] がある．第 3 節では，一般化された Bru の定理を述べて，その応用例を与え．第 4 節では行列式過程について述べる．そして，拡散過程の本数（または行列の大きさ） N を無限大にしたときの漸近挙動について解説する [28, 33, 34]．

非衝突条件を無限の時間区間 $(0, \infty)$ で課すのではなく，有限の時間区間 $(0, T)$ でのみ課す状況を考えて，各 1 次元拡散過程は時間的に斉次であっても，多粒子拡散過程である非衝突過程は時間的に非斉次になる．第 5 節では，時間的に非斉次な非衝突過程に対応する行列値過程を論じる．この場合は，非衝突過程は行列式過程にはならないが，その一般化であるパフィアン過程というものになる [28, 33]．最後の第 6 節では，本稿では論じることができなかった関連事項をいくつか列挙しておく．

1 ブラウン運動とその条件付き過程

(Ω, \mathcal{F}, P) を確率空間とする．次の性質を満たす確率過程 $\{B(t, \omega)\}_{t \in [0, \infty)}$ を 1 次元ブラウン運動 (Brownian motion) という．

1. $B(0, \omega) = 0$ が確率 1 で成り立つ．
2. 任意の $\omega \in \Omega$ に対して， ω を固定したとき $B(t, \omega)$ は t の関数として連続な実数値関数である．（この性質があるとき，道が連続であるという．）
3. 任意の時刻の列 $t_0 \equiv 0 < t_1 < \dots < t_M$ ($M = 1, 2, \dots$) に対し，増分 $\{B(t_j) - B(t_{j-1})\}_{j=1, 2, \dots, M}$ は独立で，各々の分布は平均 0，分散 $t_j - t_{j-1}$ の正規分布に従う．

したがって

$$G(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right), \quad t > 0, \quad x \in \mathbf{R}$$

とにおいて， $x_0 \equiv 0$ とすると，ブラウン運動が各時刻 t_j で区間 $[a_j, b_j]$ に滞在する確率 $P(B(t_j) \in [a_j, b_j], j = 1, 2, \dots, M)$ は

$$\int_{a_1}^{b_1} dx_1 \int_{a_2}^{b_2} dx_2 \cdots \int_{a_M}^{b_M} dx_M \prod_{j=1}^M G(t_j - t_{j-1}, x_j - x_{j-1})$$

で与えられることが導かれる．この積分核である $G(s, x; t, y) \equiv G(t - s, y - x)$ を，ブラウン運動の推移確率密度関数という．任意の時刻 $s \geq 0$ に対して，その時刻でのブラウン運動の値 $B(s)$ が与えられると，それ以前のブラウン運動 $B(u), u < s$ とそれ以後のブラウン運動 $B(t), t > s$ とは条件付き独立であることが分かる．この性質をマルコフ性という．正の値をとる確率変数 τ がマルコフ時刻であるとは， τ の値がある定数 u 以下であるかどうかは確率過程の時刻 u までの値だけで決まり，それ以降の時刻でとる値には影響されないことをいう．例えば，ある領域を定めたとき，確率過程が最初にその領域内に到達する時刻はマルコフ時刻である．ブラウン運動では，上記のマルコフ性の説明文において時刻 s とあるところを任意のマルコフ時刻 τ に替えても構わない．その場合でも同様に，条件付き独立性が成り立つのである．この性質を強マルコフ性という（例えば文献 [58, 47] を参照）．一般に，道が連続である確率過程で，強マルコフ性をもつものを拡散過程という．

特に、ブラウン運動のように推移確率密度が時間の差 $t-s$ で定まる拡散過程は時間的に斉次であるという。本稿では、そのような場合には、推移確率密度 $G(s, x; t, y)$ を $G(t-s, y|x)$ と表記して、時間の差 $t-s$ の関数であることを明示することにする。

ある時刻 $T > 0$ で原点に到達するという条件の下でのブラウン運動を考える。定められたある時刻でブラウン運動がある 1 点に到達する確率は 0 であるので、この確率過程は、 $\varepsilon > 0$ としてまず時刻 T で有限区間 $(-\varepsilon, \varepsilon)$ に到達するという条件の下でのブラウン運動を考えてから、その $\varepsilon \rightarrow 0$ の極限として定義する必要がある。その結果、推移確率密度は

$$G^T(s, x; t, y) = \frac{G(T-t, 0|y)G(t-s, y|x)}{G(T-s, 0|x)}, \quad 0 \leq s < t \leq T, \quad x, y \in \mathbf{R}$$

で与えられることが導かれる。この条件付き確率過程を $\beta^T(t)$, $t \in [0, T]$ と書くことにする。これは時間的に非斉次な拡散過程であり、期間 T のブラウン橋 (Brownian bridge) とよばれている。

1 次元ブラウン運動は一般にはすべての実数値をとり得るが、「負の値はとらない」という条件を課すことにする。こうして得られる条件付き過程 $Y(t)$, $t \in [0, T]$ は、時間的に斉次な拡散過程であり、その推移確率密度関数を $G^{(1/2)}(t, y|x)$ と書くことにすると

$$\begin{aligned} G^{(1/2)}(t, y|x) &= \frac{y}{x} \left\{ G(t, y|x) - G(t, -y|x) \right\}, \quad t > 0, \quad x > 0, \quad y \geq 0 \\ G^{(1/2)}(t, y|0) &= \frac{2}{t} y^2 G(t, y|0), \quad t > 0, \quad y \geq 0 \end{aligned} \quad (1)$$

であることが導ける。3 次元ブラウン運動 $B(t) = (B_1(t), B_2(t), B_3(t))$ の原点からの距離 $(B_1(t)^2 + B_2(t)^2 + B_3(t)^2)^{1/2}$ も同じ推移確率密度関数をもつことが知られており、この拡散過程は 3 次元ベッセル過程 (Bessel process) とよばれている。つまり 3 次元ベッセル過程は、1 次元ブラウン運動の条件付き過程としての表現と 3 次元ブラウン運動の動径方向への射影としての表現という二つの異なる表現をもつことが分かる。 $Y(t)$ は確率微分方程式

$$Y(t) = B(t) + \int_0^t \frac{1}{Y(s)} ds, \quad t > 0$$

を満足する [47].

1 次元ブラウン運動において時刻 0 から $T (< \infty)$ までの有限な時間区間に着目し、この間には負の値はとらないという条件を課した確率過程 $X(t)$, $t \in [0, T]$ を考えると、今度は時間的に非斉次な拡散過程が得られる。その推移確率密度関数を $G_T^{(1/2,1)}(s, x; t, y)$ と書くと

$$\begin{aligned} G_T^{(1/2,1)}(s, x; t, y) &= \frac{h(T-t, y)}{h(T-s, x)} \left\{ G(t-s, y|x) - G(t-s, -y|x) \right\}, \quad 0 \leq s < t \leq T, \quad x > 0, \quad y \geq 0 \\ G_T^{(1/2,1)}(0, 0; t, y) &= \frac{\sqrt{2\pi T}}{t} h(T-t, y) y G(t, y|0), \quad t \in (0, T], \quad y \geq 0 \end{aligned} \quad (2)$$

である。ただし $h(T-s, x)$, $x > 0$, $s \in (0, T]$ は、時刻 s で点 x にいたブラウン運動が時間区間 $[s, T]$ の間は負の値をとらない確率である。この条件付き過程はブラウン彷徨過程 (Brownian meander) とよばれている。互いに独立な 1 次元ブラウン運動 $B_1(t), B_2(t)$ とそれらと独立である期間 T のブラウン橋 $\beta^T(t)$ を用いて $(B_1(t)^2 + B_2(t)^2 + \beta^T(t)^2)^{1/2}$, $t \in [0, T]$ と定義されたものもブラウン彷徨過程となることが知られており、ブラウン彷徨過程も、1 次元ブラウン運動の条件付き過程としての表現と 3 次元拡散過程の動径方向への射影としての表現の二つをもつことが分かる [59].

(1) と (2) を見比べて、ともに原点から出発する 3 次元ベッセル過程 Y とブラウン彷徨過程 X の推移確率密度を比較してみると、それらの分布は互いに絶対連続であって

$$P(X(\cdot) \in dw) = \sqrt{\frac{\pi T}{2}} \frac{1}{w(T)} P(Y(\cdot) \in dw) \quad (3)$$

となることが分かる。(3) は Imhof 関係とよばれている [21].

原点に吸収壁があり、そこにブラウン粒子が到達すると消滅してしまうという確率過程を $(0, \infty)$ 内の吸収壁ブラウン運動 (absorbing Brownian motion) という。その推移確率密度 $\widehat{G}(t-s, y|x)$ 、つまり時刻 s で点 $x > 0$ にいたブラウン運動が、時間区間 $[s, t]$ の間は常に正の値をとりながら時刻 t で点 $y > 0$ に到達する確率密度は、

$$\widehat{G}(t-s, y|x) = G(t-s, y|x) - G(t-s, -y|x)$$

で与えられる。(1) の第 1 式は、この吸収壁ブラウン運動の推移確率密度 $\widehat{G}(t, y|x)$ を $(y/x)\widehat{G}(t, y|x)$ と変換すれば、3 次元ベッセル過程の推移確率密度 $G^{(1/2)}(t, y|x)$ が得られることを示している。これは Doob の意味での優調和変換 [7] である。

d が自然数であるとき、 d -次元ブラウン運動 $(B_1(t), B_2(t), \dots, B_d(t))$ の原点からの距離 $(B_1(t)^2 + B_2(t)^2 + \dots + B_d(t)^2)^{1/2}$ は拡散過程となり、これを d -次元ベッセル過程という。ベッセル過程は d が正の実数の場合に一般化されており、 $2(\nu+1)$ -次元ベッセル過程 $Y^{(\nu)}(t)$ 、 $(\nu \in (-1, \infty))$ の推移確率密度関数 $G^{(\nu)}(t, y|x)$ は

$$\begin{aligned} G^{(\nu)}(t, y|x) &= \frac{y^{\nu+1}}{x^\nu} \frac{1}{t} \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2t}\right) I_\nu\left(\frac{xy}{t}\right), \quad t > 0, \quad x > 0, \quad y \geq 0 \\ G^{(\nu)}(t, y|0) &= \frac{y^{2\nu+1}}{2^\nu \Gamma(\nu+1) t^{\nu+1}} \exp\left(-\frac{y^2}{2t}\right), \quad t > 0, \quad y \geq 0 \end{aligned}$$

で与えられる [47]。ここで、 $\Gamma(z)$ はガンマ関数であり、 $I_\nu(z)$ は変形ベッセル関数である。ベッセル過程は、その次元 d (パラメータ ν) により性質が異なる。原点に対して、2 次元以上 ($\nu \geq 0$) では非再帰的であるが、2 次元未満 ($-1 < \nu < 0$) では再帰的である。また、1 次元以上 ($\nu \geq -1/2$) であれば半マルチンゲールであるが、1 次元未満 ($-1 < \nu < -1/2$) のときは半マルチンゲールではない [47].

Yor はブラウン彷徨過程を特別な場合として含む拡散過程の族を導入し、generalized meanders と名付けた [59]。本稿ではこれらを総称して彷徨過程とよぶことにする。彷徨過程 $X^{(\nu, \kappa)}(t)$ は 2 つのパラメータ $\nu \in (-1, \infty)$ と $\kappa \in (0, 2(\nu+1))$ を持ち、推移確率密度は

$$\begin{aligned} G_T^{(\nu, \kappa)}(s, x; t, y) &= \frac{h_T^{(\nu, \kappa)}(t, y)}{h_T^{(\nu, \kappa)}(s, x)} G^{(\nu)}(t-s, y|x), \quad 0 \leq s < t \leq T, \quad x > 0, \quad y \geq 0 \\ G_T^{(\nu, \kappa)}(0, 0; t, y) &= \frac{\Gamma(\nu+1)(2T)^{\kappa/2}}{\Gamma(\nu+1-\kappa/2)} h_T^{(\nu, \kappa)}(t, y) G^{(\nu)}(t, y|0), \quad t \in (0, T], \quad y \geq 0 \end{aligned}$$

で与えられる [59]。ここで $h_T^{(\nu, \kappa)}(t, x) = \int_0^\infty dy G^{(\nu)}(T-t, y|x) y^{-\kappa}$ 、 $x \geq 0$ 、 $t \in (0, T]$ である。(3) の Imhof 関係は、

$$P(X^{(\nu, \kappa)}(\cdot) \in dw) = \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+1-\kappa/2)} \left(\frac{\sqrt{2T}}{w(T)} \right)^\kappa P(Y^{(\nu)}(\cdot) \in dw)$$

と一般化される. 前述のブラウン彷徨過程は $\nu = 1/2$, $\kappa = 1$ の場合に対応している. また κ の範囲の境界にあたる $\kappa = 0$ の場合はベッセル過程, $\kappa = 2(\nu + 1)$ の場合はベッセル橋 (時刻 T で原点に到達するという条件の下でのベッセル過程) に対応していることを注意しておく.

2 非衝突拡散過程

2.1 Karlin-McGregor の公式

非衝突拡散過程を解析するには, 推移確率密度関数に対する行列式を用いた表示が有効である. この行列式表示は, 確率論では Karlin-McGregor の公式 [26], 組み合わせ論的には Lindström-Gessel-Viennot の公式 [36, 16, 53] とよばれる. またこの公式は, 量子力学で自由フェルミ粒子からなる多体系の波動関数を表す Slater 行列式の確率過程版とみなすこともできる [54, 34].

[Karlin-McGregor の公式] ([26, 36, 16]) $G(s, \mathbf{x}; t, \mathbf{y})$ を 1 次元拡散過程の推移確率密度関数とする. N 個の始点 $x_i, i = 1, 2, \dots, N$ と N 個の終点 $y_i, i = 1, 2, \dots, N$ がそれぞれ $x_1 < x_2 < \dots < x_N$ と $y_1 < y_2 < \dots < y_N$ を満たすとき, 非衝突拡散過程の推移確率密度 $G_0(s, \mathbf{x}; t, \mathbf{y})$ は

$$G_0(s, \mathbf{x}; t, \mathbf{y}) = \det_{1 \leq i, j \leq N} \left(G(s, x_i; t, y_j) \right)$$

と行列式で表すことができる.

$N = 2$ の場合, この主張はブラウン運動の反射原理 (reflection principle) と本質的に同じである. この公式は反射原理の一般化とみなすことができるのである [32].

2.2 非衝突ブラウン運動

\mathbf{R}^N の部分集合 \mathbf{W}_N^A を $\mathbf{W}_N^A = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^N : x_1 < x_2 < \dots < x_N\}$ と定義する. これは表現論では A_{N-1} 型のワイル領域 (Weyl chamber) とよばれているものである [15]. \mathbf{W}_N^A 内の吸収壁ブラウン運動の推移確率密度, つまり時刻 0 で \mathbf{W}_N^A 内の点 \mathbf{x} から出発したブラウン運動が \mathbf{W}_N^A から外に出ることなく時刻 t で \mathbf{W}_N^A 内の点 \mathbf{y} へ到達する確率密度は, すぐ上で述べた Karlin-McGregor の公式より

$$f_N(t, \mathbf{y} | \mathbf{x}) = \det_{1 \leq i, j \leq N} \left(G(t, y_j | x_i) \right)$$

と表される. したがって, 点 \mathbf{x} から出発したブラウン運動が, 時刻 t までの間 \mathbf{W}_N^A から外に出ない確率は,

$$\mathcal{N}_N(t, \mathbf{x}) = \int_{\mathbf{W}_N^A} f_N(t, \mathbf{y} | \mathbf{x}) d\mathbf{y}$$

で与えられることになる.

さて, 有限な時間区間 $(0, T]$ での非衝突ブラウン運動を定義することにしよう. この過程 $X(t) = (X_1(t), X_2(t), \dots, X_N(t))$ の推移確率密度関数 $g_N(s, \mathbf{x}; t, \mathbf{y})$ は, 時刻 T まで衝突しないという条

件の下で, 時刻 s で点 $\mathbf{x} \in \mathbf{W}_N^A$ にいた N 個のブラウン運動が時刻 t で点 $\mathbf{y} \in \mathbf{W}_N^A$ に到達する確率密度であるので,

$$g_N(s, \mathbf{x}; t, \mathbf{y}) = \frac{\mathcal{N}_N(T-t, \mathbf{y})}{\mathcal{N}_N(T-s, \mathbf{x})} f_N(t-s, \mathbf{y}|\mathbf{x}), \quad 0 \leq s < t \leq T, \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{W}_N^A \quad (4)$$

で与えられる. この非衝突ブラウン運動において, N 個のブラウン運動すべてが原点から出発する場合も考えたいが, (4) において $|\mathbf{x}| \rightarrow 0$ とすると分母と分子がともに 0 になってしまう. この極限を正しく求めるためには, $f_N(t, \mathbf{y}|\mathbf{x})$ と $\mathcal{N}_N(t, \mathbf{x})$ の $|\mathbf{x}|/\sqrt{t} \rightarrow 0$ での漸近評価が必要となる. シューア関数 [15, 14] とよばれる多変数対称関数を用いて双線形展開することにより

$$\begin{aligned} f_N(t, \mathbf{y}|\mathbf{x}) &\sim \frac{t^{-N(N+1)/4}}{C_1(N)} h_N\left(\frac{\mathbf{x}}{\sqrt{t}}\right) h_N(\mathbf{y}) \exp\left(-\frac{|\mathbf{y}|^2}{2t}\right) \\ \mathcal{N}_N(t, \mathbf{x}) &\sim \frac{C_2(N)}{C_1(N)} h_N\left(\frac{\mathbf{x}}{\sqrt{t}}\right), \quad \frac{|\mathbf{x}|}{\sqrt{t}} \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (5)$$

であることが導ける [29, 31, 34]. ここで $h_N(\mathbf{x})$ は差積で表される $N \times N$ のファンデルモンド行列式

$$h_N(\mathbf{x}) = \det_{1 \leq i, j \leq N} (x_j^{i-1}) = \prod_{1 \leq i < j \leq N} (x_j - x_i)$$

である. また, $C_1(N) = (2\pi)^{N/2} \prod_{i=1}^N \Gamma(i)$, $C_2(N) = 2^{N/2} \prod_{i=1}^N \Gamma(i/2)$ である.

これらを用いると, すべての粒子が原点から出発した場合 ($\mathbf{X}(0) = \mathbf{0}$) には, 非衝突ブラウン運動の推移確率密度を次のように与えればよいことが分かる:

$$g_N^T(0, \mathbf{0}; t, \mathbf{y}) = \frac{T^{N(N-1)/4} t^{-N^2/2}}{C_2(N)} \mathcal{N}_N(T-t, \mathbf{y}) h_N(\mathbf{y}) \exp\left(-\frac{|\mathbf{y}|^2}{2t}\right), \quad t \in (0, T], \quad \mathbf{y} \in \mathbf{W}_N^A. \quad (6)$$

したがって, 図 1 左図に描いたように, 原点に一緒にいた N 個の粒子は瞬間的に分離し, 互いに反発しながら離れていくことになる.

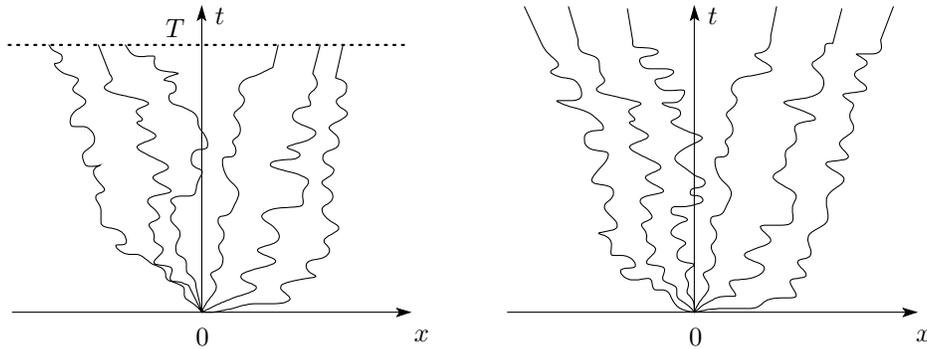


図 1: 時間的に非斉次な過程 $\mathbf{X}(t)$ と斉次な過程 $\mathbf{Y}(t)$

非衝突条件を課す時間 T を無限大にすると (図 1 右図参照), 非衝突ブラウン運動 $X(t)$ は, 推移確率密度関数が

$$\begin{aligned} p_N(t, \mathbf{y}|\mathbf{x}) &= \frac{h_N(\mathbf{y})}{h_N(\mathbf{x})} f_N(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad t > 0, \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{W}_N^A \\ p_N(t, \mathbf{y}|0) &= \frac{t^{-N^2/2}}{C_1(N)} h_N(\mathbf{y})^2 \exp\left(-\frac{|\mathbf{y}|^2}{2t}\right), \quad t > 0, \quad \mathbf{y} \in \mathbf{W}_N^A \end{aligned} \quad (7)$$

で与えられる時間的に斉次な拡散過程 $Y(t)$ に収束する. このことも, 上の漸近評価 (5) を用いれば導ける. (7) は, $Y(t)$ が \mathbf{W}_N^A 内の吸収壁ブラウン運動の優調和変換であることを意味する [18]. また, その形から $Y(t)$ が Dyson モデルの方程式

$$Y_i(t) = B_i(t) + \frac{\beta}{2} \sum_{\substack{1 \leq j \leq N \\ j \neq i}} \int_0^t \frac{1}{Y_i(s) - Y_j(s)} ds, \quad t \in (0, \infty), \quad 1 \leq i \leq N \quad (8)$$

を $\beta = 2$ の場合に満足することは明らかである.

ここで, (1) と (7), (2) と (4) および (6) をそれぞれ見比べていただきたい. $X(t)$ と $Y(t)$ は, それぞれ 1.1 節で説明したブラウン彷徨過程 $X(t)$ と 3 次元ベッセル過程 $Y(t)$ の自然な高次元 (多成分, 多粒子) 拡張になっていることが頷けるであろう. また, (4), (6) および (7) より, $X(t)$ と $Y(t)$ の分布には次の関係があることがすぐに分かる.

$$P(\mathbf{X}(\cdot) \in dw) = \frac{C_1(N) T^{N(N-1)/4}}{C_2(N) h(w(T))} P(\mathbf{Y}(\cdot) \in dw) \quad (9)$$

この関係式は, 3 次元ベッセル過程とブラウン彷徨過程に対する Imhof 関係 (3) の一般化である [29].

2.3 非衝突彷徨過程

\mathbf{R}^N の部分集合 $\mathbf{W}_N^C, \mathbf{W}_N^D$ を

$$\mathbf{W}_N^C = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^N : 0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_N\}, \quad \mathbf{W}_N^D = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^N : 0 \leq |x_1| < x_2 < \cdots < x_N\}$$

と定義する. これらはそれぞれ C_N 型, D_N 型のワイル領域とよばれているものである. 彷徨過程は原点に対して, パラメータ ν が非負のときは非再帰的であり, 負のときは再帰的である. この性質により, 非衝突彷徨過程の状態空間 \mathbf{W}_N は ν が非負であるとき \mathbf{W}_N^C であり, 負であるとき \mathbf{W}_N^D である. ベッセル過程を導入する際, 2 乗ベッセル過程をまず定義し, その平方根を考えることにすると, 平方根の符号の多意性によって多価確率過程が得られる場合がある. 初期値が正である 2 乗ベッセル過程は, ν が非負の場合には常に正の値であるので, 平方根も 1 価関数となり第 1 節で定義したベッセル過程と一致する. しかし, ν が負の場合には 2 乗ベッセル過程は確率 1 で原点に到達し, その平方根として定義される過程は, その後 2 価確率過程となる. 彷徨過程, さらに以下で定義する非衝突彷徨過程における左端の粒子も, 同様な状況にあるのである. \mathbf{W}_N^D の定義式の中で $|x_1|$ と絶対値を付けたのは, このように 2 価確率過程を考える場合をも想定したためである (図 2

を参照)。ただし、推移確率密度などに対する以下の表式は、表記を簡単にするため、絶対値をとって得られる非負過程に対して与えるものとする。

\mathbf{W}_N の点 \mathbf{x} から出発した彷徨過程が \mathbf{W}_N から外に出ることなく \mathbf{W}_N の点 \mathbf{y} へ到達する確率密度は Karlin-McGregor 公式より

$$f_N^{(\nu, \kappa)}(s, \mathbf{x}; t, \mathbf{y}) = \det_{1 \leq i, j \leq N} \left(G^{(\nu, \kappa)}(s, x_i; t, y_j) \right)$$

で与えられる。よって、点 \mathbf{x} から出発した彷徨過程が時刻 t まで \mathbf{W}_N から外に出ない確率は

$$\mathcal{N}_N^{(\nu, \kappa)}(t, \mathbf{x}) = \int_{\mathbf{W}_N} d\mathbf{y} f_N^{(\nu, \kappa)}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y})$$

で与えられる。非衝突彷徨過程 $\mathbf{X}^{(\nu, \kappa)}(t) = (X_1^{(\nu, \kappa)}(t), X_2^{(\nu, \kappa)}(t), \dots, X_N^{(\nu, \kappa)}(t))$ の推移確率密度関数は次で与えられる:

$$g_N^{(\nu, \kappa)}(s, \mathbf{x}, t, \mathbf{y}) = \frac{\mathcal{N}_N^{(\nu, \kappa)}(T-t, \mathbf{y})}{\mathcal{N}_N^{(\nu, \kappa)}(T-s, \mathbf{x})} f_N^{(\nu, \kappa)}(t-s, \mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad 0 \leq s < t \leq T, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{W}_N.$$

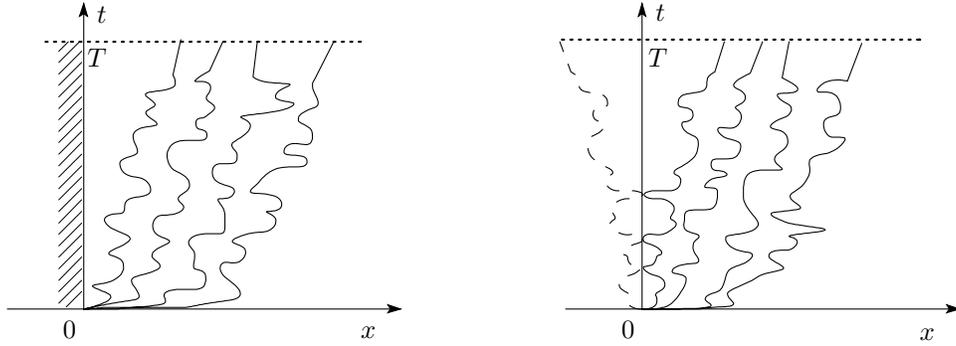


図 2: ν が非負の場合 (左図) と負の場合 (右図) の $\mathbf{X}^{(\nu, \kappa)}(t)$

非衝突彷徨過程に対しても、すべての粒子が原点から出発する場合を考察してみることにする。 $f_N^{(\nu)}(t, \mathbf{y}|\mathbf{x}) \equiv f_N^{(\nu, 0)}(0, \mathbf{x}; t, \mathbf{y})$ を計算してみると

$$f_N^{(\nu)}(t, \mathbf{y}|\mathbf{x}) = t^{-N} \prod_{i=1}^N \left(\frac{y_i^{\nu+1}}{x_i^\nu} \right) \exp \left\{ -\frac{1}{2t} \sum_{i=1}^N (x_i^2 + y_i^2) \right\} \det_{1 \leq i, j \leq N} \left(I_\nu \left(\frac{x_j y_i}{t} \right) \right)$$

となり、 $\tilde{\mathcal{N}}_N^{(\nu, \kappa)}(t, \mathbf{x}) = \int_{\mathbf{W}_N} d\mathbf{y} f_N^{(\nu)}(t, \mathbf{y}|\mathbf{x}) \prod_{i=1}^N y_i^{-\kappa}$ を導入すると

$$g_{N, T}^{(\nu, \kappa)}(s, \mathbf{x}; t, \mathbf{y}) = \frac{\tilde{\mathcal{N}}_N^{(\nu, \kappa)}(T-t, \mathbf{y})}{\tilde{\mathcal{N}}_N^{(\nu, \kappa)}(T-s, \mathbf{x})} f^{(\nu)}(t-s, \mathbf{y}|\mathbf{x}) \quad (10)$$

と書き直すことができることに注意する。シューア関数を用いて双線形展開する方法によって、

$f^{(\nu)}(t, \mathbf{y}|\mathbf{x})$ と $\tilde{\mathcal{N}}_N^{(\nu, \kappa)}(t, \mathbf{x})$ の漸近評価は次のように得られる [31]:

$$\begin{aligned} f_N^{(\nu)}(t, \mathbf{y}|\mathbf{x}) &\sim \frac{t^{-N(N+1+2\nu)/2}}{C^{(\nu)}(N)} h_N^{(0)}\left(\frac{\mathbf{x}}{\sqrt{t}}\right) h_N^{(2\nu+1)}(\mathbf{y}) \exp\left(-\frac{|\mathbf{y}|^2}{2t}\right) \\ \tilde{\mathcal{N}}_N^{(\nu, \kappa)}(t, \mathbf{x}) &\sim \frac{t^{-N\kappa/2} C_N^{(\nu, \kappa)}}{C^{(\nu)}(N)} h_N^{(0)}\left(\frac{\mathbf{x}}{\sqrt{t}}\right), \quad \frac{|\mathbf{x}|}{\sqrt{t}} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

ここで, $C^{(\nu)}(N) = 2^{N(N+\nu-1)} \prod_{i=1}^N \Gamma(i)\Gamma(i+\nu)$, $C^{(\nu, \kappa)}(N) = 2^{N(N+2\nu-\kappa-1)/2} \pi^{-N/2} \prod_{i=1}^N \{\Gamma(i/2)\Gamma((i+2\nu+1-\kappa)/2)\}$, また

$$h_N^{(\alpha)}(\mathbf{a}) = \prod_{1 \leq i < j \leq N} (a_j^2 - a_i^2) \prod_{k=1}^N a_k^\alpha$$

である. 以上の評価から, すべての粒子が原点から出発した場合の推移確率密度は次のように定まる:

$$\begin{aligned} g_{N,T}^{(\nu, \kappa)}(0, \mathbf{0}; t, \mathbf{y}) &= \frac{T^{N(N+\kappa-1)/2} t^{-N(N+\nu)}}{C^{(\nu, \kappa)}(N)} \tilde{\mathcal{N}}_N^{(\nu, \kappa)}(T-t, \mathbf{y}) h_N^{(2\nu+1)}(\mathbf{y}) \exp\left(-\frac{|\mathbf{y}|^2}{2t}\right), \\ &t \in (0, T], \quad \mathbf{y} \in \mathbf{W}_N. \end{aligned} \quad (11)$$

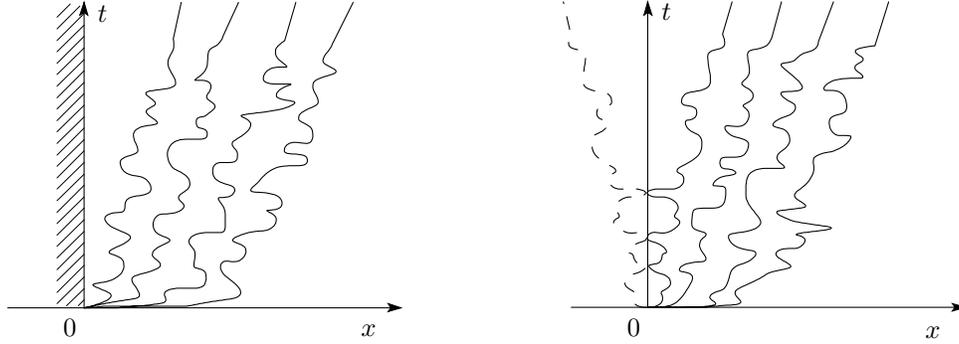


図 3: ν が非負の場合 (左図) と負の場合 (右図) の $Y^{(\nu)}(t)$

非衝突条件を課す時間 T を無限大にすると, $X^{(\nu, \kappa)}(t)$ は, 推移確率密度関数が

$$\begin{aligned} p_N^{(\nu)}(t, \mathbf{y}|\mathbf{x}) &= \frac{h_N^{(0)}(\mathbf{y})}{h_N^{(0)}(\mathbf{x})} f_N^{(\nu)}(t, \mathbf{y}|\mathbf{x}), \quad t > 0, \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{W}_N \\ p_N^{(\nu)}(t, \mathbf{y}|\mathbf{0}) &= \frac{t^{-N(N+\nu)}}{C^{(\nu)}(N)} h_N^{(\nu+1/2)}(\mathbf{y})^2 \exp\left(-\frac{|\mathbf{y}|^2}{2t}\right), \quad t > 0, \quad \mathbf{y} \in \mathbf{W}_N \end{aligned} \quad (12)$$

で与えられる時間的に斉次な拡散過程 $Y^{(\nu)}(t)$ に収束する (図 3 参照). $Y^{(\nu)}$ がパラメータ κ に依存しなくなっているのは, このパラメータが非衝突条件を課す時間区間の終時刻 T に近づいたときの分布をコントロールするものだからである. $Y^{(\nu)}(t)$ は時間的に斉次な非衝突 $2(\nu+1)$ 次元ベッ

セル過程である． $\nu \geq -\frac{1}{2}$ のときは次の方程式を満足する：

$$Y_i^{(\nu)}(t) = B_i(t) + \int_0^t \frac{\nu + 1/2}{Y_i(s)} ds + \sum_{\substack{1 \leq j \leq N \\ j \neq i}} \int_0^t \frac{2Y_i^{(\nu)}(s)}{Y_i^{(\nu)}(s)^2 - Y_j^{(\nu)}(s)^2} ds, \quad t \in (0, \infty), 1 \leq i \leq N. \quad (13)$$

ただし， $\nu = -\frac{1}{2}$ のときは原点に反射壁をおくものとする．この方程式の解の一意性は一般には成立しないが， $Y^{(\nu)}(t)$ は各成分が非負である唯一のものである [37]．推移確率密度 (11) と (12) の形を見ると，一般化された Imhof 関係

$$P(\mathbf{X}^{(\nu, \kappa)}(\cdot) \in dw) = \frac{C^{(\nu)}(N)}{C^{(\nu, \kappa)}(N)} \frac{T^{N(N+\kappa-1)/2}}{h_N^{(\kappa)}(w(T))} P(\mathbf{Y}^{(\nu)}(\cdot) \in dw)$$

が直ちに導かれる．

3 行列値過程

3.1 Bru の定理

$N \times N$ エルミート行列全体の集合を $\mathcal{H}(N)$ ， $N \times N$ 実対称行列全体の集合を $\mathcal{S}(N)$ とおく．行列 A の転置行列を ${}^t A$ ，複素共役を \bar{A} ，随伴行列を $A^* \equiv {}^t \bar{A}$ とそれぞれ書くことにする．また，サイズ N の単位行列を I_N と記す．Bru は $\mathcal{H}(N)$ -値過程の一例である Wishart 過程に対して，その固有値過程が満たす方程式を導いた [4, 5]．この結果は，行列値過程の各要素 $\xi_{ij}(t)$ ， $1 \leq i, j \leq N$ が複素数値連続半マルチンゲールである場合に拡張することができる [30, 31]．この小節ではこの拡張の結果得られた一般化された Bru の定理を紹介し，次の小節でその応用例を与えることにする．

$\lambda(t) = (\lambda_1(t), \lambda_2(t), \dots, \lambda_N(t))$ を $\mathcal{H}(N)$ -値過程 $\Xi(t) = (\xi_{ij}(t))_{1 \leq i, j \leq N}$ の固有値を成分にもつベクトルとする．ただし，大小関係 $\lambda_1(t) \leq \lambda_2(t) \leq \dots \leq \lambda_N(t)$ を満たすものとする．このとき $U(t) = (u_{ij}(t))_{1 \leq i, j \leq N}$ を

$$U(t)^* \Xi(t) U(t) = \Lambda(t) = \text{diag}(\lambda_1(t), \lambda_2(t), \dots, \lambda_N(t))$$

というように， $\Xi(t)$ を対角化するユニタリ行列の族とする．

$$\Gamma_{ij, k\ell}(t) dt = \left(U(t)^* d\Xi(t) U(t) \right)_{ij} \left(U(t)^* d\Xi(t) U(t) \right)_{k\ell}$$

とおき，また $(U(t)^* d\Xi(t) U(t))_{ii}$ の有界変動部分を $dY_i(t)$ と書くこととする．さらに，次で定義されたマルコフ時刻を用意しておく：

$$\sigma_{ij} = \inf\{t \geq 0 : \lambda_i(t) \neq \lambda_j(t)\}, \quad \tau_{ij} = \inf\{t > \sigma_{ij} : \lambda_i(t) = \lambda_j(t)\}, \quad \tau = \min_{1 \leq i < j \leq N} \tau_{ij}.$$

[一般化された Bru の定理] ([4, 5, 30, 31]) 複素数値過程 $\xi_{ij}(t)$ ， $1 \leq i, j \leq N$ を連続半マルチンゲールとする．このとき $\Xi(t)$ の固有値 $\lambda(t)$ は次の確率微分方程式を満たす．

$$d\lambda_i(t) = dM_i(t) + dJ_i(t), \quad t \in (0, \tau), \quad 1 \leq i \leq N$$

ただし $M(t) = (M_1(t), M_2(t), \dots, M_N(t))$ は $dM_i(t)dM_j(t) = \Gamma_{ii,jj}(t)dt$ であるマルチンゲールであり, $J(t) = (J_1(t), J_2(t), \dots, J_N(t))$ は

$$dJ_i(t) = \sum_{\substack{1 \leq j \leq N \\ j \neq i}} \frac{1}{\lambda_i(t) - \lambda_j(t)} \mathbf{1}_{\{\lambda_i(t) \neq \lambda_j(t)\}} \Gamma_{ij,ji}(t)dt + dY_i(t)$$

で与えられる有界変動過程である. ここで $\mathbf{1}_{\{\omega\}}$ は条件 ω が成り立つときは 1, それ以外は 0 の値を与える条件 ω の指示関数である.

次の小節に示す応用例のうち多くは, 固有値を粒子の位置と見なしたとき, 時刻 0 ではすべての粒子が一緒に原点にあるが, 一瞬のうちに分離し, それ以降は永久に衝突しない場合になっている. そのような場合には $\sigma_{ij} = 0, 1 \leq i, j \leq N$, であり τ は無限大である. これは粒子間の斥力が強いために, 隣りあった粒子が衝突できないことを意味している. 例えば, Dyson モデルの方程式 (8) について考えてみると, 粒子間の斥力はパラメータ β が大きくなるに従って強くなるのであるが, $\beta < 1$ の場合は $\tau < \infty$, $\beta \geq 1$ の場合は $\tau = \infty$ となることが証明できる [48]. しきい値が $\beta = 1$ であることは, ベッセル過程が原点に対して, 2 次元以上 ($\nu \geq 0$) では非再帰的であり, 2 次元未満 ($-1 < \nu < 0$) では再帰的であることと関連する.

3.2 応用例

ここでは, 上で述べた一般化された Bru の定理の応用例を与える.

$B_{ij}(t), \tilde{B}_{ij}(t), 1 \leq i \leq N + \nu, 1 \leq j \leq N$ を $2N(N + \nu)$ 個の独立な 1 次元ブラウン運動とし, 各成分を

$$s_{ij}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}B_{ij}(t), & i < j \text{ のとき} \\ B_{ii}(t), & i = j \text{ のとき} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}B_{ji}(t), & i > j \text{ のとき} \end{cases} \quad a_{ij}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{B}_{ij}(t), & i < j \text{ のとき} \\ 0, & i = j \text{ のとき} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{B}_{ji}(t), & i > j \text{ のとき} \end{cases}$$

とする $N \times N$ 行列をそれぞれ $s(t), a(t)$ とおく.

(i) GUE 行列値過程

$\Xi^{\text{GUE}}(t) = s(t) + \sqrt{-1}a(t), t \in [0, \infty)$ で定義される $\mathcal{H}(N)$ -値過程を考える. 任意の固定した $t \in [0, \infty)$ に対して, $\Xi^{\text{GUE}}(t)$ は $\mathcal{H}(N)$ -値確率変数になるが, $\mathcal{H}(N)$ の体積要素 $U(dH)$ に対する確率密度関数は

$$\mu^{\text{GUE}}(H, t) = \frac{t^{-N^2/2}}{c_1(N)} \exp\left(-\frac{1}{2t}\text{Tr}H^2\right), \quad H \in \mathcal{H}(N)$$

で与えられる. ここで, Tr は行列のトレースをとることを表す. また, $c_1(N) = 2^{N/2}\pi^{N^2/2}$ である. $N \times N$ ユニタリ行列全体の集合を $\mathbf{U}(N)$ とおくと, 任意の $U \in \mathbf{U}(N)$ に対して, 確率 $\mu^{\text{GUE}}(H, t)U(dH)$ はユニタリ変換 $H \rightarrow U^*HU$ の下で不変である. ランダム行列理論では, このような不変性をもつ $\mathcal{H}(N)$ -値確率変数の統計集団をガウス型ユニタリ集団 (Gaussian unitary

ensemble, GUE) とよぶ [38, 39]. この GUE の固有値分布の密度関数は, $x_1 < x_2 < \dots < x_N$ である $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ に対して

$$g^{\text{GUE}}(\mathbf{x}, t) = \frac{t^{-N/2}}{C_1(N)} h_N \left(\frac{\mathbf{x}}{\sqrt{t}} \right)^2 \exp \left(-\frac{|\mathbf{x}|^2}{2t} \right)$$

で与えられる [38, 39]. ここで $C_1(N)$ は (5) で現れた $C_1(N)$ と同じものである. 一般化された Bru の定理を $\Xi^{\text{GUE}}(t)$ に適用すると, $\lambda(t)$ が $\beta = 2$ とする Dyson モデルの方程式 (8) を満たすことが分かる. 非衝突ブラウン運動が $\beta = 2$ の場合の Dyson モデルの方程式 (8) を満たすことはすでに 2.2 節で示したので, 両者が確率過程としては等価であるという, 本稿の冒頭で述べた Dyson の結果が導かれたことになる.

(ii) GOE 行列値過程

$\Xi^{\text{GOE}}(t) = s(t)$, $t \in [0, \infty)$ で定義される $S(N)$ -値過程を考える. 任意の固定した $t \in [0, \infty)$ に対して $\Xi^{\text{GOE}}(t)$ は, $S(N)$ の体積要素 $\mathcal{V}(dS)$ に対する確率密度関数が

$$\mu^{\text{GOE}}(S, t) = \frac{t^{-N(N+1)/4}}{c_2(N)} \exp \left(-\frac{1}{2t} \text{Tr} S^2 \right), \quad S \in S(N)$$

であるような $S(N)$ -値確率変数を与える. ここで $c_2(N) = 2^{N/2} \pi^{N(N+1)/4}$ である. $N \times N$ 実直交行列全体の集合を $\mathbf{O}(N)$ とおくと, 任意の $V \in \mathbf{O}(N)$ に対して, 確率 $\mu^{\text{GOE}}(S, t) \mathcal{V}(dS)$ は直交変換 $S \rightarrow V S V$ の下で不変である. このような $S(N)$ -値確率変数の統計集団はガウス型直交集団 (Gaussian orthogonal ensemble, GOE) とよばれている. GOE の固有値分布の密度関数は, $x_1 < x_2 < \dots < x_N$ である $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ に対して,

$$g^{\text{GOE}}(\mathbf{x}, t) = \frac{t^{-N/2}}{C_2(N)} h_N \left(\frac{\mathbf{x}}{\sqrt{t}} \right) \exp \left(-\frac{|\mathbf{x}|^2}{2t} \right) \quad (14)$$

で与えられる [38, 39]. ここで $C_2(N)$ は (5) で現れた $C_2(N)$ と同じものである. Bru の定理を $\Xi^{\text{GOE}}(t)$ に適用することにより, $\lambda(t)$ が $\beta = 1$ とする Dyson モデルの方程式 (8) を満たすことが分かる.

(iii) Laguerre 過程

$\nu \in \mathbf{N}_0 \equiv \{0, 1, 2, \dots\}$ とし, $(N + \nu) \times N$ 複素行列全体の集合を $\mathcal{M}(N + \nu, N, \mathbf{C})$ と書くことにする. $\mathcal{M}(N + \nu, N, \mathbf{C})$ -値過程として $L(t) = (B_{ij}(t) + \sqrt{-1} \tilde{B}_{ij}(t))_{1 \leq i \leq N + \nu, 1 \leq j \leq N}$ を考える. これは, 任意の固定した $t \in [0, \infty)$ に対して, 確率密度関数が

$$\mu_\nu^{\text{chGUE}}(L, t) = \frac{t^{-N(N+\nu)}}{c_3(N)} \exp \left(-\frac{1}{2t} \text{Tr} L^* L \right), \quad L \in \mathcal{M}(N + \nu, N, \mathbf{C})$$

であるような $\mathcal{M}(N + \nu, N, \mathbf{C})$ -値確率変数を与える ($c_3(N) = (2\pi)^{N(N+\nu)}$). このような確率変数の統計集団はカイラル・ガウス型ユニタリ集団 (chiral GUE, chGUE) とよばれている [39]. これに対して, $\Xi^{\text{L}}(t) = L(t)^* L(t)$, $t \in [0, \infty)$ によって定義される $\mathcal{H}(N)$ -値過程を Laguerre 過程とよぶ [35]. 行列 $\Xi^{\text{L}}(t)$ は非負定値であるので固有値はすべて非負である. Bru の定理を適用すると $\lambda(t)$ は確率微分方程式

$$\lambda_i(t) = 2 \int_0^t \sqrt{\lambda_i(s)} dB_i(s) + 2(N + \nu)t + 2 \sum_{\substack{1 \leq j \leq N \\ j \neq i}} \int_0^t \frac{\lambda_i(s) + \lambda_j(s)}{\lambda_i(s) - \lambda_j(s)} ds, \quad 1 \leq i \leq N$$

の解となっていることが導かれ, $\tau = \infty$ あることが分かる. さらに伊藤の公式を用いると, $(\kappa_1(t), \dots, \kappa_N(t)) \equiv (\sqrt{\lambda_1(t)}, \dots, \sqrt{\lambda_N(t)})$ が (13) を満たすことがわかり, 非衝突 $2(\nu+1)$ 次元ベッセル過程と確率過程として同値であることが導かれる. ν は非負整数であるので, この場合はベッセル過程の次元 $2(\nu+1)$ は正の偶数である [35].

(iv) **Wishart 過程**

$\nu \in \mathbf{N}_0$ とし, $(N+\nu) \times N$ 実行列全体の集合を $\mathcal{M}(N+\nu, N, \mathbf{R})$ とおく. $\mathcal{M}(N+\nu, N, \mathbf{R})$ -値過程 $W(t) = (B_{ij}(t))_{1 \leq i \leq N+\nu, 1 \leq j \leq N}$ は, 任意の固定した $t \in [0, \infty)$ に対して, 確率密度関数が

$$\mu_\nu^{\text{chGOE}}(W, t) = \frac{t^{-N(N+\nu)/2}}{c_4(N)} \exp\left(-\frac{1}{2t} \text{Tr } {}^t W W\right), \quad W \in \mathcal{M}(N+\nu, N, \mathbf{R})$$

であるような $\mathcal{M}(N+\nu, N, \mathbf{R})$ -値確率変数を与える ($c_4(N) = (2\pi)^{N(N+\nu)/2}$). このような確率変数の統計集団はカイラル・ガウス型直交集団 (chGOE) とよばれている [39]. これに対して, $\Xi^W(t) = {}^t W(t) W(t)$, $t \in [0, \infty)$ によって定義される $\mathcal{S}(N)$ -値過程を **Wishart 過程**とよぶ [5]. Laguerre 過程のときと同様な計算により, $\lambda(t)$ は確率微分方程式

$$\lambda_i(t) = 2 \int_0^t \sqrt{\lambda_i(s)} dB_i(s) + (N+\nu)t + \sum_{\substack{1 \leq j \leq N \\ j \neq i}} \int_0^t \frac{\lambda_i(s) + \lambda_j(s)}{\lambda_i(s) - \lambda_j(s)} ds, \quad 1 \leq i \leq N$$

の解となっていることが導かれ, やはり $\tau = \infty$ あることが証明できる.

エルミート性に加えてさらに高い対称性をもつ行列値過程に対しても, Bru の定理を適用することができる. σ_0 とパウリ行列 $\sigma_i, i = 1, 2, 3$ を次式で定義する.

$$\sigma_0 = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

以下 $N \geq 2$ として, $2N \times 2N$ の行列 $\Sigma_\rho = I_N \otimes \sigma_\rho$, $\rho = 0, 1, 2, 3$ を定義しておく. 当然, $\Sigma_0 = I_{2N}$ である. $s^\rho(t) = (s_{ij}^\rho(t))_{1 \leq i, j \leq N}$, $a^\rho(t) = (a_{ij}^\rho(t))_{1 \leq i, j \leq N}$, $0 \leq \rho \leq 3$ を $s(t)$, $a(t)$ の独立なコピーとする. $\mathcal{H}(N)(2N)$ -値過程 $\Xi(t)$ を考えると, 次のように $2 \times 4 = 8$ 個の項に分解できる.

$$\Xi(t) = \sum_{\rho=0}^3 \left\{ (s^\rho(t) \otimes \sigma_\rho) + (\sqrt{-1} a^\rho(t) \otimes \sigma_\rho) \right\}$$

そこで, これらの 8 項から 4 項のみを用いて表される次の 4 つの $2N \times 2N$ のエルミート行列値過程

$$\Xi_{\theta\pm}(t) = \sum_{\rho=0}^3 (\xi_{\theta\pm}^\rho(t) \otimes \sigma_\rho), \quad \theta = 1, 2$$

を考える. ここで

$$\xi_{\theta+}^\rho(t) = \begin{cases} s^\rho(t), & \theta = 1, \rho \neq 3 \text{ または } \theta = 2, \rho = 0 \text{ のとき} \\ \sqrt{-1} a^\rho(t), & \theta = 1, \rho = 3 \text{ または } \theta = 2, \rho \neq 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

$$\xi_{\theta-}^\rho(t) = \begin{cases} \sqrt{-1} a^\rho(t), & \theta = 1, \rho \neq 3 \text{ または } \theta = 2, \rho = 0 \text{ のとき} \\ s^\rho(t), & \theta = 1, \rho = 3 \text{ または } \theta = 2, \rho \neq 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

である. $\mathcal{H}_{\theta\varepsilon}(2N) = \{H \in \mathcal{H} : {}^t\Sigma_\theta = \varepsilon\Sigma_\theta H\}$ とおくと, $\Xi_{\theta\varepsilon}(t)$ は $\mathcal{H}_{\theta\varepsilon}(2N)$ に値をとることが分かる. また対称性から固有値に関して次を示すことができる;

- (i) $\varepsilon = +$ のときは, 固有値はすべて 2 重に縮退している. $\lambda = (\omega_1, \omega_1, \omega_2, \omega_2, \dots, \omega_N, \omega_N)$
- (ii) $\varepsilon = -$ のときは, 固有値は正負の対で現れる. $\lambda = (\omega_1, -\omega_1, \omega_2, -\omega_2, \dots, \omega_N, -\omega_N)$

(v) **GSE 行列値過程**

$(\theta, \varepsilon) = (2, +)$ の場合の $\Xi \in \mathcal{H}_{2+}(2N)$ は自己双対エルミート行列とよばれ, エルミート性に加えて, 対称性 ${}^t\Xi\Sigma_2 = \Sigma_2\Xi$ を持つ. また, 対角化する行列はユニタリーかつシンプレクティックである. 任意の固定した $t \in (0, \infty)$ に対して $\Xi_{2+}(t)$ が成す統計集団は, その確率分布がシンプレクティックなユニタリー変換の下で不変なことから, ガウス型シンプレクティック集団 (Gaussian symplectic ensemble, GSE) とよばれる. この GSE の固有値分布の確率密度関数は

$$g^{\text{GSE}}(\mathbf{x}; t) = \frac{t^{-N/2}}{C_3(N)} h_N \left(\frac{\mathbf{x}}{\sqrt{t}} \right)^4 \exp \left(-\frac{|\mathbf{x}|^2}{2t} \right), \quad \mathbf{x} \in \mathbf{W}_N^A$$

で与えられる. ただし $C_3(N) = (2\pi)^{N/2} \prod_{i=1}^N \Gamma(2i)$ である [38, 39]. 固有値は対を成して縮重しており (クラマース縮重とよばれる), $\lambda = (\omega_1, \omega_1, \omega_2, \omega_2, \dots, \omega_N, \omega_N)$ というように書き直すことができる. Bru の定理を適用すると, 対となっていないどうしの固有値 $\omega_i, 1 \leq i \leq N$ は, $\beta = 4$ の場合の Dyson モデルの方程式 (8)

$$\omega_i(t) = B_i(t) + \sum_{\substack{1 \leq j \leq N \\ j \neq i}} \int_0^t \frac{2}{\omega_i(s) - \omega_j(s)} ds, \quad 1 \leq i \leq N$$

を満たすことが導かれる. 縮重している固有値対 λ_{2j-1} と λ_{2j} に対しては $\sigma_{2j-1, 2j} = \infty, 1 \leq j \leq N$ であるが, そうでない固有値どうしは初期に分離した後には再び一致することはないので, $\tau = \infty$ である.

(vi) **C 型行列値過程**

$(\theta, \varepsilon) = (2, -)$ の場合, $\Xi \in \mathcal{H}_{2-}(2N)$ はエルミート性に加えて対称性 ${}^t\Xi(t)\Sigma_2 = -\Sigma_2\Xi(t)$ をもつ. $2N \times 2N$ の複素行列で表される複素シンプレクティック群のリー環を $\text{sp}(2N, \mathbb{C})$ と書くことにすると, このことは $\mathcal{H}_{2-}(2N) \simeq \text{sp}(2N, \mathbb{C}) \cap \mathcal{H}(2N)$ と表すこともできる. 任意の固定した $t \in (0, \infty)$ に対して $\Xi_{2-}(t)$ が成す統計集団は, Altland と Zirnbauer [2] によって導入された class C とよばれるランダム行列集団と一致する. このクラスに属する行列の固有値は $\lambda = (\omega_1, -\omega_1, \omega_2, -\omega_2, \dots, \omega_N, -\omega_N)$ というように正負の対構造を成している. この行列値過程の非負の固有値を小さい順に並べてできる過程を $\omega(t) = (\omega_1(t), \omega_2(t), \dots, \omega_N(t))$ とおくことにする. 一般化された Bru の定理を適用すると

$$\omega_i(t) = B_i(t) + \int_0^t \frac{1}{\omega_i(s)} ds + \sum_{\substack{1 \leq j \leq N \\ j \neq i}} \int_0^t \left\{ \frac{1}{\omega_i(s) - \omega_j(s)} + \frac{1}{\omega_i(s) + \omega_j(s)} \right\} ds, \quad 1 \leq i \leq N$$

を満たすことが分かる. さらに $\tau = \infty$ であり, 確率 1 で $\omega(t) \in \mathbf{W}_N^C, \forall t \in (0, \infty)$ であることも確認できる. 方程式 (13) と比較することにより, $\omega(t)$ が時間的に斉次な非衝突 3 次元ベッセル過程で

あることが分かる. また, 原点に置いた壁と衝突しないという条件の下での非衝突ブラウン運動とも一致している [31].

(vii) **D** 型行列値過程

$(\theta, \varepsilon) = (1, -)$ の場合, $\Xi \in \mathcal{H}_{1-}(2N)$ はエルミート性に加えて対称性 ${}^t\Xi(t)\Sigma_1 = -\Sigma_1\Xi(t)$ をもつ. $2N \times 2N$ の行列で表される特殊直交群のリー環の複素化を $\mathfrak{so}(2N, \mathbb{C})$ と書くことにすると, このことは $\mathcal{H}_{1-}(2N) \simeq \mathfrak{so}(2N, \mathbb{C}) \cap \mathcal{H}(2N)$ と表すこともできる. 任意の固定した $t \in (0, \infty)$ に対して $\Xi_{1-}(t)$ が成す統計集団は, Altland と Zirnbauer [2] によって導入された class D とよばれるランダム行列集団と一致する. このクラスに属する行列の固有値も $\lambda = (\omega_1, -\omega_1, \omega_2, -\omega_2, \dots, \omega_N, -\omega_N)$ というように正負の対構造を成す. この行列値過程の非負の固有値を小さい順に並べてできる過程を $\omega(t) = (\omega_1(t), \omega_2(t), \dots, \omega_N(t))$ とおく. 一般化された Bru の定理を適用すると

$$\omega_i(t) = B_i(t) + \sum_{\substack{1 \leq j \leq N \\ j \neq i}} \int_0^t \left\{ \frac{1}{\omega_i(s) - \omega_j(s)} + \frac{1}{\omega_i(s) + \omega_j(s)} \right\} ds, \quad 1 \leq i \leq N$$

を満たすことが分かる. $\tau = \infty$ であり, この場合には確率 1 で $\omega(t) \in \mathbf{W}_N^D, \forall t \in (0, \infty)$ であることが確認できる. 方程式 (13) と比較することにより, $\omega(t)$ が時間的に斉次な非衝突 1 次元ベッセル過程であることが分かる. 1 次元ベッセル過程は反射壁ブラウン運動と等価であることに注意すると, $\omega(t)$ は原点を壁とする非衝突反射壁ブラウン運動と一致しているということもできる [31].

4 行列式過程

4.1 フレドホルム行列式

\mathcal{X} を \mathbb{R} 内の可算個の点の集合で集積点を持たないもの全体の空間とする. \mathbb{R}^N の要素 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ に対して \mathcal{X} の要素 $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ を $\{\mathbf{x}\}$ と表すことにする. また, $\mathbf{x}_N^{(m)} \in \mathbb{R}^N, 1 \leq m \leq M, N' \in \{1, 2, \dots, N\}$ に対して $\mathbb{R}^{N'}$ の元 $(x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \dots, x_{N'}^{(m)})$ を $\mathbf{x}_{N'}^{(m)}$ と記すことにする. 時間的に斉次な非衝突ブラウン運動 $Y(t)$ に対して $\xi^N(t) = \{Y(t)\}$ は推移確率関数が

$$\tilde{p}_N(s, \{\mathbf{x}\}; t, \{\mathbf{y}\}) = \begin{cases} p_N(t-s, \mathbf{y}|\mathbf{x}), & s > 0, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{W}_N^A \text{ のとき} \\ p_N(t, \mathbf{y}|\mathbf{0}), & s = 0, \mathbf{x} = \mathbf{0}, \mathbf{y} \in \mathbf{W}_N^A \text{ のとき} \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

で与えられる \mathcal{X} -値拡散過程となる. 以下では, $\xi^N(t)$ も非衝突ブラウン運動とよぶことにする. \mathcal{X} -値非衝突ベッセル過程 $\xi^{N, \nu}(t)$ も同様に定義することにする. 時刻の列 $0 < t_1 < \dots < t_M = T$ と N 以下の正整数列 $\{N_m\}_{m=1}^M$ を固定したとき, $\xi^N(\cdot)$ の $(t_m, \{\mathbf{x}_{N_m}^{(m)}\}_{m=1}^M)$ での多時刻相関関数を

$$\begin{aligned} & \rho_N \left(t_1, \mathbf{x}_{N_1}^{(1)}; t_2, \mathbf{x}_{N_2}^{(2)}; \dots; t_M, \mathbf{x}_{N_M}^{(M)} \right) \\ &= \int_{\prod_{m=1}^M \mathbb{R}^{N-N_m}} \prod_{m=1}^M \frac{1}{(N-N_m)!} \prod_{i=N_m+1}^N dx_i^{(m)} \prod_{\ell=0}^M \tilde{p}_N(t_\ell, \{\mathbf{x}_N^{(\ell)}\}; t_{\ell+1}, \{\mathbf{x}_N^{(\ell+1)}\}) \end{aligned}$$

で定義する. ここで $t_0 = 0, \mathbf{x}_N^{(0)} = \mathbf{0}$ とおいた.

$C_0(\mathbf{R})$ を台がコンパクトである実数値関数全体とする. $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_M) \in C_0(\mathbf{R})^M$, $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_M) \in \mathbf{R}^M$ に対して $\chi_m(x) = e^{\theta_m f_m(x)} - 1$, $1 \leq m \leq M$ として, $\boldsymbol{\chi} = (\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_M)$ とおく. $\xi^N(t), t \in [0, T]$ の多時刻積率母関数 $E \left[\exp \left\{ \sum_{m=1}^M \theta_m \sum_{j_m=1}^N f_m(X_{j_m}(t_m)) \right\} \right]$ は, 上の多時刻相関関数を用いて次のように展開することができる.

$$\begin{aligned} & \sum_{N_1=0}^N \sum_{N_2=0}^N \cdots \sum_{N_M=0}^N \prod_{m=1}^M \frac{1}{N_m!} \int_{\mathbf{R}^{N_1}} \prod_{j=1}^{N_1} dx_j^{(1)} \int_{\mathbf{R}^{N_2}} \prod_{j=1}^{N_2} dx_j^{(2)} \cdots \int_{\mathbf{R}^{N_M}} \prod_{j=1}^{N_M} dx_j^{(M)} \\ & \times \prod_{m=1}^M \prod_{j=1}^{N_m} \chi_m(x_j^{(m)}) \rho_N(t_1, \mathbf{x}_{N_1}^{(1)}; t_2, \mathbf{x}_{N_2}^{(2)}; \dots; t_M, \mathbf{x}_{N_M}^{(M)}) \equiv \Psi_N(\boldsymbol{\chi}; \boldsymbol{\theta}). \end{aligned}$$

\mathcal{X} 値確率過程 $\xi(t)$ の多時刻積率母関数が, ある行列核 \mathbf{K} に対して

$$\Psi(\boldsymbol{\chi}; \boldsymbol{\theta}) = \text{Det} \left[\delta_{m,n} \delta(x-y) + \mathbf{K}(t_m, x; t_n, y) \chi_n(y) \right] \quad (15)$$

というようにフレドホルム行列式で表すことができるとき, $\xi(t)$ は行列式過程であるということにする. このとき, $\xi(t)$ の多時刻相関関数は,

$$\rho_N(t_1, \{\mathbf{x}_{N_1}^{(1)}\}; t_2, \{\mathbf{x}_{N_2}^{(2)}\}; \dots; t_M, \{\mathbf{x}_{N_M}^{(M)}\}) = \det \left[\mathbf{A}(\mathbf{x}_{N_0}^{(0)}, \mathbf{x}_{N_1}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}_{N_M}^{(M)}) \right]$$

というように, $\sum_{m=1}^M N_m \times \sum_{m=1}^M N_m$ 行列

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}_{N_1}^{(1)}, \mathbf{x}_{N_2}^{(2)}, \dots, \mathbf{x}_{N_M}^{(M)}) = \left(\mathbf{K}(t_m, x_j^{(m)}; t_n, x_k^{(n)}) \right)_{1 \leq j \leq N_m, 1 \leq k \leq N_n, 1 \leq m, n \leq M}$$

の行列式で表すことができるのである.

非衝突ブラウン運動 $\xi^N(t)$ は, 行列核 \mathbf{K}_N が

$$\mathbf{K}_N(s, x; t, y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2s}} \sum_{n=0}^{N-1} \left(\frac{t}{s}\right)^{n/2} \varphi_n\left(\frac{x}{\sqrt{2s}}\right) \varphi_n\left(\frac{y}{\sqrt{2t}}\right), & s \leq t \text{ のとき} \\ -\frac{1}{\sqrt{2s}} \sum_{n=N}^{\infty} \left(\frac{t}{s}\right)^{n/2} \varphi_n\left(\frac{x}{\sqrt{2s}}\right) \varphi_n\left(\frac{y}{\sqrt{2t}}\right), & s > t \text{ のとき} \end{cases}$$

で与えられる行列式過程である. ここで $\varphi_n(x) = \{\sqrt{\pi} 2^n n!\}^{-1/2} H_n(x) e^{-x^2/2}$ は, エルミート多項式 $H_n(x)$ を用いて定義される \mathbf{R} 上の正規直交関数である [28, 34]. 非衝突ベッセル過程 $\xi^{N,\nu}(t)$ も行列式過程であり, その行列核 $\mathbf{K}_N^{(\nu)}$ は

$$\mathbf{K}_N^{(\nu)}(s, x; t, y) = \begin{cases} \frac{1}{2s} \sum_{n=0}^{N-1} \left(\frac{t}{s}\right)^n \varphi_n^\nu\left(\frac{x}{2s}\right) \varphi_n^\nu\left(\frac{y}{2t}\right), & s \leq t \text{ のとき} \\ -\frac{1}{2s} \sum_{n=N}^{\infty} \left(\frac{t}{s}\right)^n \varphi_n^\nu\left(\frac{x}{2s}\right) \varphi_n^\nu\left(\frac{y}{2t}\right), & s > t \text{ のとき} \end{cases}$$

で与えられる. ここで $\varphi_n^\nu(x) = \sqrt{\Gamma(n+1)/\Gamma(\nu+n+1)} x^{\nu/2} L_n^\nu(x) e^{-x/2}$ は, 助変数 $\nu > -1$ のラゲール多項式 $L_n^\nu(x)$ を用いて定義される $\mathbf{R}_+ = \{x \in \mathbf{R} : x \geq 0\}$ 上の正規直交関数である [33](表 1 参照).

1次元拡散過程	ワイル領域	行列値過程	ランダム行列	行列式過程の行列核
ブラウン運動	A_{N-1} 型	GUE $\mathcal{H}(N)$	GUE	エルミート H_n
偶数次元ベッセル過程	C_N 型	Laguerre	chGUE	ラゲール $L_n^\nu, \nu \in \mathbf{N}_0$
3次元ベッセル過程 (吸収壁ブラウン運動)	C_N 型	C 型 $\mathrm{sp}(2N, \mathbf{C}) \cap \mathcal{H}(2N)$	class C	ラゲール $L_n^{1/2}$
1次元ベッセル過程 (反射壁ブラウン運動)	D_N 型	D 型 $\mathrm{so}(2N, \mathbf{C}) \cap \mathcal{H}(2N)$	class D	ラゲール $L_n^{-1/2}$

表 1: 有限系における非衝突過程, 行列値過程, 行列式過程

4.2 スケーリング極限

拡散過程の本数 N を無限大にしたときの非衝突過程 ξ^N と $\xi^{N,\nu}$ の漸近挙動は, それらが行列式過程であることから, それぞれの行列核 $K_N, K_N^{(\nu)}$ の $N \rightarrow \infty$ での挙動によって決定される. 適当なスケーリング極限において行列核が収束することを示すことができれば, 多時刻相関関数及び多時刻積率母関数の収束が保障されるので, 確率過程の任意の有限次元分布の収束を導くことができる. 以下では, 非衝突ブラウン運動に対してバルク・スケーリングとソフトエッジ・スケーリングとよばれる 2 種類のスケーリング極限をとった結果得られる 2 つの無限粒子系と, 非衝突ベッセル過程に対してハードエッジ・スケーリングとよばれるスケーリング極限をとった結果得られる無限粒子系を紹介する [40, 45, 25, 57, 28, 1, 33, 34].

[バルク・スケーリング極限] $\xi^N(N+t)$ は, $N \rightarrow \infty$ としたとき無限次元行列式過程に収束する. その行列核 \mathcal{K}^{\sin} は三角関数を用いて以下のように表すことができる:

$$\mathcal{K}^{\sin}(s, x; t, y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \int_0^1 du e^{(t-s)u^2/2} \cos(u(x-y)), & s < t \text{ のとき} \\ \frac{\sin(x-y)}{\pi(x-y)}, & s = t \text{ のとき} \\ -\frac{1}{\pi} \int_1^\infty du e^{(t-s)u^2/2} \cos(u(x-y)), & s > t \text{ のとき} \end{cases}$$

[ソフトエッジ・スケーリング極限] $a(N, t) = 2N^{2/3} + N^{1/3}t - t^2/4$ とおく. $\theta_{a(N,t)}\xi^N(N^{1/3}+t) \equiv \{Y_1(N^{1/3}+t) - a(N, t), Y_2(N^{1/3}+t) - a(N, t), \dots, Y_N(N^{1/3}+t) - a(N, t)\}$ は, $N \rightarrow \infty$ としたとき無限次元行列式過程に収束する. その行列核 $\mathcal{K}^{\mathrm{Ai}}$ はエアリー関数 $\mathrm{Ai}(x)$ を用いて以下のように表すことができる:

$$\mathcal{K}^{\mathrm{Ai}}(s, x; t, y) = \begin{cases} \int_0^0 du e^{(t-s)u/2} \mathrm{Ai}(x-u) \mathrm{Ai}(y-u), & s \leq t \text{ のとき} \\ -\int_0^{-\infty} du e^{(t-s)u/2} \mathrm{Ai}(x-u) \mathrm{Ai}(y-u), & s > t \text{ のとき} \end{cases}$$

[ハードエッジ・スケーリング極限] $\xi^{N,\nu}(N+t)$ は, $N \rightarrow \infty$ としたとき無限次元行列式過程に収束する. その行列核 $\mathcal{K}^{(\nu)}$ はベッセル関数 $J_\nu(x)$ を用いて以下のように表すことができる:

$$\mathcal{K}^{(\nu)}(s, x; t, y) = \begin{cases} \int_0^1 du J_\nu(2\sqrt{ux})J_\nu(2\sqrt{uy})e^{2(t-s)u}, & s < t \text{ のとき} \\ \frac{J_\nu(2\sqrt{x})\sqrt{y}J'_\nu(2\sqrt{y}) - J_\nu(2\sqrt{y})\sqrt{x}J'_\nu(2\sqrt{x})}{x-y}, & s = t \text{ のとき} \\ -\int_1^\infty du J_\nu(2\sqrt{ux})J_\nu(2\sqrt{uy})e^{2(t-s)u}, & s > t \text{ のとき} \end{cases}$$

上の 3 つの無限粒子系は時間的にはいずれも斉次であるが, 空間的にはバルク・スケーリング極限で得られたもののみが斉次であり, 2 種のエッジ・スケーリング極限で得られたものは非斉次であることを注意しておく (表 2 参照). これらの無限粒子系は, 可逆過程であり, その平衡分布は行列値点過程である. 長田 [43] は, 平衡分布が行列値点過程である拡散過程をディリクレ形式による手法により構成した. 長田の確率過程と上述の無限次元行列式過程との一致は明らかではない.

4.3 Tracy-Widom 分布

時間的に斉次な非衝突ブラウン運動の最右端粒子の運動に注目することにする. ある時刻 $t > 0$ で, この最右端粒子の位置が $\alpha \in \mathbf{R}$ 未満である確率は, $M = 1, t_1 = t, \theta_1 = 1, \chi_1(x) = -\mathbf{1}_{\{x \geq \alpha\}}$ として (15) を用いることにより

$$P\left(\max_{1 \leq j \leq N} Y_j(t) < \alpha\right) = E\left[\exp\left\{\sum_{j=1}^N \log(\mathbf{1}_{\{Y_j(t) < \alpha\}})\right\}\right] = \text{Det}\left[\delta(x-y) - \mathbf{K}_N(t, x; t, y)\mathbf{1}_{\{y \geq \alpha\}}\right]$$

というようにフレドホルム行列式で与えられる. 特に, ソフトエッジ・スケーリング極限で得られた無限次元行列式過程の最右端の粒子の位置の分布は, 前小節で与えた行列核 \mathcal{K}^{Ai} を用いて

$$\text{Det}\left[\delta(x-y) - \mathcal{K}^{\text{Ai}}(t, x; t, y)\mathbf{1}_{\{y \geq \alpha\}}\right] \equiv F_{\max}(\alpha)$$

と表すことができる. Tracy と Widom は, パンルヴェ第 2 方程式 (例えば, [42] を参照)

$$P_{\text{II}} : \frac{d^2 q(x)}{dx^2} = 2q(x)^3 + xq(x)$$

の境界条件 $q(x) \sim \text{Ai}(x), x \rightarrow \infty$ を満たす解 $q(x)$ を用いて

$$F_{\max}(\alpha) = \exp\left(-\int_\alpha^\infty (x-\alpha)q(x)^2 dx\right)$$

と書き表すことができることを示した (Tracy-Widom 分布)[55]. 行列式過程に対してある定位置 (例えば原点) の右側最近接粒子の位置の分布を計算してみると, 最右端粒子場合と同様に, フレドホルム行列式で表すことができる. バルク・スケーリング極限の場合 [24] とハードエッジ・スケーリング極限の場合 [56] での原点に対する右側最近接粒子の位置の分布は詳しく調べられており, それぞれパンルヴェ第 5 方程式 P_V と第 3 方程式 P_{III} の解を用いて具体的に書き表すことができる (表 2 参照).

行列核 (有限系)	エルミート H_n	エルミート H_n	ラゲール L_n^ν
行列核 (無限系)	(バルク) 三角関数 sin, cos	(ソフトエッジ) エアリー Ai	(ハードエッジ) ベッセル J_ν
空間的斉次性	斉次	非斉次	非斉次
パウルヴェ方程式	P_V	P_{II}	P_{III}

表 2: 行列式過程とパウルヴェ方程式

5 時間的非斉次過程

前節で扱った非衝突過程は、非衝突条件を無限の時間区間 $(0, \infty)$ において課したものであり、時間的に斉次な拡散過程であった。一方、非衝突条件を有限の時間区間 $(0, T]$ においてのみ課すことを考えると、非衝突ブラウン運動と非衝突彷徨過程は、それぞれ推移確率密度が (4), (6) と (10), (11) で与えられるように時間的に非斉次な拡散過程となることを第 2 節で紹介した。時間的に非斉次な非衝突ブラウン運動 $X(t), t \in [0, T]$ の推移確率密度 (6) において $t = T$ とすると、定義より $y \in \mathbb{W}_N^A$ に対しては $\mathcal{N}_N(0, y) = 1$ であるから、(14) で与えた g^{GOE} と等しくなることが分かる。つまり、非衝突条件を課す時間区間の終時刻 T での分布は GOE の固有値分布と一致するのである。しかし $0 < t < T$ のときは $X(t)$ の分布は GOE の固有値分布とは異なる。特に $0 < t \ll T$ のときには GUE の固有値分布に近いものであることが、 $\mathcal{N}_N(T-t, y)$ に漸近評価 (5) を用いると分かる。以上の考察から、 $X(t), t \in [0, T]$ は GUE から GOE への転移を示すある行列値過程の固有値過程と見なせるのではないかと予想される。

GOE 行列過程 $\Xi^{\text{GOE}}(t)$ の各成分は GUE 行列過程 $\Xi^{\text{GUE}}(t)$ の各成分の虚部を零としたものである。よって、 $0 < t \ll T$ のときには非対角成分の実部と虚部が (零から出発して) ほぼ同じ大きさで時間発展して行くが、 $t \nearrow T$ につれて虚部は再び零になっていくように $\mathcal{H}(N)$ -値過程をうまく与えてやることができれば、 $X(t)$ をその固有値過程としてもつような行列値過程を実現できるはずである [44]。実際、各成分の虚部を、第 1 節で導入しておいた期間 T のブラウン橋で与えてやればうまくいくことが分かる。互いに独立なブラウン橋 $\beta_{ij}^T(t), 1 \leq i < j \leq N$ で、 $s_{ij}(t)$ を与える際に導入した $B_{ij}(t), 1 \leq i \leq j \leq N$ とも独立であるものを用意して

$$a_{ij}^T(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}\beta_{ij}^T(t), & i < j \text{ のとき} \\ 0, & i = j \text{ のとき} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\beta_{ji}^T(t), & i > j \text{ のとき} \end{cases}$$

とおき、 $\mathcal{H}(N)$ -値過程を

$$\Xi^T(t) = \left(s_{ij}(t) + \sqrt{-1}a_{ij}^T(t) \right)_{1 \leq i, j \leq N}, \quad t \in [0, T] \quad (16)$$

と定義する。すると $\Xi^T(t), t \in (0, T]$ の固有値過程 $\lambda^T(t), t \in (0, T]$ は時間的に非斉次な拡散過程であり、2.2 節で説明した時間的に非斉次な非衝突ブラウン運動 $X(t), t \in (0, T]$ (ただし $X(0) = 0$)

と分布が等しいことが分かる [30] . 証明するには $\Xi^T(t)$ の固有値過程 $\lambda^T(t)$ と $\Xi^{\text{GUE}}(t)$ の固有値過程が一般化された Imhof 関係 (9) を満たすことを示せばよい . $\mathcal{H}(N)$ -値過程 $\Xi^{\text{GUE}}(t)$ の固有値過程と時間的に斉次な非衝突ブラウン運動 $Y(t)$ の分布が等しいこと (Dyson の結果) はすでに示したので, このことより, $\lambda^T(t)$ が $X(t)$ と分布の意味で等価であることが結論できるのである .

この結果より, $X(t), t \in (0, T]$ という一つの拡散過程の推移確率密度に対して, Karlin-McGregor の公式を利用した (6) という表現と, (16) で定義された $\mathcal{H}(N)$ -値過程 $\Xi^T(t)$ に対する固有値過程の推移確率密度という二つの異なる表現が与えられたことになる . これは, 3 次元ベッセル過程やブラウン彷徨過程が, 1 次元ブラウン運動の条件付き過程としての表現と 3 次元ブラウン運動の動径方向への射影としての表現という二つの表現をもつと同じ構造である . $X(t), t \in (0, T]$ に対する後者の表現は, $\mathcal{H}(N)$ -値過程をその固有値の部分 $\Lambda(t)$ とユニタリー行列部分 $U(t)$ に分解して, そのうちのユニタリー部分を積分したもので与えられる . このことから Harish-Chandra の積分公式 [19] あるいは Itzykson-Zuber の積分公式 [22] とよばれる次式が導出される [30].

[Harish-Chandra の積分公式] dU を空間 $U(N)$ での Haar 測度とし, $\int_{U(N)} dU = 1$ と規格化されているものとする . $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N), \mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_N) \in \mathbf{W}_N^A$ に対して, $\Lambda_{\mathbf{x}} = \text{diag}(x_1, x_2, \dots, x_N), \Lambda_{\mathbf{y}} = \text{diag}(y_1, y_2, \dots, y_N)$ とすると, 任意の $\sigma \in \mathbf{R}$ に対して等式

$$\int_{U(N)} dU e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \text{Tr}(\Lambda_{\mathbf{x}} - U^* \Lambda_{\mathbf{y}} U)^2} = \frac{C_1(N) \sigma^{N^2}}{h_N(\mathbf{x}) h_N(\mathbf{y})} \det_{1 \leq i, j \leq N} \left(G(\sigma^2, y_j | x_i) \right)$$

が成立する .

非衝突彷徨過程 $X^{(\nu, \kappa)}(t)$ に対しても上と同様な議論ができる . 各成分の実部がブラウン運動であり, 虚部がブラウン橋である行列値過程

$$M_T(t) = \left(B_{ij}(t) + \sqrt{-1} \beta_{ij}^T(t) \right)_{1 \leq i \leq N+\nu, 1 \leq j \leq N}$$

は chGUE から chGOE への転移を示す . これは非衝突彷徨過程と関係があると思われるが, このランダム行列の固有値は一般に複素数であるので, $M_T(t)$ の固有値過程そのものが非衝突彷徨過程と一致するわけではない . $M_T(t)$ の代わりに, これから作られる

$$\Xi_T^{\text{LW}}(t) = M_T(t)^* M_T(t), \quad t \in [0, T]$$

というエルミート行列を考える . この行列の固有値過程 $\lambda^{\text{LW}}(t) = (\lambda_1^{\text{LW}}(t), \lambda_2^{\text{LW}}(t), \dots, \lambda_N^{\text{LW}}(t))$ は各成分が非負である確率過程になる . この各成分の平方根 $\kappa_i^{\text{LW}}(t) = \sqrt{\lambda_i^{\text{LW}}(t)}, 1 \leq i \leq N$ で定まる確率過程 $\kappa^{\text{LW}}(t) = (\kappa_1^{\text{LW}}(t), \kappa_2^{\text{LW}}(t), \dots, \kappa_N^{\text{LW}}(t))$ は時間的に非斉次な拡散過程であり, これが, $\nu \in \mathbf{N}_0, \kappa = \nu + 1$ の場合の時間的に非斉次な非衝突彷徨過程 $X^{(\nu, \nu+1)}(t), t \in (0, T]$ (ただし $X^{(\nu, \nu+1)}(0) = 0$) と分布の意味で等しいのである [31] . その他の例として, $(\nu, \kappa) = (1/2, 1)$ の場合がある . この場合も固有値過程が非衝突彷徨過程となるエルミート行列値過程を構成することができ, これが class C から class CI への転移を示すことが導ける . (行列値統計集団 class CI や後述の class DIII-odd/even については文献 [60, 2, 23, 6] を参照.)

$2N$ 本のブラウン運動に対して, 区間 $(0, T)$ での非衝突条件に加えて, 「隣合った $2j - 1$ 番目の道と $2j$ 番目の道は必ず終時刻 T で出会う ($1 \leq j \leq N$)」という条件も課すと, GUE から GSE への転移を示す行列値過程とそれに対応する非衝突拡散過程を得ることができる . 非衝突彷徨過程に

時間的斉次性	斉次	非斉次
1次元拡散過程の例	ブラウン運動 ベッセル過程	ブラウン橋 ベッセル橋 彷徨過程
行列値過程の例	GUE chGUE class C class D	GUE-to-GOE, GUE-to-GSE chGUE-to-chGOE, chGUE-to-chGSE class C-to-class CI ($\nu = 1/2, \kappa = 1$) class D-to-class DIII-odd ($\nu = 1/2, \kappa = 0$) class D-to-class DIII-even ($\nu = -1/2, \kappa = 0$)
過程	行列式過程	パフィアン過程
多時刻相関関数	行列式	パフィアン
多時刻積率母関数	フレドホルム行列式	フレドホルム・パフィアン

表 3: 時間的に斉次である場合と非斉次である場合との比較

対しては、パラメータが $(\nu, \nu + 1), \nu \in \mathbf{N}_0$ の場合と $(\nu, \kappa) = (1/2, 0)$ および $(-1/2, 0)$ の場合にこの付加条件を課すと、それぞれ chGUE から chGSE への転移, class D から class DIII-odd への転移, class D から class DIII-even への転移を示す行列値過程とそれらに対応する非衝突拡散過程を得ることもできる [31]. (ここで, chGSE はカイラル・ガウス型シンプレクティック集団とよばれる行列値統計集団を表す [39].)

このようにして時間的に非斉次な過程がいくつも構成できるが (表 3 参照), 各々が非衝突拡散過程としての表現と行列値過程の固有値過程としての表現をもつ. その等価性から, 対称性の異なるそれぞれの行列に対する Harish-Chandra(Itzykson-Zuber) の積分公式が導かれる [31].

多時刻積率母関数がフレドホルム・パフィアン [46, 33] で表される確率過程のクラスが, 最近, 盛んに研究されている [52, 3]. このような確率過程をここではパフィアン過程とよぶことにする. パフィアン過程の多時刻 N 点相関関数は, 一般に $2N \times 2N$ 行列のパフィアンで表すことができる (表 3 参照). 特別な場合には, $2N \times 2N$ 行列のパフィアンは $N \times N$ 行列の行列式に帰着されることから, パフィアン過程は行列式過程の一般化の一つと見なすことができる. N 点相関関数が $N \times N$ 四元数行列式で表される確率過程が Dyson による定式化以降研究されているが [11, 13, 39], 四元数行列式はパフィアンで書き表すこともできるので, これらもパフィアン過程である. 上で議論した時間的に非斉次な非衝突ブラウン運動と非衝突彷徨過程も, パフィアン過程であることが示せる [28, 33]. $N \rightarrow \infty$ での漸近挙動も調べることができ, スケーリング極限で得られる無限次元パフィアン過程は時間的に非斉次な無限粒子系を与える. 非衝突彷徨過程の場合, パフィアン相関関数を定める行列核の一般形は, Riemann-Liouville の分数微積分を用いて表される [33].

6 おわりに

1. 本稿では, \mathbf{R} および \mathbf{R}_+ という 1 次元非有界領域内の拡散過程に非衝突条件を課した場合について詳しく論じた. これらはガウス型の行列値統計集団と関係した. 同様に有界な領域内での非衝突拡散過程を考えることもできる. 円周上の非衝突拡散過程については, circular ensemble とよばれるユニタリ行列値の統計集団と関連して調べられている [9, 38, 41]. 有限区間内の非衝突拡散過程の推移確率密度は Jacobi 多項式を用いて表すことができ, multivariate analysis of variance (MANOVA) モデルとよばれる統計集団と関係する [8].
2. Dyson モデルは方程式 (8) で与えられるようにパラメータ β をもつ. 本稿では一般化された Bru の定理を応用することによって, $\beta = 1, 2, 4$ の場合にはそれぞれ GOE, GUE, GSE 行列値過程の固有値過程に等しいことを示し, また, このうちで特に $\beta = 2$ の場合は非衝突ブラウン運動とも等価であることを解説した. 最近, 一般の $\beta > 0$ に対して

$$g^{\text{beta}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{C_{\beta}(N)} h_N(\mathbf{x})^{\beta} \exp\left(-\frac{|\mathbf{x}|^2}{2}\right), \quad \mathbf{x} \in \mathbf{W}_N^A$$

を固有値分布とする行列値統計集団が報告された. ここで $C_{\beta}(N)$ は正規化定数である. これは, 対角成分は独立なガウス分布に従い, $(k, k+1)$ -成分および $(k+1, k)$ -成分 ($1 \leq k \leq N-1$) は, 独立な自由度 $(N-k)\beta$ のカイ 2 乗分布に従う, 3 重対角実対称行列値確率変数に対する統計集団であり, ガウス型ベータ集団 (Gaussian beta ensemble) とよばれている [8].

3. 各成分が独立同分布である複素ガウス分布に従う行列統計集団をギニブル集団 (Ginibre ensemble) [17] という. 本稿では固有値が実数値であるランダム行列を扱ったが, このギニブル集団の固有値は複素数値であり, その確率密度関数は

$$g^{\text{Gin}}(\mathbf{z}) = \frac{1}{C_{\text{Gin}}(N)} \prod_{1 \leq i < j \leq N} |z_i - z_j|^2 \exp\left(-\frac{|z|^2}{2}\right), \quad \mathbf{z} \in \mathbf{C}^N$$

で与えられる. ここで $C_{\text{Gin}}(N)$ は正規化定数である. ギニブル集団の固有値分布の性質については [49] などで調べられている.

4. 本稿では非衝突拡散過程を扱ったが, 非衝突条件の下での離散時間マルコフ過程も研究されている. 特に vicious walk とよばれている非衝突ランダムウォーク [12] は, ヤング図形やシューア関数を用いた対称群の表現 [20, 54] とも関連して興味深い [27, 29].

参考文献

- [1] M. Adler and P. van Moerbeke, PDF's for the joint distributions of the Dyson, Airy and sine processes, *Ann. Probab.*, **33** (2005), 1326–1361.
- [2] A. Altland and M. R. Zirnbauer, Non-standard symmetry classes in mesoscopic normal-superconducting hybrid structure, *Phys. Rev. B*, **55** (1997), 1142–1161.
- [3] A. Borodin and E. M. Rains, Eynard-Mehta theorem, Schur process, and their pfaffian analogs, *J. Stat. Phys.*, **121** (2005), 291–317.
- [4] M. F. Bru, Diffusions of perturbed principal component analysis, *J. Multivariate Anal.*, **29** (1989), 127–136.
- [5] M. F. Bru, Wishart process, *J. Theor. Probab.*, **4** (1991), 725–751.
- [6] M. Caselle and U. Magnea, Random matrix theory and symmetric space, *Phys. Rep.*, **394** (2004), 41–156.
- [7] J. L. Doob, *Classical Potential Theory and its Probabilistic Counterpart*, Springer, New York, 1984.
- [8] I. Dumitriu and A. Edelman, Matrix models for beta ensembles, *J. Math. Phys.*, **43** (2002), 5830–5847.
- [9] F. J. Dyson, Statistical theory of energy levels of complex systems I, *J. Math. Phys.*, **3** (1962), 140–156.
- [10] F. J. Dyson, A Brownian-motion model for the eigenvalues of a random matrix, *J. Math. Phys.*, **3** (1962), 1191–1198.
- [11] F. J. Dyson, Correlation between the eigenvalues of a random matrix, *Commun. Math. Phys.*, **19** (1970), 235–250.
- [12] M. E. Fisher, Walks, walls, wetting, and melting, *J. Stat. Phys.*, **34** (1984), 667–729.
- [13] P. J. Forrester, T. Nagao and G. Honner, Correlations for the orthogonal-unitary and symplectic-unitary transitions at the hard and soft edges. *Nucl. Phys.*, **B553**[PM] (1999), 601–643.
- [14] W. Fulton, *Young Tableaux with Applications to Representation Theory and Geometry*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997.
- [15] W. Fulton and J. Harris, *Representation Theory, A First Course*, Springer, New York, 1991.
- [16] I. Gessel and G. Viennot, Binomial determinants, paths, and hook length formulae, *Adv. in Math.*, **58** (1985), 300–321.
- [17] J. Ginibre, Statistical ensembles of complex, quaterion and real matrices, *J. Math. Phys.*, **6** (1965), 440–449.
- [18] D. J. Grabiner, Brownian motion in a Weyl chamber, non-colliding particles, and random matrices, *Ann. Inst. Henri Poincaré, Probab. Stat.*, **35** (1999), 177–204.
- [19] Harish-Chandra, Differential operators on a semisimple Lie algebra, *Am. J. Math.*, **79** (1957), 87–120.
- [20] 洞彰人, 对称群の表現と漸近的組合せ論, 数学, **57**, no.3 (2005), 242–254.
- [21] J. P. Imhof, Density factorizations for Brownian motion, meander and the three-

- dimensional Bessel processes, and applications, *J. Appl. Prob.*, **21** (1984), 500–510.
- [22] C. Itzykson and J.-B. Zuber, The planar approximation. II, *J. Math. Phys.*, **21** (1980), 411–421.
- [23] D. A. Ivanov, Random-matrix ensembles in p-wave vortices, 2001, arXiv:cond-mat/0103089.
- [24] M. Jimbo, T. Miwa, Y. Môri and M. Sato, Density matrix of an impenetrable Bose gas and the fifth Painlevé transcendent, *Physica D*, **1** (1980), 80–158.
- [25] K. Johansson, Discrete polynuclear growth and determinantal processes. *Commun. Math. Phys.*, **242** (2003), 277–329.
- [26] S. Karlin and J. McGregor, Coincidence probabilities, *Pacific J. Math.*, **9** (1959), 1141–1164.
- [27] 香取眞理, 非衝突乱歩系・シューア関数・ランダム行列, 応用数理, **13**, no.4 (2003), 16–27 ([296]–[307]).
- [28] M. Katori, T. Nagao, and H. Tanemura, Infinite systems of non-colliding Brownian particles, *Adv. Stud. in Pure Math.* **39** “Stochastic Analysis on Large Scale Interacting Systems”, Mathematical Society of Japan, Tokyo, 2004, pp.283–306.
- [29] M. Katori and H. Tanemura, Functional central limit theorems for vicious walkers, *Stoch. Stoch. Rep.*, **75** (2003), 369–390.
- [30] M. Katori and H. Tanemura, Noncolliding Brownian motions and Harish-Chandra formula, *Elect. Comm. in Probab.*, **8** (2003), 112–121.
- [31] M. Katori and H. Tanemura, Symmetry of matrix-valued stochastic processes and noncolliding diffusion particle systems, *J. Math. Phys.*, **45** (2004), 3058–3085.
- [32] 香取眞理, 種村秀紀, 「ランダム行列と非衝突過程」, 数理物理への誘い 6, 小嶋泉編, 遊星社, 2006, pp.148–175.
- [33] M. Katori and H. Tanemura, Infinite systems of non-colliding generalized meanders and Riemann-Liouville differintegrals, *Probab. Th. Rel. Fields*, **138** (2007), 113–156.
- [34] M. Katori and H. Tanemura, Noncolliding Brownian motion and determinantal processes, *J. Stat. Phys.*, **129** (2007), 1233–1277.
- [35] W. König and N. O’Connell, Eigenvalues of the Laguerre process as non-colliding squared Bessel process, *Elec. Comm. in Probab.*, **6** (2001), 107–114.
- [36] B. Lindström, On the vector representations of induced matroids, *Bull. London Math. Soc.*, **5** (1973), 85–90.
- [37] H. P. McKean, The Bessel motion and a singular equation, *Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, Series A*, **33** (1960), 317–322.
- [38] M. L. Mehta, *Random Matrices*, 3rd ed., Elsevier Academic Press, London, 2004.
- [39] 永尾太郎, ランダム行列の基礎, 東京大学出版会, 2005.
- [40] T. Nagao, and P. J. Forrester, Multilevel dynamical correlation function for Dyson’s Brownian motion model of random matrices, *Phys. Lett.*, **A247** (1998), 42–46.

- [41] T. Nagao and P.J. Forrester, Dynamical correlations for circular ensembles of random matrices, *Nucl. Phys.*, **B660** (2003), 557–578.
- [42] 野海正俊, 山田泰彦, Painlevé 方程式の対称性, *数学*, **53**, no.1 (2001), 62–75.
- [43] H. Osada, Non-collision and collision properties of Dyson’s model in infinite dimension and other stochastic dynamics whose equilibrium states are determinantal random point fields, *Adv. Stud. in Pure Math.*, **39** “*Stochastic Analysis on Large Scale Interacting Systems*”, Mathematical Society of Japan, Tokyo, 2004, pp.325–343.
- [44] A. Pandey and M. L. Mehta, Gaussian ensembles of random Hermitian matrices intermediate between orthogonal and unitary ones, *Commun. Math. Phys.*, **87** (1983), 449–468.
- [45] M. Prähofer and H. Spohn, Scale invariance of the PNG droplet and the Airy process. *J. Stat. Phys.*, **108** (2002), 1071–1106.
- [46] E. M. Rains, Correlation functions for symmetrized increasing subsequences, 2000, arXiv:math.CO/0006097.
- [47] D. Revuz and M. Yor, *Continuous Martingales and Brownian Motion*, 3rd ed., Springer, New York, 1998.
- [48] L. C. G. Rogers and Z. Shi, Interacting Brownian particles and the Wigner law, *Probab. Th. Rel. Fields*, **95** (1993), 555–570.
- [49] T. Shirai, Large deviations for the fermion point process associated with the exponential kernel, *J. Stat. Phys.*, **123** (2006), 615–629.
- [50] T. Shirai and Y. Takahashi, Random point fields associated with certain Fredholm determinants I: fermion, Poisson and boson point process, *J. Funct. Anal.*, **205** (2003), 414–436.
- [51] A. Soshnikov, Determinantal random point fields, *Russian Math. Surveys*, **55** (2000), 923–975.
- [52] A. Soshnikov, Janossy densities of coupled random matrices, *Commun. Math. Phys.*, **251** (2004), 447–471.
- [53] J. R. Stembridge, Nonintersecting paths, pfaffians, and the plane partitions, *Adv. in Math.*, **83** (1990), 96–131.
- [54] 鈴木淳史, 現代物理数学への招待, ランダムウォークからひろがる多彩な物理と数理, サイエンス社, 2006.
- [55] C. A. Tracy, and H. Widom, Level-spacing distributions and the Airy kernel, *Commun. Math. Phys.*, **159** (1994), 151–174.
- [56] C. A. Tracy, and H. Widom, Fredholm determinants, differential equations and matrix models, *Commun. Math. Phys.*, **163** (1994), 33–72.
- [57] C. A. Tracy, and H. Widom, Differential equations for Dyson processes, *Commun. Math. Phys.*, **252** (2004), 7–41.
- [58] 渡辺信三, 確率微分方程式, 産業図書, 1975.
- [59] M. Yor, *Some Aspects of Brownian Motion, Part I: Some Special Functionals*, Birkhäuser, Basel, 1992.
- [60] M. R. Zirnbauer, Riemannian symmetric superspaces and their origin in random-matrix theory, *J. Math. Phys.*, **37** (1996), 4986–5018.

(香取眞理・中央大学工学部)
(種村秀紀・千葉大学理学研究科)