

非衝突乱歩系・シューア関数・ランダム行列

香取 眞理

1 非衝突乱歩系

まずは、互いに独立に乱歩をしている N 個の粒子から成る系を考えることにしよう。1次元格子 $Z = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ 上に N 粒子がある。初期時刻 $t=0$ では、粒子は間隔 2 の等間隔で規則正しく並んでいたが、その後は各時間ステップでそれぞれ独立に右か左にまったくランダムに移動する。時刻 t での i 番目の粒子の位置を $x_i(t)$ と書くことにすると、以上の設定は、 $i=1, 2, \dots, N$ として

$$x_i(0) = 2(i-1),$$

$$x_i(t+1) = \begin{cases} x_i(t)-1 & \text{確率} 1/2, \\ x_i(t)+1 & \text{確率} 1/2, \end{cases} \quad t = 0, 1, 2, 3, \dots$$

と書き表せる。 i 番目の粒子が、時刻 t までに左に移動した回数が L_i であったとしよう。すると当然、右に移動した回数は $R_i = t - L_i$ であるから、この粒子の時刻 t での到達位置は $x_i(t) = x_i(0) + (R_i - L_i) = 2(i-1) + (t - 2L_i)$ と定まることになる。つまり、粒子数 N と時間間隔 t を固定したとき、各粒子の左移動数を成分とするベクトル $\mathbf{L} = (L_1, L_2, \dots, L_N)$ は、この N 粒子系の時刻 t での終配置を一意的に決める。この指定された終配置に到達するような粒子の乱歩全体の集合を $\Omega(N, t, \mathbf{L})$ と書くことにする。すると、この集合の元の数、すなわち乱歩のパターンの総数 $N_{N,t}^0(\mathbf{L}) \equiv |\Omega(N, t, \mathbf{L})|$ は

$$N_{N,t}^0(\mathbf{L}) = \prod_{i=1}^N \binom{t}{L_i} \quad (1.1)$$

であることがすぐに分かるであろう。各粒子の運動は独立なので、2項係数の

[筆者紹介]



かとり まこと、1984年東京大学理学部物理学科卒業、同大学大学院理学系研究科物理学専攻博士課程修了。理学博士(1988年)。同大学理学部助手を経て、現在、中央大学理工学部物理学科教授。日本物理学会員。研究テーマは非平衡統計力学、相転移・臨界現象、浸透(パーコレーション)現象、無限粒子系の確率過程、数理論理学。

積で与えられるのである。終配置 \mathbf{L} すべてについての和をとれば、当然 $\sum_{\mathbf{L}} N_{N,t}^0(\mathbf{L}) = 2^{Nt}$ となる。

ところが、各粒子が独立に酔歩蹣跚を楽しんでいた平和な時代が終わり、不穏な時代が始まる。各粒子は、離れている間は互いに何もしないが、同じ場所に 2 粒子が到達する(衝突する)と互いに殺し合い、共倒れして両者とも消滅してしまう…これが vicious walker 模型である。vicious とは悪徳を意味する英語であり、たとえば vicious circle は悪循環、あるいは循環論法の意味である。

「悪漢たちが酔歩する」という物騒な状況にあっても、時刻 t までの間に一度も粒子の衝突がなければ、粒子数 N は保存される。それでは、非衝突条件

$$x_1(\tau) < x_2(\tau) < \cdots < x_N(\tau) \quad \tau = 1, 2, 3, \dots, t \quad (1.2)$$

はどのような確率で成り立つのであろうか。

問題は、

$$t \geq L_1 \geq L_2 \geq \cdots \geq L_N \geq 0 \quad (1.3)$$

を満たす N 次元ベクトル $\mathbf{L} = (L_1, L_2, \dots, L_N)$ に対して、非衝突条件(1.2)を満たす乱歩の集合

$$\mathcal{Q}(N, t, \mathbf{L} : \text{非衝突}) = \{\omega \in \mathcal{Q}(N, t, \mathbf{L}) : \text{非衝突条件(1.2)を満たす}\}$$

を定め、その元の数、すなわち非衝突乱歩のパターンの総数

$$N_{N,t}(\mathbf{L}) = |\mathcal{Q}(N, t, \mathbf{L} : \text{非衝突})| = \sum_{\omega \in \mathcal{Q}(N, t, \mathbf{L} : \text{非衝突})} 1$$

を求めることである。そして、取り得る終配置(1.3)についての和

$$N_{N,t} = \sum_{\mathbf{L} : t \geq L_1 \geq L_2 \geq \cdots \geq L_N \geq 0} N_{N,t}(\mathbf{L}) \quad (1.4)$$

を計算することが出来れば、「酔歩する悪漢たち」が出会うことなく時間 t の間は平和が維持される確率 $P_{N,t} = N_{N,t}/2^{Nt}$ が得られることになる。

この問題の答は、

$$P_{N,t} = \frac{1}{2^{Nt}} \prod_{1 \leq i < j \leq t} \frac{N+i+j-1}{i+j-1} \quad (1.5)$$

である。この表式で N を一定にしたまま $t \rightarrow \infty$ とすることにより、この確率は時間が経つにつれ t の冪乗

$$P_{N,t} \sim t^{-\psi_N} \quad (1.6)$$

で減少し、その指数は

$$\psi_N = \frac{1}{4} N(N-1) \quad (1.7)$$

という粒子数 N の 2 次関数であることが導かれる。

vicious walker 模型は、相移転・臨界現象の研究で有名な Michael Fisher が 1983 年の IUPAP 統計力学国際会議でボルツマン・メダルを受賞した際に、その受賞講演録[8]で導入したものである。そこでは、濡れや融解といった物

質界面の物性変化に伴う現象を記述する数理モデルとして考えられたが、高分子の模型[7]や方向付き浸透問題と関係深い friendly walker 模型[34], [5], [14]の特別な場合と見なすことも出来る。

上述の(1.6), (1.7)は, Fisher の受賞講演録[8]にすでに見られる。しかし, その後の一連の論文[1], [7], [12], [23], [19], [20], [29]などで, その背景には, 実に豊富な数理的構造があることが明らかになった。本稿では, (1.5)-(1.7)の結果に焦点を絞り, その数理的側面を解説する。

2 漸化式

非衝突条件(1.2)を満たす N 粒子の乱歩の経路を時空平面上に描いたとする。その図で, $k=1, 2, \dots, N$ に対してそれぞれ, k 番目の粒子の経路を左に $2(k-1)$ だけ平行移動させると, 図1のような経路の図が得られる。この図では, 全ての経路は原点から出発し, いくつかの経路が重なり合っても良い。ただし非交叉である。以下ではこの図1の表現を用いて考えを進めることにする。 $0 \leq \tau \leq t$ とすると時刻 τ では, 粒子は $- \tau, - \tau + 2, \dots, \tau - 2, \tau$ の $\tau + 1$ 個の位置のいずれかに到達する。このうち, 右から左へ $i=0, 1, 2, \dots$ と数えて i 番目の位置を (τ, i) -サイトとよぶことにする。時間間隔 $[0, t]$ の間に, 粒子が到達することがあり得るサイトは, 図1のような3角形の領域 V を成す。この領域 V 内の各サイトに対して,

$n_i(\tau) = (\tau, i)$ -サイトに到達した粒子の総数,

$$m_i(\tau) = \sum_{j=1}^{\tau} n_j(\tau)$$

= 時刻 τ で (τ, i) -サイトを含めてこれより左のサイトに到達した粒子の総数 (2.1)

と書くことにする。各時刻で粒子数 N は保存されているので, $m_0(\tau) = N$ である。また, 領域 V 内の最近接サイト対を結んだ線分をエッジとよぶことにする。各エッジ上を通過する粒子の経路の総数を, そのエッジ上の流れとし,

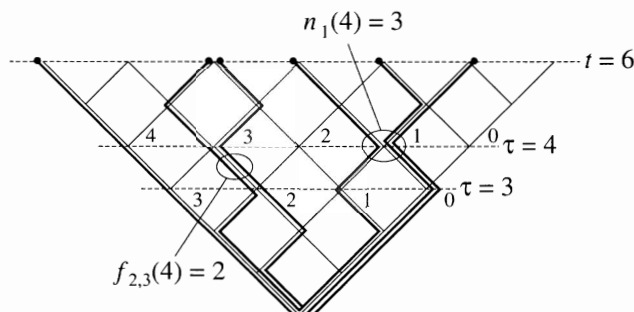


図1 時空平面の領域 V 上の非交叉乱歩の経路。
 $N=6, t=6$ の場合。

$f_{i,j}(\tau)$ は $(\tau-1, i)$ -サイトと (τ, j) -サイトを結ぶエッジ上の流れと定義する。これらの定義より、サイト上の粒子数とエッジ上の流れについて次の関係式が成り立つことがすぐに分かるであろう (ただし $f_{-1,0}(\tau) \equiv 0$)。

$$f_{i,i}(\tau) + f_{i,i+1}(\tau) = n_i(\tau-1), \quad f_{i,i}(\tau) + f_{i-1,i}(\tau) = n_i(\tau),$$

この関係は次と等価である (ただし、 $m_\tau(\tau-1) \equiv 0$)。

$$f_{i,i}(\tau) = m_i(\tau-1) - m_{i+1}(\tau), \quad f_{i-1,i}(\tau) = m_i(\tau) - m_i(\tau-1). \quad (2.2)$$

流れ $f_{i,j}(\tau)$ は非負なので、

$$m_{i+1}(\tau) \leq m_i(\tau-1) \leq m_i(\tau) \quad (2.3)$$

でなければならない。

ベクトル \mathbf{L} の各成分は、各粒子が時間 t の間に左移動した回数を表していた。従って、 \mathbf{L} の成分のうちで i 以上の値を持つ成分の個数は、時間 t の間に左移動を i 回以上行った粒子の総数である。時間 t の間に左移動を i 回以上すれば、時刻 t では (t, i) -サイトかそれよりも左のサイトに到達するはずだから、この数は $m_i(t)$ に他ならない。 $m_i(t)$ を \tilde{L}_i と書くことにすると、以上の考察から関係式

$$\tilde{L}_i = \sum_{j=i}^t |\{k : L_k = j\}|$$

によって N 次元ベクトル \mathbf{L} と t 次元ベクトル $\tilde{\mathbf{L}} = (\tilde{L}_1, \tilde{L}_2, \dots, \tilde{L}_t)$ とは 1 対 1 に対応することが結論される。また、ベクトル $\tilde{\mathbf{L}}$ の成分は

$$N \geq \tilde{L}_1 \geq \tilde{L}_2 \geq \dots \geq \tilde{L}_t \geq 0 \quad (2.4)$$

を満たすことも分かる。(\mathbf{L} を分割と見なしてヤング図 λ で表すと、 $\tilde{\mathbf{L}}$ は λ を対角線で反転して得られる共役なヤング図 $\tilde{\lambda}$ の表す分割である [9].)

以上の対応より、前節で考えた非衝突乱歩の集合 $\Omega(N, t, \mathbf{L} : \text{非衝突})$ の代わりに $\tilde{\mathbf{L}}$ で終状態が指定される V 上の非交叉経路全体の集合 $\tilde{\Omega}(N, t, \tilde{\mathbf{L}} : \text{非交叉})$ の元の個数を数え上げれば良いことになる。ここでは単にこの集合の元の個数を数えるだけでなく、 t 個の変数 z_1, z_2, \dots, z_t を導入して、この集合で指定される t 変数関数を考えることにする。すなわち、 $\omega \in \tilde{\Omega}(N, t, \tilde{\mathbf{L}} : \text{非交叉})$, $0 \leq \tau \leq t$ に対して、

$l_\tau(\omega)$ = 時刻 $\tau-1$ と時刻 τ の間に左移動した粒子の総数
として、 $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_N)$ の関数

$$S_L(\mathbf{z}) = \sum_{\omega \in \tilde{\Omega}(N, t, \tilde{\mathbf{L}} : \text{非交叉})} \prod_{\tau=1}^t z_\tau^{l_\tau(\omega)} \quad (2.5)$$

を考えることにするのである。これが求められれば、この関数の $\mathbf{z} = \mathbf{1} \equiv (1, 1, \dots, 1)$ の点での値として、

$$S_L(\mathbf{z})|_{\mathbf{z}=\mathbf{1}} = \sum_{\omega \in \tilde{\Omega}(N, t, \tilde{\mathbf{L}} : \text{非交叉})} 1 = N_{N,t}(\mathbf{L}) \quad (2.6)$$

というように、 $N_{N,t}(\mathbf{L})$ が定まるはずである。

ところが流れと累積粒子数との間に関係式(2.2)より

$$l_t(\omega) = \sum_{i=1}^t f_{i-1,t}(\tau) = m_t(\tau) + \sum_{i=1}^{t-1} (m_i(\tau) - m_i(\tau-1))$$

であるから、関数 $s_{\tilde{L}}(\mathbf{z})$ は $\tilde{\mathbf{L}}$ を $\tilde{\mathbf{L}}^t$, $(m_1(t-1), m_2(t-1), \dots, m_{t-1}(t-1))$ を $\tilde{\mathbf{L}}^{t-1}$ と書くと、次の関係式を満たすことになる。

$$s_{\tilde{L}}(z_1, \dots, z_t) = \sum_{\substack{\tilde{L}^{t-1}: \tilde{L}_i^{t-1} \geq \tilde{L}_i^{t-2} > \tilde{L}_i^{t-3}, \\ 1 \leq i \leq t-1}} s_{\tilde{L}^{t-1}}(z_1, \dots, z_{t-1}) z_t^{\tilde{L}_t^t - \sum_{i=1}^{t-1} (\tilde{L}_i^t - \tilde{L}_i^{t-1})}. \quad (2.7)$$

ただし、右辺の和における成分間の制限は、(2.3)に由来したものである。この関係式を、 t についての漸化式(1階の差分方程式)と見なして、

$$s_{\tilde{L}^t}(z_1) = z_1^{\tilde{L}_1^t} \quad (2.8)$$

の初期条件の下に解きたい。

3 シューア関数

成分が $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_t$ であるようなベクトル $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_t)$ に対して、

$$a_{\boldsymbol{\lambda}+\delta}(\mathbf{z}) = \det_{1 \leq i, j \leq t} (z_j^{\lambda_i + t - i}) = \begin{vmatrix} z_1^{\lambda_1 + t - 1} & z_2^{\lambda_1 + t - 1} & \dots & z_t^{\lambda_1 + t - 1} \\ z_1^{\lambda_2 + t - 2} & z_2^{\lambda_2 + t - 2} & \dots & z_t^{\lambda_2 + t - 2} \\ z_1^{\lambda_3 + t - 3} & z_2^{\lambda_3 + t - 3} & \dots & z_t^{\lambda_3 + t - 3} \\ & \dots & \dots & \\ z_1^{\lambda_t} & z_2^{\lambda_t} & \dots & z_t^{\lambda_t} \end{vmatrix} \quad (3.1)$$

とする。特に $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0} \equiv (0, 0, \dots, 0)$ のときは、ヴァンデルモンドの行列式

$$a_{\delta}(\mathbf{z}) = \begin{vmatrix} z_1^{t-1} & z_2^{t-1} & \dots & z_t^{t-1} \\ z_1^{t-2} & z_2^{t-2} & \dots & z_t^{t-2} \\ & \dots & \dots & \\ z_1 & z_2 & \dots & z_t \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq t} (z_i - z_j) \quad (3.2)$$

である。 $\boldsymbol{\lambda} \neq \mathbf{0}$ の場合でも、 $z_i = z_j$ とすると(3.1)の第 i 列と第 j 列とが等しくなってしまう行列式は零になることから、 $a_{\boldsymbol{\lambda}+\delta}(\mathbf{z})$ は、任意の $1 \leq i < j \leq t$ に対して $z_i - z_j$ の因子を持つことが分かる。つまり、 $a_{\boldsymbol{\lambda}+\delta}(\mathbf{z})$ はヴァンデルモンドの行列式 $a_{\delta}(\mathbf{z})$ で割り切れるので、

$$\hat{s}_{\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{z}) = \frac{a_{\boldsymbol{\lambda}+\delta}(\mathbf{z})}{a_{\delta}(\mathbf{z})} \quad (3.3)$$

は z_1, z_2, \dots, z_t の多項式であることが分かる。さらに定義(3.3)より直ちに、 $\hat{s}_{\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{z})$ は z_1, z_2, \dots, z_t の斉次多項式であり、その次数は $|\boldsymbol{\lambda}| = \sum_{i=1}^t \lambda_i$ であることも分かる。

実は、 $\boldsymbol{\lambda} = \tilde{\mathbf{L}}^t$ に対するこの斉次多項式 $\hat{s}_{\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{z})$ こそが、前節の漸化式の解なの

である. このことは, $\hat{s}_i(z)$ が実際に漸化式(2.7)を満たし, かつ初期条件(2.8)を満たすことから, 1階の差分方程式の解の一意性により結論される. 以下にその証明を与えることにする[30].

まず, $z_t=1$ とおくと, $\hat{s}_i(z)$ (3.3)の分母と分子の行列式(3.1)と(3.2)の t 列は成分がすべて1となる. その分母と分子の行列式それぞれにおいて, 1列目から $t-1$ 列目までの各列から, この t 列を引くと(このような行列の基本変形で行列式は不変なので)

$$\begin{aligned} & \hat{s}_i(z_1, \dots, z_{t-1}, 1) \\ &= \frac{\begin{vmatrix} z_1^{\lambda_1+t-1}-1 & z_2^{\lambda_1+t-1}-1 & \cdots & 1 \\ z_1^{\lambda_2+t-2}-1 & z_2^{\lambda_2+t-2}-1 & \cdots & 1 \\ & \cdots & \cdots & \\ z_1^{\lambda_t}-1 & z_2^{\lambda_t}-1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} z_1^{t-1}-1 & z_2^{t-1}-1 & \cdots & 1 \\ z_1^{t-2}-1 & z_2^{t-2}-1 & \cdots & 1 \\ & \cdots & \cdots & \\ z_1-1 & z_2-1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}} \\ &= \frac{\begin{vmatrix} z_1^{\lambda_1+t-2}+z_1^{\lambda_1+t-3}+\cdots+z_1+1 & z_2^{\lambda_1+t-2}+z_2^{\lambda_2+t-3}+\cdots+z_2+1 & \cdots & 1 \\ z_1^{\lambda_2+t-3}+z_1^{\lambda_2+t-4}+\cdots+z_1+1 & z_2^{\lambda_2+t-3}+z_2^{\lambda_2+t-4}+\cdots+z_2+1 & \cdots & 1 \\ & \cdots & \cdots & \\ z_1^{\lambda_t-1}+z_1^{\lambda_t-2}+\cdots+z_1+1 & z_2^{\lambda_t-1}+z_2^{\lambda_t-2}+\cdots+z_2+1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} z_1^{t-2}+z_1^{t-3}+\cdots+z_1+1 & z_2^{t-2}+z_2^{t-3}+\cdots+z_2+1 & \cdots & 1 \\ z_1^{t-3}+z_1^{t-4}+\cdots+z_1+1 & z_2^{t-3}+z_2^{t-4}+\cdots+z_2+1 & \cdots & 1 \\ & \cdots & \cdots & \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}} \end{aligned}$$

ここで, 上の1番目の等式右辺の分母分子の行列式において, 各成分から因数分解 $z_i^a-1=(z_i-1)(z_i^{a-1}+z_i^{a-2}+\cdots+z_i+1)$ によって出てくる因子 z_i-1 を行列式の外にくくり出すと, $\prod_{i=1}^t(z_i-1)$ という因子が分母分子とも出てくる. これを通分すると2番目の等式が得られる. 次に, $i=2, 3, \dots, t$ に対して, 順次 i 行を $(i-1)$ 行から引く. $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_t$ であったので,

$$\begin{aligned} & \hat{s}_i(z_1, \dots, z_{t-1}, 1) \\ &= \frac{\begin{vmatrix} z_1^{\lambda_1+t-2}+z_1^{\lambda_1+t-3}+\cdots+z_1^{\lambda_2+t-2} & \cdots & 0 \\ z_1^{\lambda_2+t-3}+z_1^{\lambda_2+t-4}+\cdots+z_1^{\lambda_3+t-3} & \cdots & 0 \\ & \cdots & \cdots \\ z_1^{\lambda_t-1}+z_1^{\lambda_t-2}+\cdots+z_1+1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} z_1^{t-2} & \cdots & 0 \\ z_1^{t-3} & \cdots & 0 \\ & \cdots & \\ 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}} \end{aligned}$$

$$= \frac{\sum_{\substack{\lambda_1 \geq \mu_1 \geq \lambda_2, \dots, \\ \lambda_{t-1} \geq \mu_{t-1} \geq \lambda_t}} \begin{vmatrix} z_1^{\mu_1+(t-1)-1} & z_2^{\mu_1+(t-1)-1} & \dots & z_{t-1}^{\mu_1+(t-1)-1} \\ z_1^{\mu_2+(t-1)-2} & z_2^{\mu_2+(t-1)-2} & \dots & z_{t-1}^{\mu_2+(t-1)-2} \\ & \dots & \dots & \\ z_1^{\mu_{t-1}} & z_2^{\mu_{t-1}} & \dots & z_{t-1}^{\mu_{t-1}} \end{vmatrix}}{\det_{1 \leq i, j \leq (t-1)} (z_j^{(t-1)-i})}$$

ただし、上の 1 番目の等式右辺の分母分子の行列式の第 t 列は、第 t 行成分が 1 であるとすべて零なので、2 番目の等式右辺の分母分子では $(t-1) \times (t-1)$ の行列式にしてあることに注意せよ。つまり

$$\hat{s}_\lambda(z_1, \dots, z_{t-1}, 1) = \sum_{\substack{\mu: \lambda_i \geq \mu_i \geq \lambda_{i-1}, \\ 1 \leq i \leq t-1}} \hat{s}_\mu(z_1, \dots, z_{t-1})$$

が得られたことになる。この右辺の和の中の $\hat{s}_\mu(z_1, \dots, z_{t-1})$ は、 z_1, z_2, \dots, z_{t-1} の $|\mu| = \sum_{i=1}^{t-1} \mu_i$ 次の斉次多項式であるから、 z_t を $|\lambda| - |\mu| = \sum_{i=1}^{t-1} \lambda_i - \sum_{i=1}^{t-1} \mu_i$ 乗したものをかければ、 z_1, \dots, z_t の $|\lambda|$ 次の斉次多項式になる、

$$\hat{s}_\lambda(z_1, \dots, z_{t-1}, z_t) = \sum_{\substack{\mu: \lambda_i \geq \mu_i \geq \lambda_{i-1}, \\ 1 \leq i \leq t-1}} \hat{s}_\mu(z_1, \dots, z_{t-1}) z_t^{|\lambda| - |\mu|}.$$

これは、(2.7) で $\tilde{L}^t = \lambda, \tilde{L}^{t-1} = \mu$ としたものである。また、 $\lambda = (\lambda_1, 0, 0, \dots)$ に対しては $\hat{s}_\lambda(z_1) = z_1^{\lambda_1}$ である。

以上より、(2.5) に対して

$$s_{\tilde{L}}(\mathbf{z}) = \frac{\det_{1 \leq i, j \leq t} (z_j^{\tilde{L}_i^{t-1}-i})}{\det_{1 \leq i, j \leq t} (z_j^{t-i})} \quad (3.4)$$

という行列式表現が得られたことになる。この関数は z_1, \dots, z_t の斉次多項式であることを上で述べたが、(3.4) の形から、 t 変数 z_1, \dots, z_t の任意の置換に対して不変な対称関数であることも明らかである。この対称関数はシューア関数とよばれる [26], [9], [32].

さて、(2.6) に従って $\mathbf{z} = \mathbf{1}$ とすると $N_{N,t}(\mathbf{L})$ が求まるはずであるが、表式 (3.4) で $\mathbf{z} = \mathbf{1}$ とすると、分子と分母の行列式がともに零になって不定形になってしまう。うまく $\mathbf{z} \rightarrow \mathbf{1}$ の極限をとってやらなければいけない。そのためには、パラメータ q を導入して $z_j = q^{j-1}, j=1, 2, \dots, t$, とおき、 $q \rightarrow 1$ の極限をとってやれば良い。実際、ヴァンデルモンドの行列式の公式を用いると

$$\begin{aligned} s_{\tilde{L}}(1, q, q^2, \dots, q^{t-1}) &= \frac{\det_{1 \leq i, j \leq t} ((q^{\tilde{L}_i^{t-1}-i})^{t-i})}{\det_{1 \leq i, j \leq t} ((q^{t-j})^{t-i})} \\ &= \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq t} (q^{\tilde{L}_i^{t-1}-i} - q^{\tilde{L}_j^{t-1}-j})}{\prod_{1 \leq i < j \leq t} (q^{t-i} - q^{t-j})} = q^{\sum_{i=1}^{t-1} (j-1)\tilde{\lambda}_i} \prod_{1 \leq i < j \leq t} \frac{q^{\tilde{L}_i - \tilde{L}_j + j - i} - 1}{q^{j-i} - 1} \end{aligned}$$

と式変形出来るので、ロピタルの定理を用いると

$$N_{N,t}(\mathbf{L}) = \lim_{q \rightarrow 1} s_{\tilde{L}}(1, q, q^2, \dots, q^{t-1}) = \prod_{1 \leq i < j \leq t} \frac{\tilde{L}_i - \tilde{L}_j + j - i}{j - i} \quad (3.5)$$

と求められる。

4 MacMahon の予想, Bender-Knuth の予想と Macdonald の等式

取り得る終配置 L についての和 (1.4) は, (3.5) を (2.4) の条件の下で \tilde{L} について和をとったものに等しい, この和が次式で与えられるという予想が論文 [1] に書かれている。

$$\sum_{\tilde{L}: N \geq \tilde{L}_1 \geq \tilde{L}_2 \geq \dots \geq \tilde{L}_t \geq 0} \prod_{1 \leq i < j \leq t} \frac{\tilde{L}_i - \tilde{L}_j + j - i}{j - i} = \prod_{1 \leq i < j \leq t} \frac{N + i + j - 1}{i + j - 1}. \quad (4.1)$$

この等式は, 次の 2 つの等式のいずれからも, その $q \rightarrow 1$ の極限をとることによって導かれる。

$$\begin{aligned} & \sum_{\lambda: N \geq \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_t \geq 0} s_\lambda(q^{(2t-1)/2}, q^{(2t-3)/2}, \dots, q^{1/2}) \\ &= \prod_{i=1}^t \frac{1 - q^{(N+2i-1)/2}}{1 - q^{(2i-1)/2}} \prod_{1 \leq j < k \leq t} \frac{1 - q^{N+j+k-1}}{1 - q^{j+k-1}}, \\ & \sum_{\lambda: N \geq \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_t \geq 0} s_\lambda(1, q, q^2, \dots, q^{t-1}) = \prod_{1 \leq i < j \leq t} \frac{1 - q^{N+i+j-1}}{1 - q^{i+j-1}}. \end{aligned}$$

上は MacMahon の予想, 下は Bender-Knuth の予想 [3], [11] とよばれているが, ともにすでに証明されている。というのは, 両者とも Macdonald の対称関数の教科書 [26] に書かれている等式

$$\sum_{\lambda: N \geq \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_t \geq 0} s_\lambda(z_1, z_2, \dots, z_t) = \frac{\det(z_i^{j-1} - z_i^{N+2t-j})_{1 \leq i, j \leq t}}{\det(z_i^{j-1} - z_i^{2t-j})_{1 \leq i, j \leq t}} \quad (4.2)$$

の特殊形に過ぎないからである。この Macdonald の等式の証明方法はいくつも知られているようであるが (論文 [23] の引用文献を参照), ちょうど 3 節で示した (3.4) の表現の証明のように, 行列式の定義やその基本変形といった初等的な方法のみを使った証明が Bressoud [4] によって与えられている。他方, 永尾と Forrester は, ランダム行列理論の直交多項式の手法を応用して, (4.2) などを経由せずに (4.1) を直接証明することに成功している [28]。

5 Karlin-McGregor の行列式

シューア関数 (2.5) は, $\tau=1, 2, \dots, t$ に対してそれぞれ, 時刻 $\tau-1$ と時刻 τ の間に左移動した経路に重み z_τ をかけ合わせて得られる重み付き経路の和である。このように重みが付けられている場合に, 時刻 $t=0$ での始点 x と時刻 t での終点 y を固定した経路の和はグリーン関数とよばれる。これを $G(t, y|x)$ と書くことにする。時間 t の間に x から y へ至る経路はいずれも $\{t - (y - x)\}/2$ 回左移動するので, この回数を L と書くと, その重みは $z_{i_1} z_{i_2} \dots z_{i_L}$ という L 次の単項式である。ただし, $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_L \leq t$ である。 z_{i_1}, \dots, z_{i_L} の

このような L 次の単項式すべての和を $e_L(z_1, \dots, z_L)$ と記すと、これは次の展開式の係数として与えられることが容易に分かるであろう。

$$\prod_{i=1}^L (1 + z_i \xi) = \sum_{L=0}^L e_L(z_1, \dots, z_L) \xi^L.$$

これは z_1, \dots, z_L の基本対称多項式とよばれる対称関数である[9]。すなわち、 $L = \{t - (x - y)\}/2$ としたとき

$$G(t, y|x) = e_L(z_1, \dots, z_L) \quad (5.1)$$

である。

次に、それぞれ $x_i(0)$ を出発点とする N 本の重み付き経路 $i=1, 2, \dots, N$ が、時間 t の間にそれぞれ L_i 回ずつ左移動するが、互いに衝突することはない場合を考えよう。このような非衝突条件を課した場合の N 本の経路の重み付き和を N 体非衝突グリーン関数とよぶことにすると、 $s_L(\mathbf{z})$ はまさに、 $x_i(0) = 2(i-1)$ の場合の N 体非衝突グリーン関数になっている。

一般に、 N 体非衝突グリーン関数は 1 本の経路のグリーン関数を成分を持つ行列の行列式 $\det_{1 \leq i, j \leq N} (G(t, x_j(t)|x_i(0)))$ で与えられることを証明することが出来る。この行列式表現の重要性は、Karlin-McGregor[15], [16]をはじめとして、繰り返し論文で議論されてきている[24], [8], [10], [33]。 $x_i(0) = 2(i-1)$ として(5.1)を用いると、シューア関数(2.5)に対して、

$$s_L(\mathbf{z}) = \det_{1 \leq i, j \leq N} (e_{L_j + i - j}(z_1, \dots, z_L)) \quad (5.2)$$

という、(3.4)とは別の行列式表現を与えることになる。これは Jacobi-Trudi の公式とよばれる[9]。

前述の(3.4)とは違って、(5.2)では $\mathbf{z} = \mathbf{1}$ と置くことが出来る。その結果、

$$N_{N,t}(\mathbf{L}) = \det_{1 \leq i, j \leq N} \left(\binom{t}{L_j + i - j} \right) \quad (5.3)$$

という表式が得られることになる。これを、非衝突条件を課すことなく、まったく独立に乱歩する N 粒子系に対する表式(1.1)と比較することは興味深い。非衝突条件からくる制限は、(5.3)では行列の非対角項間の「干渉効果」として表されるのである。

6 連続極限とランダム行列の固有値分布

$\mathbf{z} = \mathbf{1}$ のときの乱歩の 1 体グリーン関数 $G(t, y|x)$ を 2^t で割って規格化したものを $F(t, y|x)$ と書くことにする：

$$F(t, y|x) = \frac{1}{2^t} \binom{t}{\{t - (y - x)\}/2}.$$

いま $K > 0$ として、実数 x に対して $\phi_K(x) = 2[Kx/2]$ とする。ただし、ガウスの記号 $[a]$ は a を超えない最大の整数を表す。スターリングの公式より

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \left(\frac{K}{2} \right) F(\phi_{K^2}(t), \phi_K(y) | \phi_K(x)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-(y-x)^2/2t} \equiv f(t, y|x) \quad (6.1)$$

が得られる。これは拡散係数 $D=1$ の拡散方程式

$$\frac{\partial}{\partial t} f(t, y|x) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(t, y|x)$$

を初期条件 $f(0, y|x) = \delta(y-x)$ の下で解く熱核であるので、 F から f を導く上記の連続極限は、特に拡散スケーリング極限とよばれる。

同様に、非衝突乱歩の N 体グリーン関数を 2^{Nt} で割って規格化したものを

$$F_N(t, \mathbf{y}|\mathbf{x}) = \frac{1}{2^{Nt}} \det_{1 \leq i, j \leq N} \left(\left(\frac{t}{\{t - (y_j - x_i)\}/2} \right) \right)$$

とする。 N 次元ベクトル \mathbf{x} に対して、 $\phi_K(\mathbf{x}) = (\phi_K(x_1), \dots, \phi_K(x_N))$ と書くことにすると、この拡散スケーリング極限は

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \left(\frac{K}{2} \right)^N F_N(\phi_{K^2}(t), \phi_K(\mathbf{y}) | \phi_K(\mathbf{x})) = \det_{1 \leq i, j \leq N} (f(t, y_j|x_i)) \equiv f_N(t, \mathbf{y}|\mathbf{x})$$

となることが分かる。この連続極限において(1.5)の $P_{N,t}$ に対応する量として

$$\mathcal{N}_N(t, \mathbf{x}) = \int_{-\infty < y_1 < y_2 < \dots < y_N < \infty} d\mathbf{y} f_N(t, \mathbf{y}|\mathbf{x})$$

を定義することにする。実際にこれは、 $x_1 < x_2 < \dots < x_N$ を満たす N 点 x_1, x_2, \dots, x_N から出発した N 個のブラウン粒子が、1次元上で時間 t の間ずっと非衝突である確率である[19], [20]。 N 次元ベクトル $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ の成分の差積を $h_N(\mathbf{x}) = \prod_{1 \leq i < j \leq N} (x_j - x_i)$ と書くことにする。 $f_N(t, \mathbf{y}|\mathbf{x})$ が h_N とシューア関数の積を使って表せることと(3.5)を用いると、 $|\mathbf{x}|/\sqrt{t} \rightarrow 0$ で

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_N(t, \mathbf{x}) &= c_N t^{-N(N-1)/4} h_N \left(\frac{\mathbf{x}}{\sqrt{t}} \right) \times \int_{-\infty < y_1 < y_2 < \dots < y_N < \infty} d\mathbf{y} h_N(\mathbf{y}) e^{-|\mathbf{y}|^2/2t} \\ &\times \left\{ 1 + \mathcal{O} \left(\frac{|\mathbf{x}|}{\sqrt{t}} \right) \right\} \end{aligned} \quad (6.2)$$

であることが導ける[19], [20]。ただし、 c_N は N のみに依存する係数である。

この表式の被積分関数 $h_N(\mathbf{y}) e^{-|\mathbf{y}|^2/2t}$ は、分散が t であるガウス型直交アンサンブル(GOE)分布に従って成分がランダムに分布する $N \times N$ 実対称行列の、固有値 $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_N)$ (ただし、 $y_1 < y_2 < \dots < y_N$ となるように並べる)の確率密度関数に比例する[27]。 (6.2)の積分で $\mathbf{y}/\sqrt{t} = \mathbf{u}$ と変数変換して、Selberg積分[31]から導かれる次の定積分[25], [27]

$$\int_{-\infty < u_1 < u_2 < \dots < u_N < \infty} d\mathbf{u} h_N(\mathbf{u}) e^{-|\mathbf{u}|^2/2} = (2\pi)^{N/2} \prod_{i=1}^N \frac{\Gamma(i/2+1)}{\Gamma(3/2)}$$

を用いると($\Gamma(\zeta)$ はガンマ関数)、 $|\mathbf{x}|/\sqrt{t} \rightarrow 0$ での漸近展開として、(1.7)の指数を持つ冪乗

$$\mathcal{N}_N(t, \mathbf{x}) \sim t^{-\psi_N} h_N(\mathbf{x}) \quad (6.3)$$

が得られる。このように、非衝突乱歩系の連続極限はランダム行列の固有値分布と関係がつくので、非衝突確率 $P_{N,t}$ の $t \rightarrow \infty$ での漸近的な振舞い(1.6)をランダム行列理論を用いて導くことが出来るのである。

7 おわりに

本稿では、非衝突乱歩系の粒子の空間分布が、シューア関数という対称関数を通じて、ランダム行列の固有値分布と関係することが分かったところまでを簡単に解説してみた。第1節から第5節までは、対称関数の知識を前提とすることなく、非衝突乱歩系の基本的な性質と初等的な計算を用いて、シューア関数の3つの異なる表現(2.5), (3.4), (5.2)の等価性を導いてみせた。ここでの論法は、筆者が2001年夏に半年間滞在したロンドン大での David Arrowsmith(Queen Mary 校)と John Essam(Royal Holloway 校)との議論に基づいている。第6節は、その年の秋にオクスフォード大で始まった種村秀紀氏(千葉大理学部)との共同研究の紹介も兼ねた。この続きは、我々の論文[17]~[22], [29]を見ていただきたい。また、vicious walker 模型に対する繰り込み群による考察は論文[6]を、Tracy-Widom 分布やパンレベ方程式との関係は論文[2], [13]を参照のこと。本稿を書く機会を与えて下さった今野紀雄氏(横浜国大工学部)と高橋大輔氏(早稲田大理工学部)に深く感謝する。

[参考文献]

- [1] Arrowsmith, D. K., Mason, P., and Essam, J. W., Vicious walkers, flows and directed percolation, *Physica, A* 177(1991), 267-272.
- [2] Baik, J., Random vicious walks and random matrices. *Commun. Pure Appl. Math.*, 53 (2000), 1385-1410.
- [3] Bender, E. A., and Knuth, D. E., Enumeration of plane partitions, *J. Combin. Theory, Ser. A* 13(1972), 40-54.
- [4] Bressoud, D. M., Elementary proof of MacMahon's conjecture, *J. Alg. Combin.*, 7 (1998), 253-257.
- [5] Cardy, J., and Colaiori, F., Directed percolation and generalized friendly random walkers, *Phys. Rev. Lett.*, 82(1999), 2232-2235.
- [6] Cardy, J., and Katori, M., Families of vicious walkers, *J. Phys. A : Math. Gen.*, 36 (2003), 609-629.
- [7] Essam, J. W., and Guttmann, A. J., Vicious walkers and directed polymer networks in general dimensions. *Phys. Rev., E* 52(1992), 5849-5862.
- [8] Fisher, M. E., Walks, walls, wetting, and melting, *J. Stat. Phys.*, 34(1984), 667-729.
- [9] Fulton, W., *Young Tableaux, with Applications to Representation Theory and Geometry*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997.
- [10] Gessel, I. M., and Viennot, G., Binomial determinants, paths, and hook length formulae, *Adv. In Math.*, 58(1985), 300-321.
- [11] Gordon, B., A proof of the Bender-Knuth conjecture. *Pacific J. Math.*, 108(1983), 99-113.
- [12] Guttmann, A. J., Owczarek, A. L., and Viennot, X. G., Vicious walkers and Young tableaux I : Without walls, *J. Phys. A : Math. Gen.*, 31(1998), 8123-8135.
- [13] Hikami, K., and Imamura, T., Vicious walkers and hook Young tableaux, *J. Phys. A : Math. Gen.*, 36(2003), 3033-3048.
- [14] Inui, N., and Katori, M., Fermi partition functions of friendly walkers and pair connectedness of directed percolation, *J. Phys. Soc. Jpn.*, 70(2001), 1-4.

- [15] Karlin, S., and McGregor, L., Coincidence properties of birth and death processes, *Pacific J.*, 9(1959), 1109-1140.
- [16] Karlin, S., and McGregor, L., Coincidence probabilities, *Pacific J.*, 9(1959), 1141-1164.
- [17] Katori, M., and Komatsuda, N., Moments of vicious walkers and Möbius graph expansions, *Phys. Rev.*, E 67(2003), 051110.
- [18] Katori, M., Nagao, T., and Tanemura, H., Infinite systems of non-colliding Brownian particles, to be published in *Adv. Stud. Pure Math.*, "Stochastic Analysis on Large Scale Interacting Systems", Mathematical Society of Japan, 2003; arXiv. math. PR/0301143.
- [19] Katori, M., and Tanemura, H., Scaling limit of vicious walkers and two-matrix model, *Phys. Rev.*, E 66(2002), 011105.
- [20] Katori, M., and Tanemura, H., Functional central limit theorems for vicious walkers, to appear in *Stoch. Stoch. Rep.*; arXiv. math. PR/0203286.
- [21] Katori, M., and Tanemura, H., Noncolliding Brownian motions and Harish-Chandra formula, *Elect. Comm. in Prob.*, 8(2003), 112-121.
- [22] Katori, M., Tanemura, H., Nagao, T., and Komatsuda, N., Vicious walk with a wall, noncolliding meanders, and chiral and Bogoliubov-deGennes random matrices, *Phys. Rev.*, E 68(2003), 021112.
- [23] Krattenthaler, C., Guttmann, A. J., and Viennot, X. G., Vicious walkers, friendly walkers and Young tableaux : II. With a wall, *J. Phys. A : Math. Gen.*, 33(2000), 8835-8866.
- [24] Lindström, B., On the vector representations of induced matroids, *Bull. London Math. Soc.*, 5(1973), 85-90.
- [25] Macdonald, I. G., Some conjectures for root systems, *SIAM J. Math. Anal.*, 13,(1982), 988-1007.
- [26] Macdonald, I. G., *Symmetric Functions and Hall Polynomials*, second edition, Oxford Univ. Press, London, 1995.
- [27] Mehta, M. L., *Random Matrices*, second edition, Academic Press, London, 1991.
- [28] Nagao, T., and Forrester, P. J., Vicious random walkers and a discretization of Gaussian random matrix ensembles., *Nucl. Phys.*, B 620(2002), 551-565.
- [29] Nagao, T., Katori, M., and Tanemura, H., Dynamical correlations among vicious random walkers, *Phys. Lett.*, A 307(2003), 29-35.
- [30] Proctor, R. A., Equivalence of the combinatorial and the classical definitions of Schur functions, *J. Combin. Theory, Ser. A* 51(1989), 135-137.
- [31] Selberg, A., Bemærkninger om et multiplert integral, *Norsk Matematisk Tidsskrift*, 26 (1944), 71-78.
- [32] Stanley, R. P., *Enumerative Combinatorics*, vol. 2, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999.
- [33] Stembridge, J. R., Nonintersecting paths, pfaffians, and the plane partitions, *Adv. in Math.*, 83(1990), 96-131.
- [34] Tsuchiya, T., and Katori, M., Chiral Potts models, friendly walkers and directed percolation problem, *J. Phys. Soc. Jpn.*, 67(1998), 1655-1666.

[Abstract]

We consider the vicious walker model, which was introduced by Michael Fisher in his Boltzmann medal lecture in 1983 as a mathematical model of wetting and melting phenomena. It is a system of particles performing noncolliding random walk in one dimension. Using nonintersecting property of the paths of vicious walkers and by elementary calculus of determinants, we show that the Green function of the system is equal to the Schur function, which plays an important role in the representation theory of symmetric group, and its two kinds of determinantal expressions are derived. MacMahon conjecture, Bender-Knuth conjecture and Macdonald equality for the summations of Schur functions are discussed from the viewpoint of vicious walker model. By taking the diffusion scaling limit of the vicious walker model, a system of noncolliding Brownian particles is constructed and its relation to the distribution of eigenvalues of real symmetric random matrices is clarified.