

時間的に非斉次な非衝突ブラウン運動

香取眞理 (中央大学理工学部) *

種村秀紀 (千葉大学理学部) †

1 次元上の非衝突ブラウン運動について、特に時間的に非斉次な場合に関して解説する。

1 Karlin-McGregor の行列式と非衝突ブラウン運動

1 次元ブラウン運動 $B(t) \in \mathbb{R}, t \in [0, \infty)$ から話を始めることにする。時刻 $s (\geq 0)$ でブラウン粒子が位置 $x \in \mathbb{R}$ にあったとする。時刻 $t (\geq s)$ で区間 $[a, b] \subset \mathbb{R}$ の中に、このブラウン粒子を見出す確率は、遷移確率密度

$$G(t; x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-(x-y)^2/2t}, \quad t \geq 0, x, y \in \mathbb{R}, \quad (1.1)$$

を用いて

$$\text{Prob}\left(B(t) \in [a, b] \mid B(s) = x\right) = \int_a^b G(t-s; x, y) dy$$

で与えられる。遷移確率密度 $G(t; x, y)$ は次の性質をもつ；

$$\lim_{t \rightarrow 0} G(t; x, y) = \delta(x-y), \quad x, y \in \mathbb{R}, \quad (1.2)$$

$$\int_{\mathbb{R}} G(t; x, y) dy = 1, \quad t \in [0, \infty), x \in \mathbb{R}, \quad (1.3)$$

$$\int_{\mathbb{R}} G(t-s; x, y) G(u-t; y, z) dy = G(u-s; x, z), \quad (1.4)$$
$$0 \leq s \leq t \leq u, x, z \in \mathbb{R}.$$

(1.4) は Chapman-Kolmogorov の等式とよばれる。 $G(t; \cdot, y)$ は、熱伝導方程式 (拡散方程式)

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, y) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} u(t, y)$$

の解のうち上の 3 つの性質を満たすものであり、熱核とよばれる。

N 次元ブラウン運動は、各成分 $B_i, 1 \leq i \leq N$ が互いに独立な 1 次元ブラウン運動からなる

$$\mathbf{B}(t) = (B_1(t), B_2(t), \dots, B_N(t)) \in \mathbb{R}^N, \quad t \in [0, \infty)$$

*Electronic mail: katori@phys.chuo-u.ac.jp

†Electronic mail: tanemura@math.s.chiba-u.ac.jp

である． \mathbb{R}^N の部分空間である A_{N-1} 型の Weyl 領域

$$\mathbb{R}_{<}^N = \left\{ \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N : x_1 < x_2 < \dots < x_N \right\} \quad (1.5)$$

を考え，この中の吸収壁ブラウン運動を考える．すなわち， $\mathbb{R}_{<}^N$ 内の 1 点からスタートするが， $\mathbb{R}_{<}^N$ の内壁のいずれかの点に衝突したら，ブラウン粒子は壁に吸収されてプロセスがストップしてしまうものとする． $N = 2$ の場合の模式図を図 1 に示した．

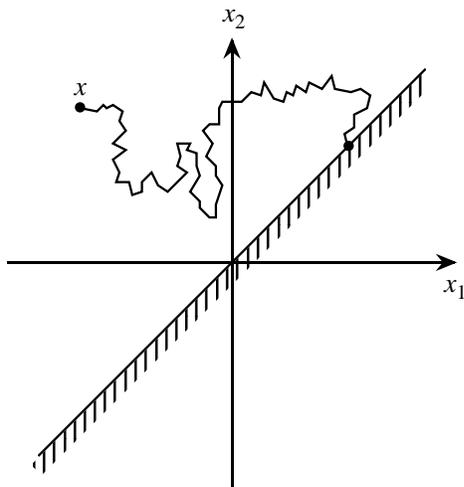


図 1: $\mathbb{R}_{<}^2$ 内の吸収壁ブラウン運動

この $\mathbb{R}_{<}^N$ 内の吸収壁ブラウン運動の (規格化されていない) 遷移密度は，時刻 $s (\geq 0)$ で位置 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_{<}^N$ ，時刻 $t (\geq s)$ で位置 $\mathbf{y} \in \mathbb{R}_{<}^N$ としたとき

$$f_N(t-s; \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \det_{1 \leq i, j \leq N} \left[G_{t-s}(x_i, y_j) \right] \quad (1.6)$$

で与えられる．また，『時刻 0 で $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_{<}^N$ をスタートしたブラウン粒子が時刻 $t \geq 0$ まで $\mathbb{R}_{<}^N$ を出ない確率』を $\mathcal{N}_N(t; \mathbf{x})$ と書くことにすると， $dy = \prod_{i=1}^N dy_i$ として，積分

$$\mathcal{N}_N(t; \mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}_{<}^N} f_N(t; \mathbf{x}, \mathbf{y}) dy, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}_{<}^N, t \geq 0 \quad (1.7)$$

で与えられる．これは『 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_{<}^N$ を初期値とした $\mathbb{R}_{<}^N$ 内の吸収壁ブラウン運動が時間 t でも存続している確率』ともいえるので，このプロセスの生存確率 (survival probability) とよばれることもある．(1.6) は確率論では Karlin-McGregor の公式 [20, 21]，組み合わせ論的表現論では Lindström-Gessel-Viennot の公式とよばれる ([52, 33] およびこれらに引用されている文献を参照)．この公式を，量子力学でフェルミ粒子からなる多体系の波動関数を表す Slater 行列式の確率過程版と思っても良いのかもしれない．

注 1.1. 熱核を成分とする行列式 (1.6) は, $|\mathbf{x}|^2 = \sum_{i=1}^N x_i^2, |\mathbf{y}|^2 = \sum_{i=1}^N y_i^2$ とすると,

$$f_N(t; \mathbf{x}, \mathbf{y}) = (2\pi t)^{-N/2} \exp \left\{ -\frac{|\mathbf{x}|^2 + |\mathbf{y}|^2}{2t} \right\} \det_{1 \leq i, j \leq N} \left[\exp \left\{ \frac{x_i y_j}{t} \right\} \right]$$

と書ける. そこで, $\mathbf{a} = \mathbf{x}/\sqrt{t}, \mathbf{b} = \mathbf{y}/\sqrt{t}$ として, 行列式 $\det_{1 \leq i, j \leq N} [e^{a_i b_j}]$ を考えてみることにする. 長さ $\ell (\leq N)$ の分割 $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_\ell)$ すなわち $\mu_i \in \mathbb{Z}, 1 \leq i \leq \ell, \mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_\ell > 0$ に対して, $\mathbf{z} \in \mathbb{R}_{>}^N$ の Schur 関数

$$s_\mu(\mathbf{z}) = \frac{\det_{1 \leq i, j \leq N} [z_i^{\mu_j + N - j}]}{\det_{1 \leq i, j \leq N} [z_i^{N - j}]} \quad (1.8)$$

を定義する. これは \mathbf{z} の $|\mu| = \sum_{i=1}^{\ell} \mu_i$ 次の対称多項式である (例えば [14] を参照). また, 差積で表される $N \times N$ の Vandermonde の行列式を

$$h_N(\mathbf{z}) = \prod_{1 \leq i < j \leq N} (z_j - z_i) = \det_{1 \leq i, j \leq N} [z_j^{i-1}] \quad (1.9)$$

で表すことにする. Γ をガンマ関数として $\gamma_\mu = 1 / \prod_{i=1}^N \Gamma(\mu_i + N - i + 1)$ とすると,

$$\frac{\det_{1 \leq i, j \leq N} [e^{a_i b_j}]}{h_N(\mathbf{a}) h_N(\mathbf{b})} = \sum_{\mu: \ell(\mu) \leq N} \gamma_\mu s_\mu(\mathbf{a}) s_\mu(\mathbf{b})$$

という展開公式が成り立つことが示せる [28]. ただし和は, 分割 μ のうち長さ $\ell = \ell(\mu)$ が N 以下のものについてとるものとする. $\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^N$ として, 条件 ω が成り立つときは 1, それ以外は 0 の値を与える「条件 ω の指示関数」を $\mathbf{1}_{\{\omega\}}$ と書くことにすると, $s_\mu(\mathbf{0}) = \mathbf{1}_{\{\mu=\mathbf{0}\}}$ であることから,

$$|\mathbf{a}| \rightarrow 0 \quad \text{で} \quad \det_{1 \leq i, j \leq N} [e^{a_i b_j}] = \frac{h_N(\mathbf{a}) h_N(\mathbf{b})}{\prod_{i=1}^N \Gamma(i)} \times \left\{ 1 + \mathcal{O}(|\mathbf{a}|) \right\}$$

であることが分かる. この結果から, $C_1(N) = (2\pi)^{N/2} \prod_{i=1}^N \Gamma(i)$ として

$$\begin{aligned} \frac{|\mathbf{x}|}{\sqrt{t}} \rightarrow 0 \quad \text{で} \\ f_N(t; \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{t^{-N(N+1)/4}}{C_1(N)} h_N \left(\frac{\mathbf{x}}{\sqrt{t}} \right) h_N(\mathbf{y}) \exp \left\{ -\frac{|\mathbf{y}|^2}{2t} \right\} \times \left\{ 1 + \mathcal{O} \left(\frac{|\mathbf{x}|}{\sqrt{t}} \right) \right\} \end{aligned} \quad (1.10)$$

という漸近評価が得られることになる. Selberg 積分の変形 ([35] の p.354 (17.6.7) 式)

$$\int_{\mathbb{R}^N} e^{-a|\mathbf{u}|^2} |h_N(\mathbf{u})|^{2\gamma} d\mathbf{u} = (2\pi)^{N/2} (2a)^{-N(\gamma(N-1)+1)/2} \prod_{i=1}^N \frac{\Gamma(1+i\gamma)}{\Gamma(1+\gamma)}$$

で $\gamma = 1/2, a = 1/2t$ とした場合を用いると, (1.10) より

$$\frac{|\mathbf{x}|}{\sqrt{t}} \rightarrow 0 \quad \text{で} \quad \mathcal{N}_N(t; \mathbf{x}) = \frac{C_2(N)}{C_1(N)} h_N \left(\frac{\mathbf{x}}{\sqrt{t}} \right) \times \left\{ 1 + \mathcal{O} \left(\frac{|\mathbf{x}|}{\sqrt{t}} \right) \right\} \quad (1.11)$$

という評価も得られる. ただしここで, $C_2(N) = 2^{N/2} \prod_{i=1}^N \Gamma(i/2)$ である. 従って \mathbb{R}_{\leq}^N 内の吸収壁ブラウン運動の生存確率は, 一般に

$$|\mathbf{x}| < \infty \quad \text{に対して, } t \rightarrow \infty \quad \text{で} \quad \mathcal{N}_N(t; \mathbf{x}) \sim t^{-\psi_N}$$

のように時刻 t に関して冪関数的に減少し, その冪指数は N の 2 次式

$$\psi_N = \frac{1}{2} \binom{N}{2} = \frac{1}{4} N(N-1)$$

であることが分かる.

正のパラメータ $T > 0$ を導入し, $0 \leq s \leq t \leq T, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}_{\leq}^N$ に対して, 『 N 次元ブラウン粒子が $[0, T]$ の間 \mathbb{R}_{\leq}^N から外へ出ない』という条件の下で, 時刻 s での位置 \mathbf{x} から時刻 t での位置 \mathbf{y} への遷移を考える. 規格化された遷移密度, すなわち遷移確率密度を $g_{N,T}(s, \mathbf{x}; t, \mathbf{y})$ と書くことにすると, これが

$$g_{N,T}(s, \mathbf{x}; t, \mathbf{y}) = \frac{f_N(t-s; \mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathcal{N}_N(T-t; \mathbf{y})}{\mathcal{N}_N(T-s; \mathbf{x})} \quad (1.12)$$

で与えられることは図 2 を眺めると納得できるであろう.

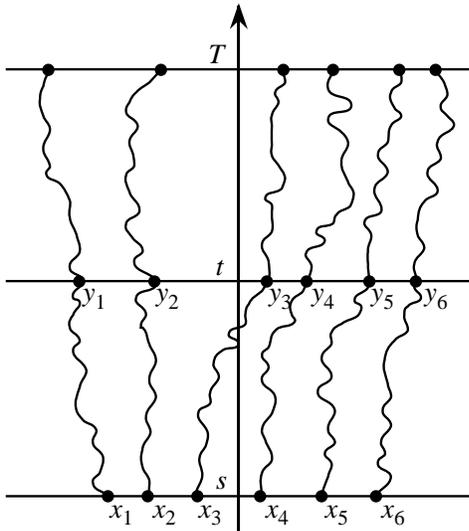


図 2: 時間的に非斉次な非衝突ブラウン運動

この遷移確率密度が，次の性質を満たすことは，1次元ブラウン運動に対する (1.2)-(1.4) と行列式の基本性質より，容易に証明できる．

$$\lim_{t \rightarrow 0} g_{N,T}(s, \mathbf{x}; t, \mathbf{y}) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}_{<}^N, \quad (1.13)$$

$$\int_{\mathbb{R}_{<}^N} g_{N,T}(s, \mathbf{x}; t, \mathbf{y}) d\mathbf{y} = 1, \quad t \in [0, \infty), \mathbf{x} \in \mathbb{R}_{<}^N, \quad (1.14)$$

$$\int_{\mathbb{R}_{<}^N} g_{N,T}(s, \mathbf{x}; t, \mathbf{y}) g_{N,T}(t, \mathbf{y}; u, \mathbf{z}) d\mathbf{y} = g_{N,T}(s, \mathbf{x}; u, \mathbf{z}),$$

$$0 \leq s \leq t \leq u, \mathbf{x}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}_{<}^N. \quad (1.15)$$

ただし， $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \prod_{i=1}^N \delta(x_i - y_i)$ である．(1.13)-(1.15) は，1次元ブラウン運動 $B(t)$ の遷移確率密度の性質 (1.2)-(1.4) に対応しており，この遷移確率密度 $g_{N,T}(s, \mathbf{x}; t, \mathbf{y})$ をもってマルコフ過程が定義される．((1.15) はこの N 次元プロセスに対する Chapman-Kolmogorov の等式である．) これを $\mathbf{X}(t) = (X_1(t), X_2(t), \dots, X_N(t)), t \in [0, T]$ と書くことにする．定義より $\mathbf{X}(t) \in \mathbb{R}_{<}^N, \forall t \in [0, T]$ なので

$$X_1(t) < X_2(t) < \dots < X_N(t), \quad t \in [0, T]$$

が成り立つ．そこで， $i = 1, 2, \dots, N$ に対してそれぞれ $X_i(t)$ が i 番目の粒子の座標を表すとみなすと， $\mathbf{X}(t)$ は時間区間 $[0, T]$ の間互いに衝突することのない，1次元 \mathbb{R} 上の N 個のブラウン粒子からなる系を表す確率過程であると解釈することができる (図 2 を参照)．注意すべき点は， $\mathbf{X}(t)$ の遷移確率密度は (1.12) 式で与えられるように，時間間隔 $t - s$ だけの関数ではなく， $T - t$ や $T - s$ にも依存していることである．これは，粒子の非衝突条件を課した時間が $[0, T]$ という有限時間であるためであり，この確率過程は時間の並進に対して一様ではないことを意味している．そこで我々は $\mathbf{X}(t)$ を $[0, T]$ での時間的に非斉次な非衝突ブラウン運動とよぶことにする [25, 26]．

注 1.2. 確率過程 $\mathbf{X}(t)$ で，非衝突条件を課す時間 T を無限大にする極限を考えることができる．生存確率に対する漸近評価の式 (1.11) を用いると，この極限で遷移確率密度 (1.12) は

$$\begin{aligned} p_N(t - s; \mathbf{x}, \mathbf{y}) &\equiv \lim_{T \rightarrow \infty} g_{N,T}(s, \mathbf{x}; t, \mathbf{y}) \\ &= \frac{1}{h_N(\mathbf{x})} f_N(t - s; \mathbf{x}, \mathbf{y}) h_N(\mathbf{y}), \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}_{<}^N, 0 \leq s \leq t < \infty, \end{aligned} \quad (1.16)$$

となることが示せるので， $T \rightarrow \infty$ の極限でこの確率過程は時間的に斉次となることが分かる． $h_N(\mathbf{x})$ は調和関数であり，(1.16) は $\mathbb{R}_{<}^N$ 内の吸収壁ブラウン運動 f_N の (Doob の意味での) 優調和変換 (h -変換) に他ならない [9]．我々は (1.16)

を遷移確率密度としてもつ確率過程を $\mathbf{Y}(t) = (Y_1(t), Y_2(t), \dots, Y_N(t)), t \in [0, \infty)$ と書き, 時間的に斉次な非衝突ブラウン運動とよぶことにする.

$b_i(\mathbf{x}) = (\partial/\partial x_i) \ln h_N(\mathbf{x}), i = 1, 2, \dots, N$ としたとき, p_N が次の形の Kolmogorov の後退方程式 (Fokker-Planck の後退方程式) を満たすことは容易に確かめることができる,

$$\frac{\partial}{\partial t} p_N(t; \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2} \Delta_{\mathbf{x}} p_N(t; \mathbf{x}, \mathbf{y}) + \mathbf{b} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} p_N(t; \mathbf{x}, \mathbf{y}). \quad (1.17)$$

$b_i(\mathbf{x}) = \sum_{j:1 \leq j \leq N, j \neq i} (x_i - x_j)^{-1}$ であるから, (1.17) に対応して $\mathbf{Y}(t)$ が次の確率微分方程式を満たすことが導かれる,

$$dY_i(t) = dB_i(t) + \sum_{j:1 \leq j \leq N, j \neq i} \frac{1}{Y_i(t) - Y_j(t)} dt, \quad t \in [0, \infty), i = 1, 2, \dots, N. \quad (1.18)$$

ただし, $B_i(t), i = 1, 2, \dots, N$ は N 個の互いに独立な 1 次元ブラウン運動である. 従ってこの N 粒子確率過程 $\mathbf{Y}(t)$ は, すべての粒子対の間に粒子間距離に反比例した大きさをもって働く斥力をドリフト項として持つ拡散過程である. これは Dyson のブラウン運動模型のパラメター $\beta = 2$ の場合と等しい [10] (後述の注 2.2 を参照). 従って, $\mathbf{Y}(t)$ の時刻 t での分布は分散 $\sigma^2 = t$ のガウス型ユニタリ集団 (Gaussian unitary ensemble, GUE) にあるランダム・エルミート行列の固有値分布と等しいはずである [35]. ただしここで注意すべきことは, 通常の GUE の理論では, 行列成分の実部も虚部も共に平均が零であり, 従って固有値の平均も零の場合を考えるということである. これは (1.18) の拡散過程で初期値を $Y(0) = \mathbf{0} \equiv (0, 0, \dots, 0)$ とした特別な場合に対応する. 実際, f_N に対する漸近評価式 (1.10) を用いて (1.16) で $s = 0$ として $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}$ の極限をとると

$$\begin{aligned} p_N(t; \mathbf{0}, \mathbf{y}) &\equiv \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}} p_N(t; \mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ &= \frac{t^{-N^2/2}}{C_1(N)} \exp \left\{ -\frac{|\mathbf{y}|^2}{2t} \right\} h_N(\mathbf{y})^2, \end{aligned} \quad (1.19)$$

が得られるが, $p_N(\sigma^2; \mathbf{0}, \mathbf{y})$ は平均が零, 分散 σ^2 の GUE の固有値分布関数に等しい.

この $\mathbf{Y}(t)$ のような時間的に斉次な非衝突拡散過程と行列値過程との関係はすでに, Bru[6, 7], Grabiner[15], König and O'Connell[32] などによって研究されている. 反面, この報告のメインテーマである時間的に非斉次な非衝突拡散過程と行列値過程の研究はいままでなかった.

時間的に非斉次な非衝突ブラウン運動 $\mathbf{X}(t)$ に対する確率微分方程式は, (1.12) に対応して

$$dX_i(t) = dB_i(t) + b_i^T(t, \mathbf{X}(t)) dt, \quad t \in [0, T], i = 1, 2, \dots, N \quad (1.20)$$

という形になるが，粒子間の相互作用を表す肝心のドリフト項は， \mathbb{R}^N 内の吸収壁ブラウン運動の生存確率 (1.7) を用いて

$$b_i^T(t, \mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial x_i} \ln \mathcal{N}_N(T - t, \mathbf{x}), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (1.21)$$

と書けることしか分からず，これから直接的に得られる情報は少ない．

上記の注 1.2 では，時間的に斉次な非衝突ブラウン運動 $Y(t)$ で特に初期状態を 0 とすると，GUE のランダム行列の固有値と分布が等しくなることを述べた．我々は，時間的に非斉次な非衝突ブラウン運動 $X(t)$ でも，図 3 の模式図のようにこの初期値を課すことにすると，ランダム行列の知識を使うことが可能になって，この拡散過程の振る舞いを解析できるのではないかと考えた．

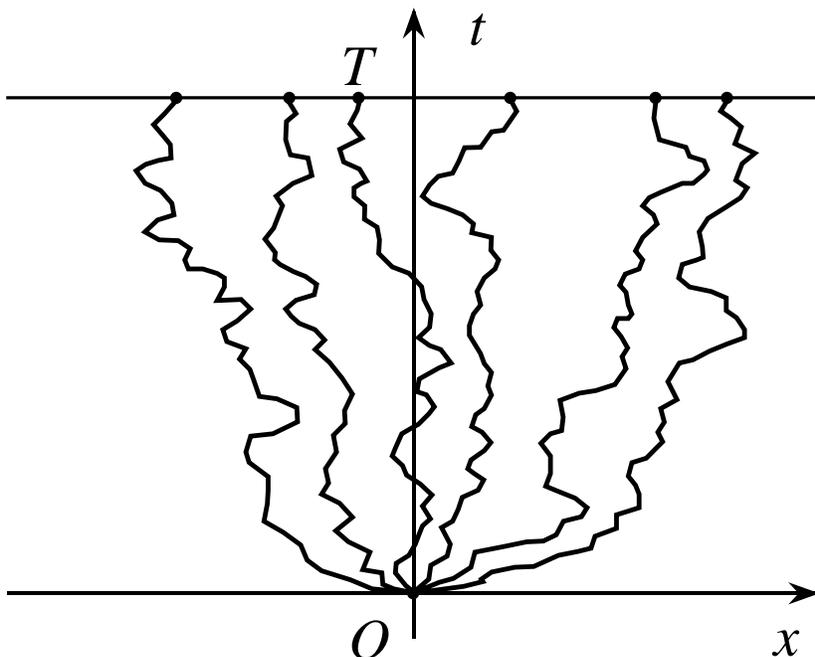


図 3: 初期状態 0 からスタートした非衝突ブラウン運動 $X(t), t \in (0, T]$.

(1.12) において $s = 0$ として，再び漸近評価の式 (1.10) と (1.11) を用いると， $\mathbf{x} \rightarrow 0$ の極限で，

$$\begin{aligned} g_{N,T}(0, \mathbf{0}; t, \mathbf{y}) &\equiv \lim_{\mathbf{x} \rightarrow 0} g_{N,T}(0, \mathbf{x}; t, \mathbf{y}) \\ &= \frac{T^{N(N-1)/4} t^{-N^2/2}}{C_2(N)} \exp \left\{ -\frac{|\mathbf{y}|^2}{2t} \right\} h_N(\mathbf{y}) \mathcal{N}_N(T - t; \mathbf{y}) \quad (1.22) \end{aligned}$$

となることが示せる． $M \in \{0, 1, 2, \dots\}$ として，時間区間 $[0, T]$ を $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_M < t_{M+1} = T$ と $M + 1$ 個に区分して， $M + 1$ 時刻の多時刻遷移確率

$P^{\mathbf{x}^{(0)}}\left(\mathbf{X}(t_1) \in d\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{X}(t_2) \in d\mathbf{x}^{(2)}, \dots, \mathbf{X}(t_{M+1}) \in d\mathbf{x}^{(M+1)}\right)$ を考えることにする．ただし，初期値を $\mathbf{X}(t_0) = \mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}_{<}^N$ とした．マルコフ性より，これは確率遷移密度 (1.12) の積

$$\begin{aligned} P^{\mathbf{x}^{(0)}}\left(\mathbf{X}(t_1) \in d\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{X}(t_2) \in d\mathbf{x}^{(2)}, \dots, \mathbf{X}(t_{M+1}) \in d\mathbf{x}^{(M+1)}\right) \\ = \prod_{i=0}^M g_{N,T}(t_i, \mathbf{x}^{(i)}; t_{i+1}, \mathbf{x}^{(i+1)}) d\mathbf{x}^{(i+1)} \end{aligned} \quad (1.23)$$

で与えられる．同様に時間的に斉次なプロセス $\mathbf{Y}(t)$ に対しては， $\mathbf{Y}(0) = \mathbf{y}^{(0)} \in \mathbb{R}_{<}^N$ とすると

$$\begin{aligned} P^{\mathbf{y}^{(0)}}\left(\mathbf{Y}(t_1) \in d\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{Y}(t_2) \in d\mathbf{x}^{(2)}, \dots, \mathbf{Y}(t_{M+1}) \in d\mathbf{x}^{(M+1)}\right) \\ = \prod_{i=0}^M p_N(t_{i+1} - t_i; \mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{x}^{(i+1)}) d\mathbf{x}^{(i+1)} \end{aligned} \quad (1.24)$$

となる．特に $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{y}^{(0)} \rightarrow \mathbf{0}$ として (1.19) と (1.22) を用いると，

$$\begin{aligned} \prod_{i=0}^M g_{N,T}(t_i, \mathbf{x}^{(i)}; t_{i+1}, \mathbf{x}^{(i+1)}) \\ = T^{N(N-1)/4} \frac{C_1(N)}{C_2(N)} \prod_{i=0}^M p_N(t_{i+1} - t_i; \mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{x}^{(i+1)}) \frac{1}{h_N(\mathbf{x}^{(M+1)})} \end{aligned}$$

という関係式が導かれる．ただしここで， $\mathcal{N}_N(T - t_{M+1}; \mathbf{x}) = \mathcal{N}_N(0; \mathbf{x}) = 1$ を用いた．これは，任意の $M \in \{0, 1, 2, \dots\}$ に対して成り立つので， $\mathbf{X}(0) = \mathbf{Y}(0) = \mathbf{0}$ の初期条件に対して， $\mathbf{X}(t)$ と $\mathbf{Y}(t)$ の道の空間 (path space), $\omega \in \mathbb{R}_{<}^N \times (0, T]$ ，での確率分布をそれぞれ $P^0(\mathbf{X}(\cdot) \in d\omega)$, $P^0(\mathbf{Y}(\cdot) \in d\omega)$ と書くことにすると，

$$\frac{P^0(\mathbf{X}(\cdot) \in d\omega)}{P^0(\mathbf{Y}(\cdot) \in d\omega)} = \frac{C_1(N) T^{N(N-1)/4}}{C_2(N) h_N(\omega(T))} \quad (1.25)$$

という式に纏められる．これは，この 2 つのプロセスは絶対連続であることを意味する．特に $N = 2$ の場合は， $\mathbf{Y}(t) = (Y_1(t), Y_2(t))$ と $\mathbf{X}(t) = (X_1(t), X_2(t))$ という 2 粒子系のあいだの関係になるが，それぞれ 2 粒子間の相対距離に着目してその値の確率過程を考えると，前者は時間的に斉次な 3 次元ベッセル過程[‡]，後者は時間的に非斉次

[‡]一般に d 次元ベッセル過程とは， \mathbb{R}^d でのブラウン運動を考え，ブラウン粒子の位置を d 次元極座標で表したときの動径成分 $r(t)$ の運動を記述するものである．遷移確率密度は $d = 2(\nu + 1)$, $\nu > -1$ と置いて

$$\begin{aligned} G^{(\nu)}(t; x, y) &= \frac{y^{\nu+1}}{x^\nu} \frac{1}{t} e^{-(x^2+y^2)/2t} I_\nu\left(\frac{xy}{t}\right), \quad x > 0, y \geq 0 \text{ のとき,} \\ G^{(\nu)}(t; 0, y) &= \frac{y^{2\nu+1}}{2^\nu \Gamma(\nu+1) t^{\nu+1}} e^{-y^2/2t}, \quad y \geq 0 \text{ のとき} \end{aligned}$$

のように， ν 次の変形ベッセル関数 I_ν で表される [5, 46]．

なブラウン彷徨過程 (Brownian meander) とよばれている確率過程になる．この間の関係ははじめ Imhof によって得られていることから [17], 我々は (1.25) を (N 次元に) 一般化された Imhof 関係式 とよぶことにする [26]. 以下 $X(0) = Y(0) = \mathbf{0}$ を仮定する．この場合は, 時間的に斉次なプロセス $Y(t)$ を何らかの適切な方法で連続変形すれば, 非斉次なプロセス $X(t)$ が実現できることを, この関係式 (1.25) は示唆するのである．

注 1.3. 単位時間間隔が Δt , 単位空間間隔が Δx である離散的な $1+1$ 次元時空を考える．この上に定義されたランダム・ウォークにおいて, $\Delta x/\sqrt{\Delta t} = \text{一定}$ という条件の下で $\Delta x \rightarrow 0, \Delta t \rightarrow 0$ の極限 (これを拡散スケールリング極限という) をとると, ブラウン運動が得られる．これは, de Moivre-Laplace の中心極限定理の応用である．Michael Fisher は, 濡れ現象や融解現象で重要になる界面運動を表す統計力学的モデルとして vicious walker モデルを提案した [12]．これは, ある有限時間の中に非衝突条件を課した N 個のランダム・ウォークからなる系に他ならない．上述の de Moivre-Laplace の中心極限定理の拡張として, vicious walker モデルで拡散スケールリング極限をとると, 非衝突ブラウン運動が得られることが予想される．実際我々は, Schur 関数 (1.8) の特性を用いることにより, vicious walker モデルの極限として, 上記の 2 種の非衝突ブラウン運動 $X(t)$ と $Y(t)$ を導いた [26]. vicious walker モデルについては [22, 29] に解説したので, それらを参照していただきたい．

2 エルミート行列値過程とその固有値過程

初期値 $X(0) = \mathbf{0}$ の場合, 時間的に非斉次な非衝突ブラウン運動 $X(t), t \in (0, T]$, の遷移確率密度は, (1.22) すなわち

$$g_{N,T}(0, \mathbf{0}; t, \mathbf{y}) = \frac{T^{N(N-1)/4} t^{-N^2/2}}{C_2(N)} \exp \left\{ -\frac{|\mathbf{y}|^2}{2t} \right\} h_N(\mathbf{y}) \mathcal{N}_N(T-t; \mathbf{y}) \quad (2.1)$$

で与えられる．生存確率に対する漸近評価式 (1.11) を用いれば, これは

$$0 < t \ll T \text{ で } g_{N,T}(0, \mathbf{0}; t, \mathbf{y}) \simeq \frac{t^{-N^2/2}}{C_1(N)} \exp \left\{ -\frac{|\mathbf{y}|^2}{2t} \right\} h_N(\mathbf{y})^2 \quad (2.2)$$

であることが分かる．また, (2.1) で $t = T$ とすると, $\mathcal{N}_N(0; \mathbf{y}) = 1$ なので

$$g_{N,T}(0, \mathbf{0}; T, \mathbf{y}) = \frac{T^{-N(N+1)/4}}{C_2(N)} \exp \left\{ -\frac{|\mathbf{y}|^2}{2T} \right\} h_N(\mathbf{y}) \quad (2.3)$$

を得る．(2.2) は (1.19), すなわち平均が零, 分散 $\sigma^2 = t$ の GUE の固有値分布関数に等しい．他方, (2.3) は平均が零, 分散 $\sigma^2 = T$ のガウス型直交集団 (Gaussian

orthogonal ensemble, GOE) の固有値分布に等しい [35]. つまり, 我々が扱っている時間的に非斉次なプロセス $X(t)$ は, 特に $X(0) = 0$ のときは, GUE の固有値分布から GOE の固有値分布へ時間的に分布の転移を起こすことが分かるのである. このような GUE から GOE への転移は Pandey と Mehta によって, エルミート・ランダム行列に実対称なランダム行列を結合させた 2 行列モデルにおいて, 結合定数をパラメータとして変化させることによって研究されている [43, 36]. ここでは, この転移を時間的に実現する確率過程を考えていることになる [25].

注 2.1. 差積 $h_N(\mathbf{y})$ は, 非衝突条件の結果, 粒子間に有効的に長距離の斥力が働くことを表している. プロセスの初期段階 $0 < t \ll T$ では, その時点 t から見るとかなり先の未来 T に至るまで非衝突条件が課されるため, 有効的斥力の強さは大きく, $T \rightarrow \infty$ とした場合とほぼ等しい. このため, 未来永劫に亘って非衝突条件が課される時間的に斉次な非衝突ブラウン運動の p_N と同様に $h_N(\mathbf{y})$ の 2 乗の因子が掛かることになる. しかし時刻 t が過ぎるにつれて, それ以降に非衝突条件が課される時間は $T - t$ というように, だんだんと短くなっていくので, 粒子間に有効的に働く斥力の強さは徐々に弱まってくるはずである. そして, プロセスの最終時刻 $t = T$ では, その強さは最小であり, 分布関数は (2.3) 式のように差積の 1 乗に比例するだけになる. 注意すべき点は, しかしながら「分布関数が $h_N(\mathbf{y})^{\beta(t)}$ に比例する形で表されて, その冪指数 $\beta(t)$ が $\beta(t) = 2 \searrow 1$ と時間変化する」というような単純な時間転移ではないということである.

注 2.2. $1 \leq i \leq j \leq N$ に対して, $B_{ij}(t)$ と $\tilde{B}_{ij}(t)$ を互いに独立な, 原点からスタートする 1 次元ブラウン運動とする. そして $1 \leq i, j \leq N$ に対して,

$$s_{ij}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}B_{ij}(t), & i < j \text{ のとき,} \\ B_{ii}(t), & i = j \text{ のとき,} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}B_{ji}(t), & i > j \text{ のとき,} \end{cases} \quad a_{ij}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{B}_{ij}(t), & i < j \text{ のとき,} \\ 0, & i = j \text{ のとき,} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{B}_{ji}(t), & i > j \text{ のとき.} \end{cases} \quad (2.4)$$

とする. $N \times N$ のエルミート行列全体の集合を $\mathcal{H}(N)$ と書くことにして, $\mathcal{H}(N)$ に値をとるエルミート行列値過程を次で定義する[§],

$$\Xi^{\text{GUE}}(t) = \left(s_{ij}(t) + \sqrt{-1}a_{ij}(t) \right)_{1 \leq i, j \leq N}, \quad t \in [0, \infty). \quad (2.5)$$

これは時間的に斉次なプロセスであり, $\mathcal{H}(N)$ の体積要素 $\mathcal{U}(dH)$ に対する確率

[§]本講究録では, 虚数単位 $\sqrt{-1}$ を表すのに i を用いることはしない. i は添字に用いる.

密度関数は，各時刻 $t \in [0, \infty)$ に対して

$$\mu^{\text{GUE}}(H, t) = \frac{t^{-N^2/2}}{C_3(N)} \exp \left\{ -\frac{1}{2t} \text{Tr} H^2 \right\}, \quad H \in \mathcal{H}(N), \quad (2.6)$$

で与えられる．ここで $C_3(N) = 2^{N/2} \pi^{N^2/2}$ である． $\mathbf{U}(N)$ を $N \times N$ のユニタリー行列全体の集合とする．すると，任意の $U \in \mathbf{U}(N)$ に対して，確率 $\mu^{\text{GUE}}(H, t) \mathcal{U}(dH)$ は，ユニタリー変換 $H \rightarrow U^\dagger H U$ のもとで不変である．このため，このエルミート行列値過程を特に GUE 型と呼ぶことにする．固有値 λ が $\mathbb{R}_<^N$ 内にあるとすると，その分布関数は

$$g^{\text{GUE}}(\boldsymbol{\lambda}, t) = \frac{t^{-N^2/2}}{C_1(N)} \exp \left\{ -\frac{|\boldsymbol{\lambda}|^2}{2t} \right\} h_N(\boldsymbol{\lambda})^2 \quad (2.7)$$

である．すでに注 1.2 で述べたように， $g^{\text{GUE}}(\boldsymbol{\lambda}, t) = p_N(t; \mathbf{0}, \boldsymbol{\lambda})$ ， $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}_<^N$ である．次に， $N \times N$ の実対称行列全体の集合を $\mathcal{S}(N)$ と書くことにして， $\mathcal{S}(N)$ に値をとる行列値過程を次で定義する，

$$\Xi^{\text{GOE}}(t) = \left(s_{ij}(t) \right)_{1 \leq i, j \leq N}, \quad t \in [0, \infty). \quad (2.8)$$

これも時間的に斉次なプロセスであり， $\mathcal{S}(N)$ の体積要素 $\mathcal{V}(dA)$ に対する確率密度関数は，各時刻 $t \in [0, \infty)$ に対して

$$\mu^{\text{GOE}}(A, t) = \frac{t^{-N(N+1)/4}}{C_4(N)} \exp \left\{ -\frac{1}{2t} \text{Tr} A^2 \right\}, \quad A \in \mathcal{S}(N), \quad (2.9)$$

で与えられる．ここで $C_4(N) = 2^{N/2} \pi^{N(N+1)/4}$ である． $\mathbf{O}(N)$ を $N \times N$ の実直交行列全体の集合とする．すると，任意の $V \in \mathbf{O}(N)$ に対して，確率 $\mu^{\text{GOE}}(A, t) \mathcal{V}(dA)$ は，実直交変換 $A \rightarrow V^T A V$ のもとで不変である．このため，この行列値過程を特に GOE 型と呼ぶことにする．固有値 λ が $\mathbb{R}_<^N$ 内にあるとすると，その分布関数は

$$g^{\text{GOE}}(\boldsymbol{\lambda}, t) = \frac{t^{-N(N+1)/4}}{C_2(N)} \exp \left\{ -\frac{|\boldsymbol{\lambda}|^2}{2t} \right\} h_N(\boldsymbol{\lambda}) \quad (2.10)$$

である．上述のように， $g^{\text{GOE}}(\boldsymbol{\lambda}, t) = g_{N,T}(0, \mathbf{0}; T, \boldsymbol{\lambda})$ ， $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}_<^N$ である．

一般に $\mathcal{H}(N)$ に値を持つ行列値過程 $\Xi(t)$ ， $t \in (0, \infty]$ が与えられると，

$$U(t)^\dagger \Xi(t) U(t) = \Lambda(t) \equiv \text{diag} \left(\lambda_1(t), \lambda_2(t), \dots, \lambda_N(t) \right) \quad (2.11)$$

というように各時刻で $\Xi(t)$ を対角化する， $\mathbf{U}(N)$ に値を持つ行列値過程の族 $U(t) = (u_{ij}(t))_{1 \leq i, j \leq N}$ があることになる．ここで $U(t)$ は，固有値が $\lambda_1(t) \leq \lambda_2(t) \leq \dots \leq \lambda_N(t)$ ， $t \in [0, \infty)$ というように常に順序つけられるようなものをとる

ことにする．上記の 2 つの例 $\Xi^{\text{GUE}}(t)$ と $\Xi^{\text{GOE}}(t)$ のように， $\Xi(t)$ の確率過程がユニタリ変換不変である場合は，固有値過程 $\lambda(t) = (\lambda_1(t), \lambda_2(t), \dots, \lambda_N(t))$, $t \in [0, \infty)$ は $U(t)$ の取り方には依らずに定まる．実際， $\Xi^{\text{GUE}}(t)$ と $\Xi^{\text{GOE}}(t)$ の固有値過程は

$$d\lambda_i(t) = dB_i(t) + \frac{\beta}{2} \sum_{j:1 \leq j \leq N, j \neq i} \frac{1}{\lambda_i(t) - \lambda_j(t)} dt, \quad 1 \leq i \leq N, \quad t \in [0, \infty), \quad (2.12)$$

において，パラメータ β をそれぞれ $\beta = 2$ と $\beta = 1$ として得られる確率微分方程式を満たすことが示せる [27]．これが注 1.2 で述べた Dyson のブラウン運動模型 [10] である．

上の注 2.2 で GOE 型行列過程 $\Xi^{\text{GOE}}(t)$ の各成分は GUE 型行列過程 $\Xi^{\text{GUE}}(t)$ の各成分の虚部を零としたものであることが分かる．よって， $0 < t \ll T$ のときには，非対角成分の実部と虚部が (零からスタートして) ほぼ同じ大きさを時間発展して行くが， $t \nearrow T$ につれて虚部は再び零になっていくように，エルミート行列値過程をうまく与えてやることが出来れば，その固有値過程として，時間的に非斉次な非衝突ブラウン運動 $X(t)$, $t \in [0, T]$ を実現できるのではないだろうか，という予想が立てられる．我々は，各成分の虚部を，時刻 $t = 0$ で原点をスタートして時刻 $t = T$ で再び原点に戻るブラウン橋 (Brownian bridge) で表せばよいことに気がついた．すなわち， $1 \leq i < j \leq N$ に対して，ブラウン橋 $\beta_{ij}^T(t)$ をそれぞれ

$$\beta_{ij}^T(t) = \tilde{B}_{ij}(t) - \int_0^t \frac{\beta_{ij}^T(s)}{T-s} ds, \quad t \in [0, T] \quad (2.13)$$

を満たすものとして定義する．ここで $\tilde{B}_{ij}(t)$, $1 \leq i < j \leq N$ は原点からスタートする互いに独立な 1 次元ブラウン運動である．そして，(2.4) の $a_{ij}(t)$ の代わりに

$$a_{ij}^T(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} \beta_{ij}^T(t), & i < j \text{ のとき,} \\ 0, & i = j \text{ のとき,} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \beta_{ji}^T(t), & i > j \text{ のとき} \end{cases} \quad (2.14)$$

として，エルミート行列値過程を

$$\Xi^T(t) = \left(s_{ij}(t) + \sqrt{-1} a_{ij}^T(t) \right)_{1 \leq i, j \leq N}, \quad t \in [0, T] \quad (2.15)$$

と定義する．また， $\lambda^T(t) = (\lambda_1^T(t), \lambda_2^T(t), \dots, \lambda_N^T(t))$ を $\lambda_1^T(t) \leq \lambda_2^T(t) \leq \dots \leq \lambda_N^T(t)$ となるように並べた， $\Xi^T(t)$ の固有値からなるプロセスとする．次の定理が成り立つ．

定理 1 [27] $\Xi^T(t), t \in (0, T]$ の固有値過程 $\lambda^T(t), t \in (0, T]$ は時間的に非斉次な拡散過程であり, $\mathbf{X}(0) = \mathbf{0}$ からスタートする時間的に非斉次な非衝突ブラウン運動 $\mathbf{X}(t), t \in (0, T]$ と分布が等しい.

証明は次のような議論による. 注 1.2 と注 2.2 で, (2.5) で与えられたエルミート行列値過程 $\Xi^{\text{GUE}}(t)$ の固有値過程は $\beta = 2$ の Dyson のブラウン運動模型であり, これは時間的に斉次な非衝突ブラウン運動 $\mathbf{Y}(t)$ と分布が等しいことを見た. 他方, $\Xi^T(t)$ の固有値過程 $\lambda^T(t)$ と $\Xi^{\text{GUE}}(t)$ の固有値分布とが, 一般化された Imhof 関係式 (1.25) を満たすことを示すことが出来る. このことより, $\lambda^T(t)$ は $\mathbf{X}(t)$ と分布の意味で等価であることが結論される.

この定理より『0 からスタートした時間的に非斉次な非衝突ブラウン運動』という一つの拡散過程の遷移確率密度に対して, Karlin-McGregor の公式を利用した (1.22) という表示と, エルミート行列値過程 $\Xi^T(t)$ の固有値過程の遷移確率密度という 2 つの表現が与えられたことになる. 後者は, エルミート行列値過程を (2.11) のように固有値の部分 $\Lambda(t)$ とユニタリー行列部分 $U(t)$ に分解して, そのうちのユニタリー部分を積分したもので与えられる. 従って, 定理 1 の系として次の等式が得られることになる.

系 2 [27] dU を空間 $U(N)$ での Haar 測度とし, $\int_{U(N)} dU = 1$ と規格化されているものとする. $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N), \mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_N) \in \mathbb{R}_>^N$ に対して, $\Lambda_{\mathbf{x}} = \text{diag}(x_1, x_2, \dots, x_N), \Lambda_{\mathbf{y}} = \text{diag}(y_1, y_2, \dots, y_N)$ とすると, 任意の $\sigma \in \mathbb{R}$ に対して等式

$$\int_{U(N)} dU \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \text{Tr}(\Lambda_{\mathbf{x}} - U^\dagger \Lambda_{\mathbf{y}} U)^2 \right\} = \frac{C_1(N)\sigma^{N^2}}{h_N(\mathbf{x})h_N(\mathbf{y})} \det_{1 \leq i, j \leq N} \left[G(\sigma^2; x_i, y_j) \right] \quad (2.16)$$

が成立する.

この等式は Harish-Chandra の積分公式 [16] あるいは Itzykson-Zuber の積分公式 [18] とよばれるものである. 上述の定理 1 からの導出は, この公式の確率解析的な導出方法である.

注 2.3. 一般化された Imhof 関係式 (1.25) のところで, $\mathbf{X}(t)$ はブラウン彷徨過程の一般化 (多成分化) にあたると述べた. ところが, ブラウン彷徨過程の 2 乗は, 2 次元ベッセル過程の 2 乗とこれと独立なブラウン橋の 2 乗との和と分布が等しいことが Yor によって示されている [54]. $\Xi^T(t)$ の成分の虚部をブラウン橋にするという発想はここから来ている.

3 多時刻相関関数と特性関数

3.1 定義

非衝突ブラウン運動を考えると、これまでは粒子に順番付けがなされているものとしたが、以下ではこの順番付けをしないことにする。 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathbb{R}_{<}^N$ というように N 成分ベクトルで粒子配置を書くと、ベクトルの何番目の成分であるかという意味で粒子に番号付けがなされていることになる。しかし、この順番付けをなくして $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ というように集合として配置を表すという意味である。一般に $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \bigcup_{\ell=1}^{\infty} \mathbb{R}^{\ell}$ に対して、 $\{x_i\}_{i=1}^n$ を $\{\mathbf{x}\}$ と書くことにする。 \mathfrak{X} を加算個の点の集合で集積点を持たないもの全体の空間とすると、 $\{\mathbf{x}\}$ はこの元であり、非衝突ブラウン運動 $\{\mathbf{X}(t)\}, t \in [0, T]$ は遷移確率密度が次式で与えられる \mathfrak{X} -値拡散過程となる。

$$\mathfrak{g}_{N,T}(s, \{\mathbf{x}\}; t, \{\mathbf{y}\}) = \begin{cases} g_{N,T}(s, \mathbf{x}; t, \mathbf{y}), & 0 < s \leq t \leq T, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}_{<}^N \text{ の場合,} \\ g_{N,T}(0, \mathbf{0}; t, \mathbf{y}), & s = 0, 0 < t \leq T, \{\mathbf{x}\} = \{0\}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}_{<}^N \text{ の場合,} \\ 0, & \text{その他の場合.} \end{cases} \quad (3.1)$$

また、 $M \in \{0, 1, 2, \dots\}$ として、時間区間 $[0, T]$ を $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_M < t_{M+1} = T$ と $M+1$ 個に区分したときの多時刻遷移確率密度は、(1.23) より

$$\mathfrak{g}_{N,T}(t_0, \{\mathbf{x}^{(0)}\}; t_1, \{\mathbf{x}^{(1)}\}; \dots; t_{M+1}, \{\mathbf{x}^{(M+1)}\}) = \prod_{\mu=0}^M \mathfrak{g}_{N,T}(t_{\mu+1}, \{\mathbf{x}^{(\mu+1)}\}; t_{\mu}, \{\mathbf{x}^{(\mu)}\}). \quad (3.2)$$

となる。ここでも初期条件 $\{\mathbf{X}(0)\} = \{0\}$ を課すと、(1.12), (1.22) より、これは

$$\begin{aligned} & \mathfrak{g}_{N,T}(0, \{0\}; t_1, \{\mathbf{x}^{(1)}\}; \dots; t_{M+1}, \{\mathbf{x}^{(M+1)}\}) \quad (3.3) \\ &= \pi^{N/2} \left\{ \prod_{k=1}^N \Gamma(k/2) \right\}^{-1} \left(\frac{T}{t^2} \right)^{N(N-1)/4} h_N(\mathbf{x}^{(1)}) \operatorname{sgn}(h_N(\mathbf{x}^{(M+1)})) \\ & \quad \times \prod_{i=1}^N G(t_1; 0, x_i^{(1)}) \prod_{\mu=1}^M \det_{1 \leq i, j \leq N} \left[G(t_{\mu+1} - t_{\mu}; x_i^{(\mu)}, x_j^{(\mu+1)}) \right] \quad (3.4) \end{aligned}$$

と書けることになる。(順序付けられた) 粒子配置 $\mathbf{x}^{(\mu)} \in \mathbb{R}_{<}^N$, $1 \leq \mu \leq M+1$ が与えられたとき、 $N' = 1, 2, \dots, N$ に対して、 $\mathbf{x}_{N'}^{(\mu)} = (x_1^{(\mu)}, x_2^{(\mu)}, \dots, x_{N'}^{(\mu)})$ と書くことにする。 N 以下の正整数から成る数列 $\{N_{\mu}\}_{\mu=1}^{M+1}$ を指定したとき、非衝突ブラウン運動 $\{\mathbf{X}(t)\}, t \in [0, T]$ の $(t_{\mu}, \{\mathbf{x}_{N_{\mu}}^{(\mu)}\})_{\mu=1}^{M+1}$ での時空相関関数を、

$$\rho_{N,T} \left(t_1, \{\mathbf{x}_{N_1}^{(1)}\}; t_2, \{\mathbf{x}_{N_2}^{(2)}\}; \dots; t_{M+1}, \{\mathbf{x}_{N_{M+1}}^{(M+1)}\} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\prod_{\mu=1}^{M+1} \mathbb{R}^{N-N_\mu}} \prod_{\mu=1}^{M+1} \frac{1}{(N-N_\mu)!} \prod_{i=N_\mu+1}^N dx_i^{(\mu)} \\
&\quad \mathfrak{g}_{N,T} \left(0, \{0\}; t_1, \{\mathbf{x}_N^{(1)}\}; t_2, \{\mathbf{x}_N^{(2)}\}; \dots; t_{M+1}, \{\mathbf{x}_N^{(M+1)}\} \right) \quad (3.5)
\end{aligned}$$

で定義することにする .

$C_0(\mathbb{R})$ をコンパクトな台を持つ連続関数全体の集合とする . $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_{M+1}) \in C_0(\mathbb{R})^{M+1}$ と $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{M+1}) \in \mathbb{R}^{M+1}$ に対して , 非衝突ブラウン運動 $\{\mathbf{X}(t)\}, t \in [0, T]$ に対する多時刻特性関数は

$$\begin{aligned}
\Psi_{N,T}(\mathbf{f}; \boldsymbol{\theta}) &= \mathbf{E}_{N,T} \left[\exp \left\{ \sqrt{-1} \sum_{\mu=1}^{M+1} \theta_\mu \sum_{i_\mu=1}^N f_\mu(X_{i_\mu}(t_\mu)) \right\} \right] \\
&= \int_{\mathbb{R}^{N(M+1)}} \prod_{\mu=1}^{M+1} d\mathbf{x}^{(\mu)} \exp \left\{ \sqrt{-1} \sum_{\mu=1}^{M+1} \theta_\mu \sum_{i_\mu=1}^N f_\mu(X_{i_\mu}(t_\mu)) \right\} \\
&\quad \times \mathfrak{g}_{N,T} \left(0, \{0\}; t_1, \{\mathbf{x}_N^{(1)}\}; \dots; t_{M+1}, \{\mathbf{x}_N^{(M+1)}\} \right) \quad (3.6)
\end{aligned}$$

で定義される .

$$\chi_\mu(x) = e^{\sqrt{-1}\theta_\mu f_\mu(x)} - 1, \quad 1 \leq \mu \leq M+1, \quad (3.7)$$

とおくと ,

$$\begin{aligned}
\Psi_{N,T}(\mathbf{f}; \boldsymbol{\theta}) &= \sum_{N_1=0}^N \sum_{N_2=0}^N \dots \sum_{N_{M+1}=0}^N \int_{\mathbb{R}^{N_1}} d\mathbf{x}_{N_1}^{(1)} \int_{\mathbb{R}^{N_2}} d\mathbf{x}_{N_2}^{(2)} \dots \int_{\mathbb{R}^{N_{M+1}}} d\mathbf{x}_{N_{M+1}}^{(M+1)} \\
&\quad \prod_{\mu=1}^{M+1} \prod_{i_\mu=1}^{N_\mu} \chi_\mu(x_{i_\mu}^{(\mu)}) \rho_{N,T} \left(t_1, \{\mathbf{x}_{N_1}^{(1)}\}; \dots; t_{M+1}, \{\mathbf{x}_{N_{M+1}}^{(M+1)}\} \right). \quad (3.8)
\end{aligned}$$

というように , 多時刻特性関数は時空相関関数で展開されることが分かる .

3.2 フレドホルム Pfaff 多項式

$i = 0, 1, 2, \dots$ に対して , $M_i(x)$ を x の i 次の多項式

$$M_i(x) = \sum_{j=0}^i b_j x^j, \quad \text{ただし } b_i \neq 0 \quad (3.9)$$

とする . 行列式の多重線形性と , 行列式は行列の基本変形で変わらないことから , (1.9) より

$$h_N(\mathbf{x}) = \left\{ \prod_{k=1}^N b_{k-1} \right\}^{-1} \det_{1 \leq i, j \leq N} [M_{i-1}(x_j)]$$

である．このため，積分 $Z_{N,T}[\chi]$ を

$$Z_{N,T}[\chi] = \left(\frac{1}{N!}\right)^{M+1} \int_{\mathbb{R}^{N(M+1)}} \prod_{\mu=1}^{M+1} d\mathbf{x}^{(\mu)} \det_{1 \leq i, j \leq N} \left[M_{i-1}(x_j^{(1)}) G(t_1; 0, x_j^{(1)}) (1 + \chi_1(x_j^{(1)})) \right] \\ \times \prod_{\mu=1}^M \det_{1 \leq i, j \leq N} \left[G(t_{\mu+1} - t_\mu; x_i^{(\mu)}, x_j^{(\mu+1)}) (1 + \chi_{\mu+1}(x_j^{(\mu+1)})) \right] \operatorname{sgn} \left(h_N(\mathbf{x}_N^{(M+1)}) \right) \quad (3.10)$$

と定義しておく．多時刻特性関数は

$$\Psi_{N,T}(\mathbf{f}; \boldsymbol{\theta}) = \frac{Z_{N,T}[\chi]}{Z_{N,T}[0]} \quad (3.11)$$

と書けることになる．ただし， $Z_{N,T}[0]$ は $Z_{N,T}[\chi]$ ですべての μ に対して $\chi_\mu(x) = 0$ としたものである．

2乗可積分な関数 $\phi_i, \bar{\phi}_i, 1 \leq i \leq N$ に対してよく知られている等式

$$\int_{\mathbb{R}_<^N} d\mathbf{x} \det_{1 \leq i, j \leq N} \left[\phi_i(x_j) \right] \det_{1 \leq i, j \leq N} \left[\bar{\phi}_i(x_j) \right] = \det_{1 \leq i, j \leq N} \left[\int_{\mathbb{R}} dx \phi_i(x) \bar{\phi}_j(x) \right]$$

を用いると，(3.10) は次のように書き換えられる．

$$Z_{N,T}[\chi] = \int_{\mathbb{R}_<^N} d\mathbf{y} \det_{1 \leq i, j \leq N} \left[\int_{\mathbb{R}^{M+1}} \prod_{\mu=1}^{M+1} dx^{(\mu)} \left\{ M_{i-1}(x^{(1)}) G(t_1; 0, x^{(1)}) (1 + \chi_1(x^{(1)})) \right\} \right. \\ \left. \times \prod_{\mu=1}^M \left\{ G(t_{\mu+1} - t_\mu; x^{(\mu)}, x^{(\mu+1)}) (1 + \chi_{\mu+1}(x^{(\mu+1)})) \right\} G(T - t_{M+1}; x^{(M+1)}, y_j) \right].$$

ただし，(1.2) より $G(T - t_{M+1}; x, y) = G(0; x, y) = \delta(x - y)$ である． n を正整数とし， $A = (a_{ij})$ を $2n \times 2n$ の歪対称行列とする．行列 A の Pfaff 多項式 (pfaffian) は

$$\operatorname{Pf}(A) = \operatorname{Pf}_{1 \leq i < j \leq 2n} \left[a_{ij} \right] = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)\sigma(2)} a_{\sigma(3)\sigma(4)} \cdots a_{\sigma(2n-1)\sigma(2n)}$$

で定義される．ここで和は， $(1, 2, \dots, 2n)$ の置換 $\sigma \in \mathfrak{S}_{2n}$ のうち， $\sigma(2k-1) < \sigma(2k), k = 1, 2, \dots, n$ を満たすものすべてについてとるものとする．表式を簡単にするため，以後では粒子数 N は偶数とする．可積分関数 $\phi_i, 1 \leq i \leq N$ に対する de Bruijn[8] の公式

$$\int_{\mathbb{R}_<^N} d\mathbf{y} \det_{1 \leq i, j \leq N} \left[\phi_i(y_j) \right] = \operatorname{Pf}_{1 \leq i, j \leq N} \left[\int_{\mathbb{R}} dy \int_{\mathbb{R}} d\tilde{y} \operatorname{sgn}(\tilde{y} - y) \phi_i(y) \phi_j(\tilde{y}) \right] \quad (3.12)$$

と, 一般の $2n \times 2n$ の歪対称行列 A に対して成り立つ等式

$$\{\text{Pf}(A)\}^2 = \det A$$

を用いると,

$$\begin{aligned} \left\{ Z_{N,T}[\chi] \right\}^2 &= \det_{1 \leq i, j \leq N} \left[\int dy \int d\tilde{y} \text{sgn}(\tilde{y} - y) \right. \\ &\quad \times \int_{\mathbb{R}^{M+1}} \prod_{\mu=1}^{M+1} dx^{(\mu)} \left\{ M_{i-1}(x^{(1)}) G(t_1; 0, x^{(1)}) (1 + \chi_1(x^{(1)})) \right\} \\ &\quad \times \prod_{\mu=1}^M \left\{ G(t_{\mu+1} - t_\mu; x^{(\mu)}, x^{(\mu+1)}) (1 + \chi_{\mu+1}(x^{(\mu+1)})) \right\} G(T - t_{M+1}; x^{(M+1)}, y) \\ &\quad \times \int_{\mathbb{R}^{M+1}} \prod_{\mu=1}^{M+1} d\tilde{x}^{(\mu)} \left\{ M_{j-1}(\tilde{x}^{(1)}) G(t_1; 0, \tilde{x}^{(1)}) (1 + \chi_1(\tilde{x}^{(1)})) \right\} \\ &\quad \times \prod_{\mu=1}^M \left\{ G(t_{\mu+1} - t_\mu; \tilde{x}^{(\mu)}, \tilde{x}^{(\mu+1)}) (1 + \chi_{\mu+1}(\tilde{x}^{(\mu+1)})) \right\} G(T - t_{M+1}; \tilde{x}^{(M+1)}, \tilde{y}) \left. \right] \\ &= \det_{1 \leq i, j \leq N} \left[(A_0)_{ij} + (A_1)_{ij} + (A_2)_{ij} + (A_3)_{ij} \right] \end{aligned} \quad (3.13)$$

となる. ここで

$$\begin{aligned} (A_0)_{ij} &= \int dy \int d\tilde{y} \text{sgn}(\tilde{y} - y) \int dx M_{i-1}(x) G(t_1; 0, x) G(T - t_1; x, y) \\ &\quad \times \int d\tilde{x} M_{j-1}(\tilde{x}) G(t_1; 0, \tilde{x}) G(T - t_1; \tilde{x}, \tilde{y}), \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} (A_1)_{ij} &= \sum_{\ell=1}^{M+1} \sum_{1 \leq \mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_\ell \leq M+1} \int dy \int d\tilde{y} \text{sgn}(\tilde{y} - y) \\ &\quad \times \int_{\mathbb{R}^\ell} \prod_{k=1}^{\ell} dx^{(\mu_k)} \int dx M_{i-1}(x) G(t_1; 0, x) G(t_{\mu_1} - t_1; x, x^{(\mu_1)}) \\ &\quad \times \prod_{k=1}^{\ell-1} \left\{ \chi_k(x^{(\mu_k)}) G(t_{\mu_{k+1}} - t_{\mu_k}; x^{(\mu_k)}, x^{(\mu_{k+1})}) \right\} \chi_\ell(x^{(\mu_\ell)}) G(T - t_{\mu_\ell}; x^{(\mu_\ell)}, y) \\ &\quad \times \int d\tilde{x} M_{j-1}(\tilde{x}) G(t_1; 0, \tilde{x}) G(T - t_1; \tilde{x}, \tilde{y}), \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} (A_2)_{ij} &= \sum_{\ell=1}^{M+1} \sum_{1 \leq \mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_\ell \leq M+1} \int dy \int d\tilde{y} \text{sgn}(\tilde{y} - y) \\ &\quad \times \int dx M_{i-1}(x) G(t_1; 0, x) G(T - t_1; x, y), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \int_{\mathbb{R}^\ell} \prod_{k=1}^{\ell} d\tilde{x}^{(\mu_k)} \int d\tilde{x} M_{j-1}(\tilde{x}) G(t_1; 0, \tilde{x}) G(t_{\mu_1} - t_1; \tilde{x}, \tilde{x}^{(\mu_1)}) \\
& \times \prod_{k=1}^{\ell-1} \left\{ \chi_k(\tilde{x}^{(\mu_k)}) G(t_{\mu_{k+1}} - t_{\mu_k}; \tilde{x}^{(\mu_k)}, \tilde{x}^{(\mu_{k+1})}) \right\} \chi_\ell(\tilde{x}^{(\mu_\ell)}) G(T - t_{\mu_\ell}; \tilde{x}^{(\mu_\ell)}, \tilde{y}),
\end{aligned} \tag{3.16}$$

$$\begin{aligned}
(A_3)_{ij} &= \sum_{\ell=1}^{M+1} \sum_{m=1}^{M+1} \sum_{1 \leq \mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_\ell \leq M+1} \sum_{1 \leq \nu_1 < \nu_2 < \dots < \nu_m \leq M+1} \int dy \int d\tilde{y} \operatorname{sgn}(\tilde{y} - y) \\
& \times \int_{\mathbb{R}^\ell} \prod_{k=1}^{\ell} dx^{(\mu_k)} \int dx M_{i-1}(x) G(t_1; 0, x) G(t_{\mu_1} - t_1; x, x^{(\mu_1)}) \\
& \times \prod_{k=1}^{\ell-1} \left\{ \chi_k(x^{(\mu_k)}) G(t_{\mu_{k+1}} - t_{\mu_k}; x^{(\mu_k)}, x^{(\mu_{k+1})}) \right\} \chi_\ell(x^{(\mu_\ell)}) G(T - t_{\mu_\ell}; x^{(\mu_\ell)}, y) \\
& \times \int_{\mathbb{R}^\ell} \prod_{n=1}^m d\tilde{x}^{(\nu_n)} \int d\tilde{x} M_{j-1}(\tilde{x}) G(t_1; 0, \tilde{x}) G(t_{\nu_1} - t_1; \tilde{x}, \tilde{x}^{(\nu_1)}) \\
& \times \prod_{n=1}^{m-1} \left\{ \chi_n(\tilde{x}^{(\nu_n)}) G(t_{\nu_{n+1}} - t_{\nu_n}; \tilde{x}^{(\nu_n)}, \tilde{x}^{(\nu_{n+1})}) \right\} \chi_m(\tilde{x}^{(\nu_m)}) G(T - t_{\nu_m}; \tilde{x}^{(\nu_m)}, \tilde{y})
\end{aligned} \tag{3.17}$$

である。ただし, (1.2)-(1.4) を用いた。

直交基底 $\left\{ |\mu, x\rangle \right\}_{\mu=1,2,\dots,M+1, x \in \mathbb{R}}$ を持つベクトル空間 \mathcal{V} を考える。 $\mu, \nu = 1, 2, \dots, M+1$, $x, y \in \mathbb{R}$ に対して,

$$\langle \mu, x | \nu, y \rangle = \delta_{\mu\nu} \delta(x - y)$$

と規格化されているものとする。演算子 $\hat{J}, \hat{G}, \hat{G}_+, \hat{G}_-, \hat{\chi}$ を, 次を満たすものとして導入する:

$$\begin{aligned}
\langle \mu, x | \hat{J} | \nu, y \rangle &= \mathbf{1}_{\{\mu=\nu=M+1\}} \operatorname{sgn}(y - x), \\
\langle \mu, x | \hat{G} | \nu, y \rangle &= G(|t_\nu - t_\mu|; x, y), \\
\langle \mu, x | \hat{G}_+ | \nu, y \rangle &= G(t_\nu - t_\mu; x, y) \mathbf{1}_{\{\mu < \nu\}} = \langle \nu, y | \hat{G}_- | \mu, x \rangle, \\
\langle \mu, x | \hat{\chi} | \nu, y \rangle &= \chi_\mu(x) \delta_{\mu\nu} \delta(x - y).
\end{aligned} \tag{3.18}$$

そして, $\langle \mu, x | \hat{A} | \nu, y \rangle = A(\mu, x; \nu, y)$, $\langle \mu, x | \hat{B} | \nu, y \rangle = B(\mu, x; \nu, y)$ である演算子 \hat{A}, \hat{B} に対して,

$$\langle \mu, x | \hat{A} | \nu, y \rangle \langle \nu, y | \hat{B} | \rho, z \rangle = \sum_{\nu=1}^{M+1} \int_{\mathbb{R}} dy A(\mu, x; \nu, y) B(\nu, y; \rho, z) = \langle \mu, x | \hat{A} \hat{B} | \rho, z \rangle.$$

と書くことにする。また, ベクトル空間 \mathcal{V} の別の基底 $\{|i\rangle; i = 1, 2, \dots\}$ を考え, 先

の基底との間の変換行列の成分が

$$\langle i|\mu, x\rangle = \langle \mu, x|i\rangle = \int dy M_{i-1}(y)G(t_1; 0, y)G(t_\mu - t_1; y, x), \quad (3.19)$$

$i = 1, 2, \dots, \mu = 1, 2, \dots, M + 1, x \in \mathbb{R}$, で与えられているものとする .

以上のような記法を設定しておく ,

$$\begin{aligned} & \int dy M_{i-1}(y)G(t_1; 0, y)G(t_\mu - t_1; y, x) \\ & + \sum_{m=1}^{\mu-1} \sum_{1 \leq \mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_m < \mu} \int_{\mathbb{R}^m} \prod_{j=1}^m dx^{(\mu_j)} \int dy M_{i-1}(y)G(t_1; 0, y)G(t_{\mu_1} - t_1; y, x^{(\mu_1)}) \\ & \quad \times \prod_{k=1}^{m-1} \left\{ \chi_{\mu_k}(x^{(\mu_k)})G(t_{\mu_{k+1}} - t_{\mu_k}; x^{(\mu_k)}, x^{(\mu_{k+1})}) \right\} \chi_{\mu_m}(x^{(\mu_m)})G(t_\mu - t_{\mu_m}; x^{(\mu_m)}, x), \end{aligned}$$

は ,

$$\begin{aligned} & \langle i|\mu, x\rangle + \sum_{m \geq 1} \langle i|\mu_1, x^{(\mu_1)}\rangle \langle \mu_1, x^{(\mu_1)}|\hat{\chi}\hat{G}_+|\mu_2, x^{(\mu_2)}\rangle \\ & \quad \dots \langle \mu_{m-1}, x^{(\mu_{m-1})}|\hat{\chi}\hat{G}_+|\mu_m, x^{(\mu_m)}\rangle \langle \mu_m, x^{(\mu_m)}|\hat{\chi}\hat{G}_+|\mu, x\rangle \\ & = \langle i|\mu, x\rangle + \sum_{m \geq 1} \langle i|(\hat{\chi}\hat{G}_+)^m|\mu, x\rangle \\ & = \left\langle i \left| \frac{1}{1 - \hat{\chi}\hat{G}_+} \right| \mu, x \right\rangle \end{aligned}$$

というように簡略化して表せることになる . 同様にして , この量は $\left\langle \mu, x \left| \frac{1}{1 - \hat{G}_- \hat{\chi}} \right| i \right\rangle$.

とも書ける .

ここで , 基底 $\{|i\rangle; i = 1, 2, \dots\}$ は一般には正規直交基底ではないものとする . そのため $\langle i|j\rangle \neq \delta_{ij}$ であるが ,

$$\langle i|\hat{\delta}|j\rangle = \langle j|\hat{\delta}|i\rangle = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots \quad (3.20)$$

が成り立つような演算子 $\hat{\delta}$ を考えることにする . また演算子 \hat{A}, \hat{B} に対して , $A_{ij} = \langle i|\hat{A}|j\rangle \equiv \langle i|\mu, x\rangle \langle \mu, x|\hat{A}|\nu, y\rangle \langle \nu, y|j\rangle$, $B_j^{(\mu)}(x) = \langle j|\hat{B}|\mu, x\rangle \equiv \langle j|\nu, y\rangle \langle \nu, y|\hat{B}|\mu, x\rangle$ であるとき ,

$$\langle i|\hat{A}|j\rangle \langle j|\hat{B}|\mu, x\rangle = \sum_{j=1}^{\infty} A_{ij} B_j^{(\mu)}(x)$$

という規約を用いることにする . しかし , 基底 $\{|i\rangle; i = 1, 2, \dots\}$ は一般には完備とは限らないので , これを $\langle i|\hat{A}\hat{B}|\mu, x\rangle$ とは書かないことにする . この基底によって , ν

の演算子 \hat{A} は半無限行列 $A = \left(\langle i|\hat{A}|j\rangle \right)_{i,j=1,2,\dots}$ で表されることになる． \hat{A} を表す行列 A が逆行列を持つとき，演算子 \hat{A}^Δ を，その $\{|i\rangle; i = 1, 2, \dots\}$ での行列表現が A の逆行列であるもの，すなわち

$$\left(\langle i|\hat{A}^\Delta|j\rangle \right)_{i,j=1,2,\dots} = A^{-1} \quad (3.21)$$

として定義することにする．すなわち，

$$\langle i|\hat{A}|j\rangle\langle j|\hat{A}^\Delta|k\rangle = \langle i|\hat{A}^\Delta|j\rangle\langle j|\hat{A}|k\rangle = \langle i|\delta|k\rangle, \quad i, k = 1, 2, \dots$$

である．任意の演算子 \hat{A} に対して，

$$\langle i|\hat{A}|j\rangle\langle j|\hat{A}^\Delta|k\rangle\langle k|\hat{B}|\ell\rangle = \langle i|\hat{B}|\ell\rangle.$$

がすべての $i, \ell = 1, 2, \dots$ と任意の演算子 \hat{B} に対して成り立つはずなので，等式

$$\hat{A}|j\rangle\langle j|\hat{A}^\Delta|k\rangle\langle k| = 1 \quad (3.22)$$

が任意の演算子 \hat{A} に対して成り立つことになる．この等式は後で用いる．

$\{|i\rangle; i = 1, 2, \dots\}$ で張られる空間から， $\{|i\rangle; i = 1, 2, \dots, N\}$ で張られる N 次元部分空間への射影演算子を \mathcal{P}_N と書くことにする．すると

$$\langle i|\mathcal{P}_N|\mu, x\rangle = \langle \mu, x|\mathcal{P}_N|i\rangle = \begin{cases} \langle i|\mu, x\rangle, & 1 \leq i \leq N \text{ の場合,} \\ 0, & \text{その他の場合} \end{cases}$$

である．また一般に演算子 \hat{A} に対して，略記

$$\hat{A}_N = \mathcal{P}_N \hat{A} \mathcal{P}_N$$

を用いることにする．

上述のような規約や略記法を用いると，(3.14)-(3.17) の 4 つの行列の各成分は

$$\begin{aligned} (A_0)_{ij} &= \langle i|\mathcal{P}_N|\mu, x\rangle\langle \mu, x|\hat{J}|\nu, y\rangle\langle \nu, y|\mathcal{P}_N|j\rangle \\ &= \langle i|\hat{J}_N|j\rangle, \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} (A_1)_{ij} &= \langle i|\mathcal{P}_N \frac{1}{1 - \hat{\chi}\hat{G}_+} \hat{\chi}|\mu, x\rangle\langle \mu, x|\hat{G}\hat{J}\mathcal{P}_N|j\rangle \\ &= \langle i|\mathcal{P}_N \hat{\chi} \frac{1}{1 - \hat{G}_+\hat{\chi}} |\mu, x\rangle\langle \mu, x|\hat{G}\hat{J}\mathcal{P}_N|j\rangle \\ &= \langle i| \left(\hat{\chi} \frac{1}{1 - \hat{G}_+\hat{\chi}} \hat{G}\hat{J} \right)_N |j\rangle, \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned}
(A_2)_{ij} &= \langle i | \mathcal{P}_N \hat{J} \hat{G} | \mu, x \rangle \langle \mu, x | \hat{\chi} \frac{1}{1 - \hat{G}_- \hat{\chi}} \mathcal{P}_N | j \rangle, \\
&= \langle i | \left(\hat{J} \hat{G} \hat{\chi} \frac{1}{1 - \hat{G}_- \hat{\chi}} \right)_N | j \rangle,
\end{aligned} \tag{3.25}$$

$$\begin{aligned}
(A_3)_{ij} &= \langle i | \mathcal{P}_N \frac{1}{1 - \hat{\chi} \hat{G}_+} \hat{\chi} | \mu, x \rangle \langle \mu, x | \hat{G} \hat{J} \hat{G} | \nu, y \rangle \langle \nu, y | \hat{\chi} \frac{1}{1 - \hat{G}_- \hat{\chi}} \mathcal{P}_N | j \rangle \\
&= \langle i | \mathcal{P}_N \hat{\chi} \frac{1}{1 - \hat{G}_+ \hat{\chi}} | \mu, x \rangle \langle \mu, x | \hat{G} \hat{J} \hat{G} | \nu, y \rangle \langle \nu, y | \hat{\chi} \frac{1}{1 - \hat{G}_- \hat{\chi}} \mathcal{P}_N | j \rangle \\
&= \langle i | \left(\hat{\chi} \frac{1}{1 - \hat{G}_+ \hat{\chi}} \hat{G} \hat{J} \hat{G} \hat{\chi} \frac{1}{1 - \hat{G}_- \hat{\chi}} \right)_N | j \rangle.
\end{aligned} \tag{3.26}$$

と書けることが分かる．すなわち，行列 $A_\alpha = \left((A_\alpha)_{ij} \right)_{i,j=1,2,\dots,N}$ ， $\alpha = 0, 1, 2, 3$ は，それぞれ適当な対応する演算子の，基底 $\{ |i\rangle; i = 1, 2, \dots \}$ での行列表現であると見なせることになる．

(3.13) と (3.14)-(3.17) あるいは (3.23)-(3.26) より，当然

$$\left\{ Z_{N,T}[0] \right\}^2 = \det_{1 \leq i, j \leq N} \left[(A_0)_{ij} \right]$$

である．ところが， $(A_0)_{ij}$ の定義式 (3.14) の被積分関数にある多項式 $M_i(t)$ は (3.9) にあるように，それぞれの $i = 0, 1, \dots, N-1$ に対して i 次の多項式としたので，行列 $A_0 = \left((A_0)_{ij} \right)_{1 \leq i, j \leq N}$ は正則な $N \times N$ 行列であり，逆行列 A_0^{-1} を持つ．従って，(3.11) は

$$\left\{ \Psi_{N,T}(\mathbf{f}; \boldsymbol{\theta}) \right\}^2 = \det_{1 \leq i, j \leq N} \left[\delta_{ij} + (A_0^{-1} A_1)_{ij} + (A_0^{-1} A_2)_{ij} + (A_0^{-1} A_3)_{ij} \right] \tag{3.27}$$

となる．ここで A_0 の逆行列は，上に導入した記法 (3.21) を用いて

$$(A_0^{-1})_{ij} = \langle i | (\hat{J}_N)^\Delta | j \rangle,$$

と書ける．確かに (3.23) より

$$\langle i | \hat{J}_N^\Delta | j \rangle \langle j | \hat{J}_N | k \rangle = \mathbf{1}_{\{1 \leq i, k \leq N\}} \sum_{j=1}^N (A_0^{-1})_{ij} (A_0)_{jk} = \mathbf{1}_{\{1 \leq i, k \leq N\}} \delta_{ik} = \langle i | \hat{\delta}_N | j \rangle$$

となるからである．このことと，(3.24)-(3.26) の表式に注意すると，(3.27) は

$$\begin{aligned}
\langle i | \mathbf{B} | \mu, x \rangle &= \begin{pmatrix} \langle i | (\hat{J}_N)^\Delta | k \rangle \langle k | \hat{\chi} \frac{1}{1 - \hat{G}_+ \hat{\chi}} | \mu, x \rangle & -\langle i | (\hat{J}_N)^\Delta | k \rangle \langle k | \hat{J} \hat{G} \hat{\chi} | \mu, x \rangle \\ & -\langle i | (\hat{J}_N)^\Delta | k \rangle \\ & \times \langle k | \hat{\chi} \frac{1}{1 - \hat{G}_+ \hat{\chi}} | \nu, y \rangle \langle \nu, y | \hat{G} \hat{J} \hat{G} \hat{\chi} | \mu, x \rangle \end{pmatrix}, \\
\langle \mu, x | \mathbf{C} | j \rangle &= \begin{pmatrix} \langle \mu, x | \hat{G} \hat{J} \mathcal{P}_N | j \rangle \\ -\langle \mu, x | \frac{1}{1 - \hat{G}_- \hat{\chi}} \mathcal{P}_N | j \rangle \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

という 2 成分の列ベクトルと行ベクトルを用いて

$$\begin{aligned} \left\{ \Psi_{N,T}(\mathbf{f}; \boldsymbol{\theta}) \right\}^2 &= \det_{1 \leq i, j \leq N} \left[\delta_{ij} + \langle i | \mathbf{B} | \mu, x \rangle \langle \mu, x | \mathbf{C} | j \rangle \right] \\ &= \det_{1 \leq i, j \leq N} \langle i | \left[\hat{\delta}_N + \mathbf{BC} \right] | j \rangle, \end{aligned} \quad (3.28)$$

と書けることが示せる．この表式から，(3.28) が次のようにフレドホルム行列式で表されることが導かれる：

$$\begin{aligned} &\text{Det} \langle \mu, x | \left[I_2 + \mathbf{CB} \right] | \nu, y \rangle \\ &= \text{Det} \begin{bmatrix} \langle \mu, x | \nu, y \rangle & -\langle \mu, x | \hat{G} \hat{J} | i \rangle \langle i | (\hat{J}_N)^\Delta | j \rangle \langle j | \hat{J} \hat{G} \hat{\chi} | \nu, y \rangle \\ +\langle \mu, x | \hat{G} \hat{J} | i \rangle & -\langle \mu, x | \hat{G} \hat{J} | i \rangle \langle i | (\hat{J}_N)^\Delta | j \rangle \langle j | \hat{\chi} \frac{1}{1-\hat{G}_+\hat{\chi}} | \rho, z \rangle \\ \times \langle i | (\hat{J}_N)^\Delta | j \rangle \langle j | \hat{\chi} \frac{1}{1-\hat{G}_+\hat{\chi}} | \nu, y \rangle & \times \langle \rho, z | \hat{G} \hat{J} \hat{G} \hat{\chi} | \nu, y \rangle \\ -\langle \mu, x | \frac{1}{1-\hat{G}_-\hat{\chi}} | i \rangle & \langle \mu, x | \nu, y \rangle \\ \times \langle i | (\hat{J}_N)^\Delta | j \rangle \langle j | \hat{\chi} \frac{1}{1-\hat{G}_+\hat{\chi}} | \nu, y \rangle & +\langle \mu, x | \frac{1}{1-\hat{G}_-\hat{\chi}} | i \rangle \langle i | (\hat{J}_N)^\Delta | j \rangle \langle j | \hat{J} \hat{G} \hat{\chi} | \nu, y \rangle \\ & +\langle \mu, x | \frac{1}{1-\hat{G}_-\hat{\chi}} | i \rangle \langle i | (\hat{J}_N)^\Delta | j \rangle \langle j | \hat{\chi} \frac{1}{1-\hat{G}_+\hat{\chi}} | \rho, z \rangle \\ & \times \langle \rho, z | \hat{G} \hat{J} \hat{G} \hat{\chi} | \nu, y \rangle \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ここで， I_2 は 2×2 の単位行列である．これは

$$\text{Det} \langle \mu, x | \left(I_2 + \begin{bmatrix} \hat{G} \hat{J} | i \rangle \langle i | (\hat{J}_N)^\Delta | j \rangle \langle j | - \hat{G}_+ & -\hat{G} \hat{J} | i \rangle \langle i | (\hat{J}_N)^\Delta | j \rangle \langle j | \hat{J} \hat{G} + \hat{G} \hat{J} \hat{G} \\ -| i \rangle \langle i | (\hat{J}_N)^\Delta | j \rangle \langle j | & | i \rangle \langle i | (\hat{J}_N)^\Delta | j \rangle \langle j | \hat{J} \hat{G} - \hat{G}_- \end{bmatrix} \hat{\chi} \right) | \nu, y \rangle.$$

と書き直せる [23] (Johansson [19], 笹本・今村 [47] を参照)．

従ってここで，

$$\begin{aligned} D^{\mu, \nu}(x, y) &= -\langle \mu, x | i \rangle \langle i | (\hat{J}_N)^\Delta | j \rangle \langle j | \nu, y \rangle, \\ S^{\mu, \nu}(x, y) &= \langle \mu, x | \hat{G} \hat{J} | i \rangle \langle i | (\hat{J}_N)^\Delta | j \rangle \langle j | \nu, y \rangle, \\ I^{\mu, \nu}(x, y) &= -\langle \mu, x | \hat{G} \hat{J} | i \rangle \langle i | (\hat{J}_N)^\Delta | j \rangle \langle j | \hat{J} \hat{G} | \nu, y \rangle, \end{aligned} \quad (3.29)$$

また，

$$\begin{aligned} \tilde{S}^{\mu, \nu}(x, y) &= S^{\mu, \nu}(x, y) - \langle \mu, x | \hat{G}_+ | \nu, y \rangle \\ \tilde{I}^{\mu, \nu}(x, y) &= I^{\mu, \nu}(x, y) + \langle \mu, x | \hat{G} \hat{J} \hat{G} | \nu, y \rangle \end{aligned} \quad (3.30)$$

と定義しておくこと，上の結果は

$$\left\{ \Psi_{N,T}(\mathbf{f}; \boldsymbol{\theta}) \right\}^2 = \text{Det} \left(I_2 \delta_{\mu\nu} \delta(x-y) + \begin{bmatrix} \tilde{S}^{\mu, \nu}(x, y) & \tilde{I}^{\mu, \nu}(x, y) \\ D^{\mu, \nu}(x, y) & \tilde{S}^{\nu, \mu}(y, x) \end{bmatrix} \chi_\nu(y) \right) \quad (3.31)$$

という表式に纏められることになる。

$$J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.32)$$

とする。\$\mathcal{I}\$ を適当な添字集合として，行列核 \$I = (\delta_{ab} I_2)_{a,b \in \mathcal{I}}\$，\$J = (\delta_{ab} J_2)_{a,b \in \mathcal{I}}\$，また歪対称な行列核

$$K = (K(a, b))_{a,b \in \mathcal{I}}, \quad K(a, b) = \begin{pmatrix} K_{11}(a, b) & K_{12}(a, b) \\ -K_{12}(b, a) & K_{22}(a, b) \end{pmatrix}, \quad K_{12}(a, b) = -K_{12}(b, a)$$

を考える。\$\mathcal{I}\$ の部分集合全体を \$\mathcal{Y} = \{S : S \in \mathcal{I}\}\$ として，ここに測度 \$\mu(dS)\$ が与えられているものとする。また，\$S \in \mathcal{Y}\$ に添字を限った場合の行列核を \$K(S) = (K(a, b))_{a,b \in S}\$ と書くことにする。このとき Rains は文献 [45] で，フレドホルム Pfaff 多項式（ここではこれを PF と書くことにする）を次式で定義している；

$$\text{PF}(J + K) = \int_{S \in \mathcal{Y}} \text{Pf}(K(S)) \mu(dS). \quad (3.33)$$

そしてこれが，フレドホルム行列式と一般に

$$\left\{ \text{PF}(J + K) \right\}^2 = \text{Det}(I + J^{-1}K), \quad (3.34)$$

という式で関係付けられていることを証明している。我々は添字集合 \$\mathcal{I} = \{(\mu, \mathbf{x}) : \mu = 1, 2, \dots, M+1, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N\}\$ に対して，この結果を用いることにする。すると，(3.31) より多時刻特性関数は

$$\Psi_{N,T}(\mathbf{f}; \boldsymbol{\theta}) = \text{PF} \left(J_2 \delta_{\mu\nu} \delta(x-y) + \begin{bmatrix} D^{\mu,\nu}(x, y) & \tilde{S}^{\nu,\mu}(y, x) \\ -\tilde{S}^{\mu,\nu}(x, y) & -\tilde{I}^{\mu,\nu}(x, y) \end{bmatrix} \chi_\nu(y) \right). \quad (3.35)$$

と表されることになる。

$$A^{\mu,\nu}(x, y) = \begin{bmatrix} D^{\mu,\nu}(x, y) & \tilde{S}^{\nu,\mu}(y, x) \\ -\tilde{S}^{\mu,\nu}(x, y) & -\tilde{I}^{\mu,\nu}(x, y) \end{bmatrix}, \quad (3.36)$$

として，\$N_\mu = 1, 2, \dots, N, 1 \le \mu \le M+1\$ に対して，次のような \$2 \sum_{\mu=1}^{M+1} N_\mu \times 2 \sum_{\mu=1}^{M+1} N_\mu\$ 歪対称行列を考えることにする，

$$A \left(\mathbf{x}_{N_1}^{(1)}, \mathbf{x}_{N_2}^{(2)}, \dots, \mathbf{x}_{N_{M+1}}^{(M+1)} \right) = \left(A^{\mu,\nu} \left(x_i^{(\mu)}, x_j^{(\nu)} \right) \right)_{1 \leq i \leq N_\mu, 1 \leq j \leq N_\nu, 1 \leq \mu, \nu \leq M+1}.$$

すると定義 (3.33) より，

$$\begin{aligned} \Psi_{N,T}(\mathbf{f}; \boldsymbol{\theta}) &= \sum_{N_1=0}^N \sum_{N_2=0}^N \cdots \sum_{N_{M+1}=0}^N \int_{\mathbb{R}^{N_1}} d\mathbf{x}_{N_1}^{(1)} \int_{\mathbb{R}^{N_2}} d\mathbf{x}_{N_2}^{(2)} \cdots \int_{\mathbb{R}^{N_{M+1}}} d\mathbf{x}_{N_{M+1}}^{(M+1)} \\ &\quad \prod_{\mu=1}^{M+1} \prod_{i_\mu=1}^{N_\mu} \chi_\mu(x_{i_\mu}^{(\mu)}) \text{Pf} \left[A \left(\mathbf{x}_{N_1}^{(1)}, \mathbf{x}_{N_2}^{(2)}, \dots, \mathbf{x}_{N_{M+1}}^{(M+1)} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.37)$$

である .

3.3 Pfaff 多項式過程

多時刻特性関数に対する上の表式 (3.37) と特性関数の相関関数による展開公式 (3.8) とを見比べると , 直ちに次の結果が得られることになる .

定理 3 [23] $\mathbf{X}(0) = \mathbf{0}$ である時間的に非斉次な非衝突ブラウン運動 $\mathbf{X}(t), t \in (0, T]$ の多時刻相関関数は一般に

$$\rho_{N,T} \left(t_1, \{\mathbf{x}_{N_1}^{(1)}\}; t_2, \{\mathbf{x}_{N_2}^{(2)}\}; \dots; t_{M+1}, \{\mathbf{x}_{N_{M+1}}^{(M+1)}\} \right) = \text{Pf} \left[A \left(\mathbf{x}_{N_1}^{(1)}, \mathbf{x}_{N_2}^{(2)}, \dots, \mathbf{x}_{N_{M+1}}^{(M+1)} \right) \right] \quad (3.38)$$

というように Pfaff 多項式で与えられる .

任意の多時刻相関関数が Pfaff 多項式で与えられるというこの著しい性質は , 笹本・今村 [47] で調べられた多層 PNG 模型とよばれる格子模型と共通するものである . 最近 , Borodin and Rains [3] はこのような性質を持つ離散的な確率変数のプロセスを Pfaff 多項式点過程 (pfaffian point process) とよび , Soshnikov ら [4, 49, 50] はその連続時空版を Pfaff 多項式集団 (pfaffian ensemble) とよぶことを提案している . 我々はこれを Pfaff 多項式過程と呼ぶことにする . この用語を使うことにすると , 定理 3 は , 『 $\mathbf{X}(0) = \mathbf{0}$ である時間的に非斉次な非衝突ブラウン運動 $\{\mathbf{X}(t)\}, t \in (0, T]$ は Pfaff 多項式過程である』と言い直すことが出来る .

注 3.1. Dyson [11] や Mehta [34, 35] は , GOE やガウス型シンプレクティック集団 (GSE) にあるランダム行列の固有値の相関関数を四元数行列式で表す方法を用いている . 永尾と Forrester はこの方法を多層行列模型に発展させ [39, 37] , 特に [13] では , 時空相関関数が一般に四元数行列式で表されるようなプロセスを報告している . 四元数行列式は容易に Pfaff 多項式に変換出来るので , [13] で扱われているプロセスは Pfaff 多項式過程に他ならない . 我々もこの流儀に従って , $\{\mathbf{X}(t)\}$ の時空相関関数を四元数行列式で表せることを以前報告したが [40, 24] , 上ではそれと等価の結果の別表現を別の方法で導いた .

3.4 エルミート直交多項式と歪直交多項式

射影演算子 \mathcal{P}_N の定義により , $\langle i | \hat{J}_N | j \rangle = \langle i | \mathcal{P}_N J \mathcal{P}_N | j \rangle$ は $i, j = 1, 2, \dots, N$ の場合だけ値を持つので , (3.23) で与えられた行列 A_0 は $N \times N$ の有限な行列である . 正則な行列であったので , 逆行列が定義できた . それでは , 射影演算 \mathcal{P}_N を除いた場合はどうであろうか . この場合 , $A_0 = \left(\langle i | \hat{J} | j \rangle \right)_{i,j=1,2,\dots}$ は半無限行列となってしまう . 従っ

て、逆行列の意味というものをきちんと与えなければならないが、いま仮に逆行列が定義できて、 $\langle i|\hat{J}^\Delta|j\rangle$ という表式が意味を持つとしよう。すると、前に述べた等式 (3.22) を $\hat{A} = \hat{J}$ に対して用いると、(3.30) は、

$$\begin{aligned}\tilde{S}^{\mu,\nu}(x,y) &= \begin{cases} \langle \mu, x|\hat{G}\hat{J}|i\rangle\langle i|(\hat{J}_N)^\Delta|j\rangle\langle j|\nu, y\rangle, & \mu \geq \nu \text{ の場合,} \\ -\langle \mu, x|\hat{G}\hat{J}|i\rangle\langle i|(\hat{J}^\Delta - (\hat{J}_N)^\Delta)|j\rangle\langle j|\nu, y\rangle, & \mu < \nu \text{ の場合,} \end{cases} \\ \tilde{I}^{\mu,\nu}(x,y) &= \langle \mu, x|\hat{G}\hat{J}|i\rangle\langle i|(\hat{J}^\Delta - (\hat{J}_N)^\Delta)|j\rangle\langle j|\hat{J}\hat{G}|\nu, y\rangle\end{aligned}\quad (3.39)$$

と表せることになる。

以下では A_0 の逆行列をどのように定義するかを考えることにする。まず準備として、(3.14) を部分積分によって式変形する；

$$\begin{aligned}(A_0)_{ij} &= \int_{-\infty}^{\infty} dx M_{i-1}(x)G(t_1; 0, x) \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{x} M_{j-1}(\tilde{x})G(t_1; 0, \tilde{x}) \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{y} \operatorname{sgn}(\tilde{y} - y)G(T - t_1; x, y)G(T - t_1; \tilde{x}, \tilde{y}) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx M_{i-1}(x)G(t_1; 0, x) \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{x} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \int_{-\infty}^{\tilde{x}} dz M_{j-1}(z)G(t_1; 0, z) \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{y} \operatorname{sgn}(\tilde{y} - y)G(T - t_1; x, y)G(T - t_1; \tilde{x}, \tilde{y}) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx M_{i-1}(x)G(t_1; 0, x) \\ &\quad \left\{ \left[\int_{-\infty}^{\tilde{x}} dz M_{j-1}(z)G(t_1; 0, z) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{y} \operatorname{sgn}(\tilde{y} - y)G(T - t_1; x, y)G(T - t_1; \tilde{x}, \tilde{y}) \right]_{\tilde{x}=-\infty}^{\infty} \right. \\ &\quad \left. - \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{x} \int_{-\infty}^{\tilde{x}} dz M_{j-1}(z)G(t_1; 0, z) \right. \\ &\quad \left. \times \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{y} \operatorname{sgn}(\tilde{y} - y)G(T - t_1; x, y)G(T - t_1; \tilde{x}, \tilde{y}) \right\}. \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{x} \int_{-\infty}^{\tilde{x}} dz M_{i-1}(x)G(t_1; 0, x)M_{j-1}(z)G(t_1; 0, z) \\ &\quad \times \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{y} \operatorname{sgn}(\tilde{y} - y)G(T - t_1; x, y)G(T - t_1; \tilde{x}, \tilde{y}) \left. \right\}.\end{aligned}$$

ただしここで、 $G(T - t_1; \tilde{x}, \tilde{y})$ は $|\tilde{x}| \rightarrow \infty$ で指数オーダーで零になることを用いた。また、

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{y} \operatorname{sgn}(\tilde{y} - y)G(T - t_1; x, y)G(T - t_1; \tilde{x}, \tilde{y}) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{y} \operatorname{sgn}(\tilde{y} - y)G(T - t_1; x, y)\frac{\partial}{\partial \tilde{x}}G(T - t_1; \tilde{x}, \tilde{y})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{y} \operatorname{sgn}(\tilde{y} - y) G(T - t_1; x, y) \left(-\frac{\partial}{\partial \tilde{y}} G(T - t_1; \tilde{x}, \tilde{y}) \right) \\
&= - \int_{-\infty}^{\infty} dy G(T - t_1; x, y) \left\{ \int_y^{\infty} d\tilde{y} \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} G(T - t_1; \tilde{x}, \tilde{y}) - \int_{-\infty}^y \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} G(T - t_1; \tilde{x}, \tilde{y}) \right\} \\
&= - \int_{-\infty}^{\infty} dy G(T - t_1; x, y) \left\{ \left[G(T - t_1; \tilde{x}, \tilde{y}) \right]_{\tilde{y}=y}^{\infty} - \left[G(T - t_1; \tilde{x}, \tilde{y}) \right]_{\tilde{y}=-\infty}^y \right\} \\
&= 2 \int_{-\infty}^{\infty} dy G(T - t_1; x, y) G(T - t_1; \tilde{x}, y)
\end{aligned}$$

である．従って，関数 $f(x)$ に対して

$$\mathcal{F}_t(f(x)) = -\frac{2 \int_{-\infty}^x dz f(z) G(t; 0, z)}{G(t; 0, x)} \quad (3.40)$$

とし，また関数 $g_1(x), g_2(x)$ に対して，汎関数

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}[g_1, g_2] &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{x} \int_{-\infty}^{\infty} dy g_1(x) G(t_1; 0, x) G(T - t_1; x, y) \\
&\quad \times g_2(\tilde{x}) G(t_1; 0, \tilde{x}) G(T - t_1; \tilde{x}, y)
\end{aligned} \quad (3.41)$$

を定義しておくと，

$$\begin{aligned}
(A_0)_{ij} &= \mathcal{A}[M_{i-1}, \mathcal{F}_{t_1}(M_{j-1})] \\
&= -\mathcal{A}[\mathcal{F}_{t_1}(M_{i-1}), M_{j-1}]
\end{aligned} \quad (3.42)$$

と表せる．

次に，これらの表式の中に現れる熱核 $G(t - s; x, y)$ をエルミート多項式を用いて書き換える．エルミート多項式は

$$H_i(x) = e^{x^2} \left(-\frac{d}{dx} \right)^i e^{-x^2} = i! \sum_{j=0}^{[i/2]} (-1)^j \frac{(2x)^{i-2j}}{j!(i-2j)!}, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (3.43)$$

で与えられる．ただし， $[a], a \in \mathbb{R}$ は a 以下の最大の整数を表す．これは，

$$h_i = 2^i i! \sqrt{\pi} \quad (3.44)$$

としたとき，

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} H_i(x) H_j(x) = h_i \delta_{ij}, \quad i, j = 0, 1, 2, \dots \quad (3.45)$$

という直交関係を満たす．さて，このエルミート多項式に対して次の Mehler の公式が知られている (例えば [1] を見よ)；

$$\exp \left\{ -\frac{(y - xz)^2}{1 - z^2} \right\} = e^{-y^2} \sqrt{\pi(1 - z^2)} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{z^i}{h_i} H_i(x) H_i(y). \quad (3.46)$$

これを用いると,

$$\tau(t) = \operatorname{arctanh} \frac{t-T}{T} = \frac{1}{2} \log \frac{t}{2T-t} \quad (3.47)$$

として, $0 \leq s \leq t \leq T, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}$ に対して

$$\begin{aligned} G(t-s; x, y) &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{h_i \sqrt{T}} \frac{1}{\sqrt{1 - \tanh \tau(s)}} \\ &\quad \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} (1 + \tanh \tau(s)) \left(\frac{\cosh \tau(s)}{\sqrt{T}} x \right)^2 \right\} e^{i\tau(s)} H_i \left(\frac{\cosh \tau(s)}{\sqrt{T}} x \right) \\ &\quad \times \frac{1}{\sqrt{1 + \tanh \tau(t)}} \\ &\quad \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} (1 - \tanh \tau(t)) \left(\frac{\cosh \tau(t)}{\sqrt{T}} y \right)^2 \right\} e^{-i\tau(t)} H_i \left(\frac{\cosh \tau(t)}{\sqrt{T}} y \right) \end{aligned}$$

と書けることが分かる．そこで, 次の記法を導入する;

$$(i; \tau(s) | \hat{G} | j; \tau(t)) = e^{-(\tau(t) - \tau(s))i} \delta_{ij}, \quad (3.48)$$

$$\begin{aligned} (x; s | i; \tau(s)) &= \frac{1}{T^{1/4} \sqrt{1 - \tanh \tau(s)}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (1 + \tanh \tau(s)) \left(\frac{\cosh \tau(s)}{\sqrt{T}} x \right)^2 \right\} \\ &\quad \times H_i \left(\frac{\cosh \tau(s)}{\sqrt{T}} x \right) \frac{1}{\sqrt{h_i}}, \end{aligned} \quad (3.49)$$

$$\begin{aligned} (i; \tau(s) | x; s) &= \frac{1}{T^{1/4} \sqrt{1 + \tanh \tau(s)}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (1 - \tanh \tau(s)) \left(\frac{\cosh \tau(s)}{\sqrt{T}} x \right)^2 \right\} \\ &\quad \times H_i \left(\frac{\cosh \tau(s)}{\sqrt{T}} x \right) \frac{1}{\sqrt{h_i}}. \end{aligned} \quad (3.50)$$

そうすると, 熱核は

$$\begin{aligned} G(t-s; x, y) &= (x; s | i; \tau(s)) (i; \tau(s) | \hat{G} | j; \tau(t)) (j; \tau(t) | y; t) \\ &= (x; s | i; \tau(s)) e^{-(\tau(t) - \tau(s))i} (i; \tau(t) | y; t) \end{aligned} \quad (3.51)$$

と書ける．ただし最初の等式の右辺では $i, j = 0, 1, 2, \dots$ の和を, また 2 番目の等式の右辺では $i = 0, 1, 2, \dots$ の和をとるものとする．定義 (3.47) より, $t = 0 \nearrow T$ で $\tau(t) = -\infty \nearrow 0$ であるが, 時間を $0 \leq t \leq 2T$ に拡張して考えると, $t \nearrow 2T$ で $\tau(t) = -\infty \nearrow \infty$ となる．そして (3.51) は, 同じく $0 \leq s \leq t \leq T$ に対して,

$$\begin{aligned} &G(t-s; x, y) \\ &= G((2T-s) - (2T-t); y, x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(y; 2T - t \middle| i; \tau(2T - t) \right) \left(i; \tau(2T - t) \middle| \hat{G} \middle| j; \tau(2T - s) \right) \left(j; \tau(2T - s) \middle| x; 2T - s \right) \\
&= \left(y; 2T - t \middle| i; -\tau(t) \right) \left(i; -\tau(t) \middle| \hat{G} \middle| j; -\tau(s) \right) \left(j; -\tau(s) \middle| x; 2T - s \right) \\
&= \left(y; 2T - t \middle| i; -\tau(t) \right) e^{-(-\tau(s) + \tau(t))i} \left(i; -\tau(s) \middle| x; 2T - s \right) \quad (3.52)
\end{aligned}$$

とも書ける．ここで， $0 \leq t \leq 2T$ において， $\tau(2T - t) = -\tau(t)$ であることを用いた．特に $\tau(T) = 0$ であるから，これらの表式を (3.41) に代入すると

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}[g_1, g_2] &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{x} \int_{-\infty}^{\infty} dy g_1(x) G(t_1; 0, x) \left(x; t_1 \middle| i; \tau(t_1) \right) e^{\tau(t_1)i} \left(i; 0 \middle| y; T \right) \\
&\quad \times \left(y; T \middle| j; 0 \right) e^{\tau(t_1)j} \left(j; -\tau(t_1) \middle| \tilde{x}; 2T - t_1 \right) G(t_1; 0, \tilde{x}) g_2(\tilde{x}) \quad (3.53)
\end{aligned}$$

となる．エルミート多項式の変形を

$$\bar{H}_i(x; \tau(t)) = \bar{H}_i(x; -\tau(t)) = \sqrt{2\pi} T^{1/4} H_i \left(\frac{\cosh \tau(t)}{\sqrt{T}} x \right) \frac{1}{\sqrt{h_i}} \quad (3.54)$$

と書くことにすると，容易に

$$\bar{H}_i(x; \tau(t)) G(t; 0, x) = \left(i; \tau(t) \middle| x; t \right) = \left(x; 2T - t \middle| i; -\tau(t) \right) \quad (3.55)$$

となることが示せる．従って，(3.53) で特に g_1, g_2 を次のようにすると，

$$\begin{aligned}
&\mathcal{A}[\bar{H}_i(\cdot; \tau(t_1)), \bar{H}_j(\cdot; -\tau(t_1))] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{x} \int_{-\infty}^{\infty} dy \left(i; \tau(t_1) \middle| x; t_1 \right) \left(x; t_1 \middle| i; \tau(t_1) \right) e^{\tau(t_1)i} \left(i; 0 \middle| y; T \right) \\
&\quad \times \left(y; T \middle| j; 0 \right) e^{\tau(t_1)j} \left(j; -\tau(t_1) \middle| \tilde{x}; 2T - t_1 \right) \left(\tilde{x}; 2T - t_1 \middle| j; -\tau(t_1) \right) \quad (3.56)
\end{aligned}$$

となる．ところが，エルミート多項式の直交性 (3.45) より， $t \in [0, 2T]$ に対して

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} dx \left(i; \tau(t) \middle| x; t \right) \left(x; t \middle| j; \tau(t) \right) \\
&= \frac{\cosh \tau(t)}{\sqrt{T h_i h_j}} \int_{-\infty}^{\infty} dx \exp \left\{ - \left(\frac{\cosh \tau(t)}{\sqrt{T}} x \right)^2 \right\} H_i \left(\frac{\cosh \tau(t)}{\sqrt{T}} x \right) H_j \left(\frac{\cosh \tau(t)}{\sqrt{T}} x \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{h_i h_j}} \delta_{ij} h_i = \delta_{ij}, \quad i, j = 0, 1, \dots \quad (3.57)
\end{aligned}$$

であるから，

$$\mathcal{A}[\bar{H}_i(\cdot; \tau(t_1)), \bar{H}_j(\cdot; -\tau(t_1))] = \delta_{ij} e^{2\tau(t_1)i}, \quad i, j = 0, 1, 2, \dots \quad (3.58)$$

となることが結論される．

この結果を，計算すべき (3.42) 式と見比べると，

$$\mathcal{F}_{t_1}(f(\tilde{x})) = \bar{H}_j(\tilde{x}; -\tau(t_1))$$

となる関数 f を求める必要があることに気がつく． $\mathcal{F}_t(\cdot)$ の定義 (3.40) より

$$-2f(\tilde{x})G(t; 0, \tilde{x}) = \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \left\{ \mathcal{F}_t(f(\tilde{x}))G(t; 0, \tilde{x}) \right\}$$

であるから，

$$\begin{aligned} & \mathcal{F}_{t_1}^{-1} \left(\bar{H}_j(\tilde{x}; -\tau(t_1)) \right) \\ &= -\frac{1}{2G(t_1; 0, \tilde{x})} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \left\{ \bar{H}_j(\tilde{x}; -\tau(t_1))G(t_1; 0, \tilde{x}) \right\} \\ &= \frac{\sqrt{T}}{4t_1 \cosh \tau(t_1)} \left[\sqrt{\frac{h_{j+1}}{h_j}} \bar{H}_{j+1}(\tilde{x}; -\tau(t_1)) - 2je^{2\tau(t)} \sqrt{\frac{h_{j-1}}{h_j}} \bar{H}_{j-1}(\tilde{x}; -\tau(t_1)) \right] \end{aligned} \quad (3.59)$$

であることになる．ただしここで，エルミート多項式の性質

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} H_j(x) &= 2jH_{j-1}(x), \\ H_{j+1}(x) &= 2xH_j(x) - 2jH_{j-1}(x) \end{aligned} \quad (3.60)$$

を用いた．従って， $0 \leq k \leq N/2 - 1$ に対して

$$\begin{aligned} M_{2k}(x) &= e^{-2k\tau(t_1)} \bar{H}_{2k}(x; \tau(t_1)), \\ M_{2k+1}(x) &= e^{-2k\tau(t_1)} \mathcal{F}_{t_1}^{-1} \left(\bar{H}_{2k}(x; -\tau(t_1)) \right) \end{aligned} \quad (3.61)$$

と置くことにすると，(3.42) で与えられる $(A_0)_{ij}$ は

$$\begin{aligned} (A_0)_{2k-1, 2k} &= -(A_0)_{2k, 2k-1} = 1, \quad k = 1, 2, \dots, \frac{N}{2} \text{ に対して,} \\ (A_0)_{ij} &= 0, \quad \text{それ以外の } (i, j) \end{aligned}$$

となる．つまり $\left((A_0)_{ij} \right)_{1 \leq i, j \leq N}$ は， $I_{N/2}$ をサイズ $N/2$ の単位行列， J_2 を (3.32) として，

$$J_N = I_{N/2} \otimes J_2 \quad (3.62)$$

というように歪対角化されることになる．この意味で，上の $\left\{ M_i(x) \right\}_{i=0,1,2,\dots}$ は歪直交多項式系を成す．

以上の結果は，次のように纏められる．

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} \left(\frac{\sqrt{T}}{2 \cosh \tau(t_1)} \right)^i \delta_{ij}, & i \text{ が偶数のとき,} \\ \left(\frac{\sqrt{T}}{2 \cosh \tau(t_1)} \right)^i \left\{ \delta_{ij} - 2(i-1)\delta_{i-2j} \right\}, & i \text{ が奇数のとき,} \end{cases} \quad (3.63)$$

$$\begin{aligned} b_{2k} &= \sqrt{\frac{\pi}{h_{2k}} \frac{2^{2k+1/2} T^{k+1/4}}{t_1^{2k}}}, \\ b_{2k+1} &= \sqrt{\frac{\pi}{h_{2k}} \frac{2^{2k-1/2} T^{k+1/4}}{t_1^{2k+1}}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.64)$$

として，多項式を

$$M_i(x) = b_i e^{i\tau(t_1)} \sum_{j=0}^i \alpha_{ij} H_j \left(\frac{\cosh \tau(t_1)}{\sqrt{T}} x \right) e^{-j\tau(t_1)}, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (3.65)$$

とする．すると，

$$(A_0)_{ij} = \langle i | \hat{J}_N | j \rangle = (J_N)_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots, N \quad (3.66)$$

であり，また $J_N^2 = -I_N$ であるから，

$$(A_0^{-1})_{ij} = \langle i | (\hat{J}_N)^\Delta | j \rangle = -(J_N)_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots, N \quad (3.67)$$

である．

そこで， J を J_N で $N \rightarrow \infty$ とした半無限行列を表すものとするれば，

$$\langle i | \hat{J} | j \rangle = J_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots$$

であり，半無限行列 $\left(\langle i | \hat{J} | j \rangle \right)_{i,j=1,2,\dots}$ は逆行列を持ち

$$\langle i | \hat{J}^\Delta | j \rangle = -J_{ij} \quad i, j = 1, 2, \dots \quad (3.68)$$

と定まることになる．

$i = 1, 2, \dots, \mu = 1, 2, \dots, M+1, x \in \mathbb{R}$ に対して，

$$\begin{aligned} \langle \mu, x | i \rangle &= b_i R_{i-1}^{(\mu)}(x), \\ \langle i | \hat{J} \hat{G} | \mu, x \rangle &= -\langle \mu, x | \hat{G} \hat{J} | i \rangle = b_i \Phi_{i-1}^{(\mu)}(x), \end{aligned} \quad (3.69)$$

と書くことにする． $R_i^{(\mu)}(x)$ は最高次の項 x^i の係数が 1 である多項式 (モノック関数) である．そして

$$\begin{aligned} r_i &\equiv \frac{1}{b_{2i}b_{2i+1}} \\ &= \frac{h_{2i}}{2^{4i}\pi} \left(\frac{t_1^2}{T}\right)^{2i+1/2} \\ &= \frac{1}{\pi} \Gamma(i+1/2)\Gamma(i+1) \left(\frac{t_1^2}{T}\right)^{2i+1/2}, \quad i = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.70)$$

とすると, (3.29) は

$$D^{\mu,\nu}(x, y) = \sum_{i=0}^{N/2-1} \frac{1}{r_i} \left[R_{2i}^{(\mu)}(x)R_{2i+1}^{(\nu)}(y) - R_{2i+1}^{(\mu)}(x)R_{2i}^{(\nu)}(y) \right], \quad (3.71)$$

$$\begin{aligned} S^{\mu,\nu}(x, y) &= \sum_{i=0}^{N/2-1} \frac{1}{r_i} \left[\Phi_{2i}^{(\mu)}(x)R_{2i+1}^{(\nu)}(y) - \Phi_{2i+1}^{(\mu)}(x)R_{2i}^{(\nu)}(y) \right], \\ I^{\mu,\nu}(x, y) &= - \sum_{i=0}^{N/2-1} \frac{1}{r_i} \left[\Phi_{2i}^{(\mu)}(x)\Phi_{2i+1}^{(\nu)}(y) - \Phi_{2i+1}^{(\mu)}(x)\Phi_{2i}^{(\nu)}(y) \right], \end{aligned} \quad (3.72)$$

となる, また表式 (3.39) は

$$\begin{aligned} \tilde{S}^{\mu,\nu}(x, y) &= \begin{cases} \sum_{i=0}^{N/2-1} \frac{1}{r_i} \left[\Phi_{2i}^{(\mu)}(x)R_{2i+1}^{(\nu)}(y) - \Phi_{2i+1}^{(\mu)}(x)R_{2i}^{(\nu)}(y) \right], & \mu \geq \nu \text{ のとき,} \\ - \sum_{i=N/2}^{\infty} \frac{1}{r_i} \left[\Phi_{2i}^{(\mu)}(x)R_{2i+1}^{(\nu)}(y) - \Phi_{2i+1}^{(\mu)}(x)R_{2i}^{(\nu)}(y) \right], & \mu < \nu \text{ のとき,} \end{cases} \\ \tilde{I}^{\mu,\nu}(x, y) &= \sum_{i=N/2}^{\infty} \frac{1}{r_i} \left[\Phi_{2i}^{(\mu)}(x)\Phi_{2i+1}^{(\nu)}(y) - \Phi_{2i+1}^{(\mu)}(x)\Phi_{2i}^{(\nu)}(y) \right] \end{aligned} \quad (3.73)$$

となり, いずれも 1 重の和の形に簡単化されるのである．

これらの表式を積分核 (3.36) に代入したのに対して定理 3 が成り立つことが, 以上で導かれたわけであるが, これは [24] で Theorem 3 として報告したものと等価である (上述の注 3.1 を参照).

4 相関関数の収束定理と無限粒子系

最後に, 非衝突条件を課す時間 T をブラウン粒子の総数 N の適当な関数 $T(N)$ とし $N \rightarrow \infty$ の極限をとったときの, 相関関数 $\rho_{N,T(N)}$ の収束定理を 2 つ述べる．

最初の定理は, $T(N) = 2N$ とした場合である. 第 2 節で, 非衝突ブラウン粒子の位置の分布はガウス型ランダム集団にあるエルミート行列の固有値分布で表されることを述べた. 後者の固有値分布の密度は行列のサイズ $N \rightarrow \infty$ で Wigner の半円則に従うことが知られている [35]. このことから, $t = 0$ に原点をスタートした N 個の非衝突ブラウン粒子は, $N \gg 1$ のとき, 時刻 $t = 1$ では原点を中心に左右 $\sqrt{2N}$ の領域内に分布しているということが分かる. ブラウン運動の時空スケールから, 時刻 $t = T$ では, これは原点を中心とした左右 $\sqrt{2N} \times \sqrt{T}$ の領域に広がることになる. いずれにせよ, N 個の粒子がサイズ \sqrt{N} の領域に閉じ込められた形になるので, T を止めて単純に $N \rightarrow \infty$ の極限をとると粒子密度は発散してしまう. しかし, T も N に比例して大きくするというスケール極限を考えると, 粒子の分布領域のサイズも N に比例することになるので, この領域の中ほどでは粒子密度は $N \rightarrow \infty$ である有限の値に収束することになる. このスケール極限での粒子系の振る舞いを見たいので, 図 4 に示したように, 相関関数の位置変数 $\mathbf{x}_{N_\mu}^{(\mu)}$ は原点の周辺にとることにする. ただし, 時刻 t_μ は終時刻 $T(N)$ に近い値をとることにする. このバルク極限での相関関数の極限定理は次のようである.

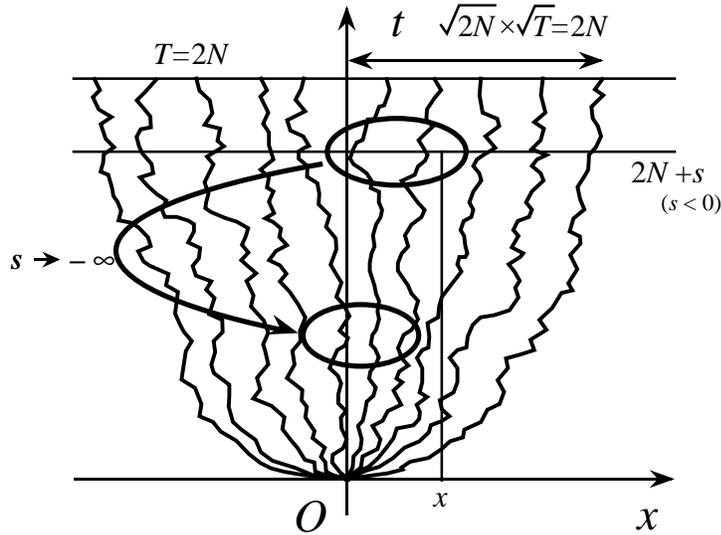


図 4: 非衝突ブラウン運動のバルク極限 (空間的に斉次な無限粒子系)

定理 4 [24] $T(N) = 2N$ とする. 任意の正の整数 M , 正の整数列 $\{N_m\}_{m=1}^{M+1}$, 非正の増加列 $\{s_m\}_{m=1}^{M+1}$ で $s_{M+1} = 0$ となるものに対して

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \rho_{N, T(N)} \left(T(N) + s_1, \mathbf{x}_{N_1}^{(1)}; T(N) + s_2, \mathbf{x}_{N_2}^{(2)}; \dots; T(N), \mathbf{x}_{N_{M+1}}^{(M+1)} \right) \\ = \text{Pf} \left[\mathbf{A} \left(\mathbf{x}_{N_1}^{(1)}, \mathbf{x}_{N_2}^{(2)}, \dots, \mathbf{x}_{N_{M+1}}^{(M+1)} \right) \right] \end{aligned} \quad (4.1)$$

ここで $\mathbf{A} \left(\mathbf{x}_{N_1}^{(1)}, \mathbf{x}_{N_2}^{(2)}, \dots, \mathbf{x}_{N_{M+1}}^{(M+1)} \right)$ は

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{S}}(s, x; t, y) &= \begin{cases} \frac{1}{\pi} \int_0^1 d\lambda \cos(\lambda(x-y)) e^{-\lambda^2(t-s)/2}, & s > t \text{ のとき,} \\ \frac{\sin(x-y)}{\pi(x-y)}, & s = t \text{ のとき,} \\ -\frac{1}{\pi} \int_1^\infty d\lambda \cos(\lambda(x-y)) e^{-\lambda^2(t-s)/2}, & s < t \text{ のとき,} \end{cases} \\ \mathbf{D}(s, x; t, y) &= -\frac{1}{\pi} \int_0^1 d\lambda \lambda \sin(\lambda(x-y)) e^{-(s+t)\lambda^2/2}, \\ \tilde{\mathbf{I}}(s, x; t, y) &= -\frac{1}{\pi} \int_1^\infty d\lambda \frac{1}{\lambda} \sin(\lambda(x-y)) e^{(s+t)\lambda^2/2} \end{aligned} \quad (4.2)$$

を成分に持つ行列核

$$\mathbf{A}^{\mu, \nu}(x, y) = \begin{pmatrix} \mathbf{D}(s_\mu, x; s_\nu, y) & \tilde{\mathbf{S}}(s_\nu, y; s_\mu, x) \\ -\tilde{\mathbf{S}}(s_\mu, x; s_\nu, y) & -\tilde{\mathbf{I}}(s_\mu, x; s_\nu, y) \end{pmatrix}$$

で定まる $2 \sum_{\mu=1}^{M+1} N_\mu \times 2 \sum_{\mu=1}^{M+1} N_\mu$ 歪対称行列である。

(4.2) で与えられた関数 $\tilde{\mathbf{S}}, \mathbf{D}, \tilde{\mathbf{I}}$ は, 空間に関しては差 $x - y$ だけの関数であるが, 時間に関しては差 $t - s$ だけの関数にはなっていない. 従ってこの定理は, 時間的非斉次な非衝突ブラウン運動 $\{\mathbf{X}(t)\}, t \in (0, T]$ が, 粒子数を無限大にしたときに, 時間的非斉次, 空間的斉次な無限粒子系に収束することを示している. (緊密性 (tightness) は Johansson [19] での方法を利用して示すことができる.)

$s_\nu - s_\mu, 1 \leq \mu, \nu \leq M$, を固定したまま $s_\mu \rightarrow -\infty$ となるように極限をとると (図 4 参照), $\mathbf{D}(s_\mu, x; s_\nu, y) \rightarrow \infty, \tilde{\mathbf{I}}(s_\mu, x; s_\nu, y) \rightarrow 0, \mathbf{D}(s_\mu, x; s_\nu, y) \tilde{\mathbf{I}}(s_\mu, x; s_\nu, y) \rightarrow 0$ となる. したがって, この極限無限粒子系の相関関数は, 行列核が

$$\tilde{\mathbf{A}}^{\mu, \nu}(x, y) \equiv \begin{pmatrix} 0 & \tilde{\mathbf{S}}(s_\nu, y; s_\mu, x) \\ -\tilde{\mathbf{S}}(s_\mu, x; s_\nu, y) & 0 \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

である Pfaff 多項式であらわされるが, これは (μ, ν) 成分が $\tilde{\mathbf{S}}(s_\mu, x_i^{(\mu)}; s_\nu, x_j^{(\nu)})$ である実行列式と一致する. 実はこの無限粒子系は, 第 1 節の注 1.2 で述べた斉次非交叉ブラウン運動 $\mathbf{Y}(t)$ において粒子数を無限大にしたときに得られる, 時間的にも空間的にも斉次な無限粒子系と一致しており, Spohn [51], 長田 [41], 永尾・Forrester [38] 等により研究されている無限次元 Dyson 模型と同じものである.

次の定理は $T(N) = 2N^{1/3}$ とした場合である. この場合は, N 個のブラウン粒子の分布している領域のサイズは $N^{2/3}$ であるから, $N \rightarrow \infty$ で領域の中ほど (バルク) で

の粒子密度は発散してしまう．しかし，この領域の端の適当な部分を見てやると相関関数が収束するという主張である．具体的には，図 5 に図示したように，時刻 t_μ が終時刻 $T(N)$ に近く，位置 $x_{N_\mu}^{(\mu)}$ が $2N^{2/3} - (T(N) - t_\mu)^2/4$ の周辺にある場合を考えればよい．これはランダム行列理論の端スケーリング (edge scaling) に相当している．

$2N^{2/3} - (T(N) - t_\mu)^2/4$ の周辺の配置を記述するために

$$a_N(s) = 2N^{2/3} - s^2/4, \quad \mathbf{x}(s) = (x_1 + a_N(s), x_2 + a_N(s), \dots, x_N + a_N(s))$$

を導入しておく．前の定理では，極限の相関関数が三角関数を用いて表されたが，次の定理は Airy 関数

$$\text{Ai}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\sqrt{-1}(zt+t^3/3)} dt \quad (4.4)$$

を用いて表される．

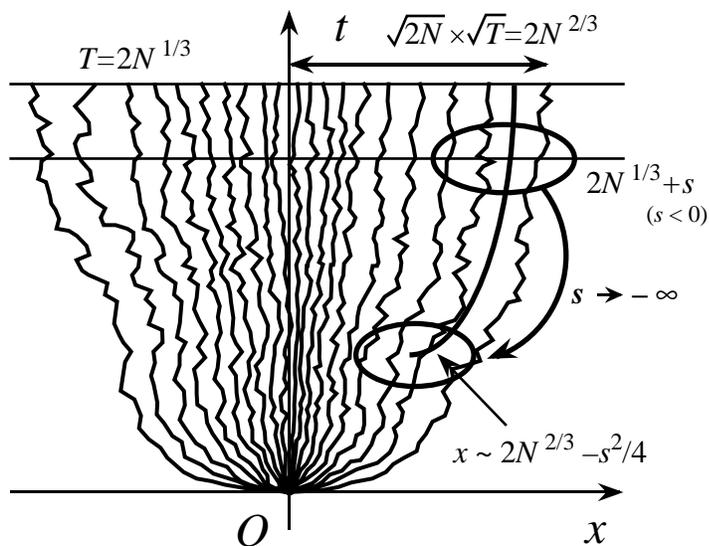


図 5: 非衝突ブラウン運動の端極限 (空間的に非斉次な無限粒子系)

定理 5 [24] $T(N) = 2N^{1/3}$ とおく．任意の正の整数 M ，正の整数列 $\{N_\mu\}_{\mu=1}^{M+1}$ と非正の増加列 $\{s_\mu\}_{\mu=1}^{M+1}$ で $s_{M+1} = 0$ を満たすものに対して，

$$\begin{aligned} & \lim_{N \rightarrow \infty} \rho_{N, T(N)} \left(T(N) + s_1, \mathbf{x}_{N_1}^{(1)}(s_1); T(N) + s_2, \mathbf{x}_{N_2}^{(2)}(s_2); \dots; T(N), \mathbf{x}_{N_{M+1}}^{(M+1)}(s_{M+1}) \right) \\ &= \text{Pf} \left[\mathcal{A} \left(\mathbf{x}_{N_1}^{(1)}, \mathbf{x}_{N_2}^{(2)}, \dots, \mathbf{x}_{N_{M+1}}^{(M+1)} \right) \right] \end{aligned} \quad (4.5)$$

が成り立つ. ここで $\mathcal{A}(\mathbf{x}_{N_1}^{(1)}, \mathbf{x}_{N_2}^{(2)}, \dots, \mathbf{x}_{N_{M+1}}^{(M+1)})$ は, 成分

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{S}}(s, x; t, y) &= \begin{cases} \int_0^\infty d\lambda e^{(t-s)\lambda/2} \text{Ai}(x+\lambda) \text{Ai}(y+\lambda) \\ \quad + \frac{1}{2} \text{Ai}(y) \int_0^\infty d\lambda e^{s\lambda/2} \text{Ai}(x-\lambda), & s \geq t \text{ のとき,} \\ - \int_{-\infty}^0 d\lambda e^{(t-s)\lambda/2} \text{Ai}(x+\lambda) \text{Ai}(y+\lambda) \\ \quad + \frac{1}{2} \text{Ai}(y) \int_0^\infty d\lambda e^{s\lambda/2} \text{Ai}(x-\lambda), & s < t \text{ のとき,} \end{cases} \\ \mathcal{D}(s, x; t, y) &= \frac{1}{4} \left[\int_0^\infty d\lambda e^{s\lambda/2} \text{Ai}(x+\lambda) \frac{d}{d\lambda} \{e^{t\lambda/2} \text{Ai}(y+\lambda)\} \right. \\ &\quad \left. - \int_0^\infty d\lambda e^{t\lambda/2} \text{Ai}(y+\lambda) \frac{d}{d\lambda} \{e^{s\lambda/2} \text{Ai}(x+\lambda)\} \right], \\ \tilde{\mathcal{I}}(s, x; t, y) &= \int_0^\infty d\lambda e^{t\lambda/2} \text{Ai}(y-\lambda) \int_\lambda^\infty d\lambda' e^{s\lambda'/2} \text{Ai}(x-\lambda') \\ &\quad - \int_0^\infty d\lambda e^{s\lambda/2} \text{Ai}(x-\lambda) \int_\lambda^\infty d\lambda' e^{t\lambda'/2} \text{Ai}(y-\lambda'). \end{aligned}$$

を持つ 2×2 の行列核

$$\mathbf{A}^{\mu, \nu}(x, y) = \begin{pmatrix} \mathcal{D}(s_\mu, x; s_\nu, y) & \tilde{\mathcal{S}}(s_\nu, y; s_\mu, x) \\ -\tilde{\mathcal{S}}(s_\mu, x; s_\nu, y) & -\tilde{\mathcal{I}}(s_\mu, x; s_\nu, y) \end{pmatrix}$$

で定まる $2 \sum_{\mu=1}^{M+1} N_\mu \times 2 \sum_{\mu=1}^{M+1} N_\mu$ 歪対称行列である.

定理 5 で得られた系は, 時間的にも空間的にも非斉次な無限粒子系である. この系において $x_i^{(\mu)} - x_j^{(\nu)}$ を固定したまま $x_i^{(\mu)} \rightarrow -\infty$ となるように極限をとると, ブラウン粒子の分布領域のバルク領域に移行するはずである. 実際, Airy 関数 (4.4) の漸近挙動

$$x \rightarrow \infty \quad \text{で} \quad \text{Ai}(-x) \sim \frac{1}{\pi^{1/2} x^{1/4}} \cos\left(\frac{2}{3} x^{3/2} - \frac{\pi}{4}\right) \quad (4.6)$$

を用いると, この極限で定理 4 で得られた無限粒子系に収束することが示せる. 一方, $s_\nu - s_\mu, 1 \leq \mu, \nu \leq M$ を固定したまま $s_\mu \rightarrow -\infty$ となるように極限をとると (図 5 参照), $\mathcal{D}(s_\mu, x; s_\nu, y) \rightarrow 0, \tilde{\mathcal{I}}(s_\mu, x; s_\nu, y) \rightarrow 0$ となり, さらに $\tilde{\mathcal{S}}(s_\mu, x; s_\nu, y)$ が

$$\mathbf{a}^{\mu, \nu}(x, y) = \begin{cases} \int_0^\infty d\lambda e^{(s_\nu - s_\mu)\lambda/2} \text{Ai}(x+\lambda) \text{Ai}(y+\lambda) & \mu \geq \nu \text{ のとき,} \\ - \int_{-\infty}^0 d\lambda e^{(s_\nu - s_\mu)\lambda/2} \text{Ai}(x+\lambda) \text{Ai}(y+\lambda) & \mu < \nu \text{ のとき} \end{cases} \quad (4.7)$$

に収束するので、極限で得られる無限粒子系の相関関数は各成分が $a^{\mu,\nu} (x_i^{(\mu)}, x_j^{(\nu)})$ である実行列式で表すことができる。この極限で得られた時間的斉次、空間的非斉ちな無限粒子系は Prähofer and Spohn [44], Johansson[19] により研究されている Airy 過程と一致している。(長田 [42], 白井・高橋 [48] も参照。)

以上の結果は次のようにして導くことが出来る。まず (3.69) で定義した $R_i^{(\mu)}(x)$ と $\Phi_i^{(\mu)}(x)$ を、それぞれエルミート多項式で

$$R_i^{(\mu)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t_\mu}} \exp \left\{ -\frac{1}{2}(1 - \tanh \tau(t_\mu)) \left(\frac{\cosh \tau(t_\mu)}{\sqrt{T}} x \right)^2 \right\} \\ \times e^{i\tau(t_1)} \sum_{j=0}^i \alpha_{ij} e^{-j\tau(t_\mu)} H_j \left(\frac{\cosh \tau(t_\mu)}{\sqrt{T}} x \right), \quad (4.8)$$

および

$$\Phi_{2k}^{(\mu)}(x) = 4\sqrt{\frac{T}{2\pi t_\mu}} h_{2k} e^{\tau(t_\mu)} \exp \left\{ -\frac{1}{2}(1 + \tanh \tau(t_\mu)) \left(\frac{\cosh \tau(t_\mu)}{\sqrt{T}} x \right)^2 \right\} \\ \times \left(\frac{\sqrt{T}}{2 \cosh \tau(t_1)} \right)^{4k+1} e^{2k\tau(t_1)} \sum_{\ell=2k+1}^{\infty} \frac{e^{\ell\tau(t_\mu)}}{h_\ell} \beta_{\ell 2k+1} H_\ell \left(\frac{\cosh \tau(t_\mu)}{\sqrt{T}} x \right), \\ \Phi_{2k+1}^{(\mu)}(x) = -4\sqrt{\frac{T}{2\pi t_\mu}} h_{2k} e^{\tau(t_\mu)} \exp \left\{ -\frac{1}{2}(1 + \tanh \tau(t_\mu)) \left(\frac{\cosh \tau(t_\mu)}{\sqrt{T}} x \right)^2 \right\} \\ \times \left(\frac{\sqrt{T}}{2 \cosh \tau(t_1)} \right)^{4k+1} e^{(2k+1)\tau(t_1)} \sum_{\ell=2k}^{\infty} \frac{e^{\ell\tau(t_\mu)}}{h_\ell} \beta_{\ell 2k} H_\ell \left(\frac{\cosh \tau(t_\mu)}{\sqrt{T}} x \right) \quad (4.9)$$

と展開する。ただし、 α_{ij} は (3.63) であり、 β_{ij} は $0 \leq s \leq k$ に対して

$$\sum_{j=s}^k \beta_{kj} \alpha_{js} = \delta_{ks} \quad (4.10)$$

となるもの、具体的には

$$\beta_{kj} = \begin{cases} \left(\frac{2 \cosh \tau(t_1)}{\sqrt{T}} \right)^k \delta_{jk}, & k \text{ が偶数のとき,} \\ 2^k \left(\frac{\cosh \tau(t_1)}{\sqrt{T}} \right)^j \left(\frac{k-1}{2} \right)! / \left(\frac{j-1}{2} \right)!, & k, j \text{ が奇数で } k \geq j \text{ のとき,} \\ 0, & \text{その他} \end{cases} \quad (4.11)$$

で与えられるものである。その上で、エルミート関数

$$\varphi_\ell(x) = \frac{1}{\sqrt{h_\ell}} e^{-x^2/2} H_\ell(x), \quad ,$$

に対して知られている次の漸近挙動 [2, 53]

$$\begin{aligned} \lim_{\ell \rightarrow \infty} (-1)^\ell \ell^{1/4} \varphi_{2\ell} \left(\frac{u}{2\sqrt{\ell}} \right) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos u, \\ \lim_{\ell \rightarrow \infty} (-1)^\ell \ell^{1/4} \varphi_{2\ell+1} \left(\frac{u}{2\sqrt{\ell}} \right) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin u, \\ \lim_{\ell \rightarrow \infty} 2^{-1/4} \ell^{1/12} \varphi_\ell \left(\sqrt{2\ell} - \frac{u}{\sqrt{2} \ell^{1/6}} \right) &= \text{Ai}(-u) \end{aligned} \quad (4.12)$$

を用いれば良い [24].

5 おわりに

本講究録では非衝突条件を課した 1 次元ブラウン運動を考えたが、ブラウン運動の代わりに 1 次元の吸収壁ブラウン運動や反射壁ブラウン運動を考えることも出来る。これは、 A_{N-1} 型の Weyl 領域 (1.5) ではなく、それぞれ C_N 型、 D_N 型の Weyl 領域を考え、この中での吸収壁ブラウン運動を考えることに相当する。1 次元吸収壁ブラウン運動と反射壁ブラウン運動はそれぞれ 3 次元と 1 次元のベッセル過程に等しい [46]。従って、より一般的に $d = 2(\nu + 1) > 0$ 次元 Bessel 過程に対して、これの非衝突系を考えることも出来る。[28] では、この Bessel 過程を時間的に非斉次にした一般化されたブラウン彷徨 (generalized meander) [54] の非衝突系も合わせて調べることにより、非衝突拡散過程の有限系をより一般的に論じている。本講究録の第 2 節で、非衝突ブラウン運動が GUE と GOE のランダム行列と関係することを述べたが、他の非衝突拡散過程では自然な形で GSE やカイラル型ランダム行列、あるいは Altland と Zirnbauer により研究されたいわゆる Bogoliubov-de Gennes 型ランダム行列と関連することが示せる [31, 28]。これらの非衝突拡散過程の無限粒子極限についての報告は、現在準備中である [30].

謝辞

この報告の一部は、永尾太郎氏 (名古屋大学多元数理) との共同研究に基づく。また、笹本智弘氏 (東工大理) には文献 [45] と [3] に関して有意義な議論をしていただいたことを感謝する。

参考文献

- [1] G. E. Andrews, R. Askey, and R. Roy, *Special Functions*, (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999).
- [2] H. Bateman, *Higher Transcendental Functions*, (A. Erdélyi Ed.), Vol. 2, (McGraw Hill, New York, 1953).
- [3] A. Borodin and E. Rains, Eynard-Mehta theorem, Schur process, and their pfaffian analogs, arXiv:math-ph/0409059.
- [4] A. Borodin and A. Soshnikov, Janossy densities. I. Determinantal ensembles, *J. Stat. Phys.* **113** (2003) 595-610.
- [5] A. N. Borodin and P. Salminen, *Handbook of Brownian Motion – Facts and Formulae*, 2nd ed. (Birkhäuser, Basel, 2002).
- [6] M. F. Bru, Diffusions of perturbed principal component analysis, *J. Multivariate Anal.* **29** (1989) 127-136.
- [7] M. F. Bru, Wishart process, *J. Theor. Probab.* **4** (1991) 725-751.
- [8] N. G. de Bruijn, On some multiple integrals involving determinants, *J. Indian Math. Soc.* **19** (1955) 133-151.
- [9] J. L. Doob, *Classical Potential Theory and its Probabilistic Counterpart*, (Springer, New York, 1984).
- [10] F. J. Dyson, A Brownian-motion model for the eigenvalues of a random matrix, *J. Math. Phys.* **3** (1962) 1191-1198.
- [11] F. J. Dyson, Correlation between the eigenvalues of a random matrix, *Commun. Math. Phys.* **19** (1970) 235-250.
- [12] M. E. Fisher, Walks, walls, wetting, and melting, *J. Stat. Phys.* **34** (1984) 667-729.
- [13] P. J. Forrester, T. Nagao, and G. Honner, Correlations for orthogonal-unitary and symplectic-unitary transitions at the hard and soft edges, *Nucl. Phys.* **B553**[PM] (1999) 601-643.
- [14] W. Fulton, *Young Tableaux with Applications to Representation Theory and Geometry*, (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997).

- [15] D. J. Grabiner, Brownian motion in a Weyl chamber, non-colliding particles, and random matrices, *Ann. Inst. Henri Poincaré, Probab. Stat.* **35** (1999) 177-204.
- [16] Harish-Chandra, Differential operators on a semisimple Lie algebra, *Am. J. Math.* **79** (1957) 87-120.
- [17] J. P. Imhof, Density factorizations for Brownian motion, meander and the three-dimensional Bessel processes, and applications, *J. Appl. Prob.* **21** (1984) 500-510.
- [18] C. Itzykson and J.-B. Zuber, The planar approximation. II, *J. Math. Phys.* **21** (1980) 411-421.
- [19] K. Johansson, Discrete polynuclear growth and determinantal processes, *Commun. Math. Phys.* **242** (2003) 277-329.
- [20] S. Karlin and J. McGregor, Coincidence properties of birth and death processes, *Pacific J. Math.* **9** (1959) 1109-1140.
- [21] S. Karlin and J. McGregor, Coincidence probabilities, *Pacific J. Math.* **9** (1959) 1141-1164.
- [22] 香取眞理, 「非衝突乱歩系・シューア関数・ランダム行列」, 『応用数理』 **13** (No.4) (2003) 16-27 ([296]-[307]).
- [23] M. Katori, Non-colliding systems of Brownian particles as pfaffian process, 京大数理解析研講究録に掲載予定.
- [24] M. Katori, T. Nagao, and H. Tanemura, Infinite systems of non-colliding Brownian particles, *Adv. Stud. in Pure Math.* **39** “*Stochastic Analysis on Large Scale Interacting Systems*”, (Mathematical Society of Japan, Tokyo, 2004), pp.283-306; arXiv:math.PR/0301143.
- [25] M. Katori and H. Tanemura, Scaling limit of vicious walks and two-matrix model, *Phys. Rev. E* **66** (2002) 011105/1-12; arXiv:cond-mat/0203549
- [26] M. Katori and H. Tanemura, Functional central limit theorems for vicious walkers, *Stoch. Stoch. Rep.* **75** (2003) 369-390; arXiv:math.PR/0203286.
- [27] M. Katori and H. Tanemura, Noncolliding Brownian motions and Harish-Chandra formula, *Elect. Comm. in Probab.* **8** (2003) 112-121; arXiv:math.PR/0306386.
- [28] M. Katori and H. Tanemura, Symmetry of matrix-valued stochastic processes and noncolliding diffusion particle systems, *J. Math. Phys.* **45** (2004) 3058-3085; arXiv:math-ph/0402061.

- [29] M. Katori and H. Tanemura, Nonintersecting paths, Noncolliding diffusion processes and representation theory, 京大数理解析研講究録に掲載予定; arXiv:math.PR/0501218.
- [30] M. Katori and H. Tanemura, 投稿準備中.
- [31] M. Katori, H. Tanemura, T. Nagao and N. Komatsuda, Vicious walk with a wall, noncolliding meanders, chiral and Bogoliubov-de Gennes random matrices, *Phys. Rev. E* **68** (2003) 021112/1-16; arXiv:cond-mat/0303573
- [32] W. König and N. O’Connell, Eigenvalues of the Laguerre process as non-colliding squared Bessel process, *Elec. Comm. in Probab.* **6** (2001) 107-114.
- [33] C. Krattenthaler, A. J. Guttmann, and X. G. Viennot, Vicious walkers, friendly walkers and Young tableaux: II. With a wall, *J. Phys. A: Math. Phys.* **33** (2000) 8835-8866.
- [34] M. L. Mehta, *Matrix Theory*, Editions de Physique, (Orsay, 1989).
- [35] M. L. Mehta, *Random Matrices*, 2nd ed. (Academic Press, London, 1991).
- [36] M. L. Mehta and A. Pandey, On some Gaussian ensemble of Hermitian matrices, *J. Phys. A: Math. Gen.* **16** (1983) 2655-2684.
- [37] T. Nagao, Correlation functions for multi-matrix models and quaternion determinants, *Nucl. Phys.* **B602** (2001) 622-637.
- [38] T. Nagao and P. J. Forrester, Multilevel dynamical correlation function for Dyson’s Brownian motion model of random matrices, *Phys. Lett.* **A247** (1998) 42-46.
- [39] T. Nagao and P. J. Forrester, Quaternion determinant expressions for multi-level dynamical correlation functions of parameteric random matrices, *Nucl. Phys.* **B563[PM]** (1999) 547-572.
- [40] T. Nagao, M. Katori, and H. Tanemura, Dynamical correlations among vicious random walkers, *Phys. Lett.* **A 307** (2003) 29-35; arXiv:cond-mat/0202068.
- [41] H. Osada, Dirichlet form approach to infinite-dimensional Wiener processes with singular interactions, *Commun. Math. Phys.* **176** (1996) 117-131.
- [42] H. Osada, Non-collision and collision properties of Dyson’s model in infinite dimension and other stochastic dynamics whose equilibrium states are determinantal random point fields, *Adv. Stud. in Pure Math.* **39** “Stochastic Analysis on Large

- Scale Interacting Systems*”, (Mathematical Society of Japan, Tokyo, 2004), pp. 325-343.
- [43] A. Pandey and M. L. Mehta, Gaussian ensembles of random Hermitian matrices intermediate between orthogonal and unitary ones, *Commun. Math. Phys.* **87** (1983) 449-468.
- [44] M. Prähofer and H. Spohn, Scale invariance of the PNG droplet and the Airy process, *J. Stat. Phys.* **108** (2002) 1071-1106.
- [45] E. M. Rains, Correlation functions for symmetrized increasing subsequences, arXiv:math.CO/0006097.
- [46] D. Revuz and M. Yor, *Continuous Martingales and Brownian Motion*, 3rd ed. (Springer, New York, 1998).
- [47] T. Sasamoto and T. Imamura, Fluctuations of the one-dimensional polynuclear growth model in half space, *J. Stat. Phys.* **115** (2004) 749-803.
- [48] T. Shirai and Y. Takahashi, Random point fields associated with Fermion, Boson and other statistics, *Adv. Stud. in Pure Math.* **39** “*Stochastic Analysis on Large Scale Interacting Systems*”, (Mathematical Society of Japan, Tokyo, 2004), pp. 345-354.
- [49] A. Soshnikov, Janossy densities. II. Pfaffain ensemble, *J. Stat. Phys.* **113** (2003) 611-622.
- [50] A. Soshnikov, Janossy densities of coupled random matrices, *Commun. Math. Phys.* **251** (2004) 447-471
- [51] H. Spohn, Interacting Brownian particles: a study of Dyson’s model, in *Hydrodynamic Behavior and Interacting Particle Systems* (G. Papanicolaou Ed.), IMA Volumes in Mathematics and its Applications **9**, (Springer, 1987).
- [52] J. R. Stembridge, Nonintersecting paths, pfaffians, and the plane partitions, *Adv. in Math.* **83** (1990) 96-131.
- [53] G. Szegő, *Orthogonal Polynomials*, 4th edition, (American Mathematical Society, 1975).
- [54] M. Yor, *Some Aspects of Brownian Motion, Part I: Some Special Functionals*, (Birkhäuser, Basel, 1992).