

# 対称性と調和と酔歩と… 数学ワンダーランドへの誘い

香取眞理

●中央大学理工学部

## ダイヤモンドは なぜ美しい？

離散調和解析入門

著／砂田利一

発行所／シュプリンガー・ジャパン

発行日／2006年10月3日

判型／A5判

ページ数／245ページ

定価／2835円



本書のいう「結晶格子」とは抽象的な無限グラフであり、平面上や空間内に周期的に実現され得るものである。それは天上あるいは我々の頭の中に存在し、目に見える図形として実空間に実現されたものである「結晶」とは区別して考える。例えばブロック塀を正面から見たときの形も蜂の巣の断面図も、頂点や辺の位置は無視してそれらの結合関係だけを考えることにすれば、同じ抽象的グラフとなる。このときブロック塀と蜂の巣は、「蜂の巣格子」という一つの抽象的グラフの相異なる二つの実現(平面上の結晶)と見なすのである。このように、一つの結晶格子に対して一般にはさまざまな周期的実現(結晶)が存在し得るのであるが、その中で「一番美しく」見えるのはどれであろうか。この問いかけが本書のテーマである。

著者曰く「これはすべての科学について言えることですが、ともかく問題意識を持たなければ何も始まりません。そして、数学はこの問題意識を研ぎ澄ます機能を持っています。」本書はこの問いか

けを数学的に定式化し、その意義を説明し、数学的な答えを与えるものである。

結晶の「美しさ」とは数学的には何を意味するのか。抽象的グラフとしての結晶格子は、グラフの自己同型群として表される内部対称性を持っている。他方、周期的実現の持つ外部対称性は結晶群として表現される。一般には、実現された外部対称性の方が元来の内部対称性よりも対称性が低くなってしまい、結晶群から自己同型群への写像は全射とはならない。しかしこれが同型写像となる場合がある。このときは外部対称性は内部対称性と一致し、よって元来の結晶格子の対称性を余すところなく実現することになる。これを「最大対称性を持つ周期的実現」という。蜂の巣とダイヤモンドは、それぞれ蜂の巣格子とダイヤモンド格子に対する最大対称性を持つ周期的実現なのである。それがゆえに美しいというわけである。

最大対称性を持つ周期的実現が、しかし何通りもあつたら、我々の目にありふれたものとは映らず、

特段美しいものには見えないだろう。その実現のユニークさこそが問題である。実現の周期性を規定するために、抽象的周期格子群をあらかじめ指定しておく必要がある。これのある写像  $\rho$  で実空間に写すことにより、実空間での周期格子群が定義され、実現の周期性が表現できるのである。正しく定義された「エネルギー」関数に対して、写像  $\rho$  を選ぶごとにその値を最小にする実現を調和的实现という。さらに写像  $\rho$  も動かしたとき、エネルギーを最小にする実現を標準的实现という。この標準的实现こそが最大対称性を有するということと、それが本質的には抽象的周期格子群の取り方には依存しないという唯一性が、定理の形で提示される。この定理は確率論を用いて証明される。抽象的グラフ(結晶格子)に対してランダム・ウォークを定義し、ステップ数を大きくしたときの推移確率の様子を調べる。するとその漸近挙動は、標準的实现によって記述されるというのである。この極限定理は、内部対称性はそのまま標準的实现に遺伝されること、また抽象的周期格子群の取り方を変えても標準的实现が相似変換されるだけであることを明示している。

本書にちりばめられている綺麗な図や賢者の名言、そして蕙蓋は(おのおの大変魅力的ではあるが)単なる装飾である。本書は優れた数学のテキストである。十分な時間をかけて読み通すことによって、話の本筋を深く楽しむことを勧める。

[かとりまこと]