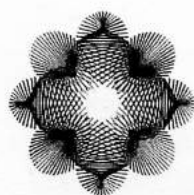


偶然を科学する

統計力学と確率論



香取 眞理

1. はじめに

高校で物理や化学を習った人は、理想気体の状態方程式というのを覚えていることだろう。もともとは実験データから導き出された『一定質量の気体の体積 V は、圧力 p に反比例し、絶対温度 T に比例する』というボイル・シャルルの法則に「正確に従う」気体として理想気体が定義される（絶対温度 T とは、セ氏 -273.15 度の絶対零度を 0 とし、セ氏温度と同じ 1 度刻みで測った温度。単位はケルビン (K)）。一定質量という代わりに、一定の物質質量 n モル (mol) の気体を考えることにして、この方程式は

$$pV = nRT \quad (1)$$

と表される。ここで、 R は気体定数とよばれる物理定数で、 $R = 8.31$ [J/mol·K] で与えられる（ジュール (J) はエネルギーの単位）。

ボイル・シャルルの法則は低温や高圧ではだめだが、希薄気体では成り立つ。理想気体は希薄気体を「理想化」したものなのである。気体分子間に力（相互作用）がはたらくことはなく、また各分子に大きさはなく単なる点で表されると仮定する。つまり、空間の中を膨大な数の点が勝手気ままに飛び回っているという状態である。

いま、この理想気体分子がどのように飛び回っているのか、目で見ることができたとしよう。紙面で表せるように、2次元平面上的理想気体を考え

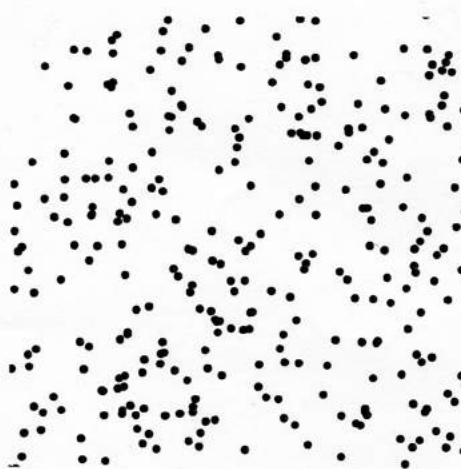


図 1

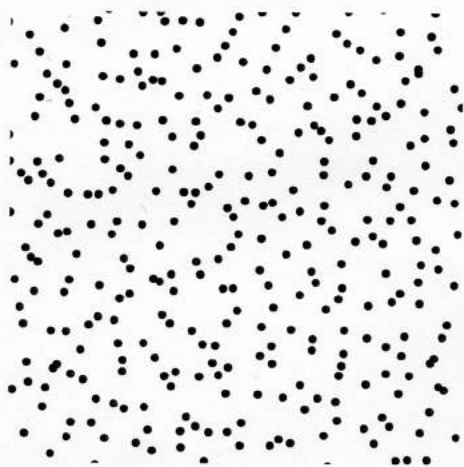


図 2

ることにする。ある瞬間にカシャッと写真に撮ったとしたら、理想気体分子を表す点の配置はどん

な風に写るのであろうか。図 1 と図 2 として 2 つの点配置を示した。点の密度 (単位面積あたりの点の個数) は両方の図で同じにしてある。さて、どちらであろうか。

分子間に、互いに退け合う斥力も、引き付け合う引力もはたらかないとすると、粒子の配置は空間的に一様なものになるはずである。そう考えると図 2 が正解と思われる。図 1 では点が集まってしまった所があり、そのため逆にスカスカになってしまっている部分がある。‘一様には見えない’からである。

ところが、正解は図 1 なのである。『ガリレオシリーズ』で物理学者 湯川学は「現象には必ず理由がある」と言い切る。しかし、図 1 に見られる点の粗密はまったくの偶然の産物なのである。平面上にたくさんの点をでたらめに打つと、このような図が得られるのである。点が集中したり疎らになったりするの、結果的にそうなっただけで、そこには何の理由もない。このような「理由もなく起こる現象」もまた自然科学の対象であり、そのための理論が統計力学と確率論である。

すこし数式を使って説明してみることにしよう。まずは理想気体に対する統計力学の理論から、図 1 に示したような点分布を導き出す。その後、図 2 の点分布について述べることにする。図 2 のように‘一様に見える’点配置を実現するにはなんらかのトリックが隠されていることになる。そのトリックとは、近年確率論で大きな話題になっているランダム行列理論^{1,2)}である。

2. 理想気体の統計力学とポアソン点過程

アボガドロ定数 $N_A = 6.02 \times 10^{23}$ に等しい個数の分子があるとき 1 モルというので、 n モルの気体の中には分子が $N = nN_A$ 個存在することになる。単位体積あたりの分子の個数 N/V を粒子数密度とよび ρ [$1/\text{m}^3$] で表すと、(1) 式は

$$p = k_B T \rho \quad (2)$$

とも表せる。ただし、

$$k_B = \frac{R}{N_A} = 1.38 \times 10^{-23} \text{ [J/K]} \quad (3)$$

であり、これをボルツマン定数という。

気体が入っている容器の体積は非常に大きく、その中のごく一部の有界領域 Δ に着目する。この領域 Δ の体積を v とし、その中にある粒子の個数を $N(\Delta)$ と書くことにする。理想気体の分子は、上述のように、広い空間の中を自由に飛び回っているので、 $N(\Delta)$ の値は刻一刻変わっていくことになる。したがって、 $N(\Delta)$ は不確定である。しかし、系の絶対温度 T を一定に保った熱平衡状態においては、この値はある一つの関数に従って分布することになる。実現値はさまざまであるが、それらの平均値や分散などは計算できて確率的な振舞いは確定する。統計力学の一般論によると、 $n = 0, 1, 2, \dots$ に対して $N(\Delta) = n$ となる確率は

$$P(n) = \frac{\lambda^n Z_n(T)}{\Xi(T, \lambda)} \quad (4)$$

で与えられる。ただしここで、 λ はフガシティ (逸散能) とよばれる熱力学的パラメータであり、 $Z_n(T)$ と $\Xi(T, \lambda)$ はそれぞれ分配関数と大分配関数とよばれる熱力学的関数である。(4) は確率分布なので、当然、その和は $\sum_{n=0}^{\infty} P(n) = 1$ である。つまり、

$$\Xi(T, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n Z_n(T) \quad (5)$$

という等式が成り立たなければならないことになる。また、統計力学の一般的な理論において、圧力 p と $\Xi(T, \lambda)$ を関係づける

$$p = \frac{k_B T}{v} \ln \Xi(T, \lambda) \quad (6)$$

という公式が知られている³⁾。

この一般公式 (6) を、いま考えている理想気体の状態方程式 (2) と比較すると、 $(\ln \Xi(T, \lambda))/v = \rho$ 、すなわち、

$$\Xi(T, \lambda) = e^{\rho v} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\rho v)^n \quad (7)$$

が結論される。ただし、2 番目の等式では指数関

数のマクローリン展開の公式 $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$ を用いた。そこで今度はこの式を (5) 式と比較すると、等式 $\lambda^n Z_n(T) = (\rho v)^n/n!$ を得るので、その結果と (7) の最初の等式を使って (4) を書き直すと、分布関数に対して

$$P(n) = \frac{(\rho v)^n}{n!} e^{-\rho v} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (8)$$

という表式が得られる。粒子数 $n = 0, 1, 2, \dots$ に対して (8) の分布関数で表される分布を、パラメータ ρv のポアソン分布という。

互いに共通部分をもたない m 個の有界領域 $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_m$ の体積がそれぞれ v_1, v_2, \dots, v_m であるとして、各部分領域 Δ_k の中にたまたま存在する粒子の個数を $N(\Delta_k)$ ($1 \leq k \leq m$) と書くことにする。理想気体においては粒子間の相互作用はないので、互いに共通部分をもたない領域の間に統計的な相関が生じることはなく、 $N(\Delta_k)$ はそれぞれ独立に分布することになる。よって、 $N(\Delta_k) = n_k$ ($1 \leq k \leq m$) が実現する確率は、(8) 式の積

$$\prod_{k=1}^m P(n_k) = \prod_{k=1}^m \left\{ \frac{(\rho v_k)^{n_k}}{n_k!} e^{-\rho v_k} \right\} \quad (9)$$

で与えられることになる³⁾。任意の m と任意の $\Delta_1, \dots, \Delta_m$ に対して点の個数分布が上の式によって与えられるとき、この点の統計集団を、密度 ρ のポアソン点過程という (点過程という言葉を使うが、時間的に発展するプロセスという意味ではなく、あくまで点の集まりの静的な統計法則に対する名前である)。この確率法則に従って、パソコンを使って平面上に点をプロットしたのが図 1 である。

各領域 Δ_k の中にある点の平均値は

$$\langle N(\Delta_k) \rangle = \sum_{n_k=0}^{\infty} n_k P(n_k)$$

で与えられる。(8) 式を代入して、指数関数のマクローリン展開の公式を用いると、 $\langle N(\Delta_k) \rangle = \rho v_k$ という答を得ることが⁴⁾できる。領域 Δ_k の体積を v_k としたので、粒子数密度の平均値は $\langle N(\Delta_k)/v_k \rangle = \rho v_k/v_k = \rho$ であり、 k には依

らない。この意味で、ポアソン点過程は一様な点分布なのである。

上で述べたように、ポアソン点過程は、任意の個数だけ任意の有界領域を選んだとき、それらの中の粒子数の確率分布を指定することで定義された。したがって、無限に広がった空間に無限個の点がばらまかれているといった場合にも、ポアソン点過程が定義されることになる。その意味で‘理想的な一様分布’なのである。ただ、ある一部分の点配置のスナップショットを撮ると、図 1 のように粗密が見られる。たまたま、偶然にである。

3. 正規分布と理想気体分子の速度分布

粒子の個数 $N(\Delta)$ といった離散的な値 (具体的には 0 以上の整数) をとる乱数 (あるいは確率変数という) の確率分布の代表例が (8) 式で与えたポアソン分布とすると、連続的な値 (具体的には実数) をとる確率変数が従う確率分布の代表例は正規分布 (ガウス分布) である。実数 μ と $\sigma > 0$ に対して

$$p_{(\mu, \sigma^2)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} \quad (10)$$

とする。乱数 X が平均 μ 、分散 σ^2 の正規分布に従うとは、任意の $-\infty < a < b < \infty$ に対して、 $a \leq X \leq b$ である確率が⁵⁾

$$\int_a^b p_{(\mu, \sigma^2)}(x) dx \quad (11)$$

で与えられることを意味する。これを、 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ と略記する。関数 (10) を正規分布の確率密度とよぶ。連続変数の場合、確率を計算するときには (11) 式のように必ず積分を行うので、確率密度に積分のルベグ測度 dx をかけた $p_{(\mu, \sigma^2)}(x) dx$ が確率分布の‘単位’となる。これを確率測度とよぶ。

正規分布が実数値乱数が従う分布の代表例であることは、理想気体分子の速度分布について考えてみると納得できる。理想気体分子の質量を m とする。空間中を自由に飛び回っている各粒子の速

度ベクトルを $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ と書くことにすると、絶対温度 T の熱平衡分布にあるとき

$$v_\alpha \sim N\left(0, \frac{k_B T}{m}\right) \quad (\alpha = x, y, z) \quad (12)$$

なのである。平均 $\mu = 0$ なので、分散 σ^2 は 2 乗平均に等しく、 $\langle v_\alpha^2 \rangle = k_B T/m$ ($\alpha = x, y, z$) である。したがって、速度ベクトルの各成分がもつ運動エネルギーの平均値は

$$\left\langle \frac{mv_x^2}{2} \right\rangle = \left\langle \frac{mv_y^2}{2} \right\rangle = \left\langle \frac{mv_z^2}{2} \right\rangle = \frac{k_B T}{2}$$

ということになる。これはエネルギー等分配則に他ならない。粒子にポテンシャル・エネルギーがはたらくことはなく、また粒子は単なる点として振る舞うとすると、各粒子の速度ベクトルの 3 つの成分に等分配されたエネルギーの値 $k_B T/2$ を $3N$ 倍することにより、系全体のエネルギーの平均値が $3N \times (k_B T/2)$ と求まることになる。(3) 式とモル数の定義式 $n = N/N_A$ を思い出すと、これが高校の物理でも習った理想気体の内部エネルギーの公式 $U = (3/2)nRT$ であることが分かることだろう。

4. ランダム行列とジニーブル点過程

いま、 X_1 と Y_1 を 2 つの独立な乱数とし、ともに $X_1 \sim N(0, \sigma^2)$, $Y_1 \sim N(0, \sigma^2)$ とする。虚数単位を $i = \sqrt{-1}$ と書いて $Z_1 = X_1 + iY_1$ とおくと、複素数の乱数が 1 つ得られる。そこで、 $\{X_1, X_2, X_3, \dots\}$, $\{Y_1, Y_2, Y_3, \dots\}$ とそれぞれ独立で $N(0, \sigma^2)$ に従う乱数の列を考えたとすると、 $(Z_j = X_j + iY_j)_{j=1,2,3,\dots}$ というように複素数の乱数の列を得ることができる。例えば、このうちの N 個の複素乱数を横に並べて $\vec{Z} = (Z_1, Z_2, \dots, Z_N)$ とすると、'複素 N 次元のベクトルに値をとる乱数' が得られることになる。ここでは、 N^2 個の複素乱数を下の式のように順番に縦横に並べて、 $N \times N$ の複素行列 Z を定義することにする。

$$Z = \begin{pmatrix} Z_1 & Z_2 & \cdots & Z_N \\ Z_{N+1} & Z_{N+2} & \cdots & Z_{2N} \\ Z_{2N+1} & Z_{2N+2} & \cdots & Z_{3N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ Z_{(N-1)N+1} & Z_{(N-1)N+2} & \cdots & Z_{N^2} \end{pmatrix}$$

このような '行列に値をとる乱数' をランダム行列とよぶ。

一般に $N \times N$ の複素行列 Z が与えられたとき、ユニタリ行列 U を用いて

$$Z = U T U^\dagger \quad (13)$$

と変換することにより (U^\dagger は行列 U のエルミート共役)、上三角行列 $T = (T_{jk})_{1 \leq j, k \leq N}$ が得られる。ここで上三角行列とは、下三角の部分の成分がすべて零 ($T_{jk} = 0, j > k$) であるものをいう。T の対角成分は Z の固有値を与える。そこで特に、 $\Lambda_j = T_{jj}$ ($1 \leq j \leq N$) と書くことにしよう。

固有値 Λ_j ($1 \leq j \leq N$) は一般に複素数 $\Lambda_j = \text{Re } \Lambda_j + i \text{Im } \Lambda_j$ である。よって、各固有値 Λ_j は複素平面上の点を与える。それでは、上で述べたように正規分布に従って N^2 個の複素乱数をそれぞれ独立に発生させて作ったある 1 つの $N \times N$ のランダム行列 Z に対して、その N 個の複素固有値を複素平面上にプロットしたらどんな図が得られるのであろうか。実は、 $N = 1000$ としたときに得られた点のプロットの原点付近の一部分を拡大したのが図 2 なのである (σ の値は適当に定めた)。

$N \times N$ のランダム行列 Z の各成分の実部と虚部はそれぞれ独立なので、実現値 $\mathbf{z} = (x_j + iy_j)_{j=1}^{N^2}$ における確率測度は各々の確率測度の積

$$\prod_{j=1}^{N^2} \left\{ p_{(0, \sigma^2)}(x_j) p_{(0, \sigma^2)}(y_j) dx_j dy_j \right\} \quad (14)$$

で与えられる。それに対して、このランダム行列 Z の複素固有値 $(\Lambda_j)_{j=1}^N$ は図 2 が示すようにポアソン点過程ではなく、異なる点の間に排他的な相関があるので、その分布を示す確率測度は (14) 式のような単純な積の形ではない。正しい形はど

うやって導き出すことができるのだろうか。

ヒントを得るために、再び理想気体について考えてみることにしよう。前節で理想気体の3つの速度成分 v_x, v_y, v_z はそれぞれ独立同分布(12)に従うことを述べた。よって、速度ベクトル $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ の確率測度は

$$\begin{aligned} & \prod_{\alpha=x,y,z} \left\{ p_{(0,k_B T/m)}(v_\alpha) dv_\alpha \right\} \\ &= \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} e^{-m|\vec{v}|^2/2k_B T} \prod_{\alpha=x,y,z} dv_\alpha \end{aligned} \quad (15)$$

である。各粒子のエネルギーは $E = m|\vec{v}|^2/2$ で与えられるので、速度ベクトル \vec{v} の大きさ $v = |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$ だけの関数である。ベクトル $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ は速度ベクトルを表す3次元空間でのデカルト座標表示と見なすことができる。これを、同じ3次元空間での極座標表示 (v, θ, φ) に

$$\begin{aligned} v_x &= v \sin \theta \cos \varphi, & v_y &= v \sin \theta \sin \varphi, \\ v_z &= v \cos \theta \end{aligned} \quad (16)$$

に従って変換することを考えると、エネルギーはその動径成分 v だけの関数ということになる。確率測度(15)を(16)式に従って変換する際のポイントは、ヤコビアン $|J|$ を忘れずに計算することである。変換(16)に対しては $|J| = v^2 \sin \theta$ であるから、極座標表示では(15)式は

$$\left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} v^2 e^{-mv^2/2k_B T} \sin \theta dv d\theta d\varphi$$

となることが導かれる。エネルギー $E = mv^2/2$ に関係しない角度成分 θ, φ については積分して均してしまうと、 v に対する確率密度は

$$\frac{2m}{k_B T} v^2 p_{(0,k_B T/m)}(v) \quad (17)$$

となる。 $p_{(0,k_B T/m)}(v)$ には存在しない v の2乗に比例した因子が現れるのである。

さて、(13)式で与えられたランダム行列の間のユニタリー変換に対応して、 N^2 個の実変数対

$(x_j, y_j)_{j=1}^{N^2}$ の関数として与えられた確率測度から、固有値の値を表す N 個の複素変数 $(\lambda_j)_{j=1}^N$ 、上三角行列 T の対角成分以外の成分の値を表す複素変数 $(t_{jk})_{1 \leq j < k \leq N}$ 、および、ユニタリー行列 U の各成分を表す複素変数の関数としての確率測度へと変換しなければならない。後者の変数の個数は、実数で数えると $2N + 2 \times N(N-1)/2 + N^2 = 2N^2 + N$ となり、 $(x_j, y_j)_{j=1}^{N^2}$ の実数自由度 $2N^2$ よりも N 個多いので、 N 個の付加条件を課す必要がある。それをうまく行くと、この変数変換に伴うヤコビアンを計算することができる。その結果、(14)で与えられた確率測度は、以下のものに比例することが証明できる¹⁾。

$$\begin{aligned} & \prod_{1 \leq k < l \leq N} |\lambda_l - \lambda_k|^2 \prod_{j=1}^N \left\{ e^{-|\lambda_j|^2/2\sigma^2} d\lambda_j d\bar{\lambda}_j \right\} \\ & \times \prod_{1 \leq p < q \leq N} \left\{ e^{-|t_{pq}|^2/2\sigma^2} dt_{pq} d\bar{t}_{pq} \right\} \times dU. \end{aligned}$$

ここで、一般に複素数 z に対して、その複素共役を \bar{z} と書き、 $|z|^2 = z\bar{z}$ とした。 dU はユニタリー行列に対するルベグ測度であり、特にハール測度とよばれる。 $(\lambda_j)_{j=1}^N$ 以外の変数については積分をして均してしまうことにより、ランダム行列 Z の複素固有値 $(\Lambda_j)_{j=1}^N$ に対する確率測度が得られることになる。

再び、複素平面を2次元実平面と見なすことにして、その上の N 個の点の座標 $(X_j^G, Y_j^G)_{j=1}^N$ を $X_j^G = \text{Re } \Lambda_j, Y_j^G = \text{Im } \Lambda_j$ ($1 \leq j \leq N$) で与えることにする。このランダムな N 個の点 $(X_j^G, Y_j^G)_{j=1}^N$ の2次元平面上の確率密度は

$$\begin{aligned} & c_N(\sigma^2) \prod_{1 \leq k < l \leq N} \left\{ (x_l - x_k)^2 + (y_l - y_k)^2 \right\} \\ & \times \prod_{j=1}^N \left\{ p_{(0,\sigma^2)}(x_j) p_{(0,\sigma^2)}(y_j) \right\} \end{aligned} \quad (18)$$

となる。ただし、 $c_N(\sigma^2) = [(2\sigma^2)^{N(N-1)/2} \prod_{n=1}^N n!]^{-1}$ 。この確率密度で指定される2次元平面上の点分布はジニーブル点過程とよばれる^{1,2)}。(17)式で v の2乗に比例した因子が現れたのに対応して、(18)では点の対 (k, l) それぞれに対して、その間の距離

の2乗を与える因子 $r_{k,l}^2 \equiv (x_l - x_k)^2 + (y_l - y_k)^2$ が現れ、すべての対にわたる積が乗算されている。(3次元中の1粒子問題とランダム行列理論との類似性は単なる偶然ではない⁴⁾。)つまり、どの2点の対に関しても、その間の距離が縮まると、その点配置が出現する確率は減少するのである。言い換えると、高い確率で出現する点配置は、点の間の距離がすべてある程度大きいものになっているようなものに限られるということになる。まさに、図2が表している点配置がそれであった。

$V(x) = -\ln x$ とおくと、

$$\prod_{1 \leq k < l \leq N} r_{k,l}^2 = e^{-\sum_{1 \leq k < l \leq N} V(r_{k,l})/k_B T}$$

と表せる。ただし、 $k_B T = 1/2$ とした。つまり、ジニープル点過程はすべての粒子間に対数関数で与えられる斥力ポテンシャルが作用する粒子系のある特別な温度 ($T = 1/2k_B$) での状態と見なせることになる。対数関数で与えられる斥力ポテンシャルは、2次元電子系のクーロン相互作用と同じものである。このような相互作用粒子系は対数ガスとよばれる²⁾。

5. 理想フェルミ気体の基底状態の量子ゆらぎ

統計力学と確率論以外にも、偶然性、すなわち不確定性を扱う理論として量子力学がある。『粒子の位置と運動量を同時に決定することはできない』というハイゼンベルクの不確定性原理の話聞いたことがあるだろう。最後に量子力学の観点からジニープル点過程を見てみよう。

2次元上の原点を力の中心とした調和振動子1個を考えることにする。振動は等方的で角振動数を ω とする。振動子の質量を m とし、量子力学を適用する。ハミルトニアンは

$$\mathcal{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + \frac{m\omega^2}{2} (x^2 + y^2)$$

で与えられる (\hbar はプランク定数 $h = 6.62 \times 10^{-34}$ [J·s] を 2π で割ったもの)。時間を含まな

いシュレーディンガー方程式は、 \mathcal{H} の固有方程式 $\mathcal{H}\psi(x, y) = E\psi(x, y)$ として与えられる。 E はエネルギー固有値、 $\psi(x, y)$ は固有関数 (波動関数) を表す。

1次元調和振動子のエネルギー固有値は $E_k = \hbar\omega(k + 1/2)$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) で与えられる。いま考えている系は、 x 方向と y 方向の直交する2つの1次元調和振動子の重ねあわせであるから、 $k_1, k_2 = 0, 1, 2, \dots$ とし、エネルギー固有値は $E_{k_1} + E_{k_2} = \hbar\omega\{(k_1 + k_2) + 1\}$ となるだろう。そこで、 $n = k_1 + k_2 = 0, 1, 2, \dots$ とし

$$\mathcal{H}\psi_n(x, y) = \hbar\omega(n + 1)\psi_n(x, y)$$

を解くことにしよう。この解は、 $\xi = \sqrt{\hbar/m\omega}$ という長さの次元をもった定数を導入することにより、

$$\psi_n(x, y) = \frac{e^{-(x^2+y^2)/2\xi^2}}{\xi\sqrt{\pi n!}} \left(\frac{x+iy}{\xi} \right)^n \quad (19)$$

で与えられる。この固有関数は正規直交系をなす。

2次元調和振動子が独立に N 個あったとしよう。振動子を量子化して得られる粒子はフォノン (音響子) であるから、普通に考えればボソンであるが、ここではフェルミオンであると仮定してみる。その場合、パウリの排他律より、 N 粒子波動関数は

$$\begin{aligned} & \Psi_{(n_l)_{l=1}^N}((x_k, y_k)_{k=1}^N) \\ &= \frac{1}{\sqrt{N!}} \det_{1 \leq k, l \leq N} [\psi_{n_l}(x_k, y_k)] \end{aligned} \quad (20)$$

で与えられる。これをスレーター行列式という。スピン自由度は考えていないので、エネルギー最低の基底状態は、下のレベルから各エネルギー単位に1つずつ粒子を詰めていった状態、すなわち (20) 式で $(n_l)_{l=1}^N = (l-1)_{l=1}^N = (0, 1, 2, \dots, N-1)$ としたとき得られる波動関数で記述される。この基底状態での N 粒子の存在確率密度は、波動関数の2乗、すなわち

$$\left| \Psi_{(l-1)_{l=1}^N}((x_k, y_k)_{k=1}^N) \right|^2 \quad (21)$$

で与えられることになる。

実は、 $\sigma^2 = \xi^2/2$ とおくと、ジニーブル点過程の確率密度 (18) は (21) 式に等しいのである。ファन्दルモンド行列式の恒等式

$$\det_{1 \leq k, l \leq N} [z_k^{l-1}] = \prod_{1 \leq k < l \leq N} (z_l - z_k)$$

を $z_k = x_k + iy_k$ ($1 \leq k \leq N$) に対して使い、あとは行列式の多重線形性を用いれば証明できる。

スレーター行列式 (20) は 1 粒子波動関数 (19) の積の交代和である。よって、粒子間には相互作用はなく、この系は理想フェルミ気体とよぶべき系である。相互作用はないがパウリの排他律ははたらく。基底状態は絶対零度で実現することになるので、熱的なゆらぎはない。しかし、ハイゼンベルクの不確定性原理のために粒子の配置は不確定であり、確率的にしか定まらない。それでも、あ

る瞬間にカシャッと粒子の空間配置の写真を撮ることができたとしたら、図 2 のようなものが写ることになるのだろう。

以上、偶然性と不確定性の中に隠された法則性について書いてみた。本稿の執筆にあたり、セルヒオ・アンドラウス氏に手伝っていただいた。深く感謝する。

参考文献

- 1) 永尾太郎：『ランダム行列の基礎』、東京大学出版会 (2005)。
- 2) 伊藤清 (企画・監修)、渡辺信三、重川一郎 (編)：『確率論ハンドブック』、丸善出版 (2012) の中の長田博文 (執筆)、11.5 ランダム行列。
- 3) 香取眞理：『統計力学』、裳華房 (2010)。
- 4) M. Katori: *Bessel Processes, Schramm–Loewner Evolution, and the Dyson Model*, Springer (2016)。

(かとり・まこと、中央大学理工学部)

好評発売中!!

SGC ライブラリ-117 幾何学的に理解する 物理数学

園田英徳著 / B5 判・184 頁・本体 2296 円

大学理工系の学部三年生以上を対象に物理数学の基礎事項を図を多く用いて解説。ベクトル解析、空間の回転、微分形式には特にページを割き、一連の内容を深く理解できるようにしている。一回学んでよくわからなかったことをもう一度復習し、そのエッセンスを理解するにはうってつけの参考書。

主要目次 エネルギー保存則 2重積分 ベクトル解析 空間の回転 剛体の回転運動 連続の方程式 Legendre 変換 微分形式入門 複素解析 変分原理 付録 A 電磁気の単位系

表示価格は税抜きです

[サイエンス社]