経済物理の偶然と必然

香 取　眞 理

1. はじめに

経済物理（econophysics）は，経済学（economics）と物理学（physics）という2つの言葉をつなげて作られた造語である．この2つの橋渡しをすることを目的として1990年代後半に生まれた新しい研究分野を表す．経済現象を科学的・数理的に分析するという意味では，計量経済学や金融工学と共通するものであるが，特に「物理学」の視点に立って経済現象を理解しようとする点にそのユニークさがある．すなわち経済物理は，相転移・臨界現象，カオスとフラクタル，スピングラスやニューラル・ネットワークといった，主に統計物理学の分野での研究に携わってきた人々，あるいはその研究成果に深い関心のある人々によって提唱された新しい研究ターゲットを意味する．「複雑系科学」の最新の応用分野の一つと言ってもよいかもしれない．

もっとも今日，経済物理の研究集会には経済学者やディーラーと呼ばれる金融の現場で仕事をしている人も多く参加するようになり，上述の経緯を超えて，学際的な研究分野の様相を呈してきている．そしてそれに伴うニーズに応えるために，経済物理の研究結果に基づいて，経済活動に対して提言を与える試みも始まっているようである[1)]．経済物理の生まれた背景とこれまでの研究についてすでに国内外でいくつかの教科書が出版されており[2~5)]，また最新の研究成果を報告した特集号も出されている[6)]．これらについては，参考文献を参照していただきたい．

私の研究室にいた大学院生の2人が経済物理に興味を持ち，この分野の創始者である高安秀樹氏（ソニー・コンピュータサイエンス研究所）と高安美佐子氏（東京工業大学大学院知能システム科学）に研究指導を受けていたことがある．私もそのときセミナーに参加したり，研究集会に出かけて行ったりして，新しい研究分野が創生される現場で，大学院生たちが嬉々として研究に励む姿を見ることができた．今後ますます研究が進展することを願うとともに，少し違った視点から見ても，経済物理という研究は大変魅力的なものであると思っている．と言うのは，経済現象を科学的・数理的に分析するという試みが，今回は複雑系科学という従来の還元論的な分析手法を超えようとする新しい潮流の中で生まれたため，その試みを通じて「現代物理学とは何であるか」という問題と対峙することができるように思うからである．そしてまた経済物理には，現代物理学を経済現象に応用するという物理から経済に向かう作用だけでなく，経済現象という複雑系を取り扱うことによって現代物理学自身の幅を広げ，その内容をさらに豊富なものにするという，経済から物理へ向いた作用も期待できると思うのである．

現代物理学と経済物理に共通するキーワードは「揺らぎ」である．揺らぎこそが，古典的な決定論的自然観を打破し，単純な還元論的理解の無効性を証明する．他方，経済現象に対する人々の最大の関心事は価格の揺らぎであると言ってもよいだろう．株価や為替レートの揺らぎをうまく予測できれば金儲けができるだろうし，深刻な金融破綻を回避できるかもしれない．揺らぎの法則性を解明することによって初めて，必然と偶然とが共存して見える複雑なこの世の中を理解することができるのであろう．

2. 現代物理は揺らぎの精密科学

現代物理学とは通常，量子力学と統計力学を指す．ニュートン力学，熱力学，電磁気学や流体力学など19世紀末までに完成した分野に対して，主に20世紀に入っ

てから創生し発展した分野であるからである．もっとも，もう 21 世紀であり，アインシュタインの奇跡の年から 100 年を経た今日から見れば，20 世紀初頭は過去であり，現代と冠することにためらいも生じてくる．そこでここでは，「現代物理学とは，揺らぎの法則を明らかにして，そこから自然を理解しようとする点において，古典物理学とは一線を画するものである」という見方を提案することにする．ただし「揺らぎ」とは，一般に不確定性を意味するものとしておく．こうしておけば，古典力学系を記述する非線形方程式に対するカオス理論も，相転移・臨界現象に関係するフラクタル幾何学も，繰り込み群理論と同様に現代物理学に含まれることになり，「20 世紀以降の…」とする“歴史に基づく定義”と矛盾しない．

量子力学で扱う揺らぎは，物質の位置と運動量とを同時に決定することはできないというハイゼンベルクの不確定性原理から生じるものである．例えば，糸の一端に錘をぶら下げた単振り子を考えてみよう．最もエネルギーの低い安定した状態は，古典力学的に考えれば当然，振り子が静止した状態である．このとき錘は最も低い位置にあり，この位置での重力ポテンシャルを零と定めれば（静止しているので運動エネルギーも零なので），全エネルギーは零である．ところがこの状態は，錘の位置を確定してしまっていることになっているので，ハイゼンベルクの不確定性原理に反し量子力学的には許されないのである．振り子は必ず振動していなければならない．振動していれば位置と運動量はともに不確定である．こうして，量子力学的には振り子の最低エネルギー状態は零点振動をしている状態であり，そのエネルギーは振り子の固有角振動数を ω [ラジアン/秒] として

$$\frac{1}{2}\hbar\omega\,[\text{ジュール}] \tag{1}$$

で与えられることになる．

他方，統計力学で扱う揺らぎは，分子の熱揺らぎ（熱運動・熱雑音）である．絶対温度が T [K] の多粒子系において，分子 1 つの運動エネルギーの熱揺らぎの大きさは，1 自由度あたり

$$\frac{1}{2}k_{\mathrm{B}}T\,[\text{ジュール}] \tag{2}$$

で与えられる．花粉から出る微粒子が水中で不規則に激しく動く様子を顕微鏡で見ることができる．この運動は水分子の熱揺らぎから説明できるというのがアインシュタインのブラウン運動の理論であった．分子や原子はあまりに小さすぎて見ることはできないが，それらの熱揺らぎの効果を見ることは容易なのである．

このように並べると，確かに量子力学と統計力学を揺らぎの理論としてパラレルに見ることに意味がありそうである．ここで強調すべきことは，この基本的な揺らぎの大きさは，それぞれきっちりとその値が定まった物理定数で与えられているということである．まず (1) 式の $\hbar$ はプランク定数 $h = 6.6260755 \times 10^{-34}$ [ジュール・秒] を円周率の 2 倍で割ったものである．また (2) 式の k_{B} は，理想気体の状態方程式 $pV = nRT$ に現れる気体定数 $R = 8.314510$ [ジュール/モル・K] をアボガドロ数 $N_{\mathrm{A}} = 6.0221367 \times 10^{23}$ [1/モル] で割ったものであり，ボルツマン定数と呼ばれる．(2) 式は，温度が上がるにつれて熱揺らぎが大きくなるということだけではなく，その大きさが，絶対零度 -273.15 [℃] から測った絶対温度に正確に比例するということを意味している．揺らぎというと不確定でどこか捉えどころのないものを想像するのが普通ではあるが，現代物理学においては，揺らぎのスケールは精密に決定されているのである．

3. 揺らぎの起源は我々の置く設定

経済学と言うと，商品の価格は需要曲線と供給曲線との交点で表される両者の釣り合いの位置によって定まるという，アダム・スミスに始まる均衡理論を思い出す人が多いことだろう．私もその一人であるが，需要と供給とが安定に均衡する状況というものは現実には見られないというのが本当のところなのだそうだ．両者が最も平均的に均衡していると思われるオープンマーケットの価格変動は，実際には大変複雑であり，その時系列のグラフに見られるスケール不変性から，フラクタルという概念を発展させたというマンデルブロの話は有名である．それでは，この均衡点からのずれの振舞い，すなわち価格の揺らぎの起源は何であるのか？

経済学においては，均衡理論は理想的には正しいとして議論を進めるのが常道のようである．現実の市場に，均衡状態の実現やその安定性を妨げる欠陥があるために，副次的に揺らぎが生じるという考え方である．しかし，上述のオープンマーケットの例のように，ネットワークの整備などによって売り買いの条件の情報伝達をより円滑にすればするほど，短時間での売り買いが可能になるので，均衡が実現するどころか逆に価格

変動が激化してしまうというのが現実である．

経済学の均衡理論は，振り子やバネに付けられた錘に働く力とその釣り合いに対する古典力学的な議論のアナロジーである．この古典物理学的な描像に，新たに揺らぎの効果を取り込むことができたならば，その理論こそ「現代」経済学と呼ぶのに相応しい．ただし前節で注意したように，真に現代と冠するためには，その揺らぎを定量的に議論し，精密に計算できる理論が得られなければならない．

経済物理の研究者は，均衡状態というものの存在自体に疑問を持っているようである．価格の時系列がフラクタル構造をもつことと併せて考えると，安定な均衡は存在せず，むしろ（通常は相転移点近傍でのみ見られる）臨界状態と同様の状態が実現しているのではないかと考えているようである[1,3]．為替レートのデータを見ると，日銀の介入などの外的な作用が及ぼす影響は短期間に限られ，しばらくするとまた不安定な変動が復活することから，市場は自己組織化臨界現象[7]の一つであるのかもしれない．しかしここでは，素朴な古典 vs. 現代という対比で考えてみることにする．そこでまずは，量子力学と統計力学の揺らぎの起源を復習してみることにしよう．

花粉から出る微粒子やコロイド粒子のブラウン運動は，目に見えないミクロな水分子にランダムに突き動かされた結果である．それでは，水の分子の熱揺らぎの原因は何なのか．原子や分子は真空中を運動しているので，もはやそれらを突き動かすようなものは周囲に存在しない．実は熱揺らぎの原因は，「粒子系が絶対温度 T であるとき」という状況設定にあるのである．我々が部屋の温度を（快適な温度に）保つためには，窓を閉めきって部屋のエネルギーを一定に保っていたのではだめである．部屋が寒すぎれば暖房を入れて暖める（エネルギーを上げる）し，暑すぎれば窓を開けて冷たい外気を入れる（エネルギーを下げる）．つまり内と外とのエネルギーのやり取りを上手に行うことが必要なのである．これを統計力学の言葉で言うと，粒子系のエネルギー E をうまく分布させるということになる．そして，うまい分布とはボルツマン因子と呼ばれる重み $\exp(-E/k_\mathrm{B}T)$ の下での分布を意味するのである．

ここで考えたエネルギーとは，部屋全体のエネルギー，すなわち粒子系の全エネルギーである．いまこのエネルギーが分布するといったが，たとえ全エネルギーが一定であったとしても，室内の分子のミクロな状態は，運動方程式に従って刻一刻と変化するはずである．一般に，全エネルギーは同じ値 E であるがミクロには異なる状態はたくさんある．その数 $\Omega(E)$ は，E の値が増すとともに増える．この割り増しの効果も考慮すると，絶対温度が T のときの熱揺らぎの期待値は，分配関数

$$Z = \int_0^\infty \Omega(E) e^{-E/k_\mathrm{B}T}\, dE \tag{3}$$

で規格化された確率密度

$$P(E) = \frac{1}{Z}\Omega(E) e^{-E/k_\mathrm{B}T} \tag{4}$$

を用いて，

$$\langle E \rangle = \int_0^\infty E P(E)\, dE \tag{5}$$

と与えられることになる．理想気体の場合 $\Omega(E) \propto E^{1/2}$ であり，これを上の式に代入して積分を計算すると，$\langle E \rangle = 3k_\mathrm{B}T/2$ となる．これは x, y, z 方向すべての揺らぎを合わせたものであるから，1 自由度あたりの熱揺らぎの値としては，その 1/3 である (2) ということになるのである．

「温度が T のとき」という，原子や分子にとってはたいへん曖昧な条件を設定したために，ミクロな状態が確定されず，結果としていろいろなエネルギー状態が分布した混然とした状況が実現されることになる．したがって，例えば水の分子にしてもその運動エネルギーの値は変動することになり，それを熱揺らぎと呼んだのである．

量子力学の揺らぎ (1) はハイゼンベルクの不確定性原理に基づくとは言ったが，これも我々が置く状況設定と無縁ではない．量子力学では，古典力学の力学変数を演算子に置き換える．ここでは，位置の演算子を x，運動量の演算子を p で表すことにする．振り子の錘の質量を m として，また虚数単位を $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$ と書くことにする．このとき，x と p の 2 つを

$$\mathsf{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\,\mathsf{x} + \mathrm{i}\frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\,\mathsf{p} \tag{6}$$

のように重ね合わせると，これはエネルギーを下げる演算子になることが示せる．振り子のエネルギーが最低の状態は，したがってそれ以上はエネルギーが下げられないという条件

$$\mathsf{a}|0\rangle = 0 \tag{7}$$

を満たす状態 $|0\rangle$ ということになる．量子力学ではこ

れだけのことである．この基底状態は決してふらついたりするようなものではない．これはハミルトニアンの固有状態であり，したがって時間的に変動することはないからである．この状態のエネルギー固有値が (1) に他ならない．

問題は，この状態 $|0\rangle$ というものが，我々が棲んでいる 3 次元実空間の中のベクトルではないということである．しかしそれを何とか直観的に理解したいがために，我々は，これを実空間の関数として表現するという設定を置くのである．その結果得られるのが，位置ベクトル（いまの場合は，振り子の変位 x）の関数であるところの波動関数であり，

$$\begin{aligned}\langle x|0\rangle &= \psi_0(x)\\ &= \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}\exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2\right)\end{aligned} \tag{8}$$

と定められる．「マクロな物体の運動状態を記述するのに適している実空間での位置 x というものを使ってミクロな量子状態を記述する」という設定を置いた結果，その位置 x は確率密度

$$\begin{aligned}P(x) &= |\psi_0(x)|^2\\ &= \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}}\exp\left(-\frac{m\omega}{\hbar}x^2\right)\end{aligned} \tag{9}$$

で与えられるように，釣り合いの位置 $x=0$ の周りに空間分布することになる．同様に，運動量も $p=0$ の周りに分布することになる．この状況を，古典的な描像に基づいて「(零点) 振動」と呼んだのである．

温度一定の状況を課すことも，位置の関数として量子状態を記述しようとすることも，マクロなレベルでの実験を想定すれば，自然な設定である．同様に，為替レートや株価を物理的な実時間の関数として追い，その揺らぎを議論するということも自然な設定であろう．しかし現代物理学が示唆することは，マクロな観測者が自然と思って置く設定そのものが揺らぎ（不確定性）の原因になってしまうという可能性である．現場で取引をするディーラーの「心理時間」なるものを導入して経済データを捉え直そうとする高安美佐子氏の試み[8]は興味深い．

4.「平均値と分散」から「分布そのもの」へ

統計力学はミクロな状態の揺らぎを扱う理論である．しかし，揺らぎの分布を直接議論することはむしろ稀であり，分散 σ^2 を計算してその大小によって揺らぎの大きさを議論するのが普通である．分散とは，平均値からの偏差の 2 次のモーメントである．これで事が足りるというのは，例えば (4) 式に従って分布するエネルギーについて考えてみればわかる．この分布の平均値は多粒子系の内部エネルギーを与え，分散は比熱を与える．内部エネルギーや比熱は熱力学量であり，材料などの物性を特徴付ける物理量である．しかし 3 次以上のモーメントに対しては，一般には対応する熱力学量はないのである（スピングラスの非線形帯磁率は 4 次のモーメントの一種であり，グラス転移に伴う臨界現象を議論する上で重要である．これは興味深い例外である[9]）．

確率変数 X に対して，その値が $x \le X \le x+dx$ である確率が $P(x)dx$ であるとき，$P(x)$ を確率密度という．このとき確率変数 X の n 次のモーメントは

$$m_n \equiv \langle X^n\rangle = \int x^n P(x)dx \tag{10}$$

で与えられる．この母関数は $P(x)$ のフーリエ変換

$$\hat{P}(q) = \int e^{\mathrm{i}qx}P(x)dx \tag{11}$$

で与えられる．実際，この n 次の導関数から

$$m_n = (-\mathrm{i})^n \frac{d^n}{dq^n}\hat{P}(q)\bigg|_{q=0} \tag{12}$$

というようにモーメントが計算できる．$\hat{P}(q)$ は確率変数 X の特性関数と呼ばれる．与えられた確率変数 X の代わりに，その平均値からの偏差 $X-\langle X\rangle$ を考えれば，平均値を零にできる．そこで以下では平均値 $=0$ とする．一般に高次のモーメントは低次のモーメントとは独立である．したがって，すべてのモーメントが決定されて初めて特性関数が定まり，その逆フーリエ変換として（一意的とは限らないが）分布が定まるのである．

しかしながら，最も標準的な分布であるガウスの正規分布

$$P_{\mathrm{G}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \tag{13}$$

においては，

$$m_n = \begin{cases}\dfrac{n!}{2^{n/2}(n/2)!}\sigma^n, & n \text{ が偶数のとき},\\ 0, & n \text{ が奇数のとき}\end{cases} \tag{14}$$

というように，すべてのモーメントは分散 $m_2=\sigma^2$ だけで表される．このことは，特性関数 (11) がこの

場合には

$$\hat{P}_{\mathrm{G}}(q) = \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2 q^2\right) \tag{15}$$

で与えられることから明らかである．

この特性関数を，パラメータ μ をもつ

$$\hat{P}_{\mathrm{L}}(q;\mu) = \exp\left(-c\,|q|^{\mu}\right) \tag{16}$$

という形に拡張する（c は定数）．$0 < \mu < 2$ のとき，これを特性関数とする分布は安定分布であり[10, 11]，対称レヴィ分布と呼ばれる．図 1 に $\hat{P}_{\mathrm{L}}(q;\mu)$ を逆フーリエ変換して得られる確率密度

$$P_{\mathrm{L}}(x;\mu) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-c|q|^{\mu}} \cos(qx)\, dq \tag{17}$$

を $\mu = 0.8, 1.2, 1.6, 2$ の場合に描いた．ただし $c = 1/2$ とした．$\mu = 2$ のときには，分散 $\sigma^2 = 1$ のガウスの正規分布に等しい．μ が 2 よりも小さくなると，分布は原点（平均値）の周りで鋭いピークをもち（図 1 を参照），同時に裾野での減衰の仕方は正規分布に比べて遅くなる（図 2 を参照）．実際 $x \to \pm\infty$ では，正規分布のように指数関数的ではなく

$$P_{\mathrm{L}}(x;\mu) \sim |x|^{-(1+\mu)} \tag{18}$$

という冪乗で減衰することが示せる．

分布の裾野が (18) のような冪乗で減衰する場合，$\mu < 2$ では分散は発散し（$\mu = 2$ はガウスの正規分布なので除く），$\mu \leq 1$ では平均も発散してしまう．このときには，分散をもって揺らぎの大きさを表すことはできなくなるので，通常の統計力学の感覚からすると大変特別な場合であるように思われる（このような状況は，熱平衡状態では連続的な相転移点での臨界状態でのみ実現する）．ところが，このような冪乗分布は経済現象においては，むしろあちこちに見られるのである．例えば，日本の高所得企業の所得分布には，この 30 年もの間（経済のバブル成長とその崩壊にもびくともせず）$\mu = 1$ の冪乗的な裾野が見られる[12, 13]．

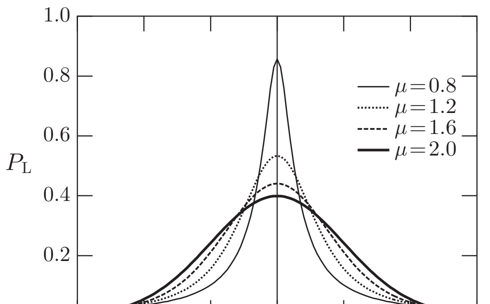

図 1　対称レヴィ分布．$\mu = 0.8, 1.2, 1.6, 2$ の場合（$c = 1/2$ とした）．$\mu = 2$ は平均零，分散 $\sigma^2 = 1$ のガウスの正規分布に等しい．μ が 2 よりも小さくなると，分布は原点（平均値）の周りで鋭いピークをもつ．

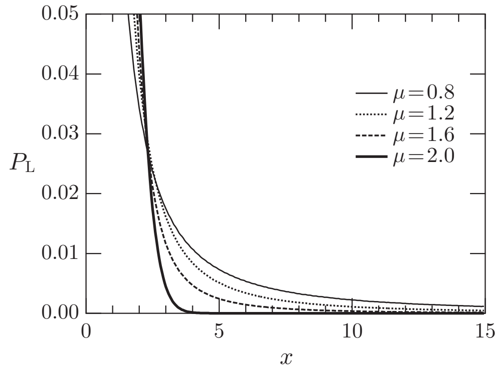

図 2　対称レヴィ分布の裾野の様子．$x \geq 0$ の領域だけ図示した．μ が 2 よりも小さくなると，裾野での減衰の仕方は $\mu = 2$ の正規分布の場合に比べて遅くなる．

分布の裾野に見られる冪乗則も興味深いが，図 1 に示した $\mu < 2$ のレヴィ分布を全体的に見ることはもっと重要である．原点（平均値）付近と裾野での確率がガウスの正規分布よりも大きくなっているということは，（確率密度は全域で積分すれば 1 になるように規格化されているので）中間領域での確率は少なくなっているということである．つまり，通常は揺らぎはごく小さいものだけに限られているのであるが，稀に（しかし正規分布と比べるとはるかに頻繁に）大変大きな揺らぎが突如として起こるという状況を表している．分散が発散してしまうというのは，通常の微小な揺らぎではなく，稀ではあるが確かに起こる大変動が，揺らぎ全体を支配していることを意味している．

指数関数的な減衰は，物理的には「実質的には無いものとして近似してよい」ということを意味する．だからこそ，残存確率が $\exp(-t/\tau)$ に従って指数関数的に減衰する放射性元素に対して，その半減期 τ を「寿命」と呼ぶのである．これに比べて，冪乗的にしか減衰しない現象は，「稀な事象」とはいってもその存在が全体に影響を及ぼす可能性があるのである．経済現象や社会現象では，大企業の倒産とか大事件とか，ごく稀な出来事が大きな影響を及ぼす．そのため，そのよ

うな稀だが重大な状況が生じると「想定」した「条件付きの理論」というものが重要になると思われる．

最近私は，実現確率が冪乗的に減衰する状況を条件として課した確率過程の一つとして，非衝突乱歩系（non-intersecting random walk または vicious walk）あるいはその連続版である非衝突拡散過程に興味をもっている[14, 15]．1 次元上に N 個のブラウン粒子をそれぞれお互いに離れた位置に置いてスタートさせる．この N 粒子系において，粒子衝突がまったく起こらない確率は $t^{-N(N-1)/4}$ というように時間について冪乗的に減衰することが示せる．それでは，衝突がないという条件の下では，粒子はどのように運動するように見えるであろうか．どの粒子も衝突しないという「稀だが重要な想定」の下では，粒子間には距離に反比例する長距離の斥力が働くことが示せるのである．面白いことに，これはランダム行列の固有値分布の理論と関係する[16]．多数の異なる資産の価格変動の間の相関行列を解析するのにランダム行列理論が使われるなど[4]，経済物理はランダム行列理論の新しい応用分野にもなっている．

5. おわりに

物事の必然性を説くには，どのような状況を想定しているのかを限定しなければならない．そして，想定に反して起こった事象に我々は偶然性を見る．この小文で私は，現代物理と言えども，「複雑な自然現象を我々人間がどのように理解したいか」という問題設定に，その記述が大いに依存してしまうということを注意したかった．自然科学としてそんなことは当然であるという読者もいらっしゃるだろう．しかし，自然科学の手法を社会現象に転じようとするとき，考えるべき状況の設定，すなわち想定の作業こそが重要であると思うのである．

素粒子物理学では「力の統一理論」の研究が盛んであり，それを基礎に宇宙の進化が議論されているようである．統計力学には「揺動力」という用語があるが，もしかすると 21 世紀は，物理学（自然科学）で扱う揺らぎと，経済現象などで我々が日々目の当たりにする揺らぎとを統一する「揺らぎの統一理論」というものを考える時期なのかもしれない．

参考文献

1) 高安秀樹：『経済物理学の発見』，光文社 (2004).
2) R.N. Mantegna and H.E. Stanley: An Introduction to Econophysics: Correlations and Complexity in Finance, Cambridge Univ. Press (2000); 中嶋眞澄訳：『経済物理学入門—ファイナンスにおける相関と複雑性』，エコノミスト社 (2000).
3) 高安秀樹・高安美佐子：『エコノフィジックス—市場に潜む物理法則』，日本経済新聞社 (2001).
4) J-P. Bouchard and M. Potters: Theory of Financial Risks: From Statistical Physics to Risk Management, Cambridge Univ. Press (2000); 森平爽一郎監修，森谷博之・熊谷善厭彰訳：『金融リスクの理論—経済物理からのアプローチ』，朝倉書店 (2003).
5) D. Sornette: Why Stock Markets Crash: Critical Events in Complex Financial Systems, Princeton Univ. Press (2003); 森谷博之監訳：『入門経済物理学—暴落はなぜ起こるのか？』，PHP 研究所 (2004).
6) 数理科学 2002 年 10 月号特集「エコノフィジックス最前線」，サイエンス社 (2002).
7) 香取眞理：『複雑系を解く確率モデル』，講談社ブルーバックス (1997).
8) 高安美佐子：「取引数のゆらぎと心理時間」，参考文献 6) の pp.33–37.
9) 鈴木増雄：『統計力学』，第 5 章，岩波書店 (1994).
10) W. Feller: An Introduction to Probability Theory and Its Applications, Volume II, 1971, Wiley & Sons (1971); 羽鳥裕久・大平坦訳，国沢清典監訳：『確率論とその応用』II 上，下，紀伊國屋書店 (1969).
11) 佐藤健一：『加法過程』，紀伊国屋書店 (1990).
12) T. Mizuno, M. Katori, H. Takayasu and M. Takayasu: Statistical laws in the income of Japanese companies, “Empirical Science of Financial Fluctuations: The Advent of Econophysics” (H. Takayasu ed.), pp.321–330, Springer, Tokyo (2002); http://xxx.lanl.gov/abs/cond-mat/0308365.
13) 正確に言うと，所得が非常に大きい 100 社くらいは冪乗分布からはずれ指数関数的に少なくなる．ここでは単純化して対称レヴィ分布を議論したが，実際のデータ解析では，切断レヴィ分布など補正された分布関数が使われる．
14) 香取眞理：非衝突乱歩系・シューア関数・ランダム行列，「応用数理」**13**, 16–27, (2003).
15) 香取眞理，種村秀紀：ランダム行列と非交叉過程「数理物理 2005 予稿集」, pp.43–64, 東京大学 (2005); 小嶋泉編：『数理物理への誘い』**6**, 遊星社（出版予定）.
16) 永尾太郎：『ランダム行列の基礎』，東京大学出版会 (2005).

（かとり・まこと，中央大学理工学部）