

数理物理の新展開 – ランダム行列と SLE

香取眞理 (中央大学理工学部物理学科)*

(18 May 2009 (version 1))

概要

サブゼミの1日目はランダム行列と非衝突拡散過程について(第1節 - 3節), 2日目は SLE と共形場理論について(第4節 - 6節)話をする. このテキストは式が多くなってしまったが, 講義ではプロジェクターで図をたくさん見せながら説明するつもりである. 数理物理の分野でいま盛んに研究されているこの2つのトピックスは, 一見すると無関係に思えるが, Bessel 過程とよばれる確率過程を通じて深く関連しているという不思議さを伝えたい.

ランダム行列 [13] とは成分が乱数で与えられる行列のことである. ただし行列に対称性を課す. そうするとすべての成分が独立という訳にはいかなくなるが, それでもなるべくランダムに各成分を生成させることにする. 例えば, サイズ N のランダムな Hermite 行列は N^2 個の独立な実乱数を用いて生成できる. Hermite 行列なのでユニタリー行列で対角化できて N 個の実固有値が定まる. 行列成分がランダムなので N 個の実固有値もランダムだが, それらはもはや独立ではない. N 個の実固有値を直線上の N 粒子の位置と見なそう. すると粒子間に(距離に反比例する)斥力が働く1次元 N 粒子系が得られる. ランダム行列理論は「独立な乱数から強く相互作用する系を生み出す理論」である [7].

複素平面の実軸の上側を上半平面という. 原点を出発点とする1本の(有限の長さの)曲線を上半平面に描く. 上半平面から, いま描いた曲線を取り除く. 曲線がループを持つときにはそのループで囲まれた領域も一緒に取り除くことにする. 残りは当然, 上半平面の「部分」になる訳だが, その「部分」を元の上半平面全体に写す(つまり元に戻す)共形変換(等角写像)が必ず存在する. これを Riemann の写像定理という. この変換の逆を考えよう. すると, 元々は何も無かった上半平面に曲線を生み出すことができる. この原理を Brown 運動の理論と組み合わせたのが, 2000 年に発表された Schramm-Loewner Evolution (SLE) である. フラクタル物理学 [10] や相転移・臨界現象の統計物理学 [14] で重要な役割を果たす様々なランダムな連続曲線を SLE で自在に生成できることが, この10年の間に分かってきた [5, 17] (2006年に Werner は SLE と共形場理論 [22] の研究で数学のノーベル賞といわれるフィールズ賞を受賞した [16].)

*電子メール: katori@phys.chuo-u.ac.jp 研究室 HP: <http://www.phys.chuo-u.ac.jp/j/katori/>

目次

1	非衝突拡散過程	3
1.1	Brown 運動と Bessel 過程	3
1.2	半マルチンゲールと Itô の公式	5
1.3	Karlin-McGregor の公式	6
1.4	非衝突 Brown 運動	8
1.5	Schur 関数展開と Selberg 積分	10
2	Hermite 行列値過程とその固有値過程	13
2.1	一般化された Bru の定理	13
2.2	応用例	14
3	長距離相互作用系の非平衡統計力学	16
4	統計力学模型とランダムな曲線の統計集団	17
4.1	平面上の統計力学模型の連続極限	17
4.2	共形不変性と領域 Markov 性	21
4.3	制限性と局所性	22
5	Schramm-Loewner Evolution (SLE)	23
5.1	Riemann の写像定理	23
5.2	Loewner 方程式	23
5.3	SLE_{κ}	24
5.4	局所性と制限性	26
6	共形場理論との対応関係	27

キーワード: 数理物理, 統計物理, 確率過程, 共形場理論, Brown 運動, Bessel 過程, Itô の公式, マルチンゲール, ランダム行列, 非衝突拡散過程, ランダムウォーク, フラクタル曲線, 臨界現象, 共形不変性, Schramm-Loewner evolution (SLE), Virasoro 代数

Part I : 非衝突拡散過程とランダム行列

1 非衝突拡散過程

1.1 Brown 運動と Bessel 過程

(Ω, \mathcal{F}, P) を確率空間とする¹. 原点を出発点とする 1 次元 Brown 運動 $\{B(t, \omega)\}_{t \in [0, \infty)}$ は次の性質を持つ確率過程である².

1. $B(0, \omega) = 0$ が確率 1 で成り立つ.
2. 任意の $\omega \in \Omega$ に対して, ω を固定したとき $B(t, \omega)$ は t の関数として連続な実数値関数である (このとき経路が連続であるという.)
3. 任意の時刻の列 $t_0 \equiv 0 < t_1 < \dots < t_M, M = 1, 2, \dots$, に対し, 増分 $\{B(t_{j+1}) - B(t_j)\}_{j=0,1,\dots,M-1}$ は独立で, 各々の分布は平均 0, 分散 $t_{j+1} - t_j$ の正規分布 (Gauss 分布) に従う.

したがって

$$p(t, y|x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left\{-\frac{(y-x)^2}{2t}\right\}, \quad t > 0, \quad x, y \in \mathbb{R} \quad (1.1)$$

とくと (\mathbb{R} は実数全体の集合を表す), Brown 運動が各時刻 $t_j, 1 \leq j \leq M$ で区間 $[a_j, b_j]$ に滞在する確率は

$$P\left(B(t_j) \in [a_j, b_j], j = 1, \dots, M\right) = \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \cdots \int_{a_M}^{b_M} dx_M \prod_{j=0}^{M-1} p(t_{j+1} - t_j, x_{j+1}|x_j)$$

で与えられる.

この積分核である $p(t-s, y|x)$ を, Brown 運動の推移確率密度関数 (遷移確率密度関数) という³. 任意の時刻 $s \geq 0$ に対して, その時刻での Brown 運動の値 $B(s)$ が与えられると, それ以前の Brown 運動 $B(u), u < s$ とそれ以後の Brown 運動 $B(t), t > s$

¹ Ω は標本空間, Ω の部分集合 $A \subset \Omega$ は事象を表すが, \mathcal{F} は事象全体の集合であり, σ 加法族 (加算加法族) をなす (すなわち, (i) $\Omega \in \mathcal{F}$, (ii) $A \in \mathcal{F}$ なら A の補集合 $A^c \in \mathcal{F}$, (iii) $A_1, A_2, \dots, \in \mathcal{F}$ なら $\cup_n A_n \in \mathcal{F}$, という 3 条件を満たす.)

²確率過程は確率変数の時間発展である. 過去の軌跡を「情報」と見るとき, 情報の増大系が得られることになる. これを表すのがフィルトレーション (filtration, 情報系) $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ である. これは, (i) $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}, 0 \leq s < t$, (ii) 各 t に対して \mathcal{F}_t は σ 加法族をなす, という 2 条件を満たすものである. $(\Omega, \mathcal{F}, P; \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0})$ をフィルター付き確率空間という.

³(1.1) で与えられる積分核は熱方程式 (拡散方程式) $\frac{\partial}{\partial t} p(t, y|x) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} p(t, y|x)$ の解で $p(0, y|x) = \delta(y-x)$ を満たすもの (基本解) であることから, 熱核 (heat kernel) ともよばれる. 拡散方程式の Green 関数, あるいはプロパゲーター (propagator, 伝播関数) といってもよい.

とは条件付き独立である』ことが分かる．この性質を Markov 性という．正の値をとる確率変数 τ が Markov 時刻（あるいは停止時刻）であるとは， τ の値がある定数 u 以下であるかどうかは確率過程の時刻 u までの値だけで決まり，それ以降の時刻でとる値には影響されないことをいう．例えば，ある領域を定めたとき，確率過程が最初にその領域内に到達する時刻は Markov 時刻である．Brown 運動では，上記の Markov 性の説明文において時刻 s とあるところを任意の Markov 時刻 τ に替えても構わない．その場合でも同様に，条件付き独立性が成り立つのである．この性質を強 Markov 性という．

一般に，経路が連続である確率過程で強 Markov 性を持つものを拡散過程という．時刻 s で位置 x にある状態から時刻 $t (> 0)$ で位置 y にある状態への推移を表す推移確率密度関数を $g(s, x; t, y)$ と記すことにする．Brown 運動のように $g(s, x; t, y)$ が時間の差 $t - s$ で定まる拡散過程は時間的に斉次であるという．同様に， $g(s, x; t, y)$ が位置座標の差 $y - x$ だけに依存するときは空間的に斉次であるという．

d を自然数とする： $d \in \mathbb{N} \equiv \{1, 2, \dots\}$ ． d 次元 Brown 運動 $B(t) = (B_1(t), \dots, B_d(t))$ の原点からの距離

$$X^{(d)}(t) = |B(t)| = \sqrt{B_1(t)^2 + B_2(t)^2 + \dots + B_d(t)^2} \quad (1.2)$$

は（非負値）1 次元拡散過程となる．これを d 次元 Bessel 過程という． d 次元 Bessel 過程 $X^{(d)}(t), d \in \mathbb{N}$ の推移確率密度関数 $p^{(d)}(t, y|x)$ は

$$\nu = \frac{d-2}{2} \iff d = 2(\nu + 1) \quad (1.3)$$

として，

$$\begin{aligned} p^{(d)}(t, y|x) &= \frac{y^{\nu+1}}{x^\nu} \frac{1}{t} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2t}\right) I_\nu\left(\frac{xy}{t}\right), \quad t > 0, \quad x > 0, \quad y \geq 0 \\ p^{(d)}(t, y|0) &= \frac{y^{2\nu+1}}{2^\nu \Gamma(\nu + 1) t^{\nu+1}} \exp\left(-\frac{y^2}{2t}\right), \quad t > 0, \quad y \geq 0 \end{aligned} \quad (1.4)$$

で与えられる．ここで， $I_\nu(z)$ は変形 Bessel 関数であり，ガンマ関数 $\Gamma(z)$ を用いて次のように定義される：

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-u} u^{z-1} du \quad \operatorname{Re} u > 0, \quad (1.5)$$

$$I_\nu(z) = \sum_{n=0}^\infty \frac{(z/2)^{2n+\nu}}{\Gamma(n+1)\Gamma(\nu+n+1)}. \quad (1.6)$$

このように，推移確率密度関数が Bessel 関数で表されるので，この確率過程 $X^{(d)}(t)$ を Bessel 過程とよぶのである．(1.3) より， $d = 1, 2, 3, 4, \dots$ は $\nu = -1/2, 0, 1/2, 1, \dots$

というように半整数に対応するが，(1.4) 式は ν を連続な実パラメータとしても意味を持つ．そこで，この (1.4) を推移確率密度関数とする確率過程として，(1.3) の関係式の下，連続な実数次元 $d \geq 1$ に対して d 次元 Bessel 過程を定義することにする．Bessel 過程は，その次元により性質が異なる．原点に対して，2次元以上 ($d \geq 2$) では非再帰的であるが，2次元未満 ($1 \leq d < 2$) では再帰的である [3]．

1.2 半マルチンゲールと Itô の公式

任意の $s > 0$ に対して $B(s)$ を与えたとき，『その後の Brown 運動は $B(u)$, $u < s$ の値に影響されず， $B(t) - B(s)$ は (条件付き) 平均が零である』という性質を持つ．これをマルチンゲール性という⁴．Brown 運動に基づく確率積分 $\int_0^t X(s)dB(s)$ などは，マルチンゲール性を持つ確率過程 (以後単にマルチンゲールとよぶ) の例である．時間に比例した変動を持つ (つまり速度が定義できる) 確率過程を有界変動過程という．ドリフト運動のことである．マルチンゲール (平均的には零である揺らぎの項) と有界変動過程 (ドリフト項) の和で与えられる確率過程を半マルチンゲールとよぶ．

確率過程 $Z(t)$ の二次変分 (quadratic variation) を $\langle Z \rangle_t$ とおく：

$$\langle Z \rangle_t = \mathbf{P}\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^n (Z(t_{j+1}) - Z(t_j))^2$$

ただしここで， $\mathbf{P}\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty}$ は時間区間 $[0, t]$ の分割 $0 \equiv t_0 < t_1 < \dots < t_n \equiv t$ を無限に細かくしていく極限における確率収束を意味するものとする⁵． $Z(t)$ が有界変動過程である場合は $\langle Z \rangle_t = 0$ である．また，確率過程 $Z(t)$, $\hat{Z}(t)$ に対して

$$\langle Z, \hat{Z} \rangle_t \equiv \frac{1}{4} \left\{ \langle Z + \hat{Z} \rangle_t - \langle Z - \hat{Z} \rangle_t \right\}$$

と定義し，さらに $dZ(t)d\hat{Z}(t) = d\langle Z, \hat{Z} \rangle_t$ という記法を用いることにする．Brown 運動の二次変分は $dB(t)dB(t) = dt$ であるが，逆に二次変分が dt である連続マルチンゲールは Brown 運動に限る．一般に連続なマルチンゲールは二次変分により一意的に定まる． $B_1(t)$ と $B_2(t)$ が互いに独立な Brown 運動であるとき $dB_1(t)dB_2(t) = 0$ となるの

⁴マルチンゲールとは，元々は勝ち負けが半々の賭けでの「倍賭け」という必勝法のこと．まず 1 万円を賭け，負けたら 2 万円，以下 4 万円，8 万円，16 万円，… と続ける．勝ったときにやめることにすれば，いつも 1 万円儲かる (ただしこれは，無限の賭け金を持っていればの話なので要注意．) 転じて，各時刻での期待値が有限であり，過去の遍歴には依らずに一定であるような確率過程をマルチンゲールとよぶ．

⁵確率変数の列 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ と確率変数 X が同一の確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ で定義されているものとする． $n \rightarrow \infty$ のとき $\{X_n\}$ が X に確率収束するとは，任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(|X_n - X| > \varepsilon) = 0$ となることをいう．ここではこれを $\mathbf{P}\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty}$ と記す．

で, d 次元 Brown 運動 $B(t) = (B_1(t), B_2(t), \dots, B_d(t))$ に対して $dB_j(t)dB_k(t) = \delta_{jk}dt$ が成立する. 多次元の場合でも $dM_j(t)dM_k(t), 1 \leq j, k \leq d$ が与えられるとマルチンゲール $M(t) = (M_1(t), M_2(t), \dots, M_d(t))$ が一意に決まることが知られている.

$Z(t) = (Z_1(t), Z_2(t), \dots, Z_d(t))$ をマルチンゲール部分が $M(t)$, 有界変動部分が $A(t) = (A_1(t), A_2(t), \dots, A_d(t))$ である d 次元半マルチンゲールとする. F を \mathbb{R}^d 上で定義された 2 階微分可能な実数値関数としたとき確率過程 $F(Z(t))$ は,

$$\begin{aligned} dF(Z(t)) &= \sum_{j=1}^d \frac{\partial F}{\partial x_j}(Z(t)) (dM_j(t) + dA_j(t)) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{1 \leq j, k \leq d} \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_k}(Z(t)) dM_j(t) dM_k(t) \end{aligned} \quad (1.7)$$

と展開することができる. これを Itô の公式という [12, 3].

$F(x) = \sqrt{\sum_{j=1}^d x_j^2}$ としてこの公式を (1.2) に適用すると, d 次元 Bessel 過程の確率微分方程式が

$$dX^{(d)}(t) = dB(t) + \frac{d-1}{2X^{(d)}(t)} dt \quad (1.8)$$

で与えられることが導かれる. したがって, $d > 1$ のとき d 次元 Bessel 過程は半マルチンゲールであり, そのマルチンゲール部分は Brown 運動, 有界変動部分は $\frac{d-1}{2} \int_0^t \frac{ds}{X^{(d)}(s)}$ であることになる⁶. (1.8) の形の確率微分方程式に次の形の偏微分方程式を対応させる:

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t, x) + \frac{d-1}{2x} \frac{\partial}{\partial x} u(t, x). \quad (1.9)$$

これを後進 Kolmogorov 方程式という [12, 3]. (1.4) 式で与えられる d 次元 Bessel 過程の推移確率密度関数 $p^{(d)}(t, y|x)$ はこの偏微分方程式の基本解 ($t = 0$ で $\delta(x - y)$ となる解) である.

1.3 Karlin-McGregor の公式

2つの 1 次元拡散過程 X_1, X_2 において, $X_1(\tau) = X_2(\tau)$ であるとき, この 2 つの過程は時刻 τ で衝突したという. また, $x = X_1(\tau) = X_2(\tau)$ を衝突点とよぶことにする. これは, 時空平面において 2 本の経路が衝突 (交差) することを意味する. N 粒子拡

⁶(1.4) の上式で $d = 1 \iff \nu = -1/2$ とすると ($I_{-1/2}(z) = \sqrt{2/(\pi z)} \cosh z$ なので), $p^{(1)}(t, y|x) = p(t, y|x) + p(t, y|-x)$ を得る (p は熱核 (1.1)). これは原点に反射壁のある 1 次元反射壁 Brown 運動の推移確率密度関数である. このことから $X^{(1)}(t) = |B(t)|$ とする. これは (1.2) において $d = 1$ としてルートの中が 1 項だけとした結果と合致する.

散過程で，ある時間区間で衝突が起こらないものを非衝突拡散過程とよぶことにする [7] .

非衝突拡散過程を解析するには，推移確率密度関数に対する行列式を用いた表示が有効である．この行列式表示は，確率論では Karlin-McGregor の公式，組み合わせ論では Lindström-Gessel-Viennot の公式とよばれる．またこの公式は，量子力学で自由 Fermi 粒子からなる多体系の波動関数を表す Slater 行列式の確率過程版と見なすこともできる [4, 7, 20] .

定理 1.1 (Karlin-McGregor の公式) $g(s, x; t, y)$ を 1 次元拡散過程の推移確率密度関数とする． N 個の始点 $x_j, j = 1, 2, \dots, N$ と N 個の終点 $y_j, j = 1, 2, \dots, N$ がそれぞれ $x_1 < x_2 < \dots < x_N$ と $y_1 < y_2 < \dots < y_N$ を満たすとする．このとき， N 本の経路が時間区間 $[s, t]$ で非衝突である確率密度関数は行列式 $\det_{1 \leq j, k \leq N} [g(s, x_j; t, y_k)]$ で与えられる．

証明 行列式の定義より

$$\det_{1 \leq j, k \leq N} [g(s, x_j; t, y_k)] = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} \text{sgn}(\sigma) \prod_{j=1}^N g(s, x_j; t, y_{\sigma(j)}). \quad (1.10)$$

ただしここで， \mathfrak{S}_N は $\{1, 2, \dots, N\}$ の置換全体の集合（対称群とよばれる群をなす）．時空平面上の (s, x) から (t, y) へ至る経路全体からなる集合を $\Omega(s, x; t, y)$ と書くことにする． $\pi_j \in \Omega(s, x_j; t, y_{\sigma(j)}), j = 1, 2, \dots, N$ とすると，(1.10) は，置換 σ と N 本の経路の組 $(\sigma, \pi_1, \dots, \pi_N)$ に対する母関数とみなせる．この組 $(\sigma, \pi_1, \dots, \pi_N)$ のうち，少なくとも 1 回は経路の衝突があるものを選ぶ．それに対して

$$\tau = \sup \left\{ s < u < t : \pi_1, \dots, \pi_N \text{ のいずれかが時刻 } u \text{ で衝突} \right\}$$

とし⁷，この衝突点を $v \in \mathbb{R}$ とする．また，時刻 τ で衝突した経路を $\pi_{\ell_1}, \pi_{\ell_2}$ とする．（3 本以上の経路が同時に衝突した場合は，そのうち添字の小さい 2 つを選ぶことにする，図 1 を参照．）

そして

$$\pi_{\ell_1} = \pi_{\ell_1}(\rightarrow v)\pi_{\ell_1}(v \rightarrow), \quad \pi_{\ell_2} = \pi_{\ell_2}(\rightarrow v)\pi_{\ell_2}(v \rightarrow)$$

と書くことにする．図 2 のように，衝突点 v で経路を入れ替えたものを

$$\pi'_{\ell_1} = \pi_{\ell_1}(\rightarrow v)\pi_{\ell_2}(v \rightarrow), \quad \pi'_{\ell_2} = \pi_{\ell_2}(\rightarrow v)\pi_{\ell_1}(v \rightarrow)$$

として， $j \neq \ell_1, \ell_2$ に対しては $\pi'_j = \pi_j$ とする．また，置換 σ と互換 (ℓ_1, ℓ_2) との積置換を σ' と書く．すると

$$(\sigma, \pi_1, \dots, \pi_N) \iff (\sigma', \pi'_1, \dots, \pi'_N) \quad (1.11)$$

⁷sup は上限 (supremum)，inf は下限 (infimum) を表す．

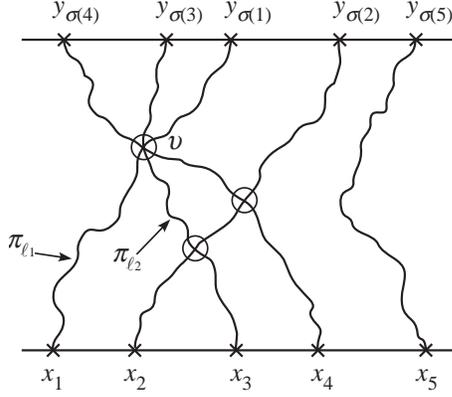


図 1: 衝突のある経路の組 (π_1, \dots, π_N) の例. 衝突点 v を通過する 2 つの経路 π_{ℓ_1} と π_{ℓ_2} を選ぶ.

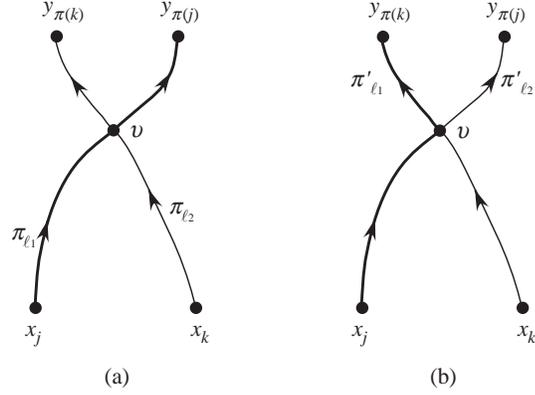


図 2: (a) 経路 π_{ℓ_1} と π_{ℓ_2} . (b) 経路 π'_{ℓ_1} と π'_{ℓ_2} .

は 1 対 1 に対応することが分かる. $\text{sgn}(\sigma') = -\text{sgn}(\sigma)$ なので, 組 $(\sigma, \pi_1, \dots, \pi_N)$ の母関数 (1.10) において, (1.11) の組の対は逆符号で足されるので相殺される. 以上の考察より, 母関数 (1.10) において衝突がある経路からの寄与は全て相殺されることが示された. 他方, 非衝突の場合は σ は恒等変換であり, $\text{sgn}(\sigma) = 1$ であるから, 結局 (1.10) は非衝突の経路のみの和になる. ■

1.4 非衝突 Brown 運動

\mathbb{R}^N の部分集合 $\mathbb{W}_N^A = \{x \in \mathbb{R}^N : x_1 < x_2 < \dots < x_N\}$ を考える. これは表現論では A_{N-1} 型の Weyl 領域とよばれているものである. \mathbb{W}_N^A 内の吸収壁 Brown 運動⁸ の推移確率密度関数, つまり時刻 0 で \mathbb{W}_N^A 内の点 $x = (x_1, \dots, x_N)$ から出発した Brown 運動が \mathbb{W}_N^A から外に出ることなく時刻 t で \mathbb{W}_N^A 内の点 $y = (y_1, \dots, y_N)$ へ到達する確率密度関数は, 定理 1.1 の Karlin-McGregor の公式より

$$f_N(t, \mathbf{y} | \mathbf{x}) = \det_{1 \leq j, k \leq N} \left[p(t, y_j | x_k) \right] \quad (1.12)$$

⁸原点に吸収壁を置いた $(0, \infty)$ 内の 1 次元吸収壁 Brown 運動の推移確率密度関数は p を熱核 (1.1) として, $g_{\text{abs}}(s, x; t, y) = p(t-s, y|x) - p(t-s, y|-x)$, $0 < s < t, x, y \geq 0$ で与えられることが Brown 運動の反射原理から分かる [7]. これを (1.4) 式で $d = 3 \iff \nu = 1/2$ としたものと比較すると ($I_{1/2}(z) = \sqrt{2/(\pi z)} \sinh z$ なので), $p^{(3)}(t-s, y|x) = (y/x)g_{\text{abs}}(s, x; t, y)$ という関係が得られる. (1.12) や (1.14) は, これらの関係を N 変数に多変数拡張したものと見なすことができる.

と表される．したがって，時刻 0 で点 \boldsymbol{x} から出発した Brown 運動が，時刻 t までの間 \mathbb{W}_N^A から外に出ない確率は，

$$\mathcal{N}_N(t, \boldsymbol{x}) = \int_{\mathbb{W}_N^A} f_N(t, \boldsymbol{y}|\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{y} \quad (1.13)$$

で与えられることになる．ここで $d\boldsymbol{y} = \prod_{j=1}^N dy_j$ である．

$T > 0$ を固定して，有限な時間区間 $(0, T]$ での非衝突 Brown 運動を定義する．この過程 $\boldsymbol{Z}(t) = (Z_1(t), Z_2(t), \dots, Z_N(t))$ の推移確率密度関数 $g_N^T(s, \boldsymbol{x}; t, \boldsymbol{y})$ は，時刻 T まで衝突しないという条件の下で，時刻 s で点 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{W}_N^A$ にいた N 個の Brown 運動が時刻 t で点 $\boldsymbol{y} \in \mathbb{W}_N^A$ に到達する確率密度であり，

$$g_N^T(s, \boldsymbol{x}; t, \boldsymbol{y}) = \frac{\mathcal{N}_N(T-t, \boldsymbol{y})}{\mathcal{N}_N(T-s, \boldsymbol{x})} f_N(t-s, \boldsymbol{y}|\boldsymbol{x}), \quad 0 \leq s < t \leq T, \quad \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{W}_N^A \quad (1.14)$$

で与えられる．

次節で示すように，Schur 関数とよばれる多変数対称関数 [4, 20] を用いて双線形展開することにより，漸近評価

$$\mathcal{N}_N(t, \boldsymbol{x}) \simeq \frac{C_2(N)}{C_1(N)} h_N \left(\frac{\boldsymbol{x}}{\sqrt{t}} \right), \quad \frac{|\boldsymbol{x}|}{\sqrt{t}} \rightarrow 0 \quad (1.15)$$

が導かれる [6, 8]．ここで $h_N(\boldsymbol{x})$ は差積

$$h_N(\boldsymbol{x}) = \det_{1 \leq j, k \leq N} \left(x_k^{j-1} \right) = \prod_{1 \leq j < k \leq N} (x_k - x_j) \quad (1.16)$$

であり， $C_1(N), C_2(N)$ はガンマ関数 (1.6) を用いて

$$C_1(N) = (2\pi)^{N/2} \prod_{j=1}^N \Gamma(j), \quad C_2(N) = 2^{N/2} \prod_{j=1}^N \Gamma(j/2) \quad (1.17)$$

で与えられる．また， $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ に対して $|\boldsymbol{x}| = \sqrt{\sum_{j=1}^N x_j^2}$ とする．

漸近評価 (1.15) を用いると，非衝突 Brown 運動 $\boldsymbol{Z}(t)$ は，非衝突条件を課す時間 $T \rightarrow \infty$ の極限で，推移確率密度関数が

$$p_N(t, \boldsymbol{y}|\boldsymbol{x}) = \frac{h_N(\boldsymbol{y})}{h_N(\boldsymbol{x})} f_N(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), \quad t > 0, \quad \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{W}_N^A \quad (1.18)$$

で与えられる時間的に斉次な拡散過程 $\mathbf{X}(t) = (X_1(t), X_2(t), \dots, X_N(t))$ に収束することが分かる．ここで，

$$\sum_{j=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} h_N(\mathbf{x}) = 0$$

である．これを使うと， $p_N(t, \mathbf{y}|\mathbf{x})$ が次の偏微分方程式を満たすことが導ける：

$$\frac{\partial}{\partial t} p_N(t, \mathbf{y}|\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} p_N(t, \mathbf{y}|\mathbf{x}) + \sum_{\substack{1 \leq k \leq N \\ k \neq j}} \frac{1}{x_j - x_k} \frac{\partial}{\partial x_j} p_N(t, \mathbf{y}|\mathbf{x}). \quad (1.19)$$

これは (1.9) で $d = 3$ として得られる 3 次元 Bessel 過程の後進 Kolmogorov 方程式を N 変数に多変数拡張した形になっている．(1.9) に対応して Bessel 過程の確率微分方程式が (1.8) で与えられた．これと同様に，(1.19) に対応して非衝突 Brown 運動 $\mathbf{X}(t) = (X_1(t), \dots, X_N(t))$ の確率部分方程式は

$$dX_j(t) = dB_j(t) + \frac{\beta}{2} \sum_{\substack{1 \leq k \leq N \\ k \neq j}} \frac{1}{X_j(t) - X_k(t)} dt, \quad 1 \leq j \leq N \quad (1.20)$$

で $\beta = 2$ としたもので与えられることが分かる．パラメータ β を持つ (1.20) をここでは Dyson 模型の方程式とよぶことにする [7]．

1.5 Schur 関数展開と Selberg 積分

$\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_N \geq 0, \mu_j \in \mathbb{N}_0 \equiv \mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, \dots\}$ のとき， $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_N)$ を整数 $|\mu| \equiv \sum_{j=1}^N \mu_j$ の分割という． $\{\mu_j\}$ のうち零でないものの数を分割の長さといい $\ell(\mu)$ で表すことにする．すべての $1 \leq j \leq N$ で $\mu_j = 0$ のとき特に $(0, 0, \dots, 0) = \emptyset$ と記す．

このような分割 μ に対して， N 変数 $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)$ の関数

$$s_\mu(\mathbf{x}) = \frac{\det_{1 \leq j, k \leq N} [x_j^{\mu_k + N - k}]}{\det_{1 \leq j, k \leq N} [x_j^{N - k}]} \quad (1.21)$$

を定義する [4, 20]．分母は Vandermonde の行列式であり，(1.16) 式で与えられた差積と次の関係にある：

$$\det_{1 \leq j, k \leq N} [x_j^{N - k}] = \prod_{1 \leq j < k \leq N} (x_j - x_k) = (-1)^{N(N-1)/2} h_N(\mathbf{x}). \quad (1.22)$$

$s_\mu(\mathbf{x})$ は x_1, \dots, x_N の $|\mu|$ 次の同次対称多項式であり, Schur 関数とよばれる. $\mu = \emptyset$ に対しては $s_\emptyset(\mathbf{x}) = 1$ である. $s_\mu(\mathbf{x})$ は N 変数の多項式環 $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_N]$ の基底をなす. 次は行列式に対する多変数の Taylor 展開の公式である.

補題 1.1 定数 ρ があって, $\psi(x)$ が $x = 0$ の周りで $\psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+\rho}$ と展開できるとする. このとき $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N), \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_N)$ に対して

$$\det_{1 \leq j, k \leq N} [\psi(x_j y_k)] = h_N(\mathbf{x}) h_N(\mathbf{y}) \prod_{j=1}^N (x_j y_j)^\rho \sum_{\mu: \ell(\mu) \leq N} s_\mu(\mathbf{x}) s_\mu(\mathbf{y}) \prod_{j=1}^N c_{\mu_j + N - j}. \quad (1.23)$$

よって, $|\mathbf{x}| \rightarrow 0$ あるいは $|\mathbf{y}| \rightarrow 0$ では

$$\det_{1 \leq j, k \leq N} [\psi(x_j y_k)] = h_N(\mathbf{x}) h_N(\mathbf{y}) \prod_{j=1}^N (x_j y_j)^\rho \prod_{j=1}^N c_{j-1} \times \left\{ 1 + \mathcal{O}(|\mathbf{x}|, |\mathbf{y}|) \right\} \quad (1.24)$$

である.

証明 行列の多重線形性より

$$\begin{aligned} \det_{1 \leq j, k \leq N} [\psi(x_j y_k)] &= \det_{1 \leq j, k \leq N} \left[(x_j y_k)^\rho \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x_j y_k)^n \right] \\ &= \prod_{j=1}^N (x_j y_j)^\rho \sum_{\mathbf{n}=(n_1, \dots, n_N) \in \mathbb{N}_0^N} \prod_{j=1}^N c_{n_j} \det_{1 \leq j, k \leq N} [(x_j y_k)^{n_j}]. \end{aligned}$$

となる. $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_N)$ の添え字に対して置換 $\sigma \in \mathfrak{S}_N$ を施したものを $\sigma(\mathbf{n}) = (n_{\sigma(1)}, \dots, n_{\sigma(N)})$ と書くことにする. 一般に $f(\mathbf{n})$ が \mathbf{n} の対称関数であるとき (すなわち, $f(\sigma(\mathbf{n})) = f(\mathbf{n}), \forall \sigma \in \mathfrak{S}_N$ であるとき)

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}_0^N} f(\mathbf{n}) \det_{1 \leq j, k \leq N} [(x_j y_k)^{n_j}] &= \frac{1}{N!} \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}_0^N} f(\mathbf{n}) \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} \det_{1 \leq j, k \leq N} [(x_j y_k)^{n_{\sigma(j)}}] \\ &= \sum_{0 \leq n_1 < \dots < n_N} f(\mathbf{n}) \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} \det_{1 \leq j, k \leq N} [(x_j y_k)^{n_{\sigma(j)}}] \end{aligned}$$

である. また

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} \det_{1 \leq j, k \leq N} [(x_j y_k)^{n_{\sigma(j)}}] = \det_{1 \leq j, k \leq N} [x_j^{n_k}] \det_{1 \leq \ell, m \leq N} [y_\ell^{n_m}]$$

である． $\prod_{j=1}^N c_{n_j}$ は \mathbf{n} の対称関数なので，以上より

$$\det_{1 \leq j, k \leq N} [\psi(x_j y_k)] = \prod_{j=1}^N (x_j y_j)^\rho \sum_{0 \leq n_1 < \dots < n_N} \prod_{j=1}^N c_{n_j} \det_{1 \leq j, k \leq N} [x_j^{n_k}] \det_{1 \leq \ell, m \leq N} [y_\ell^{n_m}].$$

ここで $\mu_j = n_j - N + j, 1 \leq j \leq N$ として，Schur 関数の定義式 (1.21) を用いると (1.23) が得られる． $s_\mu(\mathbf{x})$ は x_1, \dots, x_N の $|\mu|$ 次多項式であり， $s_\emptyset(\mathbf{x}) = 1$ なので， $|\mathbf{x}| \rightarrow 0$ または $|\mathbf{y}| \rightarrow 0$ での漸近評価として (1.24) が得られる． ■

さて

$$\begin{aligned} f_N(t, \mathbf{y} | \mathbf{x}) &= \det_{1 \leq j, k \leq N} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-(x_j - y_k)^2 / (2t)} \right] \\ &= (2\pi t)^{-N/2} e^{-(|\mathbf{x}|^2 + |\mathbf{y}|^2) / (2t)} \det_{1 \leq j, k \leq N} [e^{x_j y_k / t}] \end{aligned}$$

である．そこで， $\psi(x) = e^{x/t} = \sum_{x=0}^{\infty} x^n / (n! t^n)$ として補題 1.1 の (1.24) を適用すると， $|\mathbf{x}|/\sqrt{t} \rightarrow 0$ または $|\mathbf{y}|/\sqrt{t} \rightarrow 0$ で

$$f_N(t, \mathbf{y} | \mathbf{x}) = \frac{t^{-N^2/2}}{C_1(N)} e^{-(|\mathbf{x}|^2 + |\mathbf{y}|^2) / (2t)} h_N(\mathbf{x}) h_N(\mathbf{y}) \times \left\{ 1 + \mathcal{O}\left(\frac{|\mathbf{x}|}{\sqrt{t}}, \frac{|\mathbf{y}|}{\sqrt{t}}\right) \right\} \quad (1.25)$$

という評価を得る．ここで， $C_1(N)$ は (1.17) の最初の式で与えられる．したがって，

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_N(t, \mathbf{x}) &= \int_{\mathbb{W}_N^A} f_N(t, \mathbf{y} | \mathbf{x}) d\mathbf{y} \\ &= \frac{1}{C_1(N)} h_N\left(\frac{\mathbf{x}}{\sqrt{t}}\right) C_2(N) \times \left\{ 1 + \mathcal{O}\left(\frac{|\mathbf{x}|}{\sqrt{t}}\right) \right\}, \quad \frac{|\mathbf{x}|}{\sqrt{t}} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

となる．ここで

$$C_2(N) = \int_{\mathbb{W}_N^A} e^{-|\mathbf{x}|^2/2} h_N(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (1.26)$$

である．Selberg 積分の変形の一つ [11]

$$\int_{\mathbb{R}^N} e^{-a|\mathbf{x}|^2} |h_N(\mathbf{x})|^{2\gamma} = (2\pi)^{N/2} (2a)^{-N(\gamma(N-1)+1)/2} \prod_{j=1}^N \frac{\Gamma(1+j\gamma)}{\Gamma(1+\gamma)} \quad (1.27)$$

において $a = 1/2, \gamma = 1/2$ とすることによって，これは (1.17) の後の式に等しいことが分かる．以上で，(1.15) の導出ができた． ■

2 Hermite 行列値過程とその固有値過程

2.1 一般化された Bru の定理

$N \times N$ Hermite 行列全体の集合を $\mathcal{H}(N)$, $N \times N$ 実対称行列全体の集合を $\mathcal{S}(N)$ とおく．そして行列 A の転置行列を tA , 複素共役を \bar{A} , エルミート共役を $A^\dagger \equiv {}^t\bar{A}$ と書くことにする．Bru は $\mathcal{H}(N)$ 値過程の一例である Wishart 過程について調べ, その固有値過程が満たす方程式を導いた．この結果は, 行列値過程の各要素 $\xi_{jk}(t)$, $1 \leq j, k \leq N$ が複素数値連続半マルチンゲールである場合に拡張することができる [6, 7]．この節ではこの拡張の結果得られた一般化された Bru の定理を紹介し, 次節でその応用例を与えることにする⁹． $\lambda(t) = (\lambda_1(t), \lambda_2(t), \dots, \lambda_N(t))$ を $\mathcal{H}(N)$ 値過程 $\Xi(t) = (\xi_{jk}(t))_{1 \leq j, k \leq N}$ の固有値を成分に持つベクトルとする．ただし, 大小関係 $\lambda_1(t) \leq \lambda_2(t) \leq \dots \leq \lambda_N(t)$ を満たすものとする．このとき $U(t) = (u_{jk}(t))_{1 \leq j, k \leq N}$ を

$$U(t)^\dagger \Xi(t) U(t) = \Lambda(t) = \text{diag}(\lambda_1(t), \lambda_2(t), \dots, \lambda_N(t))$$

というように, $\Xi(t)$ を対角化するユニタリ行列の族とする．

$$\Gamma_{jk, \ell m}(t) dt = \left(U(t)^\dagger d\Xi(t) U(t) \right)_{jk} \left(U(t)^\dagger d\Xi(t) U(t) \right)_{\ell m}$$

とおき, また $(U(t)^\dagger d\Xi(t) U(t))_{jj}$ の有界変動部分を $d\Upsilon_j(t)$ と書くこととする．そして, 固有値 $(\lambda_1(t), \lambda_2(t), \dots, \lambda_N(t))$ が初めて重なる正の時刻を τ とおく:

$$\tau = \inf \left\{ t > 0 : \lambda_j(t) = \lambda_k(t) \text{ となる } 1 \leq j \neq k \leq N \text{ が存在する} \right\}.$$

定理 2.1 [一般化された Bru の定理] 複素数値過程 $\xi_{jk}(t)$, $1 \leq j, k \leq N$ を連続半マルチンゲールとする．このとき $\Xi(t)$ の固有値 $\lambda(t)$ は次の確率微分方程式を満たす．

$$d\lambda_j(t) = dM_j(t) + dJ_j(t), \quad t \in (0, \tau), \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (2.1)$$

ただし $M(t) = (M_1(t), M_2(t), \dots, M_N(t))$ は $dM_j(t)dM_k(t) = \Gamma_{jj, kk}(t)dt$ であるマルチンゲールであり, $J(t) = (J_1(t), J_2(t), \dots, J_N(t))$ は

$$dJ_j(t) = \sum_{\substack{1 \leq k \leq N \\ k \neq j}} \frac{1}{\lambda_j(t) - \lambda_k(t)} \mathbf{1}_{\{\lambda_j(t) \neq \lambda_k(t)\}} \Gamma_{jk, kj}(t) dt + d\Upsilon_j(t)$$

で与えられる有界変動過程である．ここで $\mathbf{1}_{\{\omega\}}$ は条件 ω の指示関数であり, 条件 ω が成り立つときは 1, それ以外は 0 の値を与える．

⁹証明のポイントは行列値の連続半マルチンゲールの積に Itô の公式 (1.7) を適用することにある． M と \tilde{M} を成分が連続半マルチンゲールである $N \times N$ の行列とする．このとき $d(M^\dagger \tilde{M}) = (dM)^\dagger \tilde{M} + M^\dagger (d\tilde{M}) + (dM)^\dagger (d\tilde{M})$ となる．右辺第 3 項が確率解析に特有のものである．

2.2 応用例

$B_{jk}^R(t), B_{jk}^I(t), 1 \leq j, k \leq N$ を $2N^2$ 個の独立な 1 次元 Brown 運動とする . $1 \leq j, k \leq N$ に対して

$$s_{jk}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}B_{jk}^R(t), & j < k \\ B_{jj}^R(t), & j = k \\ \frac{1}{\sqrt{2}}B_{kj}^R(t), & j > k \end{cases} \quad a_{jk}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}B_{jk}^I(t), & j < k \\ 0, & j = k \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}B_{kj}^I(t), & j > k \end{cases}$$

とおく .

(i) GUE 型行列値過程

$$\Xi^{\text{GUE}}(t) = \left(s_{jk}(t) + \sqrt{-1}a_{jk}(t) \right)_{1 \leq j, k \leq N}, \quad t \in [0, \infty) \quad (2.2)$$

で定義される $\mathcal{H}(N)$ 値過程を考える . 任意の固定した $t \in [0, \infty)$ に対して, $\Xi^{\text{GUE}}(t)$ は $\mathcal{H}(N)$ 値確率変数になるが, $\mathcal{H}(N)$ の体積要素 $\mathcal{U}(dH)$ に対する確率密度関数は

$$\mu^{\text{GUE}}(H, t) = \frac{t^{-N^2/2}}{c_1(N)} \exp\left(-\frac{1}{2t}\text{Tr}H^2\right), \quad H \in \mathcal{H}(N)$$

で与えられる . ここで, Tr は行列のトレースをとることを表す . また, $c_1(N) = 2^{N/2}\pi^{N^2/2}$ である . $N \times N$ ユニタリ行列全体の集合を $\text{U}(N)$ とおくと, 任意の $U \in \text{U}(N)$ に対して, 確率 $\mu^{\text{GUE}}(H, t)\mathcal{U}(dH)$ はユニタリ変換 $H \rightarrow U^\dagger H U$ の下で不変である . ランダム行列理論では, このような不変性を持つ $\mathcal{H}(N)$ 値確率変数の統計集団を Gauss 型ユニタリ集団 (Gaussian unitary ensemble, GUE) とよぶ [11, 13] . この GUE の固有値分布の密度関数は, $x_1 < x_2 < \dots < x_N$ である $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ に対して

$$g^{\text{GUE}}(\mathbf{x}, t) = \frac{t^{-N^2/2}}{C_1(N)} \exp\left(-\frac{|\mathbf{x}|^2}{2t}\right) h_N(\mathbf{x})^2 \quad (2.3)$$

で与えられる [11, 13] . ここで $h_N(\mathbf{x})$ は差積で表される $N \times N$ の Vandermonde の行列式 (1.22) である . また, $C_1(N)$ は正規化定数であり, (1.17) の最初の式と同じものである .

一般化された Bru の定理を $\Xi^{\text{GUE}}(t)$ に適用するために, $d\xi_{jk}(t)d\xi_{\ell m}(t)$ の値を計算しておくことにする . まず $d\xi_{jj}(t)d\xi_{jj}(t) = dB_{jj}^R(t)dB_{jj}^R(t) = dt$ がすぐに分かる . また $j < k$ のときには, $d\xi_{jk}(t) = dB_{jk}^R(t)/\sqrt{2} + \sqrt{-1}dB_{jk}^I(t)/\sqrt{2} = \overline{d\xi_{kj}(t)}$ であることに注意すると, $d\xi_{jk}(t)d\xi_{jk}(t) = dt/2 - dt/2 = 0$, $d\xi_{jk}(t)d\xi_{kj}(t) = dt/2 + dt/2 = dt$ となることも分かる . $(j, k) \neq (\ell, m), (m, \ell)$ のときには, 独立性から $dB_{jk}^R(t)dB_{\ell m}^R(t) = dB_{jk}^I(t)dB_{\ell m}^I(t) = 0$ が成り立つので, $d\xi_{jk}(t)d\xi_{\ell m}(t) = 0$ となる . 以上をまとめると

$d\xi_{jk}(t)d\xi_{\ell m}(t) = \delta_{jm}\delta_{k\ell}dt$, $1 \leq j, k, \ell, m \leq N$ となる . この結果を用いて $dM_j(t)dM_k(t)$ を計算すると

$$\begin{aligned}\Gamma_{jj,kk}(t)dt &= \left(U(t)^\dagger d\Xi(t)U(t) \right)_{jj} \left(U(t)^\dagger d\Xi(t)U(t) \right)_{kk} \\ &= \sum_{\ell,m} \overline{u_{\ell j}} d\xi_{\ell m} u_{mj} \sum_{p,q} \overline{u_{pk}} d\xi_{pq} u_{qk} \\ &= \sum_{\ell,m} \overline{u_{\ell j}} u_{\ell k} u_{mj} \overline{u_{mk}} dt = \delta_{jk} dt\end{aligned}$$

となる . ここで最後の等式は , $U(t)$ がユニタリ行列であること ($U(t)^\dagger U(t) = U(t)U(t)^\dagger = I_N$) から導かれる . したがって , マルチンゲ - ル部分は N 次元 Brown 運動であることが示されたことになる . 同様な計算により $\Gamma_{jk,kj}(t) = 1$, $1 \leq j, k \leq N$ が分かる . $(U(t)^\dagger d\Xi(t)U(t))_{jj}$ には有界変動部分はないこと ($dY_j(t) = 0$) に注意すると , 一般化された Bru の定理から , $\lambda(t)$ の満たすべき確率微分方程式が

$$d\lambda_j(t) = dB_j(t) + \sum_{\substack{1 \leq k \leq N \\ k \neq j}} \frac{1}{\lambda_j(t) - \lambda_k(t)} dt, \quad 1 \leq j \leq N \quad (2.4)$$

であることが導かれる . また , $\tau = \infty$ であることを示すことができる . (2.4) は Dyson 模型の方程式 (1.20) の $\beta = 2$ の場合になっている .

(ii) GOE 型行列値過程

$$\Xi^{\text{GOE}}(t) = \left(s_{jk}(t) \right)_{1 \leq j, k \leq N}, \quad t \in [0, \infty) \quad (2.5)$$

で定義される $S(N)$ 値過程を考える . 任意の固定した $t \in [0, \infty)$ に対して $\Xi^{\text{GOE}}(t)$ は , $S(N)$ の体積要素 $\mathcal{V}(dS)$ に対する確率密度関数が

$$\mu^{\text{GOE}}(S, t) = \frac{t^{-N(N+1)/4}}{c_2(N)} \exp \left(-\frac{1}{2t} \text{Tr} S^2 \right), \quad S \in S(N)$$

であるような $S(N)$ 値確率変数を与える . ここで $c_2(N) = 2^{N/2} \pi^{N(N+1)/4}$ である . $N \times N$ 実直交行列全体の集合を $O(N)$ とおくと , 任意の $V \in O(N)$ に対して , 確率 $\mu^{\text{GOE}}(S, t) \mathcal{V}(dS)$ は直交変換 $S \rightarrow {}^t V S V$ の下で不変である . このような $S(N)$ 値確率変数の統計集団は Gauss 型直交集団 (Gaussian orthogonal ensemble, GOE) とよばれている . GOE の固有値分布の密度関数は , $x_1 < x_2 < \dots < x_N$ である $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ に対して ,

$$g^{\text{GOE}}(\mathbf{x}, t) = \frac{t^{-N(N+1)/4}}{C_2(N)} \exp \left(-\frac{|\mathbf{x}|^2}{2t} \right) h_N(\mathbf{x}) \quad (2.6)$$

で与えられる (ただし $C_2(N)$ は (1.17) の後の式で与えられているものである) [11, 13]. GUE 型行列値過程と同様な計算により, $\lambda(t)$ の満たすべき確率微分方程式は

$$d\lambda_j(t) = dB_j(t) + \frac{1}{2} \sum_{\substack{1 \leq k \leq N \\ k \neq j}} \frac{1}{\lambda_j(t) - \lambda_k(t)} dt, \quad 1 \leq j \leq N$$

と定まる. この場合にも $\tau = \infty$ であることを示すことができる. これは Dyson 模型の方程式 (1.20) の $\beta = 1$ の場合に等しい.

3 長距離相互作用系の非平衡統計力学

1.4 節の結果と 2.2 節 (i) の結果を見比べると, GUE 型行列値過程の固有値過程 $\lambda(t) = (\lambda_1(t), \dots, \lambda_N(t))$ と非衝突 Brown 運動 $X(t) = (X_1(t), \dots, X_N(t))$ はともに, $\beta = 2$ の場合の Dyson 模型の方程式を満たすことが分かる. したがって次が結論される.

定理 3.1 非衝突 Brown 運動 $X(t) = (X_1(t), \dots, X_N(t))$ と GUE 型行列値過程の固有値過程 $\lambda(t) = (\lambda_1(t), \dots, \lambda_N(t))$ は確率過程として等価である.

Dyson はランダム行列の研究において (1.20) の確率微分方程式を導いた. 我々は上で, この確率過程が, 非衝突条件を課した N 粒子 Brown 運動として実現されることを証明したことになる. ただし, この等価性は $\beta = 2$ の場合に限られることに注意しなければならない. Dyson 模型 (1.20) は全ての 2 粒子間に強さが粒子間距離に反比例して減衰する斥力が働く長距離相互作用系である. このような力を導くポテンシャルは \log 関数で与えられることから, \log -ポテンシャル系ともよばれる. さらには, 2 体相互作用の粒子間距離依存性が冪乗則に従う粒子系は (Dyson 模型の場合は反比例なので冪指数が -1 の冪乗則である), 一般に Coulomb 気体とよばれている. (1.20) の β を逆温度 $\beta = 1/k_B T$ と見なすと, 1次元においては $T = 1/(2k_B)$ という特別な温度では, この長距離相互作用系の素性が良く分かったことになる. $\beta \neq 2$ の場合, さらには 2次元以上の系への拡張は, 現在盛んに研究されているホットな話題である. また, $N \rightarrow \infty$ の極限をとって無限粒子系の非平衡ダイナミクスを議論することは, 長距離相互作用を持つ系の非平衡熱力学・非平衡統計力学を構築する上で大変興味深い研究課題である.

Part II : 臨界現象・フラクタル曲線と Schramm-Loewner Evolution (SLE)¹⁰

4 統計力学模型とランダムな曲線の統計集団

4.1 平面上の統計力学模型の連続極限

複素平面 \mathbb{C} 上に正方格子 S を置く ($S = \mathbb{Z} \times \sqrt{-1}\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} \equiv$ 整数全体の集合). そして, S 上の最近接ウォークが描く経路を考える. 出発点が $z \in S$, 長さが n の経路全体は $W_n^z = \left\{ \omega = (\omega(0), \dots, \omega(n)) : \omega(0) = z, \omega(j) \in S, |\omega(j) - \omega(j-1)| = 1, 1 \leq j \leq n \right\}$ で与えられる. ランダムウォーク (RW) とは経路の重みをすべて等しいとした一様分布の統計集団をいう. $|W_n^z| = 4^n$ なので, 各々の経路 $\omega \in W_n^z$ の重みは 4^{-n} である. \mathbb{C} 上に正方形の開領域 $D_0 = \left\{ x + \sqrt{-1}y : -1 < x < 1, 0 < y < 2 \right\}$, をとり, その境界 ∂D_0 上に 2 点 $O = 0$ (原点), $P = 2\sqrt{-1}$ を指定する. $N \in \mathbb{N}$ を定め, これらを原点を中心に N 倍する. そして, $NO = 0$ から $NP = 2N\sqrt{-1}$ へ至る RW で, 領域 ND_0 に含まれるもの全体を $\Omega_N(D_0; O, P)$ と書くことにして, その重みの総和を考える. これは, 統計力学で習った分配関数に相当する量である:

$$Z_N(D_0; O, P) = \sum_{\omega \in \Omega_N(D_0; O, P)} 4^{-|\omega|}. \quad (4.1)$$

ただし, 経路 ω の長さを $|\omega|$ と記した. この量は $N \rightarrow \infty$ で次のように減衰する: $Z_N(D_0; O, P) \sim C(D_0; O, P)N^{-2} \rightarrow 0$. ($f(N) \sim g(N), N \rightarrow \infty$ は $f(N)/g(N) \rightarrow 1, N \rightarrow \infty$ の意味.) 係数 $C(D_0; O, P)$ は領域 D_0 での Poisson 核 $H_{D_0}(\cdot, P)$ の原点 $O \in \partial D_0$ での法線微分で与えられる.

ループ除去ランダムウォーク (loop-erased RW: LERW)

$\Omega_N(D_0; O, P)$ の元 $\omega = (\omega(0), \omega(1), \dots)$ は一般には $\omega(j) = \omega(k), j < k$ となる点を含む. このとき, 経路 ω は自己交差する, あるいはループを持つという. そのような場合, 次の操作によって ω の部分からなる経路 $\hat{\omega} = (\hat{\omega}(0), \hat{\omega}(1), \dots)$ を取り出すことによって, ループを消去することにする: $t_0 = 0, \hat{\omega}(0) = \hat{\omega}(t_0) = 0$ として, $m \geq 1$ に対して

$$t_m = \max \left\{ \ell > t_{m-1} : \hat{\omega}(\ell) = \hat{\omega}(t_{m-1} + 1) \right\}, \quad \hat{\omega}(m) = \hat{\omega}(t_m) = \hat{\omega}(t_{m-1} + 1)$$

¹⁰本稿は 2009 年度日本数学会年会 (2009 年 3 月 26 日-29 日, 於 東京大学駒場キャンパス) での企画特別講演「連続関数空間上の共形不変な確率測度と Schramm-Loewner Evolution」の抽象トをもとに作成したものである.

とする． ND_0 内の $0 \rightarrow NP$ の自己交差のない経路全体を $\Omega_N^0(D_0; O, P)$ と記すことにする．この集合の各元は，一般にはループを持つ幾つかの相異なる RW から上の操作によって得られる．そこで $\Omega_N^0(D_0; O, P)$ の各元に，その元を与えるループ除去前の RW の重みの和 $\sum_{\omega} 4^{-|\omega|}$ を重みとして与えることにする．このように定義された経路の統計集団をループ除去ランダムウォーク (LERW) という．

LERW の連続極限を次のように考える．LERW の経路 $\omega = (\omega(0), \dots, \omega(|\omega|))$ に対して，ある指数 $\nu > 0$ を導入して

$$\omega^{1/N} \left(\frac{j}{N^{1/\nu}} \right) = \frac{1}{N} \omega(j), \quad 0 \leq j \leq |\omega| \quad (4.2)$$

とする． $\omega^{1/N}$ は原点 O を出発して， $|\omega|/N^{1/\nu}$ ステップ後に $P = 2\sqrt{-1}$ に到達する D_0 内の（空間刻み $1/N$ の）自己交差のない経路である．特定の ν の値に対しては， $N \rightarrow \infty$ の極限で，原点から点 P に至る連続な曲線 γ の統計集団が得られることが期待される（各曲線が点 P に到達する「時刻」 $t_\gamma = \lim_{N \rightarrow \infty} |\omega|/N^{1/\nu}$ も確率変数となる）：

$$\gamma: (0, t_\gamma) \rightarrow D_0 \text{ 連続}, \quad \lim_{t \rightarrow 0} \gamma(t) = O, \quad \lim_{t \rightarrow t_\gamma} \gamma(t) = P, \quad t_\gamma \in (0, \infty). \quad (4.3)$$

この曲線 γ のフラクタル次元は $d_{\text{LERW}} = 1/\nu$ である．また γ は単純曲線，つまり $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2), 0 \leq t_1 < t_2 \leq t_\gamma$ であろう．LERW の連続極限として得られる連続な曲線 (4.3) 全体を $\mathcal{K}_{\text{LERW}}(D_0; O, P)$ と書くことにする．この空間 $\mathcal{K}_{\text{LERW}}(D_0; O, P)$ の各元に対する重みを $\bar{\mu}_{(D_0; O, P)}^{\text{LERW}}$ とすると，その総和は $C(D_0; O, P)$ であり

$$\bar{\mu}_{(D_0; O, P)}^{\text{LERW}}(\cdot) = C(D_0; O, P) \mu_{(D_0; O, P)}^{\text{LERW}}(\cdot) \quad (4.4)$$

によって，ランダムな連続曲線に対する確率分布関数 $\mu_{(D_0; O, P)}^{\text{LERW}}$ が与えられる．

自己回避ウォーク (self-avoiding walk : SAW)

最近接ウォーク W_n^z の部分集合として，自己交差しないウォーク全体の集合を考える．

$$W_{n,0}^z = \left\{ \omega \in W_n^z : \text{すべての } 0 \leq j < k \leq n \text{ に対して } \omega(j) \neq \omega(k) \right\}.$$

ある定数 $2 < e^\beta < 3$ があって， $|W_{n,0}^z| \simeq e^{\beta n}, n \rightarrow \infty$ であることが知られている¹¹．（ $f(n) \simeq g(n), n \rightarrow \infty$ は $\log f(n) \sim \log g(n), n \rightarrow \infty$ の意味．）そこで，自己交差しないウォーク ω に対してそれぞれ $e^{-\beta|\omega|}$ の重みを与えた統計集団を考えることにする．これを自己回避ウォーク (SAW) という．(4.1) 式に対応する SAW の分配関数は

$$Z_N^{\text{SAW}}(D_0; O, P) = \sum_{\omega \in \Omega_N^0(D_0; O, P)} e^{-\beta|\omega|}$$

¹¹ e^β の値は SAW connective constant とよばれる定数であるが，正格子 S に対しても厳密な値は分かっていない．数値的には約 2.638 と見積もられている．

である．この分配関数に対して，ある指数 $b_{\text{SAW}} > 0$ があり，

$$Z_N^{\text{SAW}}(D_0; O, P) \sim C^{\text{SAW}}(D_0; O, P) N^{-2b_{\text{SAW}}}, \quad N \rightarrow \infty \quad (4.5)$$

と予想されている（先の LERW の場合は $b_{\text{LERW}} = 1$ であったことになる．）SAW の経路の連続極限 γ も単純曲線であるが，そのフラクタル次元 d_{SAW} は LERW の次元 d_{LERW} とは異なるであろう．(4.4) 式と同様に，SAW の連続極限に対する分布関数を

$$\bar{\mu}_{(D_0; O, P)}^{\text{SAW}}(\cdot) = C^{\text{SAW}}(D_0; O, P) \mu_{(D_0; O, P)}^{\text{SAW}}(\cdot)$$

と書くことにする．

臨界浸透模型 (critical percolation model)

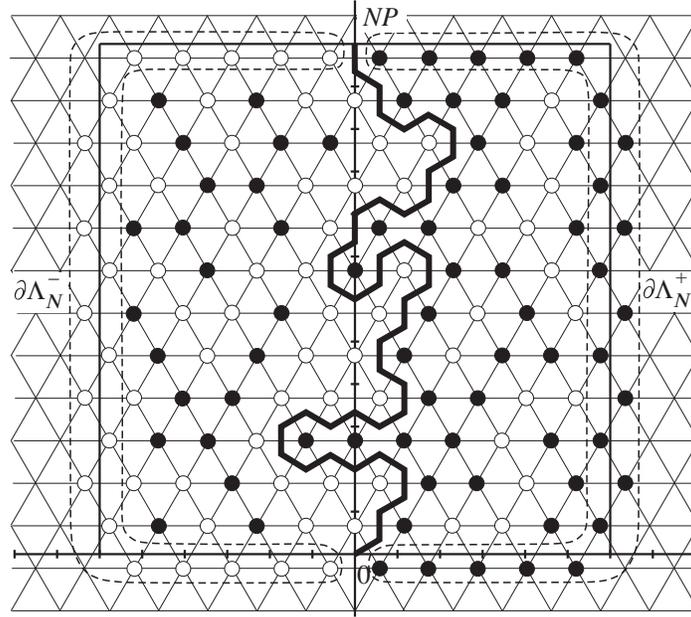


図 3: \mathbb{T} 上の浸透模型と \mathbb{H} 上の浸透探索過程．値 1 を黒丸，値 0 を白丸で表した．

ここでは \mathbb{C} 上に三角格子を置く： $\tau = \exp(2\pi\sqrt{-1}/3)$ として， $\mathbb{T} = \{z_0 + (j+k\tau)\sqrt{3}a : j, k \in \mathbb{Z}\}$ ．ただし， $a = 2/3$ として $z_0 = a\sqrt{-1}$ とする．こうすると \mathbb{T} の双対格子である格子間隔 a の蜂の巣格子 \mathbb{H} が，原点 O と点 $NP = 2N\sqrt{-1}$ ， $N \in \mathbb{N}$ を含むようになる．各点 $z \in \mathbb{T}$ 上に確率変数 $\eta(z) \in \{0, 1\}$ を Bernoulli 測度 ν_p ， $0 \leq p \leq 1$ で分布させる： $\nu_p(\eta(z) = 1) = p$ ， $\nu_p(\eta(z) = 0) = 1 - p$ ．三角格子 \mathbb{T} は繊維表面を表し，その内で値 1 を持つ点は濡れた部位を，値 0 を持つ点は乾いた部位をそれぞれ表すと思うと，これは浸透現象を表す模型と見なせる．原点を含む連結浸透領域は $p \leq 1/2$ のと

き確率 1 で有界であるが, $p > 1/2$ では非有界となる確率が正となる. 以下では, 臨界値 $p_c = 1/2$ の場合を考える (浸透模型の臨界値 p_c は格子に依存する. \mathbb{T} の場合は $p_c = 1/2$ である.) Bernoulli 測度なので, 重みの総和は領域のサイズ N に依らず 1 である. このことは $b_{\text{per}} = 0$ を意味する.

$N \in \mathbb{N}$ を定め, $\mathbb{T} \cap ND_0 = \Lambda_N$ と書くことにする. 図 3 に $N = 6$ の場合を示した. 以下, この図を用いて説明する. Λ_N の境界近くの格子点 $z \in \mathbb{T}$ で, 点 O と点 NP を結ぶ直線より右側のもの全体を $\partial\Lambda_N^+$, 左側のもの全体を $\partial\Lambda_N^-$ とする. そして $\eta(z) = 1, \forall z \in \partial\Lambda_N^+, \eta(z) = 0, \forall z \in \partial\Lambda_N^-$ と固定する (Dobrushin 境界条件). これ以外の領域 Λ_N 内部の配置は ν_p に従ってランダムに分布させる. このようにして与えられた任意の配置 $\eta \in \{0, 1\}^{\mathbb{T} \cap ND_0}$ に対して, $\mathbb{H} \cap N\bar{D}_0$ 上の原点 O を出発点とする最近接ウォーク ω で, その経路の進行方向すぐ左側の三角格子点の値はすべて 0 であり (図では白丸), すぐ右側の三角格子点の値はすべて 1 である (黒丸) ものが, 一意的に定まる. これを浸透探索過程とよぶ. 再び, 適当な指数 $\nu > 0$ をもって (4.2) とおいて連続極限 $N \rightarrow \infty$ をとると, フラクタル次元 $d_{\text{per}} = 1/\nu$ を持つ連続な曲線 (4.3) が得られる. この曲線 γ は単純曲線ではない. 浸透探索過程の連続極限 γ に対する確率分布関数を $\mu_{(D_0; O, P)}^{\text{per}}(\cdot)$ と記すことにする.

臨界 Ising 模型 (critical Ising model)

$\bar{\Lambda}_N = \Lambda_N \cup \partial\Lambda_N^+ \cup \partial\Lambda_N^-$ とする. 各点 $z \in \bar{\Lambda}_N$ にスピン変数 $\sigma(z) \in \{-1, 1\}$ を与える. $z \in \partial\Lambda_N^\pm$ に対しては $\sigma(z) = \pm 1$ (複号同順) と固定し (Dobrushin 境界条件), 領域内部 ${}^\circ\Lambda_N = \Lambda_N \cap (\partial\Lambda_N^+)^c \cap (\partial\Lambda_N^-)^c$ のスピンはランダムに配置する. 各スピン配置 $\sigma \in \{-1, 1\}^{\bar{\Lambda}_N}$ に対して, エネルギーが

$$E(\sigma) = -\frac{1}{2} \sum_{z, z' \in \bar{\Lambda}_N: |z-z'|=\sqrt{3}a} \sigma(z)\sigma(z')$$

で与えられる場合を考える. k_B をボルツマン定数として $\beta = 1/(k_B T)$ とする. パラメータ $\beta > 0$ の Gibbs 測度

$$\pi_{N, \beta}(\sigma) = \frac{e^{-\beta E(\sigma)}}{Z_{N, \beta}}, \quad Z_{N, \beta} = \sum_{\sigma \in \{-1, 1\}^{\circ\Lambda_N}} e^{-\beta E(\sigma)}$$

の下でのスピン配置を温度 $T \geq 0$ での Ising 模型という. これは強磁性体の模型である. 各スピン配置に対して, 浸透模型の項で述べたのと同様の探索過程 ω (ただし今度は -1 のスピンと $+1$ のスピンの境界線として定義される界面を表す) が $\mathbb{H} \cap N\bar{D}_0$ 上に得られる. 特に β の値を \mathbb{T} 上の Ising 模型の臨界値 $\beta_c = (\log 3)/4 = 0.27465 \dots$ に設定し, 連続極限をとると, あるフラクタル次元 d_{Ising} を持つ連続曲線 (4.3) が得られる. これは単純曲線である. この γ の分布関数を $\mu_{(D_0; O, P)}^{\text{Ising}}(\cdot)$ と記すことにする.

4.2 共形不変性と領域 Markov 性

f が $D_0 \subset \mathbb{C}$ 上で正則であり, 微分 $f'(z) \neq 0, \forall z \in D_0$ のとき

$$f : D_0 \rightarrow f(D_0) \quad (4.6)$$

を共形変換という. f により, 境界 ∂D_0 上の点 O, P はそれぞれ, $\partial f(D_0)$ 上の点 $f(O), f(P)$ に写されるとする. 4.1 節で述べた平面格子上的統計力学モデルの連続極限に伴って得られる, 連続な曲線 γ に対する分布関数

$$\bar{\mu}_{(D_0; O, P)}(\cdot) = C(D_0; O, P)\mu_{(D_0; O, P)}(\cdot) \quad (4.7)$$

は, 次の2つの性質を持つことが期待される.

共形共変性 (conformal covariance) と共形不変性 (conformal invariance)

任意の共形変換 (4.6) に対して,

$$f \circ \bar{\mu}_{(D_0; O, P)}(\cdot) = |f'(O)|^b |f'(P)|^b \bar{\mu}_{(f(D_0); f(O), f(P))}(\cdot) \quad (4.8)$$

である. b は 4.1 節で述べたように, 格子上的モデルの分配関数の領域サイズ $N \rightarrow \infty$ に伴う漸近挙動で決まる値である. (4.8) 式の形から, 境界スケーリング指数 (boundary scaling exponent) とよばれる. (4.8) 式は, 重みの総和の共形共変性と確率分布関数の共形不変性を意味する¹²:

$$C(D_0; O, P) = |f'(O)|^b |f'(P)|^b C(f(D_0); f(O), f(P)), \quad (4.9)$$

$$\mu_{(D_0; O, P)}(\cdot) = \mu_{(f(D_0); f(O), f(P))}(\cdot). \quad (4.10)$$

領域 Markov 性 (domain Markov property)

$\mu_{(D_0; O, P)}$ の下で, 曲線 γ の初期の一部分 $\gamma(0, t], t \in (0, t_\gamma)$ を観測したとする. この条件の下での曲線の残りの部分の分布は, D_0 から $\gamma(0, t]$ を除いた開領域で, $\gamma(t)$ を出発点として $\gamma(t_\gamma) = P$ を終点とする曲線の分布に等しい:

$$\mu_{(D_0; O, P)}\left(\cdot \mid \gamma(0, t]\right) = \mu_{(D_0 \setminus \gamma(0, t]; \gamma(t), P)}(\cdot).$$

この性質を領域 Markov 性という.

曲線 γ は (4.3) 式に書いたように変数 (時間と見なす) $t \in [0, t_\gamma]$ の連続関数である. 共形変換 (4.6) によって, 時間はどのように変換されるべきか. 格子上的統計力学模

¹²4.1 節では格子模型における経路に対して, (4.2) の変換を施して連続極限を議論したが, これは $f(z) = z/N, N \in \mathbb{N}$ という縮小写像 (もちろん共形変換である) を行ったことにあたる. この場合 $f'(z) = 1/N$ なので, $|f'(O)|^b = |f'(P)|^b = N^{-b}$ である. (4.9) を, 例えば (4.5) 式と見比べてみよ.

型の連続極限をとる際に置いた (4.2) 式のスケール性に従うと，像曲線 $f \circ \gamma$ 上の区間 $f(\gamma[t_1, t_2])$, $0 < t_1 < t_2 < t_\gamma$, を移動するのにかかる時間は $\int_{t_1}^{t_2} |f'(\gamma(s))|^d ds$ で与えられるべきであろう．ただし d は曲線 γ のフラクタル次元である．他方，任意の増加同相写像 $\theta : [0, t_\gamma] \rightarrow [0, t_\gamma]$ に対して $\gamma(t)$ と $\gamma(\theta(t))$ を同一視することにより，曲線のパラメータ付けの違いを無視することも出来る．

4.3 制限性と局所性

ランダムな曲線の分布関数 (4.7) は特別な場合，共形共変/不変性と領域 Markov 性に加えて，次のような特性を持つことが予想される．

制限性 (restriction property)

正方形領域 D_0 の部分で単連結な領域 $D_1 \subset D_0$ を考える．ただし， $O, P \in \partial D_1$ とする．4.1 節と同様にして，この部分領域で LERW を考え，その連続極限の分布関数 $\bar{\mu}_{(D_1; O, P)}^{\text{LERW}}$ を定義する．領域を小さくすれば，その内部での $O \rightarrow P$ なる RW も減る．したがって，RW に対してループ除去して LERW を得る際に，LERW の経路に対して付加される重みも減少する．よって一般に Radon-Nikodym 微分に対して

$$\frac{d\bar{\mu}_{(D_1; O, P)}^{\text{LERW}}}{d\bar{\mu}_{(D_0; O, P)}^{\text{LERW}}} < 1, \quad D_1 \subset D_0, \quad D_1 \neq D_0$$

であるはずである．しかし，SAW の連続極限の分布関数においては

$$\frac{d\bar{\mu}_{(D_1; O, P)}^{\text{SAW}}}{d\bar{\mu}_{(D_0; O, P)}^{\text{SAW}}} = \mathbf{1}\{\gamma(0, t_\gamma) \subset D_1\}, \quad D_1 \subset D_0 \quad (4.11)$$

が成立する．ただし， $\mathbf{1}\{\omega\}$ は事象 ω の指示関数である．(4.11) を制限性という．

浸透模型の確率変数 η は Bernoulli 分布に従っているので，浸透探索過程の振る舞いは，その経路の左右の最近接三角格子点上の η 配置のみで決まる．このため，連続極限で得られる連続関数の確率分布関数 μ^{per} には，局所性とよばれる次の特性があるはずである（他方， $\bar{\mu}^{\text{Ising}}$ には局所性は期待できない）

局所性 (locality property)

単連結な部分領域 $D_1 \subset D_0$ で $O, P \in \partial D_1$ であるものを考える．このとき，

$$\mu_{(D_1; O, P)}^{\text{per}}(\gamma(0, t]) = \mu_{(D_0; O, P)}^{\text{per}}(\gamma(0, t]) \mathbf{1}\{\gamma(0, t) \subset D_1\}, \quad \forall t \in (0, t_\gamma). \quad (4.12)$$

制限性 (4.11) は曲線全体 $\gamma(0, t_\gamma)$ の性質であるが，局所性 (4.12) は任意の初期部分 $\gamma(0, t]$, $t \in (0, t_\gamma)$ に対して成り立つべき性質であり，より強い独立性である．

5 Schramm-Loewner Evolution (SLE)

5.1 Riemann の写像定理

D, D' がともに \mathbb{C} 上の単連結領域であり (ただし $D, D' \neq \mathbb{C}$), $z, w \in \partial D, z', w' \in \partial D'$ とする. Riemann の写像定理より,

$$\text{共形変換 } f: D \rightarrow D', \quad f(z) = z', \quad f(w) = w'$$

となる 1 パラメータ族が存在することが結論される. さらに $|f'(w)| = 1$ という条件を課すと, 共形変換は一意的に定まる.

上半平面を $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z > 0\}$ と記す. 以上より, 共形不変な確率分布関数 $\mu_{(\mathbb{H}; 0, \infty)}$ が与えられれば, 任意の単連結領域 $D \subset \mathbb{C}, D \neq \mathbb{C}, z, w \in \partial D$ に対する確率分布関数 $\mu_{(D; z, w)}$ が得られることになる. また, $\mathbb{H} \setminus D$ が有界である単連結領域 $D \subset \mathbb{H}$ に対して $w = f(w) = \infty$ とすると, 条件 $|f'(w)| = 1$ より $w' \rightarrow \infty$ で $f(w') \sim w'$ となる. このような状況では, 共形共変性は次式で表される:

$$f \circ \bar{\mu}_{(D; z, \infty)}(\cdot) = |f'(z)|^b \bar{\mu}_{(f(D); f(z), \infty)}(\cdot), \quad z \in \partial D. \quad (5.1)$$

5.2 Loewner 方程式

$\gamma: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{H}$ を $\lim_{t \rightarrow 0} \gamma(t) = U_0 \in \mathbb{R}$ から $\lim_{t \rightarrow \infty} \gamma(t) = \infty$ に至るある 1 つの単純曲線とする. 上半平面 \mathbb{H} から時刻 t までの曲線 (これを $\gamma(0, t]$ と書く) を除いた領域を $\mathbb{H} \setminus \gamma(0, t]$ と記すことにする. 各 $t \in (0, \infty)$ に対して $\mathbb{H} \setminus \gamma(0, t] \rightarrow \mathbb{H}$ なる共形変換 f で $\lim_{z \rightarrow \infty} f'(z) = 1$ となるものは唯一定まる. これを g_t と書くことにする. これは $a(t) > 0$ として

$$g_t(z) = z + \frac{a(t)}{z} + \mathcal{O}(|z|^{-2}), \quad z \rightarrow \infty$$

と展開される. $a(t)$ は $\gamma(0, t]$ の上半平面容量 (half-plane capacity) である. $g_t(z)$ は (chordal) Loewner 方程式とよばれる次の微分方程式満たす.

$$\frac{d}{dt} g_t(z) = \frac{da(t)/dt}{g_t(z) - U_t}, \quad g_0(z) = z. \quad (5.2)$$

ただしここで, $U_t = g_t(\gamma(t)) \in \mathbb{R}$ であり, $t \rightarrow U_t$ は連続である.

逆に, 任意の連続関数 U_t と 1 回微分可能な関数 $a(t)$ に対して, Loewner 方程式 (5.2) の解として, 共形変換の時間発展 $g_t: H_t \rightarrow \mathbb{H}, t \in (0, \infty)$ が得られる. ただし, 定義域 $H_t \in \mathbb{H}$ は単調減少する. H_t の pioneer point を $H^{\text{pion}} = \bigcup_{0 \leq s < t} \partial H_s$ で定義する.

このとき, $\gamma(0) \in \mathbb{R}$ である曲線 $\gamma: (0, \infty) \rightarrow \bar{\mathbb{H}}$ で $H_t^{\text{pion}} = \mathbb{R} \cup \gamma(0, t]$ となるものがあるとき, 「 g_t は曲線 γ で生成された」ということにする.

5.3 SLE $_{\kappa}$

ここでは、曲線 γ のパラメーター付けによる違いは無視して、 $a(t) = at, a > 0$ とする。 U_t を適当な確率過程として、Loewner 方程式 (5.2) の解 g_t を生成する曲線 γ の統計集団を考え、これの分布関数として $\bar{\mu}_{(\mathbb{H};0,\infty)}$ を構成したい。共形共変/共形不変性と局所 Markov 性の要請から、 U_t は時間的に斉次な連続確率過程で、独立増分を持つものでなければならないことになる。曲線 γ のパラメーター付けの任意性は、 U_t の時間変更の任意性を意味する。そこで、 U_t を 1.1 節で解説した 1 次元 Brown 運動 $B(t)$ としても一般性を失わない。こうして得られた、1 パラメーターを持つ確率的な Loewner 方程式

$$\frac{d}{dt}g_t(z) = \frac{a}{g_t(z) - U_t}, \quad g_0(z) = z, \quad \text{ただし } U_t = B(t) \quad (5.3)$$

を、提案者 Schramm の名前を冠して Schramm-Loewner evolution とよぶ [15]¹³。Schramm の記法に従い、パラメーターを $\kappa \in (0, \infty)$ として $a = \frac{2}{\kappa}$ とおき、SLE $_{\kappa}$ と略記する。SLE $_{\kappa}$ の解 g_t を生成する曲線を SLE $_{\kappa}$ 曲線 γ とよび、その分布関数を SLE $_{\kappa}$ 分布関数 $\bar{\mu}_{(\mathbb{H};0,\infty)}^{\kappa}$ と記すことにする。SLE $_{\kappa}$ 曲線は $\lim_{t \rightarrow 0} \gamma(t) = B(0) = 0$ から $\lim_{t \rightarrow \infty} \gamma(t) = \infty$ に至る連続な曲線である。

定理 5.1 (Lawler-Schramm-Werner [9])¹⁴ ランダムな連続曲線の分布関数で共形共変性と領域 Markov 性を持つものはすべて、1 パラメーター族である SLE $_{\kappa}$ 分布関数、 $\kappa \in (0, \infty)$ で与えられる。

(5.3) 式で $h_t(z) = g_t(z) - U_t = g_t(z) - B(t)$ と置き、さらに変数 $z \in \mathbb{H}$ を正の実数 x に置き直すと

$$dh_t(x) = dB(t) + \frac{a}{h_t(x)} dt, \quad h_0(x) = x > 0 \quad (5.4)$$

を得る。これを (1.8) と見比べると

$$a = \frac{d-1}{2} \iff d = 2a + 1 \iff d = \frac{4}{\kappa} + 1 \iff \kappa = \frac{4}{d-1} \quad (5.5)$$

¹³残念なことに、Oded Schramm は昨年 2008 年 9 月 1 日に登山中の事故で 46 歳の若さで亡くなりました。

¹⁴2006 年の国際数学会議 (ICM 2006) で、この 3 人のうち唯一 40 才以下である Wendelin Werner にフィールズ賞が与えられた [16]。カナダ人数学者 John Charles Fields によって提唱され設立されたこの賞は「数学のノーベル賞」とも称されるが、受賞者は「40 才以下」という制限がある点がノーベル賞とは異なる。すでに約 50 名の受賞者がいるが、1998 年に Andrew Wiles (Fermat の最終定理の証明) が 45 才で特別表彰された以外は、この年齢制限が厳密に守られてきた。なお ICM 2006 では、確率微分方程式の創始者である伊藤清に第 1 回 Gauss 賞が贈られた。

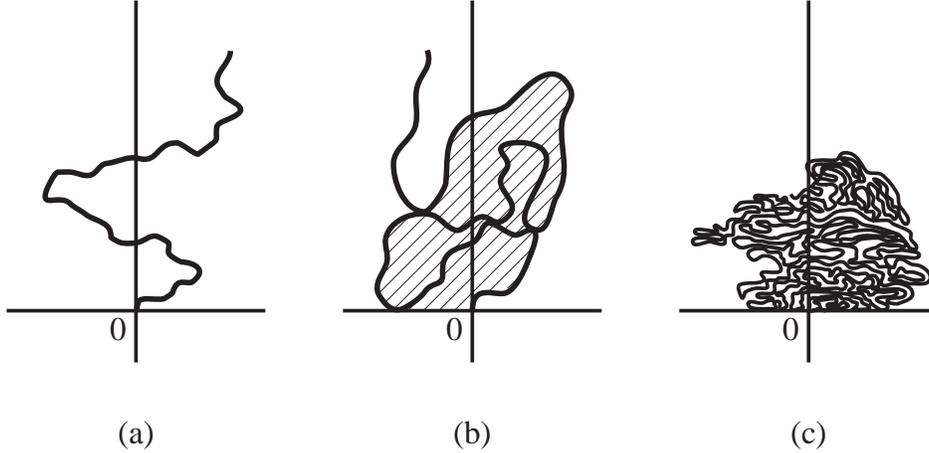


図 4: (a) 実軸に接することのない単純曲線. $0 < \kappa \leq 4$ のときの SLE 曲線の様子. (b) 自分自身や実軸に接するが十字に交わることはない曲線. 曲線が伸びていくと, 曲線で囲まれた領域 (斜線部分) は上半平面 \mathbb{H} を覆いつくしていき, 曲線自身で \mathbb{H} が埋めつくされることはない. $4 < \kappa < 8$ のときの SLE 曲線の様子. (c) 上半平面 \mathbb{H} を埋めつくしていく曲線. $\kappa \geq 8$ のときの SLE 曲線の様子.

なので, $h_t(x)$ は確率過程としては $x > 0$ を出発点とする $(2a + 1) = (4/\kappa + 1)$ 次元 Bessel 過程と同一視することができる. Bessel 過程の初期値依存性 (Bessel flow) に対する知識より¹⁵, SLE_κ 曲線は κ の値によって, 3つの相 (phase) を持つことを示すことができる (図 4 参照). (5.5) の関係式より, $d = 2 \iff \kappa = 4$, $d = 3/2 \iff \kappa = 8$ という対応が得られるのである.

定理 5.2 (Lawler-Schramm-Werner [9]) (a) $0 < \kappa \leq 4$ のとき SLE_κ 曲線 γ は単純曲線である. また, 実軸に接することはない: $\gamma(0, \infty) \subset \mathbb{H}$. (b) $\kappa > 4$ のときは γ は自己交差する. また, $\gamma(0, \infty) \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$ である. (c) $\kappa \geq 8$ のとき γ は \mathbb{H} を埋めつくす: $\gamma[0, \infty) = \overline{\mathbb{H}}$.

さらに次が証明されている.

定理 5.3 (Beffara[1]) $\kappa \leq 8$ のとき SLE_κ 曲線 $\gamma(0, \infty)$ のフラクタル次元 (Hausdorff 次元) は次式で与えられる¹⁶: $d(\kappa) = 1 + \frac{\kappa}{8}$.

¹⁵ $x > 0$ から出発した d 次元 Bessel 過程が初めて原点に到達する時刻を T_x と記す. このとき次が成り立つ. (i) $d \geq 2$ のとき $\mathbf{P}(T_x = \infty) = 1, \forall x > 0$. (ii) $1 \leq d < 2$ のとき $\mathbf{P}(T_x < \infty) = 1, \forall x > 0$. (iii) $3/2 < d < 2$ のとき, $0 < x < y$ に対して $\mathbf{P}(T_x = T_y) > 0$. (iv) $1 \leq d \leq 3/2$ のとき, $0 < x < y$ ならば $\mathbf{P}(T_x < T_y) = 1$.

¹⁶一般に d 次元実空間 R^d 中の集合 V に対して, $\varepsilon > 0$ として, 各々のサイズが ε 未満の加算個の集合 U_1, U_2, \dots で被覆する: $\text{diam}(U_n) \equiv \sup\{|x - y| : x, y \in U_n\} < \varepsilon, n \geq 1, V \subset \bigcup_{n \geq 1} U_n$. $\alpha > 0$ とし

5.4 局所性と制限性

\mathbb{H} 内の原点を含む非有界な単連結領域の集合

$$\mathcal{D} = \left\{ D \subset \mathbb{H} : \text{単連結}, \mathbb{H} \setminus D \text{ 有界}, 0 \in D \right\}$$

を考える． $D \in \mathcal{D}$ に対して， $D \rightarrow \mathbb{H}$ の共形変換で次の条件を満たすものを Φ_D と書くことにする（一意的に定まる）： $\Phi_D(z) = z + o(1), z \rightarrow \infty$. SLE $_{\kappa}$ 曲線 γ に対して

$$\tau_D = \inf \left\{ t : \gamma \cap \mathbb{H} \setminus D \neq \emptyset \right\}$$

とする． $t < \tau_D$ の間は， γ は部分領域 D 内に制限されていることになる．この間の SLE 曲線 $\gamma(0, \tau_D)$ の Φ_D による像 $\Phi_D(\gamma(0, \tau_D))$ は $\overline{\mathbb{H}} = \mathbb{H} \cup \mathbb{R}$ 内の曲線となる． γ の確率分布関数の共形不変性より，曲線 $\Phi_D(\gamma(0, \tau_D))$ で生成される $g_t^*(z)$ も Loewner 方程式 (5.3) に従うはずである．しかし，変換 Φ_D により曲線のパラメータ付けに変更が生じる．Itô の公式を用いて計算すると， $g_t^*(z)$ は，次の確率微分方程式を満たす U_t の下での (5.3) 式の解であることが導かれる：

$$dU_t = b \frac{\Phi_t''(U_t)}{\Phi_t'(U_t)} dt + dB(t). \quad (5.6)$$

ただしここで，

$$b(\kappa) = \frac{3a - 1}{2} = \frac{6 - \kappa}{2\kappa}. \quad (5.7)$$

$\kappa = 6$ のときに限り $b = 0$ となる．このときは，任意の $D \in \mathcal{D}$ に対して $g_t(z)$ も $g_t^*(z)$ も $t < \tau_D$ ではともに， $U_t = B(t)$ （1次元 Brown 運動）で駆動される SLE, (5.3) 式を満たす．つまり，局所性が成り立つことになる．

定理 5.4 SLE $_{\kappa}$ 分布関数 $\bar{\mu}_{(\mathbb{H}; 0, \infty)}^{\kappa}$ は $\kappa = 6$ のときに限り局所性を持つ．

$\kappa \neq 6$ のときは (5.6) にはドリフト項があるので， U_t はマルチンゲールではない．しかし Girsanov の定理という確率論の定理 [12, 3] を用いると，次のようにして局所マルチンゲール M_t を得ることが出来る¹⁷．複素関数 f に対して，Schwarz 微分

て， $H_{\varepsilon}^{\alpha}(V) = \inf \sum_{n \geq 1} (\text{diam}(U_n))^{\alpha}$ とする．ここで \inf は，このような全ての ε 被覆全体の下限をとるものとする． $H^{\alpha}(V) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} H_{\varepsilon}^{\alpha}(V)$ を Hausdorff α 測度という．集合 V の Hausdorff 次元は次式で定義される： $\dim_{\mathbb{H}}(V) = \inf \{ \alpha : H^{\alpha}(V) = 0 \} = \sup \{ \alpha : H^{\alpha}(V) = \infty \}$.

¹⁷ $j \rightarrow \infty$ で $\tau_j \rightarrow \infty$ となるようなマルコフ時刻の単調増加列 $\tau_1 < \tau_2 < \dots$ が存在して，各 j に対して $Z(t \wedge \tau_j)$ がマルチンゲールであるとき（ただし $a \wedge b = \min\{a, b\}$ ）， $Z(t)$ は局所マルチンゲールであるという．

を $Sf(z) = \frac{f'''(z)}{f'(z)} - \frac{3f''(z)^2}{2f'(z)^2}$ と書くことにする .

$$c = \frac{2b(3-4a)}{a} = \frac{(3\kappa-8)(6-\kappa)}{2\kappa} \quad (5.8)$$

として

$$M_t = \exp \left\{ -c \int_0^t \frac{a}{12} S\Phi_s(U_s) ds \right\} \Phi'_t(U_t)^b \quad (5.9)$$

とする . これは

$$dM_t = -b \frac{\Phi''_t(U_t)}{\Phi'_t(U_t)} M_t dB(t)$$

を満たすので , 局所マルチンゲールである . 少し考察を加えることにより¹⁸ , このことから $\kappa = \frac{2}{a} \leq 4, D \in \mathcal{D}$ に対して

$$\frac{d\bar{\mu}_{(D;0,\infty)}}{d\bar{\mu}_{(\mathbb{H};0,\infty)}}(\gamma) = M_\infty = \mathbf{1}\{\gamma(0,\infty) \subset D\} \exp \left\{ -c \int_0^\infty \frac{a}{12} S\Phi_s(U_s) ds \right\} \quad (5.10)$$

という表式が得られる . (5.8) から分かるように , $\kappa \leq 4$ では $\kappa = 8/3$ のときに限り $c = 0$ となる . このとき (5.10) は $\mathbf{1}\{\gamma(0,\infty) \subset D\}$ となる . (4.11) 式と見比べよ .

定理 5.5 SLE $_\kappa$ 分布関数 $\bar{\mu}_{(\mathbb{H};0,\infty)}^\kappa$ は $\kappa = \frac{8}{3}$ のときに限り制限性を持つ .

6 共形場理論との対応関係

$\mu_{(D_0;0,P)}^{\text{per}}$ の共形不変性と $\bar{\mu}_{(D_0;0,P)}^{\text{SAW}}$ の共形共変性が証明されれば , 前者は $\mu_{(\mathbb{H};0,\infty)}^6$, 後者は $\bar{\mu}_{(\mathbb{H};0,\infty)}^{8/3}$ の共形変換 $\mathbb{H} \rightarrow D_0$ として決定される . 前者に対しては Smirnov の証明がある [18, 21] . これとは別に , $\bar{\mu}_{(D_0;0,P)}^{\text{LERW}} = \bar{\mu}_{(\mathbb{H};0,\infty)}^2$ [15, 9] と $\bar{\mu}_{(D_0;0,P)}^{\text{Ising}} = \bar{\mu}_{(\mathbb{H};0,\infty)}^3$ [19] が証明されている (ここでの $=$ は共形変換によって変換できるという意味 .) 定理 5.3 と (5.7) 式を用いると , 以下が得られる¹⁹ .

$$d_{\text{LERW}} = d(2) = \frac{5}{4}, \quad d_{\text{SAW}} = d(8/3) = \frac{4}{3}, \quad d_{\text{Ising}} = d(3) = \frac{11}{8}, \quad d_{\text{per}} = d(6) = \frac{7}{4},$$

$$b_{\text{LERW}} = b(2) = 1, \quad b_{\text{SAW}} = b(8/3) = \frac{5}{8}, \quad b_{\text{Ising}} = b(3) = \frac{1}{2}, \quad b_{\text{per}} = b(6) = 0.$$

¹⁸(i) $t \rightarrow \infty$ で $\gamma(t) \rightarrow \infty$ かつ $\gamma(0,\infty) \subset D$ ならば , $\Phi'_t(U_t) \rightarrow 1, t \rightarrow \infty$ であることと , (ii) $S\Phi_t(U_t) \leq 0$ であることを用いる . $\kappa \leq 4$ ならば (i) の条件が満たされる . 詳しくは [9] を参照 .

¹⁹ $t \rightarrow \infty$ で $\gamma(t) \rightarrow \infty$ であるから , 共形共変性は (5.1) の状況である . (5.9) を (5.1) と見比べることにより , (5.7) で与えられた指数 b は境界スケーリング指数に他ならないことが結論される .

調和振動子のエネルギー固有状態は消滅演算子 a で消される ($a|0\rangle = 0$) 基底状態 $|0\rangle$ に生成演算子 a^\dagger を掛けていくことで作ることができた．調和振動子の量子力学は， $[a, a^\dagger] = 1$ という代数（ハイゼンベルク代数）の表現になっているのである．無限個の消滅演算子 $L_n (n = 1, 2, 3, \dots)$ と生成演算子 $L_n (n = -1, -2, -3, \dots)$ ，そして L_0 が

$$[L_n, L_m] = (n - m)L_{n+m} + c \frac{n(n^2 - 1)}{12} \delta_{n+m, 0}, \quad n, m \in \mathbb{Z} \quad (6.1)$$

という代数（中心電荷 c を持つ Virasoro 代数という）を満たす場合を考える．このとき，これを表現する量子力学は無限自由度の場の理論となる．これが共形場理論である [22]．調和振動子のときと同様に，すべての消滅演算子で消される ($L_n|b\rangle = 0, n \geq 1$) 基底状態 $|b\rangle$ に生成演算子 $L_{-n}, n \geq 1$ を掛けて状態を作っていく．ただし $L_0|b\rangle = b|b\rangle$ とする． b を最高ウェイト，あるいは共形次元といい， $|b\rangle$ を最高ウェイトベクトル，あるいはプライマリー状態とよぶ．またこれを最高ウェイト表現という．このようにして作られた状態

$$|n_k, \dots, n_1; b\rangle = L_{-n_k} \cdots L_{-n_1}|b\rangle, \quad 0 < n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_k$$

を基底とする空間を Verma 加群という．各基底は L_0 の固有状態になっている：

$$L_0|n_k, \dots, n_1; b\rangle = (b + n_1 + \dots + n_k)|n_k, \dots, n_1; b\rangle.$$

L_0 の固有値から b を差し引いた $\sum_{j=1}^k n_j$ をレベルとよぶ．

レベル 2 の基底は $L_{-1}L_{-1}|b\rangle$ と $L_{-2}|b\rangle$ の 2 つであるが，

$$\det \begin{pmatrix} \langle b|L_2L_{-2}|b\rangle & \langle b|L_2L_{-1}L_{-1}|b\rangle \\ \langle b|L_1L_1L_{-2}|b\rangle & \langle b|L_1L_1L_{-1}L_{-1}|b\rangle \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 4b + c/2 & 6b \\ 6b & 4b(1 + 2b) \end{pmatrix} = 0 \quad (6.2)$$

となるとき（Kac 公式）この 2 つは独立ではなくなり，その結果表現は可約となる．このときには

$$|\chi_{2,1}\rangle = \left(\frac{1}{2}L_{-1}L_{-1} - \frac{2b+1}{3}L_{-2} \right) |b\rangle \quad (6.3)$$

というレベル 2 のベクトル（これはノルムが零なので null vector あるいは特異ベクトルとよばれる）を改めて基底状態として，これに生成演算子 $L_{-n}, n \geq 1$ を掛けていって基底を作ることにより既約表現が得られる．これをレベル 2 の退化表現という．さて， $b \neq 0$ とすると，条件 (6.2) は

$$c = \frac{2b(5 - 8b)}{1 + 2b} \quad (6.4)$$

となる．ところが，(5.7) 式と (5.8) 式から κ を消去して b と c の関係を求めると，これはまさにこの式 (6.4) となるのである．さらに， $L_{-1} \Leftrightarrow -\frac{\partial}{\partial x}$ ， $L_{-2} \Leftrightarrow -\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}$ という対応を考えると²⁰，(6.3) の右辺において最高ウェイトベクトル $|b\rangle$ に掛けられている演算子は

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{a}{x}\frac{\partial}{\partial x}, \quad a = \frac{2}{\kappa} = \frac{2b+1}{3}$$

に対応することになる．これは $(2a+1)$ 次元 Bessel 過程 (5.4) の生成作用素 (generator) $\mathcal{G}^{(2a+1)}$ に他ならない (後進 Kolmogorov 方程式 (1.9) $\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial t}u = \mathcal{G}^{(d)}u$.) SLE $_{\kappa}$ は (5.8) 式で与えられる中心電荷を持つ Virasoro 代数の最高ウェイト (5.7) のレベル 2 の退化表現 (既約表現) を実現しているのである [2] .

謝辞: 本講義の機会を与えて下さいました木村太郎氏 (東京大学大学院総合文化研究科) に感謝いたします．また，共同研究者の種村秀紀氏 (千葉大理学部) に感謝いたします．

参考文献

- [1] V. Beffara : The dimension of the SLE curves, *Ann. Probab.* **36**, 1421-1452 (2008); <http://arxiv.org/abs/math/0211322>.
- [2] R. Friedrich and W. Werner : Conformal restriction, highest-weight representations and SLE, *Commun. Math. Phys.* **243**, 105-122 (2003); <http://arxiv.org/abs/math-ph/0301018>.
- [3] I. カラザス, S. E. シュレーブ (渡邊壽夫訳):「ブラウン運動と確率積分」, シュプリンガー フェアラーク 東京 (2001).
- [4] 香取眞理 : 非衝突乱歩系・シュア関数・ランダム行列, 応用数理 **13**, No.4, 16-27 ([296]-[307]) (2003).
- [5] 香取眞理 : 臨界現象・フラクタル研究の新世紀—SLE の発見—, 日本物理学会誌 **62**, No.7, 527-531 (2007).
- [6] M. Katori and H. Tanemura : Symmetry of matrix-valued stochastic processes and noncolliding diffusion particle systems, *J. Math. Phys.* **45**, 3058-3085 (2004); <http://arxiv.org/abs/math-ph/0402061>.

²⁰一般には L_{-n} に対して微分演算子 $\mathcal{L}_{-n} = \left\{ \frac{(n-1)\Delta}{(x-z)^n} - \frac{1}{(x-z)^{n-1}} \frac{\partial}{\partial x} \right\}$ を対応付ける．ここでは $z=0, \Delta=0$ とした場合を考える．

- [7] 香取眞理, 種村秀紀: ランダム行列と非衝突過程「数理物理への誘い 6」(小嶋泉編), 遊星社 (2006).
- [8] M. Katori and H. Tanemura: Noncolliding Brownian motion and determinantal processes, *J. Stat. Phys.*, **129**, 1233-1277 (2007); <http://arxiv.org/abs/0705.2460>.
- [9] G. F. Lawler: *Conformally Invariant Processes in the Plane*, (American Mathematical Society, 2005).
- [10] 松下貢: 「フラクタルの物理」, I, II, 裳華房 (2004).
- [11] M. L. Mehta: *Random Matrices*, 3rd ed. (Elsevier Academic Press, London, 2004).
- [12] 長井英生: 「確率微分方程式」, 共立出版 (1999).
- [13] 永尾 太郎: 「ランダム行列の基礎」, 東京大学出版会 (2005).
- [14] 西森秀稔: 「相転移・臨界現象の統計物理学」, 培風館 (2005).
- [15] O. Schramm: Scaling limits of loop-erased random walks and uniform spanning trees, *Israel J. Math.* **118**, 221-228 (2000); <http://arxiv.org/abs/math/9904022>.
- [16] 白井朋之: フィールドズ賞業績紹介 ヴェルナー, 数学セミナー, No.545 (2007年2月), pp.46-51, 日本評論社.
- [17] 白井朋之: SLE – Schramm-Loewner Evolution, 数理科学, No.546 (2008年12月), pp.7-12, サイエンス社.
- [18] S. Smirnov: Critical percolation in the plane: Conformal invariance, Cardy's formula, scaling limits, *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I Math.* **333**, 239-244 (2001); Smirnov の web page から pdf file がダウンロード可能 <http://www.unige.ch/smirnov/papers/index.html>.
- [19] S. Smirnov: Conformal invariance in random cluster models. I. Holomorphic fermions in the Ising model, <http://arxiv.org/abs/0708.0039>.
- [20] 鈴木淳史: 「現代物理数学への招待, ランダムウォークからひろがる多彩な物理と数理」, サイエンス社, 2006.
- [21] 田崎晴明: 三角格子上の臨界パーコレーションの共形不変性, 数理科学, No.546 (2008年12月), pp.13-19, サイエンス社.
- [22] 山田泰彦: 「共形場理論入門」, 培風館 (2006).