

複素平面上的 Gauss 型自由場と 多重 Schramm–Loewner 発展*

香取眞理†

10 October 2020 (version A4)

概要

Schramm–Loewner 発展 (SLE) は実軸上のブラウン運動で駆動される共形変換 (等角写像) の時間発展系である。これは、SLE 曲線とよばれる截線、あるいはそれで囲まれる領域 (SLE 包) を複素上半平面から取り除いた結果得られる非有界領域を、再び上半平面に写す共形変換の 1 径族である。SLE 曲線の確率法則の解明は、確率論、および統計物理学の分野で重要な研究課題となっている。この系を、実軸上の相互作用多粒子系で駆動される複数本の SLE 曲線の時間発展系 (多重 SLE) に拡張したい。そのためにどのような多粒子駆動過程を設定すべきかが問題となる。本講義ではその解決のために、まず複素平面内の領域上に Gauss 型自由場を定義し、それを基に Duplantier, Sheffield, Miller らに従って量子表面、および虚数表面とよばれる (Liouville 量子重力に関係する) 確率場を導入する。その上で、これら超関数に値をとる確率場と多重 SLE との間に結合状態とよばれるある種の定常状態が形成される条件を調べる。そして、駆動過程として Dyson 模型を採用すれば、この条件が満たされることを証明する。Dyson 模型はランダム行列理論において対数ガス系の典型例として詳しく研究されてきた 1 次元相互作用多粒子系である。本講義は越田真史氏 (中央大学, Aalto University) との共同研究に基づく。

キーワード 多重 Schramm–Loewner 発展 · Gauss 型自由場 · Liouville 量子重力 · 量子表面 · 虚数表面 · 共形変換 · GFF/SLE 結合

目次

1	はじめに	2
1.1	Loewner 方程式とその多重截線系への拡張	2
1.2	Schramm–Loewner 発展 (SLE)	7
1.3	多重 SLE 駆動過程の選定問題	11
1.4	共形場, ランダム行列, 量子重力	11
2	Gauss 型自由場の構成と基本的な性質	14
2.1	Bochner–Minlos の定理	14
2.2	Dirichlet 境界 Gauss 型自由場の共形不変性	22
2.3	Dirichlet 境界 Gauss 型自由場の Green 関数	23
2.4	自由境界 Gauss 型自由場	25
3	多重 SLE による Green 関数の変換則	26
3.1	多重 SLE による Gauss 型自由場の変換	26
3.2	後進多重 SLE	29
3.3	後進多重 SLE による Green 関数の変換則	30
4	2 次元 Liouville 量子重力	31
4.1	Gauss 型自由場の円周平均	31
4.2	指数型ランダム測度の収束定理	34

*この原稿は、京都大学理学研究科数学教室において 2020 年 10 月 5 日–9 日にオンラインにて行った集中講義で用いた講義ノートである。

†中央大学理工学部物理学科, e-mail: katori@phys.chuo-u.ac.jp

5	Gauss 型自由場と多重 SLE の結合	39
5.1	量子表面	39
5.2	虚数表面	41
5.3	複素対数ポテンシャルと局所マルチンゲール	42
5.4	拡張 Gauss 型自由場値の確率過程とその定常性	46
6	おわりに	48
7	レポート問題	50
A	ランダム行列理論と関連する多粒子確率過程	55
A.1	固有値過程と特異値過程	55
A.2	1次元に閉じ込められた2次元クーロンガス系	57
B	追加文献	58

1 はじめに

本講義では、多重 Schramm–Loewner 発展に関するある問題に関して議論したいと思う。はじめにその問題提起をしたい。そのために、まずは Schramm–Loewner 発展について簡単な説明を行うことにする。より詳しくは [45, 33, 39] などを参照されたい。

1.1 Loewner 方程式とその多重截線系への拡張

上半平面を $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z > 0\}$ と書くことにする。また、 $\overline{\mathbb{H}} := \mathbb{H} \cup \mathbb{R}$ とする。時刻 $t \in [0, \infty)$ で径数付けられた $\overline{\mathbb{H}}$ 内の連続曲線を

$$\eta := \{\eta_t : t \in [0, \infty)\} \subset \overline{\mathbb{H}}$$

と記す。ただし、これは次の条件を満たすものとする。

(C1) $\eta_0 = 0$, かつ, $\lim_{t \rightarrow \infty} \eta_t = \infty$ である。

(C2) η は単純曲線である。すなわち, $t \neq t'$ ならば, $\eta_t \neq \eta_{t'}$ 。

(C3) すべての $t \in (0, \infty)$ において, $\eta(0, t) := \{\eta_s : s \in (0, t)\} \subset \mathbb{H}$ である。

$\eta(0, t], t \geq 0$, あるいは η は \mathbb{H} 上の截線(せつせん)(slit) とよばれる。以下,

$$\mathbb{H}_t^\eta := \mathbb{H} \setminus \eta(0, t], \quad t \in (0, \infty) \tag{1.1}$$

と書くことにする。また, $\mathbb{H}_0^\eta := \mathbb{H}$ とする。

一般に, 有界領域 $K \subset \mathbb{H}$ に対して $K = \mathbb{H} \cap \overline{K}$ であり, また, $\mathbb{H} \setminus K$ が単連結であるとき, K をコンパクト \mathbb{H} -包(compact \mathbb{H} -hull) という。コンパクト \mathbb{H} -包全体の集合を \mathcal{Q} と書くことにする。 $\eta(0, t] \in \mathcal{Q}, t \in (0, \infty)$ である。

各 $t \in (0, \infty)$ において, \mathbb{H}_t^η は \mathbb{C} 上の (\mathbb{C} 全体ではない) 単連結領域であるので, Riemann の写像定理より, $\mathbb{H}_t^\eta \rightarrow \mathbb{H}$ とする共形変換(等角写像)(conformal transformation (conformal map)) が存在する。(本講義ノートでは, 共形変換は正則関数による 1 対 1 写像を意味する。依って, その逆写像も共形変換である。) これを $g_{\mathbb{H}_t^\eta}$ と書くことにする。通常の Riemann 写像関数 h は, \mathbb{C} 上の真部分集合である単連結領域 $D \subsetneq \mathbb{C}$ を単位円板 $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ に移す共形変換に対して, 原点を与える点 z_0 を指定し, さらにその点での微係

数は正としたものである．すなわち，ある $z_0 \in D$ に対して， $h(z_0) = 0$ と $h'(z_0) := \frac{dh}{dz}(z_0) > 0$ という条件を課すことにより， $h: D \rightarrow \mathbb{D}$ なる共形変換を一意に定める．それに対して， $g_{\mathbb{H}_t^\eta}$ に対しては流体力学条件とよばれる次の条件を課すことにする．

流体力学条件 $|z| \rightarrow \infty$ において， $g_{\mathbb{H}_t^\eta}$ は次のように振舞うものとする．

$$g_{\mathbb{H}_t^\eta}(z) = z + \frac{\text{hcap}(\eta(0, t])}{z} + O\left(\frac{1}{|z|^2}\right) \quad (1.2)$$

すなわち， $g_{\mathbb{H}_t^\eta}(z)$ を Laurent 展開したとき，その最高次の項 z の係数は 1 であり，定数項は 0 である．

注 1.1 2次元平面上 $((x, y) \in \mathbb{R}^2 \iff z = x + \sqrt{-1}y \in \mathbb{C})$ の非粘性渦なしの流れは速度ポテンシャル $\phi(z)$ と流れ関数 $\psi(z)$ をもち， $W(z) := \phi(z) + \sqrt{-1}\psi(z)$ を複素速度ポテンシャルという．各点 z での流速 $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$ は W の複素微分によって， $\frac{\partial W}{\partial z} = v_x - \sqrt{-1}v_y$ と求められる．したがって， x 軸 (実軸) の正の向きの大きさ 1 の一様流は $W(z) = z$ で表されることになる．(1.2) は $g_{\mathbb{H}_t^\eta}(z) \asymp z, |z| \rightarrow \infty$ を意味するので， $g_{\mathbb{H}_t^\eta}(z)$ をこの複素速度ポテンシャルと見なしたとき，「流体中に置かれた物体 (障害物) から十分に離れた位置では流れは一様流となる」という流体力学での通常の境界条件に相当するのでこのようによばれている．今の場合，截線 $\eta(0, t]$ が流体場中に置かれた物体 (障害物) ということになる．

$\frac{1}{z}$ の係数は径数 t に依存するが，截線 $\eta(0, t]$ の半平面容量 (half-plane capacity) とよぶべき意味付けが可能である．そこでこの係数を $\text{hcap}(\eta(0, t])$ と書くことにする．

注 1.2 $(\mathcal{B}_t)_{t \geq 0}$ を標準複素ブラウン運動とする¹． $y > 0$ とし，虚軸上の点 $\sqrt{-1}y$ を出発点としたときの期待値を $\mathbf{E}^{\sqrt{-1}y}[\cdot]$ と書くことにする． $K \in \mathcal{Q}$ に対して， $T_K := \inf\{t > 0 : \mathcal{B}_t \in \mathbb{R} \cup K\}$ としたとき，

$$\text{hcap}(K) = \lim_{y \rightarrow \infty} y \mathbf{E}^{\sqrt{-1}y}[\text{Im } \mathcal{B}_{T_K}]$$

が成り立つことが証明できる．例えば，[45] の Proposition 3.41 を見よ．図 1 を参照．

以下では， $\text{hcap}(\eta(0, t])$ が時刻 t の連続な単調増加関数で微分可能であるように，截線 η の径数 t が選ばれていたものと仮定する．以上より，Riemann の写像定理に相当する主張を，以下のように述べることができる．

補題 1.3 条件 (C1)–(C3) を満たす截線 η が与えられたとする．このとき，各時刻 $t \in (0, \infty)$ において， \mathbb{H}_t^η を \mathbb{H} に移す共形変換で流体力学条件 (1.2) を満たすものが唯一定まる．

上の定義より，条件 (C1)–(C3) を満たす截線 η が 1 つ与えられると，時刻 $t \in [0, \infty]$ で径数付けられた共形変換の族 $(g_{\mathbb{H}_t^\eta})_{t \geq 0}$ が得られることになる．Loewner 理論 [47] は，この族を時間発展方程式の解として与えるものである．(Loewner は \mathbb{D} への共形写像について論じている．ここで述べた \mathbb{H} への共形写像に対しては，通常，Kufarev–Sobolev–Sporyševa の論文 [43] が引用されているようである.)

定理 1.4 (Löwner, Kufarev–Sobolev–Sporyševa) 上で定義された共形変換の 1 径族 $(g_{\mathbb{H}_t^\eta})_{t \geq 0}$ に対して， $U_0 = 0$,

$$U_t = g_{\mathbb{H}_t^\eta}(\eta_t) := \lim_{\substack{z \rightarrow \eta_t \\ z \in \mathbb{H}_t^\eta}} g_{\mathbb{H}_t^\eta}(z), \quad t \in (0, \infty) \quad (1.3)$$

¹ $z_0 \in \mathbb{C}$ を出発点とする標準複素ブラウン運動 $(\mathcal{B}_t)_{t \geq 0}$ とは，確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbf{P})$ において，次の (i)–(iii) を満たすものをいう．(i) 任意の $t \geq 0$ で \mathcal{B}_t は \mathcal{F}_t -可測である (\mathcal{F}_t -適合である)．(ii) 確率 1 で $\mathcal{B}_0 = z_0$ である．(iii) 任意の $t > s \geq 0$ に対して， $\mathcal{B}_t - \mathcal{B}_s$ は \mathcal{F}_s と独立で，平均 0，分散 $t - s$ の複素 Gauss 分布に従う： $\mathcal{B}_t - \mathcal{B}_s \sim N_{\mathbb{C}}(0, t - s)$ ．

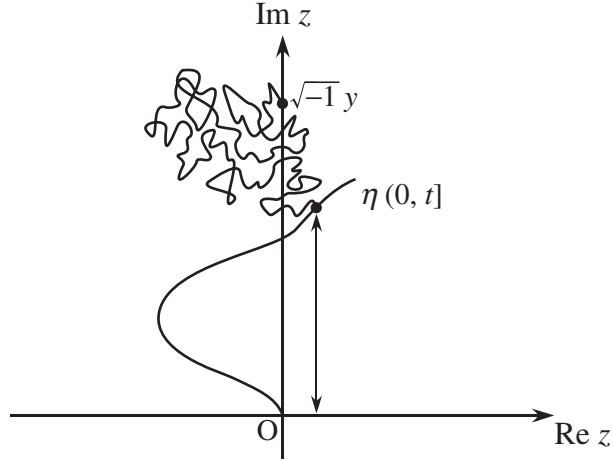


図 1: $\eta(0, t]$ の半平面容量に関する説明図. $y > 0$ として虚軸上の点 $\sqrt{-1}y$ を出発点とする標準複素ブラウン運動が最初に $\eta(0, t] \cup \mathbb{R}$ に到達した点を $\mathcal{B}_{T_{\eta(0, t]}}$ とする. その点の高さ $\text{Im } \mathcal{B}_{T_{\eta(0, t]}}$ の期待値に y を掛けた値の $y \rightarrow \infty$ 極限として $\eta(0, t]$ の半平面容量が求まる: $\text{hcap}(\eta(0, t]) = \lim_{y \rightarrow \infty} y \mathbf{E}^{\sqrt{-1}y}[\text{Im } \mathcal{B}_{T_{\eta(0, t]}}]$

とする. このとき, $(g_{\mathbb{H}_t^\eta})_{t \geq 0}$ は常微分方程式

$$\frac{dg_t(z)}{dt} = \frac{1}{g_t(z) - U_t} \frac{d\text{hcap}(\eta(0, t])}{dt}, \quad z \in \mathbb{H}_t^\eta, \quad t \geq 0 \quad (1.4)$$

の初期条件 $g_0(z) = z, z \in \mathbb{H}$ の下での解として与えられる:

$$g_{\mathbb{H}_t^\eta}(z) = g_t(z), \quad z \in \mathbb{H}_t^\eta, \quad t \geq 0.$$

特に, 時刻 t を

$$\text{hcap}(\eta(0, t]) = 2t, \quad t \geq 0$$

となるようにとることにすると, (1.4) は次式となる:

$$\frac{dg_t(z)}{dt} = \frac{2}{g_t(z) - U_t}, \quad z \in \mathbb{H}_t^\eta, \quad t \geq 0 \quad (1.5)$$

証明は例えば, [45] の Proposition 4.4 を参照してもらいたい. (1.5) を **弦状 Loewner 方程式** (chordal Loewner equation) とよび, その解として与えられる共形変換の 1 径族 $(g_{\mathbb{H}_t^\eta})_{t \geq 0}$ は共形変換の時間発展系という意味で**弦状 Loewner 鎖** (chordal Loewner chain), あるいは**弦状 Loewner 発展** (chordal Loewner evolution) と称される².

ここではまず, 上の結果をそのまま多重截線の場合に拡張して考えてみることにする (図 2 参照). $N \in \{2, 3, \dots\}$ とする. $\overline{\mathbb{H}}$ 内の N 本の連続曲線を考え, それらに添え字 $i = 1, \dots, N$ を付ける. 各曲線は $s^{(i)} \in [0, \infty]$ で径数付けられているものとする:

$$\eta^{(i)} := \{\eta_{s^{(i)}}^{(i)} : s^{(i)} \in [0, \infty)\} \subset \overline{\mathbb{H}}, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

これらは次の条件を満たすものとする.

²Loewner が元来考えた \mathbb{D} への共形変換の族とその方程式は, **放射状** (radial) という単語を冠して区別される. 下で説明する Schramm-Loewner 発展 (SLE) に関しても同様の区別を行う. しかし, 本講義では放射状の場合はほとんど扱わないので, 以後はこのような冠詞は付けず, そのような場合には弦状であることを意味するものとする.

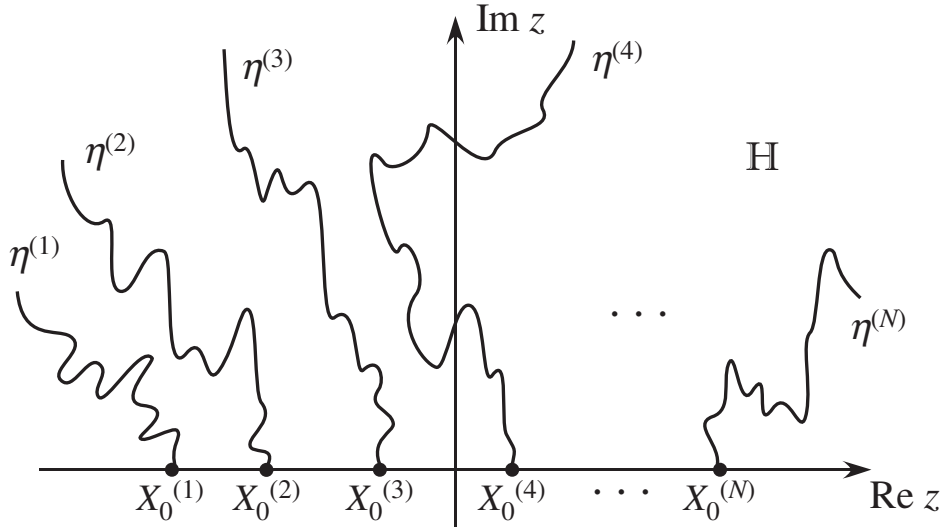


図 2: 多重 Loewner 発展. 以下では駆動過程を $\mathbf{X}_t = (X_t^{(1)}, \dots, X_t^{(N)}), t \geq 0$ と書くことにする. 各截線 $\eta^{(i)}, i = 1, \dots, N$ の実軸上の出発点 $\eta_0^{(i)}, i = 1, \dots, N$ は, 駆動過程 $(\mathbf{X}_t)_{t \geq 0}$ の各成分の初期値 $X_0^{(i)}, i = 1, \dots, N$ に等しい.

(C'1a) $\eta_0^{(i)} \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, N$ であり, $\eta_0^{(1)} < \eta_0^{(2)} < \dots < \eta_0^{(N)}$ が成り立つ.

(C'1b) すべての $i = 1, \dots, N$ において, $\lim_{s^{(i)} \rightarrow \infty} \eta_{s^{(i)}} = \infty$ である.

(C'2a) 各曲線 $\eta^{(i)}$ はどれも単純曲線である. すなわち, $i = 1, \dots, N$ に対して, $s^{(i)} \neq s^{(i)'}$ ならば, $\eta_{s^{(i)}}^{(i)} \neq \eta_{s^{(i)'}}^{(i)}$ である.

(C'2b) N 本の曲線は互いに交わりを持たない. すなわち, $i \neq j$ に対して $\eta^{(i)} \cap \eta^{(j)} = \emptyset$ である.

(C3') すべての $i = 1, \dots, N$ において, 任意の $s^{(i)} \in (0, \infty)$ で, $\eta^{(i)}(0, s^{(i)}) := \{\eta_u^{(i)} : u \in (0, s^{(i)})\} \subset \mathbb{H}$ である.

各 $\mathbf{s} := (s^{(1)}, \dots, s^{(N)}) \in [0, \infty)^N$ において, $\bigcup_{i=1}^N \eta^{(i)}(0, s^{(i)})$ を多重截線とよび,

$$\mathbb{H}_{\mathbf{s}}^{\eta} := \mathbb{H} \setminus \bigcup_{i=1}^N \eta^{(i)}(0, s^{(i)}) \quad (1.6)$$

とする. ただし, $\mathbf{0} := (0, \dots, 0)$ に対して $\mathbb{H}_{\mathbf{0}}^{\eta} := \mathbb{H}$ とする. 各 $\mathbf{s} := (s^{(1)}, \dots, s^{(N)}) \in [0, \infty)^N$ において, $\mathbb{H}_{\mathbf{s}}^{\eta}$ は \mathbb{C} 上の (\mathbb{C} 全体ではない) 単連結領域であるので, Riemann の写像定理より, $\mathbb{H}_{\mathbf{s}}^{\eta} \rightarrow \mathbb{H}$ とする共形変換 (等角写像) が存在する. これを $g_{\mathbb{H}_{\mathbf{s}}^{\eta}}$ と書くことにする. 次の流体力学条件を課すことにする.

流体力学条件 $|z| \rightarrow \infty$ において, $g_{\mathbb{H}_{\mathbf{s}}^{\eta}}$ は次のように振舞うものとする:

$$g_{\mathbb{H}_{\mathbf{s}}^{\eta}}(z) = z + \frac{1}{z} \text{hcap} \left(\bigcup_{i=1}^N \eta^{(i)}(0, s^{(i)}) \right) + O \left(\frac{1}{|z|^2} \right). \quad (1.7)$$

この N -径数共形変換の族 $(g_{\mathbb{H}_s^\eta}(z))_{s \in [0, \infty)^N}$ に対して, $U_{\mathbf{0}}^{(i)} = 0$,

$$U_s^{(i)} = g_{\mathbb{H}_s^\eta}(\eta_{s^{(i)}}^{(i)}) := \lim_{\substack{z \rightarrow \eta_{s^{(i)}}^{(i)}, \\ z \in \mathbb{H}_s^\eta}} g_{\mathbb{H}_s^\eta}(z), \quad s \in [0, \infty)^N \setminus \mathbf{0}, \quad i = 1, \dots, N$$

として, 定理 1.4 の証明 ([45] Proposition 4.4 を参照) と同様の考察を行うと, $(g_{\mathbb{H}_s^\eta}(z))_{s \in [0, \infty)^N}$ は次の N -連立常微分方程式を満たすことが導かれる.

$$\frac{\partial g_s(z)}{\partial s^{(i)}} = \frac{1}{g_s(z) - U_s^{(i)}} \frac{\partial}{\partial s^{(i)}} \text{hcap} \left(\bigcup_{j=1}^N \eta^{(j)}(0, s^{(j)}) \right), \quad s^{(i)} \geq 0 \quad 1 \leq i \leq N,$$

ただし, 多重截線 $\{\eta^{(i)}\}_{i=1, \dots, N}$ は微分 $\frac{\partial}{\partial s^{(i)}} \text{hcap} \left(\bigcup_{j=1}^N \eta^{(j)}(0, s^{(j)}) \right)$ が定義できるように $s = (s^{(1)}, \dots, s^{(N)})$ で径数付けられていたものと仮定することにする.

ここで, N -径数 $s = (s^{(1)}, \dots, s^{(N)})$ がすべて 1 つの時刻 $t \geq 0$ だけに依存している場合を考えることにする. すなわち, $s^{(i)} = s^{(i)}(t), t \geq 0, i = 1, \dots, N$ であり, これらは t の単調増加関数であり C^1 -級連続関数であるとす. このとき $s = s(t), t \geq 0$ とすると, 微分の連鎖則より,

$$\begin{aligned} \frac{dg_t(z)}{dt} &= \sum_{i=1}^N \frac{\partial g_s(z)}{\partial s^{(i)}} \frac{ds^{(i)}(t)}{dt} \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{g_t(z) - U_t^{(i)}} \frac{\partial}{\partial s^{(i)}} \text{hcap} \left(\bigcup_{j=1}^N \eta^{(j)}(0, s^{(j)}) \right) \Bigg|_{s=s(t)} \frac{ds^{(i)}(t)}{dt} \end{aligned}$$

が得られる. ここで,

$$w_t^{(i)} := \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s^{(i)}} \text{hcap} \left(\bigcup_{j=1}^N \eta^{(j)}(0, s^{(j)}) \right) \Bigg|_{s=s(t)} \frac{ds^{(i)}(t)}{dt}, \quad i = 1, \dots, N, \quad t \geq 0$$

とおくことにする. すると,

$$\frac{d}{dt} \text{hcap} \left(\bigcup_{j=1}^N \eta^{(j)}(0, s^{(j)}(t)) \right) = 2 \sum_{i=1}^N w_t^{(i)}, \quad t \geq 0$$

となる. よって, 特に

$$\text{hcap} \left(\bigcup_{j=1}^N \eta^{(j)}(0, s^{(j)}(t)) \right) = 2t, \quad t \geq 0$$

となるように時刻 t をとったとすると, $\sum_{j=1}^N w_t^{(j)} = 1$ が任意の時刻 $t \geq 0$ で成り立つことになる.

$t \geq 0$ に対して, $\eta_t^{(i)} := \eta_{s^{(i)}(t)}^{(i)}, U_t^{(i)} := U_{s(t)}^{(i)}, i = 1, \dots, N, \mathbb{H}_t^\eta := \mathbb{H}_{s(t)}^\eta, g_t := g_{s(t)}$ と書き直すことにする. すると, 以上の考察は, 次のように (定理 1.4 も $N = 1$ の場合として含めて) まとめることができる [62].

定理 1.5 $N \in \mathbb{N}$ とする. \mathbb{H} 内の (多重) 截線 $\bigcup_{i=1}^N \eta^{(i)}(0, t], t \geq 0$ が

$$\text{hcap} \left(\bigcup_{i=1}^N \eta^{(i)}(0, t) \right) = 2t, \quad t \geq 0 \tag{1.8}$$

を満たすように時刻 $t \geq 0$ で径数付けられているものとする。このとき、

$$\begin{aligned} w_t^{(i)} &\geq 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad t \geq 0, \\ \sum_{i=1}^N w_t^{(i)} &= 1, \quad t \geq 0 \end{aligned} \quad (1.9)$$

を満たす重み関数 $(w_t^{(i)})_{t \geq 0}$ があり, $(g_{\mathbb{H}_t^\eta})_{t \geq 0}$ は常微分方程式

$$\frac{dg_t(z)}{dt} = \sum_{i=1}^N \frac{2w_t^{(i)}}{g_t(z) - U_t^{(i)}}, \quad t \geq 0 \quad (1.10)$$

の初期条件 $g_0(z) = z \in H$ の下での解として与えられる：

$$g_{\mathbb{H}_t^\eta}(z) = g_t(z), \quad z \in \mathbb{H}_t^\eta, \quad t \geq 0.$$

ただしここで、

$$U_t^{(i)} = g_{\mathbb{H}_t^\eta}(\eta_t^{(i)}) := \lim_{\substack{z \rightarrow \eta_t^{(i)}, \\ z \in \mathbb{H}_t^\eta}} g_{\mathbb{H}_t^\eta}(z), \quad i = 1, \dots, N, \quad t \geq 0 \quad (1.11)$$

である。

以下では、 N 本の截線の t による径数付けは、截線間において、また時間経過において、ともに均一であるものとして、(1.9) の解として

$$w_t^{(i)} = \frac{1}{N}, \quad i = 1, \dots, N, \quad t \geq 0 \quad (1.12)$$

を選ぶことにする。その上で $t/N \rightarrow t$ という自明な時間変更を行い、また、 $g_{Nt}, U_{Nt}^{(i)}, i = 1, \dots, N$ を改めて $g_t, U_t^{(i)}, i = 1, \dots, N$ を書くことにすると、(1.10) は

$$\frac{dg_t(z)}{dt} = \sum_{i=1}^N \frac{2}{g_t(z) - U_t^{(i)}}, \quad t \geq 0, \quad (1.13)$$

と書き直される。本講義では、(1.13) を **多重 Loewner 方程式** とよび、初期条件 $g_0(z) = z \in \mathbb{H}$ の下での解 $(g_{\mathbb{H}_t^\eta})_{t \geq 0}$ を **多重 Loewner 発展** とよぶことにする。

1.2 Schramm–Loewner 発展 (SLE)

定理 1.4 で与えられた Loewner 方程式のうち、 $\text{hcap}(\eta(0, t]) = 2t, t \geq 0$ と径数付けられた場合の (1.5) について、以下考えることにする。すなわち、

$$\begin{aligned} \frac{dg_{\mathbb{H}_t^\eta}(z)}{dt} &= \frac{2}{g_{\mathbb{H}_t^\eta}(z) - U_t}, \quad z \in \mathbb{H}_t^\eta, \quad t \geq 0, \\ g_{\mathbb{H}_0^\eta}(z) &= g_{\mathbb{H}}(z) = z \in \mathbb{H}, \end{aligned} \quad (1.14)$$

である。この常微分方程式を、実関数 $U_t : [0, \infty) \ni t \mapsto U_t \in \mathbb{R}$ が与えられた上で解くことになる。その意味で $(U_t)_{t \geq 0}$ を Loewner 方程式 (1.14) の **駆動関数**、あるいは Loewner 発展 $(g_{\mathbb{H}_t^\eta}(z))_{t \geq 0}$ の **駆動過程** という。この駆動過程は (1.3)、すなわち

$$U_t = g_{\mathbb{H}_t^\eta}(\eta_t) := \lim_{\substack{z \rightarrow \eta_t, \\ z \in \mathbb{H}_t^\eta}} g_{\mathbb{H}_t^\eta}(z), \quad t \in (0, \infty)$$

で与えられる。つまりこれは、截線 $\eta(0, t], t \in (0, \infty)$ の各時刻での先端 $\eta_t, t \in (0, \infty)$ の $g_{\mathbb{H}_t^\eta}$ による像である。 $(g_{\mathbb{H}_t^\eta}$ は \mathbb{H}_t^η を \mathbb{H} に移すので、像には截線はない。截線の先端は \mathbb{H} の境界である \mathbb{R} 上の 1 点に移されるのである。) したがって、手順としては

$$\text{截線 } \eta(0, t] \implies \text{駆動過程 } U_t$$

ということになる。

Schramm [63] はこの逆問題を考えた。

$$\text{截線 } \eta(0, t] \longleftarrow \text{駆動過程 } U_t$$

すなわち、1 次元空間 \mathbb{R} 上の駆動過程を与えることにより 2 次元平面 \mathbb{H} 上に曲線を描かせるという発想である。さらに、この \mathbb{H} 上の曲線として、格子上的統計力学模型やフラクタル模型の連続極限において現れるものを実現させることを目指した。そして、駆動過程としてブラウン運動の時間変更を採用した。その結果、Loewner 発展は確率過程となる。Schramm が導入したこの確率的 Loewner 発展を **Schramm–Loewner 発展** (Schramm–Loewner evolution) とよび、SLE と略称する。

上述のように、SLE はブラウン運動で駆動されるので、それが属する確率空間は、ブラウン運動の確率空間である。しかしここでは、それは SLE の確率空間であると見なして、 $(\Omega^{\text{SLE}}, \mathcal{F}^{\text{SLE}}, (\mathcal{F}_t^{\text{SLE}})_{t \geq 0}, \mathbb{P}^{\text{SLE}})$ と書いてしまうことにする。

定義 1.6 確率空間 $(\Omega^{\text{SLE}}, \mathcal{F}^{\text{SLE}}, (\mathcal{F}_t^{\text{SLE}})_{t \geq 0}, \mathbb{P}^{\text{SLE}})$ において、確率過程 $(B_t)_{t \geq 0}$ が \mathcal{F}^{SLE} -1 次元標準ブラウン運動であるとは、

- (i) 任意の $t \geq 0$ で B_t は $\mathcal{F}_t^{\text{SLE}}$ -可測である。 $(\mathcal{F}_t^{\text{SLE}}$ -適合である.)
- (ii) 確率 1 で $B_0 = 0$ である。
- (iii) 任意の $t > s \geq 0$ に対して、 $B(t) - B(s)$ は $\mathcal{F}_s^{\text{SLE}}$ と独立で、平均 0、分散 $t - s$ の Gauss 分布に従う：
 $B(t) - B(s) \sim N(0, t - s)$.

$(\mathcal{F}_t^{\text{SLE}})_{t \geq 0}$ は $0 \leq s < t < \infty$ に対して非減少性 $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$ をもち、フィルトレーション (情報系) (filtration) とよばれる。また、 $x \in \mathbb{R}$ に対して、 $B_t^x := x + B_t, t \geq 0$ と定義する。

定義 1.6 (iii) より、ブラウン運動のスケーリング性が導かれる。すなわち、 \mathbb{P}^{SLE} の下、任意の $c > 0$ に対して

$$(B_t)_{t \geq 0} \stackrel{(\text{law})}{=} \left(\frac{1}{c} B_{c^2 t} \right)_{t \geq 0}$$

が成り立つ。

Schramm は $\kappa > 0$ という径数を導入し、 $U_t = \sqrt{\kappa} B_t, t \geq 0$ とした。上述のブラウン運動のスケーリング性より、 $\sqrt{\kappa} B_t \stackrel{(\text{law})}{=} B_{\kappa t}, t \geq 0$ であるから、 κ は時間を $t \mapsto \kappa t$ と変更する時間スケール径数と見ることができ

$$\frac{dg_{\mathbb{H}_t^\eta}(z)}{dt} = \frac{2}{g_{\mathbb{H}_t^\eta}(z) - \sqrt{\kappa} B_t}, \quad z \in \mathbb{H}_t^\eta, \quad t \geq 0 \quad (1.15)$$

を **Schramm–Loewner 方程式** とよび、この解を **Schramm–Loewner 発展** (Schramm–Loewner evolution) と称する。二義性が生じてしまうが、両者とも SLE と略称することにする。すぐ下で説明するように、SLE の振舞は径数 κ の値によって定性的にも定量的にも異なる。そのため、径数を込めて SLE_κ という略記もしばしば使われる。

前の 1.1 節では截線 η を与えるところから話を始めたので、(C1)–(C3) のように截線に対して条件を課した。しかし Schramm の理論では、 $\eta_t \in \mathbb{H}$ は各時刻 $t \geq 0$ において

$$\sqrt{\kappa}B_t = g_{\mathbb{H}^\eta_t}(\eta_t) := \lim_{\substack{z \rightarrow \eta_t, \\ z \in \mathbb{H}^\eta_t}} g_{\mathbb{H}^\eta_t}(z) \quad (1.16)$$

を満たすものというだけであり、これが t を径数とする曲線となるかどうかは一般には保証されない。しかし実際には、これは確率 1 で曲線になることが、 $\kappa = 8$ の場合には Lawler, Schramm, Werner [46] によって、また、 $\kappa \neq 8$ の場合には Rohde と Schramm [61] によって証明されている。

命題 1.7 \mathbb{P}^{SLE} の下、(1.16) は確率 1 で連続曲線 $\eta = \{\eta(t) : t \geq 0\} \subset \overline{\mathbb{H}}$ を定める。これは確率 1 で条件 (C1) を満たす。

SLE によって定まる截線を特に **SLE 曲線**、あるいは径数も付して **SLE $_\kappa$ 曲線** という。

上述のように SLE 曲線は截線条件 (C1) は満たすが、(C2), (C3) は $\kappa \in (0, 4]$ のときだけしか満たされない。以下に述べるように、 $\kappa > 4$ においては $\eta(0, \infty)$ は自己交差する³ ため、 $\mathbb{H} \setminus \eta(0, t]$ は複数の連結領域成分に分割される。そこで、次のように定義しておくことにする。

定義 1.8 (1.1) を拡張して、次のように定義する： $t \in (0, \infty)$ において、

$$\mathbb{H}_t^\eta := \mathbb{H} \setminus \eta(0, t] \text{ の内の非有界な連結領域成分.} \quad (1.17)$$

また、

$$K_t^\eta := \overline{\mathbb{H} \setminus \mathbb{H}_t^\eta}, \quad t \geq 0 \quad (1.18)$$

と定義し、これを **SLE 包** (SLE hull) とよぶことにする。

命題 1.9 \mathbb{P}^{SLE} の下、以下が成り立つ。(図 3 を参照。)

- (a) $\kappa \in (0, 4]$ のとき、SLE $_\kappa$ 曲線 η は確率 1 で (C1)–(C3) を満たす。すなわち、 η は単純曲線であり、 $\eta(0, \infty) \subset \mathbb{H}$ である。
- (b) $\kappa \in (4, 8)$ のとき、SLE $_\kappa$ 曲線 η は正の確率で自己交差し、また、実軸 R に接する。すなわち、正の確率で、 $t \neq t'$ に対して $\eta_t = \eta_{t'}$ となる点があり、 $\eta \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$ である。確率 1 で

$$\bigcup_{t \in (0, \infty)} K_t^\eta = \overline{\mathbb{H}}$$

であるが、 $\eta[0, \infty) \cap \mathbb{H} \neq \mathbb{H}$ である。

- (c) $\kappa \geq 8$ のとき、 $\eta[0, \infty)$ は確率 1 で $\overline{\mathbb{H}}$ を稠密に充填する。

定性的な違いが生じるので、上を称して SLE $_\kappa$ は **3 相** (three phases) をもつという言い方をすることもある。 $\kappa = 4$ と $\kappa = 8$ が臨界値、あるいは相転移点であるということになる。命題 1.9 の証明は [45, 33, 39] などを参照。

上の命題は SLE $_\kappa$ 曲線の定性的な振る舞いが径数 κ に依存することを述べたものであるが、 κ を特別な値に設定すると、統計力学やフラクタル物理学で研究されてきた重要な 2 次元模型における臨界状態やフラクタ

³SLE 曲線は「交差 (intersect)」することはない。「接触する (osculate)」というべきかもしれない。

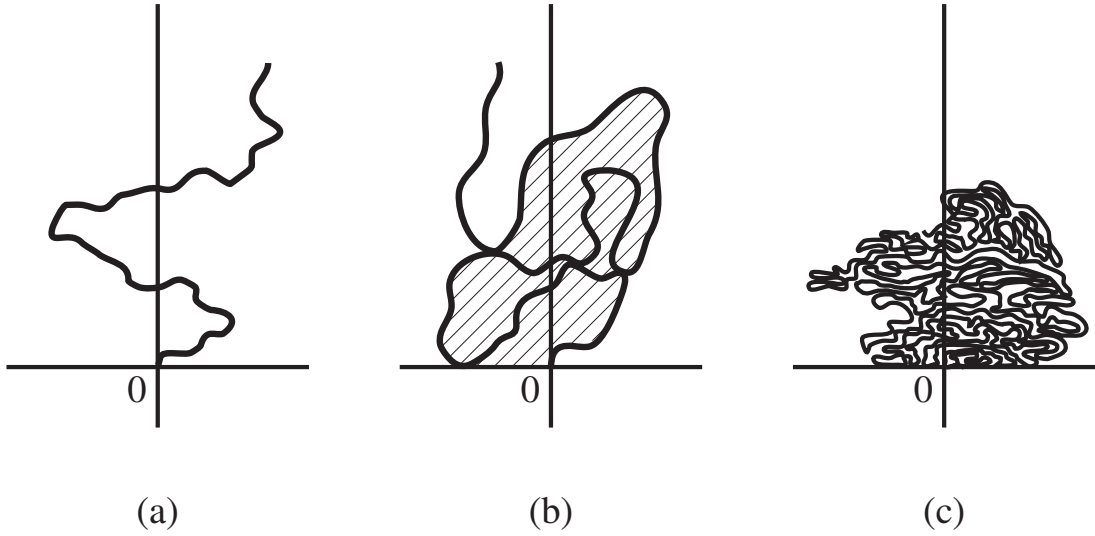


図 3: SLE_κ 曲線の 3 つの相. (a) $\kappa \in (0, 4]$ のときは SLE_κ 曲線は単純曲線であり, 実軸に接することもない. (b) $\kappa \in (4, 8)$ のときは, SLE_κ 曲線は自己交差し, 実軸とも接するが, 線の間には隙間がある. (c) $\kappa \geq 8$ のとき, SLE_κ 曲線は \mathbb{H} を稠密に埋め尽くす.

ル構造を定量的に再現することも知られている. その対応を次に示した. いずれも双方向矢印の右側は離散モデルにおいてグラフ (格子) 上に定義されるランダムな経路 (格子経路) であり, そのスケール極限とよばれる連続極限が, 双方向矢印の左にある特定の κ の値における SLE_κ 曲線に (何らかの位相に関して) 弱収束することを意味する. ただし, 自己回避曲線 (self-avoiding walk) に関するものはいまだ予想である.

SLE_2	\iff	ループ除去ランダム・ウォーク (loop-erased random walk)[46]
$SLE_{8/3}$	\iff	自己回避ウォーク (self-avoiding walk)[予想]
SLE_3	\iff	臨界イジング模型 (critical Ising model) の界面 (interface)[14, 13]
SLE_4	\iff	Gauss 型自由表面模型 (Gaussian free surface model) の等高線 [64]
$SLE_{16/3}$	\iff	臨界イジング模型 (critical Ising model) の FK-界面 (FK-interface)[71, 13]
SLE_6	\iff	臨界浸透模型 (critical percolation model) の探索過程 (exploration process)[70]
SLE_8	\iff	一様全域木模型 (uniform spanning tree) のランダム Peano 曲線 [46]

さらに, Beffara [5] によって, SLE_κ 曲線の Hausdorff 次元 d_κ^H の κ 依存性が明らかにされた.

$$d_\kappa^H = \begin{cases} 1 + \frac{\kappa}{8}, & \kappa \in (0, 8) \\ 2, & \kappa \geq 8 \end{cases} \quad (1.19)$$

SLE_κ と共形場理論 (conformal field theory) との関係が知られている. Virasoro 中心元 (central charge) c とスケール次元 h (共形ウェイトともよばれる, Virasoro 代数の表現における最大ウェイトのこと) は径数 κ と

$$c = c_\kappa := \frac{(6 - \kappa)(3\kappa - 8)}{2\kappa}, \quad h = h_\kappa := \frac{6 - \kappa}{2\kappa} \quad (1.20)$$

という関係式を満たす [3].

1.3 多重 SLE 駆動過程の選定問題

Schramm の発想に従って, (1.13) で与えられる多重 Loewner 方程式を確率過程としたい. それには, 駆動過程を確率過程として与えればよいことになる. N -多重 SLE を与えるためには, \mathbb{R} 上の N 変数 (N 粒子) 確率過程を指定することになる. これを

$$\mathbf{X}_t = (X_t^{(1)}, \dots, X_t^{(N)}) \in \mathbb{R}^N, \quad t \geq 0,$$

とおくと,

$$\frac{dg_t(z)}{dt} = \sum_{i=1}^N \frac{2}{g_t(z) - X_t^{(i)}}, \quad t \geq 0, \quad g_0(z) = z \in \mathbb{H} \quad (1.21)$$

という方程式を解くことになる. これを多重 **Schramm–Loewner** 方程式 (multiple SLE equation) とよび, その解 $(g_t)_{t \geq 0}$ を多重 **Schramm–Loewner** 発展 (multiple SLE evolution) とよぶことにする. 両者とも多重 **SLE** と略称することにする.

問題は, この駆動関数 $(\mathbf{X}_t)_{t \geq 0}$ をどのような指導原理に従って与えるのが妥当であるか, ということである. Schramm [63] が SLE の駆動関数としてブラウン運動を用いた際に行ったのと同様な考察を行うことにより, Bauer–Bernard–Kytölä [4], および Graham [27] は次を結論づけている.

- $(\mathbf{X}_t)_{t \geq 0}$ は半マルチンゲールである.
- $\mathbf{X}_t = (X_t^{(1)}, \dots, X_t^{(N)}), t \geq 0$ の 2 次変動は, $\kappa > 0$ として,

$$\langle dX_t^{(i)}, dX_t^{(j)} \rangle_t = \kappa \delta_{ij} dt, \quad i, j = 1, \dots, N, \quad t \geq 0$$

とおいても一般性を失わない.

我々もこれに従うことにする. ただし, ドリフト項 (有界変動部分) については未定とし, これを定めることをここでの問題としたい. 具体的には, $(B_t^{(i)})_{t \geq 0}, i = 1, \dots, N$ を互いに独立な 1 次元標準ブラウン運動とし, $(\mathbf{X}_t)_{t \geq 0}$ は次の形の確率微分方程式を満たすものとする.

$$dX_t^{(i)} = \sqrt{\kappa} dB_t^{(i)} + F^{(i)}(\mathbf{X}_t) dt, \quad t \geq 0, \quad i = 1, \dots, N \quad (1.22)$$

ここで, $F^{(i)}, i = 1, \dots, N$ は時刻 t には陽には依存しないものと仮定する. 「 $F^{(i)}(\mathbf{X}), i = 1, \dots, N$ の $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^N$ 依存性をどのように設定すべきと考えるか」がここでの問題となる.

1.4 共形場, ランダム行列, 量子重力

上述の多重 SLE 駆動過程の選定問題に対して, 下のような観点から研究がなされている:

- 共形場理論との対応 [10, 4].
- 可換 SLE 条件 [18].
- 1 本の SLE に対する絶対連続性 [27].
- 統計力学模型からの考察 [4, 42].
- reparameterization 不変性 [27].

このうち、(i) の共形場理論との対応に基づく構成がもっとも系統系であるとともに、複数の SLE 曲線の時間発展則に対して可換条件を課す (ii) の方法も等価な結論を導くことを確認することができる [41]. (i) では (1.22) のドリフト項 (有界変動項) を定める関数 $\{F^{(i)}\}_{i=1}^N$ は補助関数 (auxiliary function), あるいは **SLE** 分配関数 とよばれる関数 $Z = Z(\mathbf{x}), \mathbf{x} = (x^{(1)}, \dots, x^{(N)})$ を用いて,

$$F^{(i)}(\mathbf{x}) = 2 \sum_{\substack{1 \leq j \leq N, \\ j \neq i}} \frac{1}{x^{(i)} - x^{(j)}} + \kappa \partial_{x^{(i)}} \log Z(\mathbf{x}) \quad (1.23)$$

で与えられる. (以下では, 偏微分に対して $\partial_{x^{(i)}} := \frac{\partial}{\partial x^{(i)}}$ といった略記を用いる.)
そして, (1.20) で与えられる h_κ を用いて定義される微分演算子

$$\mathcal{D}^{(i)} := \frac{\kappa}{2} \partial_{x^{(i)}}^2 - 2 \left(\sum_{\substack{1 \leq j \leq N, \\ j \neq i}} \frac{1}{x^{(i)} - x^{(j)}} \partial_{x^{(j)}} + \frac{h_\kappa}{(x^{(i)} - x^{(j)})^2} \right), \quad i = 1, \dots, N \quad (1.24)$$

に対して, この補助関数 Z は

$$\mathcal{D}^{(i)} Z(\mathbf{x}) = 0, \quad i = 1, \dots, N \quad (1.25)$$

の解として定められる. (1.25) は共形場理論における Belavin–Polyakov–Zamolodchikov 方程式 [7] の特別な場合と見なすことができる. (1.25) の解は一般には複雑なものとなるが, [4] に極めて簡単な解の一例が与えられている. それは,

$$Z(\mathbf{x}) = \prod_{1 \leq i < j \leq N} (x^{(j)} - x^{(i)})^{2/\kappa} \quad (1.26)$$

である. (1.26) は

$$\kappa \partial_{x^{(i)}} \log Z = 2 \sum_{\substack{1 \leq j \leq N, \\ j \neq i}} \frac{1}{x^{(i)} - x^{(j)}}$$

を与えるので, (1.23) に代入すると

$$F^{(i)}(\mathbf{x}) = 4 \sum_{\substack{1 \leq j \leq N, \\ j \neq i}} \frac{1}{x^{(i)} - x^{(j)}}, \quad i = 1, \dots, N$$

と定まる. したがって, この場合には \mathbb{R} 上の N 変数 (N 粒子) 確率過程として

$$dX_t^{(i)} = \sqrt{\kappa} dB_t^{(i)} + 4 \sum_{\substack{1 \leq j \leq N, \\ j \neq i}} \frac{1}{X_t^{(i)} - X_t^{(j)}} dt, \quad t \geq 0, \quad i = 1, \dots, N \quad (1.27)$$

が選ばれることになる. ここで $t \rightarrow t/\kappa$ という時間変更を行い, $X_{t/\kappa}^{(i)} := \Lambda_t^{(i)}, t \geq 0, i = 1, \dots, N$ と書くことにする. さらに,

$$\beta = \frac{8}{\kappa} \quad (1.28)$$

とおくと, (1.27) は次の確率微分方程式系に変換される:

$$d\Lambda_t^{(i)} = dB_t^{(i)} + \frac{\beta}{2} \sum_{\substack{1 \leq j \leq N, \\ j \neq i}} \frac{1}{\Lambda_t^{(i)} - \Lambda_t^{(j)}} dt, \quad t \geq 0, \quad i = 1, \dots, N. \quad (1.29)$$

この確率過程 $(\mathbf{A}_t)_{t \geq 0}$ はランダム行列理論 [48, 24, 1] において、径数 β をもつ **Dyson** のブラウン運動模型 (Dyson's Brownian motion model), あるいは単に **Dyson** 模型 (Dyson model) とよばれ, 非常によく研究されている [23, 33] (付録 A.1 節を参照). 本講義では, 上述の自明な時間変更をする前の (1.27) を径数 $8/\kappa$ をもつ **Dyson** 模型とよぶことにする.

$T \in (0, \infty)$ を指定し, $Y_{T;t}^{(i)} := X_{T-t}^{(i)}$, $t \in [0, T]$, $i = 1, \dots, N$ とおくと,

$$dY_{T;t}^{(i)} = \sqrt{\kappa} dB_t^{(i)} - 4 \sum_{\substack{1 \leq j \leq N, \\ j \neq i}} \frac{1}{Y_{T;t}^{(i)} - Y_{T;t}^{(j)}} dt, \quad t \in [0, T], \quad i = 1, \dots, N \quad (1.30)$$

が得られる. (1.30) の解として与えられる $(\mathbf{Y}_{T;t})_{t \in [0, T]}$ をここでは, 時間区間 $[0, T]$ における径数 $8/\kappa$ の後進 **Dyson** 模型とよぶことにする [34, 40].

本講義では, 径数 κ をもつ多重 SLE の駆動確率過程 $(\mathbf{X}_t)_{t \geq 0}$ として, 径数 $\beta = 8/\kappa$ をもつ Dyson 模型が選ばれる別のからくりを説明しようとするものである. ここでは, Gauss 型自由場から生成される **Liouville** 2 次元重力 (quantum gravity) に着目し, その共形変換則に対する考察から Sheffield と Miller [69, 49, 50, 51, 52] が導入した量子表面 (quantum surface) と虚数表面 (imaginary surface) とよばれる拡張 **Gauss** 型自由場を考察する. その上で, 多重 SLE をこれらの自由場と結合させることによって, この問題に答えようという新しい試みである [34, 35].

ここで少しだけ Liouville 2 次元重力について '物理的な' 説明を試みる [57, 58, 59, 22]. 物理学の分野では, 場を表す関数 ϕ の成す空間において, 何らかの参照測度 $d\mu$ に対して $e^{-S_{\mathcal{L}}(\phi)} d\mu$ という形の測度を考える. ここで $S_{\mathcal{L}}$ は Liouville 作用とよばれ, 計量テンソル $g = (g_{ij})_{1 \leq i, j \leq 2}$ をもつ曲がった 2 次元空間 \tilde{D} 上に

$$S_{\mathcal{L}} = \frac{1}{4\pi} \int_{\tilde{D}} dw \sqrt{-\det g} \left(\sum_{1 \leq i, j \leq 2} g^{ij} \partial_{w_i} \phi \partial_{w_j} \phi + Q \mathcal{K} \phi + 4\pi \mu_{\mathcal{L}} e^{\gamma \phi} \right)$$

というように与えられるものとする. ここで $\mu_{\mathcal{L}}$ と γ は量子重力理論の径数であり, $Q = \frac{2}{\gamma} + \frac{\gamma}{2}$ である. また, \mathcal{K} は \tilde{D} の Gauss 曲率を表すものとする. いま, $\mu_{\mathcal{L}} = 0$ (この場合を臨界 Liouville 量子重力という) とし, $\phi \rightarrow \tilde{h}$ と変数を替え (単に表式を変えただけ), また計量の明示を避けることにすると ($\int_{\tilde{D}} dw$ が曲がった曲面 \tilde{D} に沿った積分を表すものとする), この作用は

$$S = \frac{1}{4\pi} \int_{\tilde{D}} dw \left(\nabla \tilde{h}(w) \cdot \nabla \tilde{h}(w) + Q \mathcal{K}(w) \tilde{h}(w) \right)$$

と書ける. ある正則関数 φ があり, Gauss 曲率が $\mathcal{K}(w) = -2\Delta \log |\varphi'(w)|$ で与えられるものとする. また同時に φ は, 曲面 \tilde{D} から \mathbb{C} 上の単連結領域 D への共形写像 $\varphi: \tilde{D} \rightarrow D$ を与えるものであり, \tilde{h} は D 上の場 h の座標変換 $\tilde{h} = h \circ \varphi$ と見なせるものとする. Dirichlet 内積とノルムを

$$\langle f, g \rangle_{\nabla} := \frac{1}{2\pi} \int_D (\nabla f)(z) \cdot (\nabla g)(z) dz, \quad \|f\|_{\nabla} := \sqrt{\langle f, f \rangle_{\nabla}}$$

というように導入すると, 形式的な部分積分を行うことにより, 上の作用は

$$S = \frac{1}{2} \|h \circ \varphi + Q \log |\varphi'|\|_{\nabla}^2 + \text{定数}$$

と書き直せることになる. ただし, 定数 $= \frac{Q^2}{2} \|\log |\varphi'|\|_{\nabla}^2$ である. 以上の議論は, 共形変換 φ の下,

$$h \rightarrow h \circ \varphi + Q \log |\varphi'|, \quad Q = \frac{2}{\gamma} + \frac{\gamma}{2} \quad (1.31)$$

という変換則に従う場 h の“強さ” $\|h\|_{\mathcal{V}}^2/2$ を考え、その指数関数で与えられる重みをもった無限次元測度が Liouville 2次元重力とよばれるものであることを意味している。

Duplantier–Sheffield [22] は上とは異なるアプローチで Liouville 2次元重力を定式化した。彼らは **2次元 Gauss 型自由場** H を考え、その指数関数を重みとする測度

$$e^{\gamma H(z)} m(dz)$$

を考えた。ここで、 $m(dz)$ は \mathbb{C} 上の Lebesgue 測度 $d\operatorname{Re} z d\operatorname{Im} z$ である。ただし、2次元 Gauss 型自由場 H は超関数に値をもつ場であるので、その指数関数は意味を持たない。そこで Duplantier–Sheffield は次のような極限を考えることにした [22]。

$$\mu^H(dz) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{\gamma^2/2} e^{\gamma H_\varepsilon(z)} m(dz).$$

ここで、 $H_\varepsilon(z)$ は H を半径 ε の円周上で平均化したものである。本講義では、2節で単連結領域 $D \subset \mathbb{C}$ 上に Gauss 型自由場を構成し、4節で上の極限が存在することを証明する。その上で 5.1 節において、上述の共形変換則 (1.31) に従う拡張 Gauss 型自由場として量子表面を議論する。拡張 Gauss 型自由場と多重 SLE との結合とは、ある種の定常状態を意味する。

2 Gauss 型自由場の構成と基本的な性質

2.1 Bochner–Minlos の定理

定義 2.1 \mathcal{V} を有限次元、あるいは無限次元のベクトル空間とする。任意の $N \in \mathbb{N}$, $\xi_1, \dots, \xi_N \in \mathcal{V}$, および $z_1, \dots, z_N \in \mathbb{C}$ に対して、

$$\sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N \psi(\xi_n - \xi_m) z_n \bar{z}_m \geq 0.$$

が成り立つとき、汎関数 $\psi: \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{C}$ は**正型関数**であるという。

次が証明できる。

補題 2.2 ベクトル空間 \mathcal{V} 上の正型関数 $\psi: \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{C}$ において、次が成り立つ。(i) $\psi(0) \geq 0$, (ii) すべての $\xi \in \mathcal{V}$ に対して、 $\psi(\xi) = \overline{\psi(-\xi)}$, (iii) すべての $\xi \in \mathcal{V}$ に対して、 $|\psi(\xi)| \leq \psi(0)$.

まずは有限次元 Euclid 空間での確率測度に対する **Bochner** の定理を述べることにする。 N 次元 Euclid 空間 \mathbb{R}^N 内の2点 x, y の内積を $x \cdot y$ とし、ノルムを $|x| := \sqrt{x \cdot x}$ と書く。 \mathcal{B}^N を \mathbb{R}^N に含まれる Borel 集合族とする。

定理 2.3 (Bochner theorem) $\psi: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{C}$ を連続な正型関数であり、 $\psi(0) = 1$ を満たすものとする。このとき、すべての $\xi \in \mathbb{R}^N$ に対して

$$\psi(\xi) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{\sqrt{-1}x \cdot \xi} P(dx) \quad \text{for } \xi \in \mathbb{R}^N$$

を満たす確率測度 P が唯一存在する。

特に $\psi(\xi)$ が $\Psi(\xi) := e^{-|\xi|^2/2}, \xi \in \mathbb{R}^N$ で与えられた場合には, Bochner の定理によって定義される確率測度 P は有限次元の標準 Gauss 測度

$$P(dx) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} e^{-|x|^2/2} dx = \prod_{i=1}^N \nu_{N(0,1)}(dx_i), \quad x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$$

である。したがって, 有限次元の標準 Gauss 測度 P は

$$\Psi(\xi) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{\sqrt{-1}x \cdot \xi} P(dx) =: E[e^{\sqrt{-1}X \cdot \xi}] = e^{-|\xi|^2/2} \quad \xi \in \mathbb{R}^N$$

で与えられる特性関数をもって定められるということができる。

次に無限次元 Hilbert 空間 \mathcal{H} を考えることにする。内積を $\langle \cdot, \cdot \rangle = \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}}$, ノルムを $\|x\| = \|x\|_{\mathcal{H}} = \sqrt{\langle x, x \rangle_{\mathcal{H}}}$, $x \in \mathcal{H}$ とする。また, \mathcal{H} の双対空間を \mathcal{H}^* と記すことにする。いま仮に, 適当な σ -加法族をもった \mathcal{H} 上の確率測度 P があり

$$\psi(\xi) = \int_{\mathcal{H}} e^{\sqrt{-1}\langle x, \xi \rangle} P(dx) = e^{-\|\xi\|^2/2}, \quad \xi \in \mathcal{H}$$

が成り立つものとしよう。また, \mathcal{H} の完備正規直交基底が $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ で与えられているものとする。このとき, 任意のある $n \in \mathbb{N}$ を選んで, 特に $\xi = te_n, t \in \mathbb{R}$ とすると,

$$\int_{\mathcal{H}} e^{\sqrt{-1}t\langle x, e_n \rangle} P(dx) = e^{-t^2/2}, \quad t \in \mathbb{R}$$

となる。各 $x \in \mathcal{H}$ に対して, $n \rightarrow \infty$ とすると $\langle x, e_n \rangle \rightarrow 0$ である。したがって, 極限 $n \rightarrow \infty$ では上の等式は $1 = e^{-t^2/2}$ ということになり矛盾が生じる。このことは, Bochner の定理をそのまま無限次元空間に適用することはできないことを意味する。以下, 文献 [2] に従って, Bochner の定理を拡張する。

複素平面上の単連結領域 $D \subsetneq \mathbb{C}$ を考える。これは有界であると仮定する。また, Hilbert 空間 \mathcal{H} が $L^2(D, m(dz))$ 空間として実現される場合を考えることにする。ここで, m は \mathbb{C} 上の Lebesgue 測度

$$m(dz) = d\operatorname{Re} z d\operatorname{Im} z = \frac{\sqrt{-1}}{2} dz d\bar{z}$$

を表すものとする。したがって, 内積は $\langle f, g \rangle := \int_D f(z)g(z)dm(z), f, g \in L^2(D, m(dz))$ で与えられることになる。 Δ を $L^2(D, m(dz))$ における Dirichlet ラプラシアンとする。いま, D は有界としているので, $-\Delta$ は正の離散的な固有値をもつ。

$$-\Delta e_n = \lambda_n e_n, \quad e_n \in L^2(D, m(dz)), \quad n \in \mathbb{N} \quad (2.1)$$

ここで, 固有値は $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$ となるように順番付けることにする。このとき固有関数の列 $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は $L^2(D, m(dz))$ の完備正規直交関数系を与えることになる。次の補題は Weyl の漸近公式として知られるものである。

補題 2.4 D を \mathbb{C} 上の単連結有界領域とする。このとき, D 上の演算子 $-\Delta$ の固有値 $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は次の漸近挙動を示す。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n}{n} = O(1)$$

領域 D 上の C^∞ -級関数でコンパクトな台をもつものを $C_c^\infty(D)$ と書くことにする。2 つの関数 $f, g \in C_c^\infty(D)$ に対して, 上述のように通常の内積は

$$\langle f, g \rangle := \int_D f(z)g(z)m(dz) \quad (2.2)$$

と定義されるのに対して, **Dirichlet 内積** は次式のように, 因子 $1/(2\pi)$ を付けて定義することにする.

$$\langle f, g \rangle_{\nabla} := \frac{1}{2\pi} \int_D (\nabla f)(z) \cdot (\nabla g)(z) m(dz) \quad (2.3)$$

部分積分を行うと, 2 つの内積の間の関係式

$$\langle f, g \rangle_{\nabla} = \frac{1}{2\pi} \langle f, -\Delta g \rangle \quad (2.4)$$

が得られる. Dirichlet 内積 (2.3) による $C_c^\infty(D)$ の完備化空間を $W(D)$ と書くことにする. ノルムを $\|f\|_{\nabla} = \sqrt{\langle f, f \rangle_{\nabla}}$, $f \in W(D)$ と記す. ここで,

$$u_n := \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda_n}} e_n, \quad n \in \mathbb{N} \quad (2.5)$$

と定義すると, (2.4) より

$$\langle u_n, u_m \rangle_{\nabla} = \frac{1}{2\pi} \langle u_n, -\Delta u_m \rangle = \delta_{nm}, \quad n, m \in \mathbb{N}$$

であることが分かるので, $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は, $W(D)$ に対して完備正規直交関数系を与えることになる.

$\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を基底とし実係数をもつ形式的冪級数全体がなす空間を $\widehat{\mathcal{H}}(D)$ とする. この空間は写像 $\widehat{\mathcal{H}}(D) \ni f := \sum_{n \in \mathbb{N}} \widehat{f}_n u_n \mapsto (\widehat{f}_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ により, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ と同型と見なせる. また, この $\widehat{\mathcal{H}}(D)$ の部分空間として, $W(D)$ は 2 乗総和可能数列空間 $\ell^2(\mathbb{N}) \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ と同型である. $\widehat{\mathcal{H}}(D)$ に含まれる 2 つの形式的冪級数 $f = \sum_{n \in \mathbb{N}} \widehat{f}_n u_n$, $g = \sum_{n \in \mathbb{N}} \widehat{g}_n u_n$ に対して $\sum_{n \in \mathbb{N}} |\widehat{f}_n \widehat{g}_n| < \infty$ であるとき, この 2 つに対して $\langle f, g \rangle_{\nabla} := \sum_{n \in \mathbb{N}} \widehat{f}_n \widehat{g}_n$ と書き, これを f と g のペアリング (pairing) ということにする. 当然, $f, g \in W(D)$ であるならば, このペアリングは Dirichlet 内積 (2.3) に等しい.

この形式的冪級数の空間においては, 任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して演算子 $(-\Delta)^a$ は

$$(-\Delta)^a \sum_{n \in \mathbb{N}} \widehat{f}_n u_n := \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n^a \widehat{f}_n u_n, \quad (\widehat{f}_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}.$$

のように作用する. そこで, 各 $a \in \mathbb{R}$ に対して

$$\langle f, g \rangle_a := \langle (-\Delta)^{-a} f, (-\Delta)^{-a} g \rangle_{\nabla}, \quad f, g \in \mathcal{H}_a(D).$$

を内積とする Hilbert 空間を考えることにする. ノルムは $\|\cdot\|_a := \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle_a}$, $a \in \mathbb{R}$ で与えられる. これを $\mathcal{H}_a(D)$ と記す.

例 2.5 特に $a = 1/2$ とすると,

$$\langle f, g \rangle_{1/2} = \left\langle (-\Delta)^{-1/2} f, (-\Delta)^{-1/2} g \right\rangle_{\nabla} = \frac{1}{2\pi} \langle f, g \rangle, \quad f, g \in \mathcal{H}_{1/2}(D)$$

が成り立つ. 従って, $\mathcal{H}_{1/2}(D)$ は $L^2(D, m(dz))$ と同一視できる.

以上の設定の下, 以下の 2 つの補題が証明される.

補題 2.6 $a < b$ ならば, $\mathcal{H}_a(D) \subset \mathcal{H}_b(D)$ が成り立つ.

証明 形式的冪級数 $f = \sum_{n \in \mathbb{N}} \widehat{f}_n u_n \in \widehat{\mathcal{H}}(D)$ を考える。Weyl の漸近公式 (補題 2.4) が成り立つので, $N \in \mathbb{N}$ を $\lambda_N > 1$ となるように取ることができる。 ($\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は非減少列となるように定義したので, $n \geq N$ では $\lambda_n > 1$ ということになる。) $a < b$ と仮定すると,

$$\begin{aligned} \|f\|_b^2 &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n^{-2b} \widehat{f}_n^2 = \sum_{n=1}^{N-1} \lambda_n^{-2b} \widehat{f}_n^2 + \sum_{n=N}^{\infty} \lambda_n^{-2b} \widehat{f}_n^2 \\ &\leq \sum_{n=1}^{N-1} \lambda_n^{-2b} \widehat{f}_n^2 + \sum_{n=N}^{\infty} \lambda_n^{-2a} \widehat{f}_n^2 = \sum_{n=1}^{N-1} (\lambda_n^{-2b} - \lambda_n^{-2a}) \widehat{f}_n^2 + \|f\|_a^2 \end{aligned}$$

となる。これより明らかに, $\|f\|_a^2 < \infty \Rightarrow \|f\|_b^2 < \infty$ であるので, 補題の主張が結論される。 ■

補題 2.7 $a \in \mathbb{R}$ に対して, $\mathcal{H}_a(D)$ の元 $h \in \mathcal{H}_a(D)$ を 1 つ定める。すると,

$$\mathcal{H}_{-a}(D) \ni f \mapsto \langle h, f \rangle_{\nabla} \in \mathbb{R}$$

によって, 対応関係

$$\langle h, \cdot \rangle_{\nabla} : \mathcal{H}_{-a}(D) \rightarrow \mathbb{R}$$

が定義され, これは連続的である。よって, $\mathcal{H}_a(D)$ と $\mathcal{H}_{-a}(D)$ は Dirichlet 内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\nabla}$ に関して双対な Hilbert 空間を成す。

証明 2 つの形式的冪級数 $h = \sum_{n \in \mathbb{N}} \widehat{h}_n u_n \in \mathcal{H}_a$ と $f = \sum_{n \in \mathbb{N}} \widehat{f}_n u_n \in \mathcal{H}_{-a}$ を考える。Cauchy の不等式

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |\widehat{h}_n \widehat{f}_n| = \sum_{n \in \mathbb{N}} |(\lambda_n^{-a} \widehat{h}_n)(\lambda_n^a \widehat{f}_n)| \leq \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} |\lambda_n^{-a} \widehat{h}_n|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} |\lambda_n^a \widehat{f}_n|^2 \right)^{1/2} < \infty$$

より, ペアリング $\langle h, f \rangle_{\nabla}$ が定義できることが分かる。また,

$$\langle h, f \rangle_{\nabla} = \langle (-\Delta)^{-a} h, (-\Delta)^a f \rangle_{\nabla} = \langle (-\Delta)^{-2a} h, f \rangle_{-a}.$$

である。仮定 $h \in \mathcal{H}_a(D)$ と補題 2.6 より $(-\Delta)^{-2a} h \in \mathcal{H}_{-a}(D)$ であり, $\langle h, \cdot \rangle_{\nabla}$ は $\mathcal{H}_{-a}(D)$ 上連続である。したがって, $\mathcal{H}_a(D) \simeq \mathcal{H}_{-a}(D)^*$ である。 ■

注 2.8 例 2.5 で述べたように $\mathcal{H}_{1/2}(D) = L^2(D, m(dz))$ であるので, $a > 1/2$ のときには $\mathcal{H}_a(D)$ の元は関数ではなく, 超関数であることになる。

コンパクト Hausdorff 空間 \mathcal{H} に対して, \mathcal{H} の Borel 集合全体を $\mathcal{B}_{\mathcal{H}}$ と書き, 連続な実関数全体を $\mathcal{C}(\mathcal{H})$ とする。

定義 2.9 線形な汎関数 $\ell : \mathcal{C}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathbb{C}$ が, 任意の非負値関数 $f \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$ に対して $\ell(f) \geq 0$ となるとき, これを正の線形汎関数という。

命題 2.10 (Riesz–Markov–角谷の表現定理) $\ell : \mathcal{C}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathbb{C}$ を正の線形汎関数とする。このとき, $(\mathcal{H}, \mathcal{B}_{\mathcal{H}})$ 上の有限測度 \mathbf{P} で

$$\ell(f) = \int_X f(x) \mathbf{P}(dx), \quad f \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$$

を満たすものが唯一存在する。さらに, $\mathbf{P}(\mathcal{H}) = \ell(1)$ が成り立つ。

$\mathcal{H}_a(D)$ の σ 加法族を $\Sigma_a := \sigma(\{\langle \cdot, g \rangle_\nabla : g \in \mathcal{H}_{-a}(D)\})$ とする。このとき、次が証明できる。

命題 2.11 $\psi : W(D) \rightarrow \mathbb{C}$ を連続な正型関数であり、 $\psi(0) = 1$ を満たすものとする。すると、各 $a > 1/2$ に対して $(\mathcal{H}_a(D), \Sigma_a)$ 上の確率測度 \mathbf{P} として次を満たすものが存在する。

$$\psi(f) = \int_{\mathcal{H}_a(D)} e^{\sqrt{-1}\langle h, f \rangle_\nabla} \mathbf{P}(dh), \quad f \in \mathcal{H}_{-a}(D). \quad (2.6)$$

証明 $\widehat{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ とする。すると、

$$Q := \widehat{\mathbb{R}}^{\mathbb{N}} = \{h = (\widehat{h}_n)_{n \in \mathbb{N}} : \widehat{h}_n \in \widehat{\mathbb{R}}, n \in \mathbb{N}\}$$

はコンパクト Hausdorff 空間である。この空間の Borel 集合全体を \mathcal{B}_Q と書くことにする。 $h = (\widehat{h}_n)_{n \in \mathbb{N}} \in Q$ が与えられたとき、各々の $n \in \mathbb{N}$ に対して実関数 q_n を

$$q_n(h) = \begin{cases} \widehat{h}_n, & \widehat{h}_n \neq \infty, \\ 0, & \widehat{h}_n = \infty \end{cases}$$

と定義することにする。 $q_n, n \in \mathbb{N}$ は Borel 可測である。 Q 上の実連続関数の空間を $\mathcal{C}(Q)$ とする。この部分集合として、

$$\mathcal{C}_{\text{finite}}(Q) := \{f \in \mathcal{C}(Q) : \exists N \in \mathbb{N}, \exists \{i_1, \dots, i_N\} \subset \mathbb{N}, f = f(\widehat{f}_{i_1}, \dots, \widehat{f}_{i_N})\}$$

を定義する。すなわち、 $\mathcal{C}_{\text{finite}}(Q)$ の元は、ただか有限個の展開係数 $\{\widehat{f}_{i_n}\}_{i_n=1}^N$ だけに依存する。 $\mathcal{C}_{\text{finite}}(Q)$ は $\mathcal{C}(Q)$ 上稠密であることを示すことができる。形式的冪級数の集合 $\widehat{\mathcal{H}}(D)$ は $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ と同型であったので、 Q 内の開部分集合と見なせる。さらにこの $\widehat{\mathcal{H}}(D)$ の部分集合として、

$$\mathcal{D} := \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R}u_n$$

を考える。 $h \in \mathcal{C}_{\text{finite}}(Q)$ と $f \in \mathcal{D}$ に対して Q 上の Borel 可測関数として

$$F_h(f) := \langle h, f \rangle_\nabla = \sum_{n \in \mathbb{N}} q_n(h) \langle u_n, f \rangle_\nabla \quad (2.7)$$

を定義する。これは定義より有限和である。また、 $N \in \mathbb{N}, \{i_1, \dots, i_N\} \subset \mathbb{N}$ に対して、

$$\mathcal{D}_{\{i_1, \dots, i_N\}} := \bigoplus_{n=1}^N \mathbb{R}u_{i_n} \simeq \mathbb{R}^N$$

とする。 ψ の近似 $\psi_{\{i_1, \dots, i_N\}} := \psi|_{\mathcal{D}_{\{i_1, \dots, i_N\}}}$ を考え、これに Bochner の定理 (定理 2.3) を適用する。すると、 $(\mathcal{D}_{\{i_1, \dots, i_N\}}, \mathcal{B}^N)$ 上の確率測度 $\mathbf{P}_{\{i_1, \dots, i_N\}}$ が

$$\psi_{\{i_1, \dots, i_N\}}(f) = \int_{\mathcal{D}_{\{i_1, \dots, i_N\}}} e^{\sqrt{-1}F_h(f)} \mathbf{P}_{\{i_1, \dots, i_N\}}(dh), \quad f \in \mathcal{D}$$

によって定められることになる。このようにして得られた確率測度の族 $\{\mathbf{P}_{\{i_1, \dots, i_N\}} : N \in \mathbb{N}, \{i_1, \dots, i_N\} \subset \mathbb{N}\}$ を用いて、線形汎関数 $\ell : \mathcal{C}_{\text{finite}}(Q) \rightarrow \mathbb{C}$ を

$$\ell(\varphi) := \int_{\mathcal{D}_{\{i_1, \dots, i_N\}}} \varphi(\widehat{h}_{i_1}, \dots, \widehat{h}_{i_N}) \mathbf{P}_{\{i_1, \dots, i_N\}}(dh), \quad \varphi \in \mathcal{C}_{\text{finite}}(Q)$$

と定義する。ただしここで、各 $\varphi \in \mathcal{C}_{\text{finite}}(Q)$ に対して、それが $\widehat{h}_{i_1}, \dots, \widehat{h}_{i_N}$ のみに依存していたときには、それに合わせて添え字集合 $\{i_1, \dots, i_N\} \subset \mathbb{N}$ を選ぶようにする。得られた線形汎関数 ℓ はこのような構成に依らずに $\mathcal{C}(Q)$ 上の正の線形汎関数に拡張することができる。これに Riesz–Markov–角谷の表現定理を用いることにより、 (Q, \mathcal{B}_Q) 上の確率測度 \mathbf{P} として、次を満たすものが定まることになる。

$$\ell(\varphi) = \int_Q \varphi(h) \mathbf{P}(dh), \quad \varphi \in \mathcal{C}(Q).$$

特に、 $f \in \mathcal{D}$ に対して (2.7) に従って F_h を与えた上で、 $\varphi(h) = e^{\sqrt{-1}F_h(f)} \in \mathcal{C}_{\text{finite}}(Q)$ とすると、

$$\psi(f) = \int_Q e^{\sqrt{-1}F_h(f)} \mathbf{P}(dh), \quad f \in \mathcal{D} \quad (2.8)$$

が得られることになる。

以下では、 $a > 1/2$ に対して、(2.8) の積分を Q 全体の上に対してではなく $\mathcal{H}_a(D)$ の上に限定した場合を導く。仮定より ψ は連続である。よって、任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\delta > 0$ を、 $\|f\|_{\nabla} < \delta$ であれば $|1 - \psi(f)| < \varepsilon$ となるようにとることができる。いま、そのように ε と δ を定める。すると特に、

$$\operatorname{Re}(\psi(f)) > 1 - \varepsilon, \quad \|f\|_{\nabla} < \delta \quad (2.9)$$

という不等式が得られる。他方、 ψ を正型関数と仮定したので、 $|\psi(f)| \leq \psi(0) = 1$ であり、これより特に $\operatorname{Re}(\psi(f)) \geq -1, f \in W(D)$ であることがわかる。もしも、 $\|f\|_{\nabla} \geq \delta$ であるならば、 $-1 > 1 - \varepsilon - 2\delta^{-2}\|f\|_{\nabla}^2$ である。したがって、

$$\operatorname{Re}(\psi(f)) > 1 - \varepsilon - 2\delta^{-2}\|f\|_{\nabla}^2, \quad \|f\|_{\nabla} \geq \delta$$

が成り立つことになる。上述の (2.9) より、 $\|f\|_{\nabla} < \delta$ のときにもこの不等式が成り立つ。よって、

$$\operatorname{Re}(\psi(f)) > 1 - \varepsilon - 2\delta^{-2}\|f\|_{\nabla}^2, \quad f \in W(D) \quad (2.10)$$

である。ここで特に、 $f = \sum_{n=1}^N \widehat{f}_n u_n \in \mathcal{D}_{\{1, \dots, N\}}$ とおくと、

$$\operatorname{Re}(\psi(f)) > 1 - \varepsilon - 2\delta^{-2} \sum_{n=1}^N \widehat{f}_n^2$$

が結論される。ここで、 $\alpha > 0$ に対して $(\mathcal{D}_{\{1, \dots, N\}}, \mathcal{B}^N)$ 上の確率測度

$$P_{\alpha, N}(df) = \prod_{n=1}^N \sqrt{\frac{\lambda_n^{2a}}{2\pi\alpha}} e^{-\lambda_n^{2a} \widehat{f}_n^2 / 2\alpha} d\widehat{f}_n, \quad f = (\widehat{f}_1, \dots, \widehat{f}_N) \in \mathbb{R}^N$$

を導入する。ただしここで、 $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は (2.1) で与えたように、演算子 $-\Delta$ の固有値とする。 $\psi(f)$ の積分表示 (2.8) を、不等式 (2.10) の左辺に代入した上で、両辺を確率測度 $P_{\alpha, N}(df)$ に対して積分する。すると、

$$\int_Q e^{-(\alpha/2) \sum_{n=1}^N \lambda_n^{-2a} q_n(h)^2} \mathbf{P}(dh) > 1 - \varepsilon - 2\alpha\delta^{-2} \sum_{n=1}^N \lambda_n^{-2a} \quad (2.11)$$

が得られる。ここで、極限 $N \rightarrow \infty$ をとる。上の左辺の積分は $\mathcal{H}_a(D) = \{h = \sum_{n \in \mathbb{N}} \widehat{h}_n u_n : \sum_{n \in \mathbb{N}} (\lambda_n^{-a} \widehat{h}_n)^2 < \infty\}$ の上で行えばよい。 $\alpha > 0$ としたので、 $h \in Q \setminus \mathcal{H}_a(D)$ に対しては、その指数関数で与えられた被積分関数は零となるからである。Weyl の漸近公式 (補題 2.4) と仮定 $a > 1/2$ より、(2.11) の右辺の収束は保証される。

$$C := \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \lambda_n^{-2a} < \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2a} < \infty$$

よって,

$$\int_{\mathcal{H}_a(D)} e^{-(\alpha/2)\|h\|_a^2} \mathbf{P}(dh) > 1 - \varepsilon - 2\alpha\delta^{-2}C$$

が得られる. $\alpha \rightarrow 0$ の極限をとると, $\mathbf{P}(\mathcal{H}_a(D)) > 1 - \varepsilon$ となる. ところが, $\varepsilon > 0$ の値は任意に定めることができたので, $\mathbf{P}(\mathcal{H}_a(D)) = 1$ である. よって, \mathbf{P} を $(\mathcal{H}_a(D), \Sigma_a)$ 上の確率測度として良いことになる. よって,

$$\psi(f) = \int_{\mathcal{H}_a(D)} e^{\sqrt{-1}\langle h, f \rangle_{\nabla}} \mathbf{P}(dh), \quad f \in \mathcal{D}.$$

が成立することになる. 補題 2.7 より, この表式において条件 $f \in \mathcal{D}$ を $f \in \mathcal{H}_{-a}(D)$ にすることができる. ■
超関数からなる Hilbert 空間の族の和集合を

$$\mathcal{E}(D) := \bigcup_{a>1/2} \mathcal{H}_a(D). \quad (2.12)$$

と書くことにする. すると, その双対空間は補題 2.7 より

$$\mathcal{E}(D)^* := \bigcap_{a<-1/2} \mathcal{H}_a(D)$$

で与えられることになる. また, 補題 2.6 より, 包含関係

$$\mathcal{E}(D)^* \subset W(D) \subset \mathcal{E}(D)$$

の成立が結論される [68]. ここで, $(\mathcal{E}(D)^*, W(D), \mathcal{E}(D))$ は **Gel'fand** の三つ組み (Gel'fand triple) とよばれる. $\Sigma_{\mathcal{E}(D)} = \sigma(\{\langle \cdot, f \rangle_{\nabla} : f \in \mathcal{E}(D)^*\})$ とする.

(2.12) より, 命題 2.11 から次の定理が結論される. これは Bochner の定理 2.3 の拡張であり, **Bochner–Minlos** の定理とよばれる [28, 68, 2].

定理 2.12 (Bochner–Minlos の定理) ψ を $W(D)$ 上の連続な正型関数であり, $\psi(0) = 1$ であるものとする. このとき $(\mathcal{E}(D), \Sigma_{\mathcal{E}(D)})$ 上の確率測度 \mathbf{P} であり, 次を満たすものが唯一存在する.

$$\psi(f) = \int_{\mathcal{E}(D)} e^{\sqrt{-1}\langle h, f \rangle_{\nabla}} \mathbf{P}(dh), \quad f \in \mathcal{E}(D)^*. \quad (2.13)$$

以下に述べるように, 適当な条件を ψ に課すことにより, (2.13) における関数 f の集合を $\mathcal{E}(D)^*$ から $W(D)$ に拡張することができる.

命題 2.13 $\psi : W(D) \rightarrow \mathbb{C}$ を連続な正型関数であり, $\psi(0) = 1$ をみたすものとする. さらに, ψ は次の仮定を満たすものとする.

(A.1) 任意の $N \in \mathbb{N}$ に対して, $\psi\left(\sum_{n=1}^N t_n u_n\right), t_n \in \mathbb{R}, n = 1, \dots, N$ は C^2 -級である.

(A.2) 任意の $f \in W(D)$ に対して, 次の級数が収束する.

$$\left\{ \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N \frac{\partial^2 \psi(t_n u_n + t_m (1 - \delta_{nm}) u_m)}{\partial t_n \partial t_m} \Big|_{t_n = t_m = 0} \langle u_n, f \rangle_{\nabla} \langle u_m, f \rangle_{\nabla} : N \in \mathbb{N} \right\}.$$

すると, 次を満たす乱数の集合 $\{\langle H, f \rangle_{\nabla} : f \in W(D)\}$ が存在する.

- (i) $\langle H, f \rangle_{\nabla} \in L^2(\mathcal{E}(D), \mathbf{P})$, $f \in W(D)$.
- (ii) $\langle H, af + bg \rangle_{\nabla} = a\langle H, f \rangle_{\nabla} + b\langle H, g \rangle_{\nabla}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $f, g \in W(D)$.
- (iii) $f \in \mathcal{E}(D)^*$ であれば, $\langle H, f \rangle_{\nabla}$ は定理 2.12 にあるものと一致する.
- (iv) 次が成り立つ.

$$\psi(f) = \int_{\mathcal{E}(D)} e^{\sqrt{-1}\langle h, f \rangle_{\nabla}} \mathbf{P}(dh), \quad f \in W(D). \quad (2.14)$$

証明 仮定 (A.1) の下, (2.13) より

$$\left. \frac{\partial^2 \psi(t_n u_n + t_m(1 - \delta_{nm})u_m)}{\partial t_n \partial t_m} \right|_{t_n=t_m=0} = - \int_{\mathcal{E}(D)} q_n(h)q_m(h) \mathbf{P}(dh), \quad n, m \in \mathbb{N}$$

が得られる.

$$\langle h^{(N)}, f \rangle_{\nabla} := \sum_{n=1}^N q_n(h) \langle u_n, f \rangle_{\nabla}, \quad f \in W(D), \quad N \in \mathbb{N}$$

とおく. すると, $N > M$ に対して,

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{E}(D)} \left| \langle h^{(N)}, f \rangle_{\nabla} - \langle h^{(M)}, f \rangle_{\nabla} \right|^2 \mathbf{P}(dh) \\ &= \sum_{n=M+1}^N \sum_{m=M+1}^N \langle u_n, f \rangle_{\nabla} \langle u_m, f \rangle_{\nabla} \int_{\mathcal{E}(D)} q_n(h)q_m(h) \mathbf{P}(dh) \\ &= - \sum_{n=M+1}^N \sum_{m=M+1}^N \left. \frac{\partial \psi(t_n u_n + (1 - \delta_{nm})t_m u_m)}{\partial t_n \partial t_m} \right|_{t_n=t_m=0} \langle u_n, f \rangle_{\nabla} \langle u_m, f \rangle_{\nabla} \end{aligned}$$

が成り立つ. 仮定 (A.2) より, これは $N, M \rightarrow \infty$ の極限で零に収束する. したがって, $\{\langle H^{(N)}, f \rangle_{\nabla} : N \in \mathbb{N}\}$ は $L^2(\mathcal{E}(D), \mathbf{P})$ 内の Cauchy 級数であるから, 極限

$$\langle H, f \rangle_{\nabla} := \lim_{N \rightarrow \infty} \langle H^{(N)}, f \rangle_{\nabla} \in L^2(\mathcal{E}(D), \mathbf{P})$$

が存在することになり, (i) が証明される. 線形性 (ii) は自明である. 上の構成より (iii) も結論される. ψ は連続なので,

$$\psi(f) = \lim_{N \rightarrow \infty} \psi \left(\sum_{n=1}^N u_n \langle u_n, f \rangle_{\nabla} \right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{E}(D)} e^{\sqrt{-1}\langle h^{(N)}, f \rangle_{\nabla}} \mathbf{P}(dh), \quad f \in W(D)$$

である. ここで,

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\mathcal{E}(D)} \left(e^{\sqrt{-1}\langle h, f \rangle_{\nabla}} - e^{\sqrt{-1}\langle h^{(N)}, f \rangle_{\nabla}} \right) \mathbf{P}(dh) \right| \leq \int_{\mathcal{E}(D)} \left| e^{\sqrt{-1}\langle h, f \rangle_{\nabla}} - e^{\sqrt{-1}\langle h^{(N)}, f \rangle_{\nabla}} \right| \mathbf{P}(dh) \\ & \leq \int_{\mathcal{E}(D)} \left| \langle h, f \rangle_{\nabla} - \langle h^{(N)}, f \rangle_{\nabla} \right| \mathbf{P}(dh) \leq \left(\int_{\mathcal{E}(D)} \left| \langle h, f \rangle_{\nabla} - \langle h^{(N)}, f \rangle_{\nabla} \right|^2 \mathbf{P}(dh) \right)^{1/2} \\ & \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty \end{aligned}$$

であるから (iv) も導かれる. ■

汎関数 $\Psi(f) := e^{-\|f\|_{\nabla}^2/2}$ は命題 2.13 の条件を満たす。したがって、 $(\mathcal{E}(D), \Sigma_{\mathcal{E}(D)})$ 上の確率測度 \mathbf{P} として次を満たすものが定義されることになる。

$$\Psi(f) = \int_{\mathcal{E}(D)} e^{\sqrt{-1}\langle h, f \rangle_{\nabla}} \mathbf{P}(dh) = e^{-\|f\|_{\nabla}^2/2}, \quad f \in W(D). \quad (2.15)$$

定義 2.14 (Dirichlet 境界 Gauss 型自由場) 確率空間 $(\Omega^{\text{GFF}}, \mathcal{F}^{\text{GFF}}, \mathbb{P}^{\text{GFF}})$ において、等長写像

$$H : W(D) \rightarrow L^2(\Omega^{\text{GFF}}, \mathcal{F}^{\text{GFF}}, \mathbb{P}^{\text{GFF}})$$

があり、各 $f \in W(D)$ に対して、 $\langle H, f \rangle_{\nabla}$ が平均零の Gauss 乱数を与えるとき、対 $((\Omega^{\text{GFF}}, \mathcal{F}^{\text{GFF}}, \mathbb{P}^{\text{GFF}}), H)$ を **Dirichlet 境界 Gauss 型自由場** (Gaussian free field : GFF) という。

各 $f \in W(D)$ に対して、 $h \mapsto \langle h, f \rangle_{\nabla}$, $h \in \mathcal{E}(D)$ によって与えられる乱数を $H(f) := \langle H, f \rangle_{\nabla} \in L^2(\mathcal{E}(D), \mathbb{P})$ と書くことにする。すると、(2.15) より、対 $((\mathcal{E}(D), \Sigma_{\mathcal{E}(D)}), \mathbf{P})$ は定義 2.14 を満たすことになる。以下では、確率空間 $(\Omega^{\text{GFF}}, \mathcal{F}^{\text{GFF}}, \mathbb{P}^{\text{GFF}}) = (\mathcal{E}(D), \Sigma_{\mathcal{E}(D)}, \mathbf{P})$ の参照を省略して、単に H を Dirichlet 境界の下での Gauss 型自由場と称することにする。

この定義より、(2.15) は

$$\mathbb{E}^{\text{GFF}}[e^{\sqrt{-1}\langle H, f \rangle_{\nabla}}] = e^{-\|f\|_{\nabla}^2/2}, \quad f \in W(D) \quad (2.16)$$

と書けることになる。また、この式から、Gauss 乱数の族 $\{\langle H, f \rangle_{\nabla} : f \in W(D)\}$ のモーメントに対する表式が得られることになる。例えば、共分散は

$$\text{Cov}[\langle H, f \rangle_{\nabla}, \langle H, g \rangle_{\nabla}] := \mathbb{E}^{\text{GFF}}[\langle H, f \rangle_{\nabla} \langle H, g \rangle_{\nabla}] = \langle f, g \rangle_{\nabla}, \quad f, g \in W(D). \quad (2.17)$$

で与えられる。特に、分散は

$$\text{Var}[\langle H, f \rangle_{\nabla}] := \mathbb{E}^{\text{GFF}}[\langle H, f \rangle_{\nabla}^2] = \|f\|_{\nabla}^2, \quad f \in W(D)$$

となる。 $\theta \in \mathbb{R}$ という径数を導入し、(2.16) で $f \rightarrow \theta f$ と置き換えた上で、上の結果を用いると次の公式が導かれる。

補題 2.15 Dirichlet 境界 Gauss 型自由場 H が与える Gauss 乱数の族 $\{\langle H, f \rangle_{\nabla} : f \in W(D)\}$ に対して、次が成立する。

$$\mathbb{E}^{\text{GFF}}[e^{\sqrt{-1}\theta \langle H, f \rangle_{\nabla}}] = \exp\left(-\frac{\theta^2}{2} \text{Var}[\langle H, f \rangle_{\nabla}]\right), \quad \theta \in \mathbb{R}, \quad f \in W(D).$$

これを Gauss 型自由場の特性関数 (characteristic function) という。

2.2 Dirichlet 境界 Gauss 型自由場の共形不変性

$D, D' \subseteq \mathbb{C}$ はいずれも単連結領域であり、 $\varphi : D' \rightarrow D$ を共形写像 (等角写像) とする。

補題 2.16 Dirichlet 内積 (2.3) は共形変換不変である。すなわち、次の等式がすべての $f, g \in C_c^\infty(D)$ に対して成り立つ。

$$\int_D (\nabla f)(z) \cdot (\nabla g)(z) m(dz) = \int_{D'} (\nabla(f \circ \varphi))(z) \cdot (\nabla(g \circ \varphi))(z) m(dz).$$

証明 領域 D 内の点 $z \in D$ に対して, $z = x + \sqrt{-1}y, x, y \in \mathbb{R}$ とする. 共形変換を実関数 u, v を用いて, $\varphi(z) = u(x, y) + \sqrt{-1}v(x, y)$ と表す. **Cauchy–Riemann** の関係式 $\partial u/\partial x = \partial v/\partial y, \partial u/\partial y = -\partial v/\partial x$ より, 共形変換 φ のヤコビアンは

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$$

で与えられることが示せる. 微分の連鎖則とともに, Cauchy–Riemann の関係式を再び用いると, 等式

$$(\nabla f \circ \varphi)(z) \cdot (\nabla g \circ \varphi)(z) = \left(\frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial g}{\partial v}\right) \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \right\}.$$

が得られる. これより, 補題が証明される. ■

この補題より, φ の引き戻し (pull-back) $\varphi^* : W(D) \ni f \mapsto f \circ \varphi \in W(D')$ は等長変換であることになる. このことより, これまでは有界な単連結領域の上だけで Gauss 型自由場を定義していたが, 非有界な単連結領域上の Gauss 型自由場を定義することができる. すなわち, 領域 D' は有界であり, この上で Gauss 型自由場が定義されているものとする. いま, 領域 D は非有界であるとする. このとき, $\{\langle \varphi_* H, f \rangle_{\nabla} : f \in W(D)\}$ を等式

$$\langle \varphi_* H, f \rangle_{\nabla} := \langle H, \varphi^* f \rangle_{\nabla}, \quad f \in W(D)$$

が成り立つように定義することにする. その結果, Gauss 型自由場の共分散の変換則は, 次のように与えられることになる: $f, g \in W(D)$ に対して,

$$\begin{aligned} \text{Cov}[\langle \varphi_* H, f \rangle_{\nabla}, \langle \varphi_* H, g \rangle_{\nabla}] &= \mathbb{E}^{\text{GFF}} \left[\langle \varphi_* H, f \rangle_{\nabla} \langle \varphi_* H, g \rangle_{\nabla} \right] = \langle \varphi^* f, \varphi^* g \rangle_{\nabla} = \langle f, g \rangle_{\nabla} \\ &= \mathbb{E}^{\text{GFF}} \left[\langle H, f \rangle_{\nabla} \langle H, g \rangle_{\nabla} \right] = \text{Cov}[\langle H, f \rangle_{\nabla}, \langle H, g \rangle_{\nabla}]. \end{aligned} \quad (2.18)$$

次の形式的な計算

$$\begin{aligned} \langle \varphi_* H, f \rangle_{\nabla} &= \langle H, \varphi^* f \rangle_{\nabla} = \frac{1}{2\pi} \int_{D'} (\nabla H)(z) \cdot (\nabla f \circ \varphi)(z) m(dz) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_D (\nabla H \circ \varphi^{-1})(z) \cdot (\nabla f)(z) m(dz) \end{aligned}$$

を根拠に, H の引き戻しに対して $\varphi_* H = H \circ \varphi^{-1}$ という等式が成り立つものと解釈する. 等式 (2.18) は Gauss 型自由場の共分散は共形変換で不変であることを意味する. この事実を **Dirichlet 境界 Gauss 型自由場の共形変換不変性** という.

2.3 Dirichlet 境界 Gauss 型自由場の Green 関数

$D \subsetneq \mathbb{C}$ を単連結領域とする. 形式的に部分積分を行うと

$$\begin{aligned} \langle H, f \rangle_{\nabla} &= \frac{1}{2\pi} \int_D (\nabla H)(z) \cdot (\nabla f)(z) m(dz) = \frac{1}{2\pi} \int_D H(z) (-\Delta f)(z) m(dz) \\ &= \frac{1}{2\pi} \langle H, (-\Delta) f \rangle \end{aligned}$$

という式変形が考えられる. そこで我々は,

$$\langle H, f \rangle := 2\pi \langle H, (-\Delta)^{-1} f \rangle_{\nabla}, \quad f \in \mathcal{D}((-\Delta)^{-1}), \quad (2.19)$$

と定義することにする．ここで， $D((-\Delta)^{-1})$ は $(-\Delta)^{-1}$ の定義域を表すものとする．
 $(-\Delta)^{-1}$ は積分演算子として

$$((-\Delta)^{-1}f)(z) = \frac{1}{2\pi} \int_D G_D(z, w) f(w) m(dw), \quad \text{a.e. } z \in D, \quad f \in D((-\Delta)^{-1})$$

というように表される．ここで，積分核 $G_D(z, w)$ は **Dirichlet 境界条件下の Green 関数** とよばれる．これを用いると， $f, g \in D((-\Delta)^{-1})$ であるとき $\langle H, f \rangle$ と $\langle H, g \rangle$ の共分散は

$$\text{Cov}[\langle H, f \rangle, \langle H, g \rangle] := \mathbb{E}^{\text{GFF}}[\langle H, f \rangle \langle H, g \rangle] = \int_{D \times D} f(z) G_D(z, w) g(w) m(dz) m(dw) \quad (2.20)$$

と書けることになる．そこで，

$$\langle H, f \rangle = \int_D H(z) f(z) m(dz), \quad f \in D((-\Delta)^{-1})$$

という略記を許すことにすると，Gauss 型自由場の共分散核が Green 関数ということになる：

$$\text{Cov}[H(z), H(w)] := \mathbb{E}^{\text{GFF}}[H(z)H(w)] = G_D(z, w), \quad z, w \in D, \quad z \neq w \quad (2.21)$$

上で述べた Gauss 型自由場の共形不変性より，共形変換 $\varphi: D' \rightarrow D$ によって Green 関数の関数形は不変であり，

$$G_{D'}(z, w) = G_D(\varphi(z), \varphi(w)), \quad z, w \in D' \quad (2.22)$$

のように，単に座標変換 $(z, w) \rightarrow (\varphi(z), \varphi(w))$ をすればよいことになる．

(2.20) 式より， $C_c^\infty(D) \subset D((-\Delta)^{-1})$ である．以下では， $C_c^\infty(D)$ 上の Gauss 型乱数族 $\{\langle H, f \rangle : f \in C_c^\infty(D)\}$ をもって，Dirichlet 境界 Gauss 型自由場を特定することにする．

例 2.17 D が上半平面 $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z > 0\}$ であるとき，Dirichlet 境界 Green 関数は次式で与えられる：

$$\begin{aligned} G_{\mathbb{H}}(z, w) &= \log \left| \frac{z - \bar{w}}{z - w} \right| = \log |z - \bar{w}| - \log |z - w| \\ &= \text{Re } \log(z - \bar{w}) - \text{Re } \log(z - w), \quad z, w \in \mathbb{H}, \quad z \neq w. \end{aligned}$$

以下では，単連結領域 $D \subsetneq \mathbb{C}$ を上半平面 \mathbb{H} で代表させることにする．任意の単連結領域 $D' \subsetneq \mathbb{C}$ は共形変換 $\varphi: D' \rightarrow \mathbb{H}$ によって指定されることになるので，この変換を上付き添え字として，

$$G^\varphi(z, w) := G_{\varphi^{-1}(\mathbb{H})}(z, w) = G_{\mathbb{H}}(\varphi(z), \varphi(w)) \quad (2.23)$$

と記すことにする．例 2.17 より，

$$\begin{aligned} G^\varphi(z, w) &= \log |\varphi(z) - \overline{\varphi(w)}| - \log |\varphi(z) - \varphi(w)| \\ &= \text{Re } \log(\varphi(z) - \overline{\varphi(w)}) - \text{Re } \log(\varphi(z) - \varphi(w)) \end{aligned} \quad (2.24)$$

である．

2.4 自由境界 Gauss 型自由場

$D \subset \mathbb{C}$ を単連結領域とする． D 上の滑らかな実関数であり，その勾配がコンパクトな台をもつもの全体を $\mathcal{C}^\infty(D)$ と書くことにする． D 上の定数関数全体を \mathcal{N} と書くと，商空間 $\mathcal{C}^\infty/\mathcal{N}$ は Dirichlet 内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle_\nabla$ に対して前 Hilbert 空間をなす． $f \in \mathcal{C}^\infty(D)$ であるとき， $[f] := f + \mathcal{N}$ とし，その完備化空間を $\widetilde{W}(D)$ と書くことにする．このような自由境界条件の下でも，以下のように Bochner–Minlos の定理が成り立つ．

定理 2.18 確率空間 $(Q, \mathcal{B}_Q, \widetilde{\mathbf{P}})$ と乱数の族 $\{\langle \widetilde{H}, [f] \rangle_\nabla \in L^2(Q, \mathcal{B}_Q, \widetilde{\mathbf{P}}) : [f] \in \widetilde{W}(D)\}$ があり，次を満たす：

$$\begin{aligned} [f], [g] \in \widetilde{W}(D), a, b \in \mathbb{R} \text{ に対して, } & \langle \widetilde{H}, a[f] + b[g] \rangle_\nabla = a \langle \widetilde{H}, [f] \rangle_\nabla + b \langle \widetilde{H}, [g] \rangle_\nabla, \\ \int_Q e^{\sqrt{-1} \langle \widetilde{H}, [f] \rangle_\nabla} \widetilde{\mathbf{P}}(d\tilde{h}) &= e^{\| [f] \|^2 / 2}, \quad [f] \in \widetilde{W}(D). \end{aligned} \quad (2.25)$$

Dirichlet 境界 Gauss 型自由場のとときと同様に，

$$\langle \widetilde{H}, [f] \rangle^\sim := 2\pi \langle \widetilde{H}, (-\Delta)^{-1}[f] \rangle_\nabla, \quad [f] \in \mathbf{D}((-\Delta)^{-1})$$

と定義する．自由境界 Gauss 型自由場の共分散核を表す Green 関数を定義するため， $(-\Delta)^{-1}$ を積分作用素として表したいが， $[f] \in \widetilde{W}(D)$ は定数分だけの不定性があり関数として定まらないので工夫が必要である．ここでは，次のような **Neumann 境界値問題** を考えることにする．すなわち， D 上の適当な関数 ρ と境界 ∂D 上の法線ベクトル場 v に対して，次を満たす \overline{D} 上の関数 h を求める：

$$\begin{cases} D \text{ 内で} & -\Delta f = 2\pi\rho \\ \partial D \text{ 上で} & \frac{\partial h}{\partial n} = v. \end{cases}$$

ここで， $\frac{\partial}{\partial n}$ は ∂D 上での法線ベクトル場に沿った方向微分を表す．発散定理より，解 h があるならば， $\int_D 2\pi\rho(z)m(dz) = \int_{\partial D} v(d)\ell(dz)$ が成り立つ．(∂D 上の Lebesgue 測度を ℓ と書いた．) 逆にこれが成り立てば，解 h が存在する．解は定数分の不定性の除けば一意に定まる． $v = 0$ の場合の解は，**Neumann 境界 Green 関数** $\widetilde{G}(z, w)$, $z, w \in D$ を用いて

$$h(z) = \int_D \widetilde{G}(z, w) f(w) m(dw), \quad z \in D$$

と表せるが，これは $[h] \in \widetilde{W}(D)$ の1つの元(特解)を与えることになる．以上より， $[f] \in \widetilde{W}(D)$ への $(-\Delta)^{-1}$ の作用は，2つのステップを踏んで考えればよいことになる．まず， $[f]$ の代表元として $\int_D f(z)m(dz) = 0$ となるものを選び，これを用いて

$$(-\Delta)^{-1}[f] = \left[\frac{1}{2\pi} \int_D \widetilde{G}(z, w) f(w) m(dw) \right]$$

とする． $\mathcal{C}^\infty(D)$ の部分空間として，上の意味で代表元となる関数からなる空間を

$${}^0\mathcal{C}^\infty(D) := \left\{ f \in \mathcal{C}^\infty(D) : \int_D f(z)m(dz) = 0 \right\}$$

とする．そして， $f \in {}^0\mathcal{C}^\infty(D)$ に対して $\langle \widetilde{H}, f \rangle := \langle \widetilde{H}, [f] \rangle^\sim$ と定義することにする．以上の設定より，Gauss 乱数の族 $\{\langle \widetilde{H}, f \rangle : f \in {}^0\mathcal{C}^\infty(D)\}$ があって，その共分散は Neumann 境界 Green 関数 \widetilde{G} を用いて

$$\mathbb{E}^{\text{GFF}} \left[\langle \widetilde{H}, f \rangle \langle \widetilde{H}, g \rangle \right] = \int_{D \times D} f(z) \widetilde{G}(z, w) g(w) m(dz) m(dw), \quad f, g \in {}^0\mathcal{C}^\infty(D) \quad (2.26)$$

と表現されることになる。Dirichlet 境界 Gauss 型自由場と同様に，略記法

$$\langle \tilde{H}, f \rangle = \int_D \tilde{H}(z) f(z) m(dz), \quad f \in {}^0\mathcal{C}^\infty(D) \quad (2.27)$$

を導入し，

$$\text{Cov}[\tilde{H}(z), \tilde{H}(w)] := \mathbb{E}^{\text{GFF}}[\tilde{H}(z)\tilde{H}(w)] = \tilde{G}(z, w), \quad z, w \in D, \quad z \neq w \quad (2.28)$$

と書いて，この Neumann 境界条件下の Green 関数を自由境界 Gauss 型自由場の相関核と見なすことにする。

例 2.19 D が上半平面 $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z > 0\}$ であるとき，自由境界 Green 関数は次式で与えられる：

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{\mathbb{H}}(z, w) &= -\log |z - \bar{w}| - \log |z - w| \\ &= -\text{Re } \log(z - \bar{w}) - \text{Re } \log(z - w), \quad z, w \in \mathbb{H}, \quad z \neq w. \end{aligned}$$

自由境界 Gauss 型自由場に対しても，以下では単連結領域 $D \subsetneq \mathbb{C}$ を上半平面 \mathbb{H} で代表させることにする。単連結領域 $D' \subsetneq \mathbb{C}$ は共形変換 $\varphi : D' \rightarrow \mathbb{H}$ によって指定し，この変換を上付き添え字として，

$$\tilde{G}^\varphi(z, w) := \tilde{G}_{\varphi^{-1}(\mathbb{H})}(z, w) = \tilde{G}_{\mathbb{H}}(\varphi(z), \varphi(w)) \quad (2.29)$$

と記すことにする。例 2.19 より，

$$\begin{aligned} \tilde{G}^\varphi(z, w) &= -\log |\varphi(z) - \overline{\varphi(w)}| - \log |\varphi(z) - \varphi(w)| \\ &= -\text{Re } \log(\varphi(z) - \overline{\varphi(w)}) - \text{Re } \log(\varphi(z) - \varphi(w)) \end{aligned} \quad (2.30)$$

である。

3 多重 SLE による Green 関数の変換則

3.1 多重 SLE による Gauss 型自由場の変換

多重 SLE はブラウン運動で駆動されるので，それが属する確率空間はブラウン運動の確率空間であるが，1 節ではそれを SLE の確率空間であると見なして， $(\Omega^{\text{SLE}}, \mathcal{F}^{\text{SLE}}, (\mathcal{F}^{\text{SLE}})_{\geq 0}, \mathbb{P}^{\text{SLE}})$ と書くことにした。ここでは，これと Gauss 型自由場の確率空間 $(\Omega^{\text{GFF}}, \mathcal{F}^{\text{GFF}}, \mathbb{P}^{\text{GFF}})$ とを結合させたものとして

$$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = (\Omega^{\text{GFF}} \times \Omega^{\text{SLE}}, \mathcal{F}^{\text{GFF}} \vee \mathcal{F}^{\text{SLE}}, \mathbb{P}^{\text{GFF}} \otimes \mathbb{P}^{\text{SLE}}).$$

を考えることにする。多重 SLE と Gauss 型自由場は以後， $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ に拡張して考えることにし，多重 SLE は $\mathcal{F}_t = \{\emptyset, \Omega^{\text{GFF}}\} \vee \mathcal{F}_t^{\text{SLE}}$ で定義されるフィルトレーション $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ に適合しているものとみなす。

$(B_t^{(i)})_{t \geq 0}, i = 1, \dots, N$ を互いに独立な 1 次元標準ブラウン運動とし， $(\mathbf{X}_t)_{t \geq 0} \in \mathbb{R}^N$ は次の形の確率微分方程式を満たすものとする：

$$dX_t^{(i)} = \sqrt{\kappa} dB_t^{(i)} + F^{(i)}(\mathbf{X}_t) dt, \quad t \geq 0, \quad i = 1, \dots, N. \quad (3.1)$$

ただし，

$$X_0^{(1)} < X_0^{(2)} < \dots < X_0^{(N)} \quad (3.2)$$

と仮定する。ここで， $F^{(i)}, i = 1, \dots, N$ は時刻 t には陽には依存しないものと仮定するが，1.3 節で述べたように，その関数形は未定とする。

この $(X_t)_{t \geq 0}$ を駆動過程とする多重 SLE (1.21) が, 初期条件 $g_0(z) = z \in \mathbb{H}$ の下で唯一の解 $(g_t)_{t \geq 0}$ をもつものと仮定する. さらに, この解は \mathbb{R} 上に拡張することができて

$$X_t^{(i)} = g_t(\eta_t^{(i)}) \quad (3.3)$$

を満たす $\eta_t^{(i)}, i = 1, \dots, N, t \geq 0$ が得られるものとし,

$$\eta^{(i)} := \{\eta_t^{(i)} : t \geq 0\}, \quad i = 1, \dots, N$$

と定義する. これらが, $\eta_0^{(i)} = X_0^{(i)} \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, N$ を端点とする \bar{H} 内の N 本の截線を成す場合を考えたい. しかし, これらが 1.1 節で述べた多重截線の条件 (C'1a)-(C'3) を一般に満たすことは期待できない. そこで, 以下では各 $t \geq 0$ に対して,

$$\mathbb{H}_t^\eta := \mathbb{H} \setminus \bigcup_{i=1}^N \eta^{(i)}(0, t] \text{ の非有界成分}, \quad t > 0 \quad (3.4)$$

と定義することにする. すると, g_t は \mathbb{H}_t^η を \mathbb{H} に写す共形変換であるので, これを $g_{\mathbb{H}_t^\eta}$ と書くことにする. まとめると, 以下が成立するものとする:

$$\begin{aligned} \frac{dg_{\mathbb{H}_t^\eta}(z)}{dt} &= \sum_{i=1}^N \frac{2}{g_{\mathbb{H}_t^\eta}(z) - X_t^{(i)}}, \quad t \geq 0, \\ X_t^{(i)} = g_{\mathbb{H}_t^\eta}(\eta_t^{(i)}) &:= \lim_{\substack{z \rightarrow \eta_t^{(i)}, \\ z \in \mathbb{H}_t^\eta}} g_{\mathbb{H}_t^\eta}(z), \quad i = 1, \dots, N, \quad t \geq 0, \\ g_{\mathbb{H}_t^\eta} : \text{共形変換} : \mathbb{H}_t^\eta &\rightarrow \mathbb{H}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Gauss 型自由場の共形不変性より, (2.22) が成り立つ. ここでは, 共形変換の時間発展である多重 SLE (3.5) により Gauss 型自由場が時間の経過とともに変換されていく過程を考えることにする. (2.23), (2.29) の記法により, Dirichlet 境界 Green 関数と自由境界 Green 関数に対して,

$$G^{g_{\mathbb{H}_t^\eta}}(z, w) := G_{\mathbb{H}}(g_{\mathbb{H}_t^\eta}(z), g_{\mathbb{H}_t^\eta}(w)), \quad \tilde{G}^{g_{\mathbb{H}_t^\eta}}(z, w) := \tilde{G}_{\mathbb{H}}(g_{\mathbb{H}_t^\eta}(z), g_{\mathbb{H}_t^\eta}(w)), \quad t \geq 0$$

と書くことにする. また, これらを Green 関数としてもつ Dirichlet 境界 Gauss 型自由場と自由境界 Gauss 型自由場をそれぞれ, $H \circ g_{\mathbb{H}_t^\eta}(\cdot)$ と $\tilde{H} \circ g_{\mathbb{H}_t^\eta}(\cdot)$ というように記すことにする. 以下を証明することができる.

命題 3.1 $t \geq 0$ において, 次の方程式が成り立つ.

$$\frac{dG^{g_{\mathbb{H}_t^\eta}}(z, w)}{dt} = -4 \sum_{i=1}^N \operatorname{Im} \frac{1}{(g_{\mathbb{H}_t^\eta}(z) - X_t^{(i)})} \operatorname{Im} \frac{1}{(g_{\mathbb{H}_t^\eta}(w) - X_t^{(i)})}, \quad (3.6)$$

$$\frac{d\tilde{G}^{g_{\mathbb{H}_t^\eta}}(z, w)}{dt} = 4 \sum_{i=1}^N \operatorname{Re} \frac{1}{(g_{\mathbb{H}_t^\eta}(z) - X_t^{(i)})} \operatorname{Re} \frac{1}{(g_{\mathbb{H}_t^\eta}(w) - X_t^{(i)})}, \quad z, w \in \mathbb{H}_t^\eta. \quad (3.7)$$

証明 (2.24) より

$$\begin{aligned} \frac{dG^{g_{\mathbb{H}_t^\eta}}(z, w)}{dt} &= \frac{d}{dt} \left[\operatorname{Re} \log(g_{\mathbb{H}_t^\eta}(z) - \overline{g_{\mathbb{H}_t^\eta}(w)}) - \operatorname{Re} \log(g_{\mathbb{H}_t^\eta}(z) - g_{\mathbb{H}_t^\eta}(w)) \right] \\ &= \operatorname{Re} \frac{1}{g_{\mathbb{H}_t^\eta}(z) - \overline{g_{\mathbb{H}_t^\eta}(w)}} \left(\frac{dg_{\mathbb{H}_t^\eta}(z)}{dt} - \frac{d\overline{g_{\mathbb{H}_t^\eta}(w)}}{dt} \right) \\ &\quad - \operatorname{Re} \frac{1}{g_{\mathbb{H}_t^\eta}(z) - g_{\mathbb{H}_t^\eta}(w)} \left(\frac{dg_{\mathbb{H}_t^\eta}(z)}{dt} - \frac{dg_{\mathbb{H}_t^\eta}(w)}{dt} \right), \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

多重 SLE (3.5) より,

$$\begin{aligned} \frac{dg_{\mathbb{H}_t^\eta}(z)}{dt} - \frac{d\overline{g_{\mathbb{H}_t^\eta}(w)}}{dt} &= \sum_{i=1}^N \frac{2}{g_{\mathbb{H}_t^\eta}(z) - X_t^{(i)}} - \sum_{i=1}^N \frac{2}{g_{\mathbb{H}_t^\eta}(w) - X_t^{(i)}} \\ &= -2(g_{\mathbb{H}_t^\eta}(z) - \overline{g_{\mathbb{H}_t^\eta}(w)}) \sum_{i=1}^N \frac{1}{(g_{\mathbb{H}_t^\eta}(z) - X_t^{(i)})(\overline{g_{\mathbb{H}_t^\eta}(w)} - X_t^{(i)})} \end{aligned}$$

であるから, これは次のように書き直せる.

$$\begin{aligned} \frac{dG^{g_{\mathbb{H}_t^\eta}}(z, w)}{dt} &= -2 \sum_{i=1}^N \operatorname{Re} \frac{1}{(g_{\mathbb{H}_t^\eta}(z) - X_t^{(i)})(\overline{g_{\mathbb{H}_t^\eta}(w)} - X_t^{(i)})} \\ &\quad + 2 \sum_{i=1}^N \operatorname{Re} \frac{1}{(g_{\mathbb{H}_t^\eta}(z) - X_t^{(i)})(g_{\mathbb{H}_t^\eta}(w) - X_t^{(i)})}, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

一般に $\zeta, w \in \mathbb{C}$ に対して,

$$\operatorname{Re} \zeta \bar{w} - \operatorname{Re} \zeta w = 2 \operatorname{Im} \zeta \operatorname{Im} w$$

が成り立つので, (3.6) が証明される.

同様に, (2.30) より

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{G}^{g_{\mathbb{H}_t^\eta}}(z, w)}{dt} &= -\frac{d}{dt} \left[\operatorname{Re} \log(g_{\mathbb{H}_t^\eta}(z) - \overline{g_{\mathbb{H}_t^\eta}(w)}) + \operatorname{Re} \log(g_{\mathbb{H}_t^\eta}(z) - g_{\mathbb{H}_t^\eta}(w)) \right] \\ &= -\operatorname{Re} \frac{1}{g_{\mathbb{H}_t^\eta}(z) - \overline{g_{\mathbb{H}_t^\eta}(w)}} \left(\frac{dg_{\mathbb{H}_t^\eta}(z)}{dt} - \frac{d\overline{g_{\mathbb{H}_t^\eta}(w)}}{dt} \right) \\ &\quad - \operatorname{Re} \frac{1}{g_{\mathbb{H}_t^\eta}(z) - g_{\mathbb{H}_t^\eta}(w)} \left(\frac{dg_{\mathbb{H}_t^\eta}(z)}{dt} - \frac{dg_{\mathbb{H}_t^\eta}(w)}{dt} \right), \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

これに多重 SLE (3.5) を適用すると,

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{G}^{g_{\mathbb{H}_t^\eta}}(z, w)}{dt} &= 2 \sum_{i=1}^N \operatorname{Re} \frac{1}{(g_{\mathbb{H}_t^\eta}(z) - X_t^{(i)})(\overline{g_{\mathbb{H}_t^\eta}(w)} - X_t^{(i)})} \\ &\quad + 2 \sum_{i=1}^N \operatorname{Re} \frac{1}{(g_{\mathbb{H}_t^\eta}(z) - X_t^{(i)})(g_{\mathbb{H}_t^\eta}(w) - X_t^{(i)})}, \quad t \geq 0 \end{aligned}$$

となる. 一般に $\zeta, w \in \mathbb{C}$ に対して,

$$\operatorname{Re} \zeta \bar{w} + \operatorname{Re} \zeta w = 2 \operatorname{Re} \zeta \operatorname{Re} w$$

が成り立つので, (3.7) が証明される. ■

ある領域 $A \subset \mathbb{H}$ があって, $f \in C_c^\infty(\mathbb{H})$ の台 $\operatorname{supp}(f)$ が, $\operatorname{supp}(f) \subset A$ を満たすものとする.

$$\begin{aligned} E^{g_{\mathbb{H}_t^\eta}}(f) &:= \int_{A \times A} f(z) G^{g_{\mathbb{H}_t^\eta}}(z, w) f(w) m(dz) m(dw), \\ \tilde{E}^{g_{\mathbb{H}_t^\eta}}(f) &:= \int_{A \times A} f(z) \tilde{G}^{g_{\mathbb{H}_t^\eta}}(z, w) f(w) m(dz) m(dw) \end{aligned} \tag{3.8}$$

と定める。命題 3.1 より、次が得られる。

$$\begin{aligned}\frac{dE^{g_{\mathbb{H}_t^\eta}}(f)}{dt} &= -\sum_{i=1}^N \left(\int_A \operatorname{Im} \frac{2}{g_{\mathbb{H}_t^\eta}(z) - X_t^{(i)}} f(z) m(dz) \right)^2, \\ \frac{d\tilde{E}^{g_{\mathbb{H}_t^\eta}}(f)}{dt} &= \sum_{i=1}^N \left(\int_A \operatorname{Re} \frac{2}{g_{\mathbb{H}_t^\eta}(z) - X_t^{(i)}} f(z) m(dz) \right)^2, \quad f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{H}), \quad \operatorname{supp}(f) \subset A \subset \mathbb{H}\end{aligned}\quad (3.9)$$

よって、 $E_A^{g_{\mathbb{H}_t^\eta}}(f)$ は t の非増加関数であり、 $\tilde{E}_A^{g_{\mathbb{H}_t^\eta}}(f)$ は t の非減少関数である。

3.2 後進多重 SLE

上で考えた多重 SLE の駆動過程 $(\mathbf{X}_t)_{t \geq 0}$ に対して、ある時刻 $T \in (0, \infty)$ を定めて、

$$Y_{T;t}^{(i)} := X_{T-t}^{(i)}, \quad t \in [0, T], \quad i = 1, \dots, N \quad (3.10)$$

と定義する。 $(\mathbf{X}_t)_{t \geq 0}$ が (3.1) の形の確率微分方程式を満たすとすると、 $(\mathbf{Y}_{T;t})_{t \in [0, T]}$ は次の確率微分方程式を満たすことになる：

$$dY_{T;t}^{(i)} = \sqrt{\kappa} dB_t^{(i)} - F^{(i)}(\mathbf{Y}_{T;t}) dt, \quad 0 \leq t \leq T, \quad i = 1, \dots, N. \quad (3.11)$$

ただし、ブラウン運動の時間反転対称性を用いた。多重 SLE の時間反転方程式を次式で定義することにする。

$$\begin{aligned}\frac{df_{\mathbb{H}_t^\eta}^T(z)}{dt} &= -\sum_{i=1}^N \frac{2}{f_{\mathbb{H}_t^\eta}^T(z) - Y_{T;t}^{(i)}}, \quad 0 \leq t \leq T, \\ f_{\mathbb{H}_0^\eta}^T(z) &= f_{\mathbb{H}}^T(z) = z \in \mathbb{H}.\end{aligned}\quad (3.12)$$

共形変換 $g_T: \mathbb{H}_T^\eta \rightarrow \mathbb{H}$ の逆変換を

$$g_T^{-1}: \text{共形変換 } \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}_T^\eta$$

と書くことにする。すると、次を証明することができる。

補題 3.2 等式

$$f_{\mathbb{H}_T^\eta}^T(z) = g_{\mathbb{H}_T^\eta}^{-1}(z), \quad z \in \mathbb{H}$$

が成り立つ。

証明 $u_t^T(z) := f_{\mathbb{H}_{T-t}^\eta}^T(z)$, $z \in \mathbb{H}, t \in [0, T]$ とおくと、(3.12) より、これは

$$\begin{aligned}\frac{du_t^T(z)}{dt} &= \sum_{i=1}^N \frac{2}{u_t^T(z) - X_t^{(i)}}, \quad 0 \leq t \leq T, \\ u_0^T(z) &= f_{\mathbb{H}_T^\eta}^T(z), \quad z \in \mathbb{H}\end{aligned}$$

を満たすことがわかる。ただしここで、(3.10) より

$$Y_{T;T-t}^{(i)} = X_t^{(i)}, \quad t \in [0, T], \quad i = 1, \dots, N$$

であることを用いた。この第1式は多重 SLE $(g_{\mathbb{H}_t^\eta}(z))_{t \geq 0}$ が満たす方程式 (3.5) に等しい。ただし第2式より、それを恒等変換 $(g_{\mathbb{H}_0^\eta}(z) = g_{\mathbb{H}}(z) = z \in \mathbb{H})$ を初期値とするのではなく、 $f_{\mathbb{H}_T^\eta}^T(z)$ を初期値として解く状況であることがわかる。多重 SLE (3.5) の解の一意性を仮定したので、

$$u_t^T(z) = g_{\mathbb{H}_t^\eta}(f_{\mathbb{H}_T^\eta}^T(z))$$

が結論される。この式で特に $t = T$ とおくと、 $u_T^T(z) = g_{\mathbb{H}_T^\eta}(f_{\mathbb{H}_T^\eta}^T(z))$ を得る。他方、本証明の冒頭での $u_t^T(z)$ の定義より、 $u_T^T(z) = f_{\mathbb{H}_0^\eta}^T(z) = f_{\mathbb{H}}^T(z) = z$ である。従って、

$$g_{\mathbb{H}_T^\eta}(f_{\mathbb{H}_T^\eta}^T(z)) = z \in \mathbb{H}$$

が成立するので、補題が証明される。■

(3.12) を、(時間区間 $[0, T]$ での) 後進多重 Schramm–Loewner 方程式 (backward multiple Schramm–Loewner equation), その解 $(f_{\mathbb{H}_t^\eta}^T(z))_{t \in [0, T]}$ を (時間区間 $[0, T]$ での) 後進多重 Schramm–Loewner 発展 (backward multiple Schramm–Loewner evolution) とよび、ともに後進多重 SLE と略称することにする [34, 40].

3.3 後進多重 SLE による Green 関数の変換則

命題 3.1 の後進版として、次が得られる。

命題 3.3 任意の $T \in (0, \infty)$ を固定する。 $t \in [0, T]$ において、次の方程式が成り立つ。

$$\frac{dG_{\mathbb{H}_t^\eta}^{f_{\mathbb{H}_T^\eta}^T}(z, w)}{dt} = 4 \sum_{i=1}^N \operatorname{Im} \frac{1}{(f_{\mathbb{H}_t^\eta}^T(z) - Y_{T;t}^{(i)})} \operatorname{Im} \frac{1}{(f_{\mathbb{H}_t^\eta}^T(w) - Y_{T;t}^{(i)})}, \quad (3.13)$$

$$\frac{d\tilde{G}_{\mathbb{H}_t^\eta}^{f_{\mathbb{H}_T^\eta}^T}(z, w)}{dt} = -4 \sum_{i=1}^N \operatorname{Re} \frac{1}{(f_{\mathbb{H}_t^\eta}^T(z) - Y_{T;t}^{(i)})} \operatorname{Re} \frac{1}{(f_{\mathbb{H}_t^\eta}^T(w) - Y_{T;t}^{(i)})}, \quad z, w \in \mathbb{H}. \quad (3.14)$$

$f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{H})$ の台が s , $\operatorname{supp}(f) \subset \exists A \subset \mathbb{H}$ であるとき、

$$\begin{aligned} E_{\mathbb{H}_t^\eta}^{f_{\mathbb{H}_T^\eta}^T}(f) &:= \int_{A \times A} f(z) G_{\mathbb{H}_t^\eta}^{f_{\mathbb{H}_T^\eta}^T}(z, w) f(w) m(dz) m(dw), \\ \tilde{E}_{\mathbb{H}_t^\eta}^{f_{\mathbb{H}_T^\eta}^T}(f) &:= \int_{A \times A} f(z) \tilde{G}_{\mathbb{H}_t^\eta}^{f_{\mathbb{H}_T^\eta}^T}(z, w) f(w) m(dz) m(dw) \end{aligned} \quad (3.15)$$

と定めると命題 3.3 より、次が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{dE_{\mathbb{H}_t^\eta}^{f_{\mathbb{H}_T^\eta}^T}(f)}{dt} &= \sum_{i=1}^N \left(\int_A \operatorname{Im} \frac{2}{f_{\mathbb{H}_t^\eta}^T(z) - X_t^{(i)}} f(z) m(dz) \right)^2, \\ \frac{d\tilde{E}_{\mathbb{H}_t^\eta}^{f_{\mathbb{H}_T^\eta}^T}(f)}{dt} &= - \sum_{i=1}^N \left(\int_A \operatorname{Re} \frac{2}{f_{\mathbb{H}_t^\eta}^T(z) - X_t^{(i)}} f(z) m(dz) \right)^2, \quad f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{H}), \quad \operatorname{supp}(f) \subset A \subset \mathbb{H} \end{aligned} \quad (3.16)$$

よって、 $E_A^{f_{\mathbb{H}_T^\eta}^T}(f)$ は t の非減少関数であり、 $\tilde{E}_A^{f_{\mathbb{H}_T^\eta}^T}(f)$ は t の非増加関数である。 $G_{\mathbb{H}_t^\eta}^{f_{\mathbb{H}_T^\eta}^T}$ を Green 関数としてもつ Dirichlet 境界 Gauss 型自由場を $H \circ f_{\mathbb{H}_t^\eta}^T(\cdot)$ と書き、 $\tilde{G}_{\mathbb{H}_t^\eta}^{f_{\mathbb{H}_T^\eta}^T}$ を Green 関数としてもつ自由境界 Gauss 型自由場を $\tilde{H} \circ f_{\mathbb{H}_t^\eta}^T(\cdot)$ と記すことにする。

4 2次元 Liouville 量子重力

$D \subsetneq \mathbb{C}$ を単連結領域とし、これは C^∞ -級の滑らかな境界 ∂D をもつものとする。2節で定義した Dirichlet 境界条件の下での Gauss 型自由場 $((\Omega^{\text{GFF}}, \mathcal{F}^{\text{GFF}}, \mathbb{P}^{\text{GFF}}), H) = ((\mathcal{E}(D), \Sigma_{\mathcal{E}(D)}, \mathbf{P}), H)$ を考える。まず、この超関数に値をとる場 $\{H(z) : z \in D\}$ の近似として、円周平均された確率場 $\{H_\varepsilon(z), z \in D\}$ を導入する。

4.1 Gauss 型自由場の円周平均

まず、Dirichlet 境界条件の下での Gauss 型自由場に対して、(2.20)、あるいは (2.21) で表されたように、共分散核を与える Green 関数を考える。 $z \in D$ を固定して、境界 ∂D 上の関数として $-\log|\cdot - z|$ を考え、これを D 上の調和関数に拡張したものを $\widehat{G}^z(\cdot)$ と書くことにする。このとき、Green 関数は

$$G(z, w) := -\log|w - z| - \widehat{G}^z(w), \quad z, w \in D, z \neq w \quad (4.1)$$

で与えられる。この定義より $w \rightarrow \partial D$ とすると $G(z, w) \rightarrow 0$ となること、すなわち Dirichlet 境界条件を満たすことは明らかである。各 $z \in D$ に対して Green 関数を $w \in D$ の関数とみると、これは Dirichlet 境界条件の下での Poisson 方程式

$$\Delta G(z, \cdot) = -2\pi\delta(\cdot - z) \quad (4.2)$$

の解である。また、 $G(z, w) \geq 0, \forall z, w \in D$ である。単位円板を $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ と記す。Riemann の写像定理より、各 $z \in D$ に対して $\phi(z) = 0$ となる共形変換 $\phi : D \rightarrow \mathbb{D}$ が存在するが、

$$C(z; D) := |\phi'(z)|^{-1}$$

を共形半径 (conformal radius) という。 $w \rightarrow z$ で

$$G(z, w) = -\log|w - z| + \log C(z; D) + o(1) \quad (4.3)$$

が成り立つ。

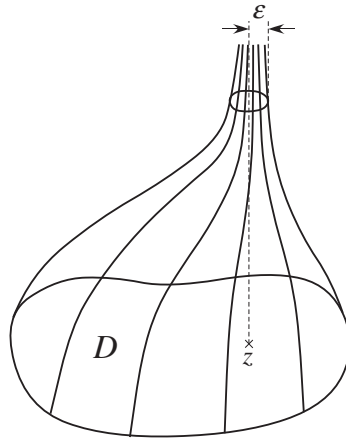


図 4: Green 関数の近似 $\xi_\varepsilon^z(w)$ の模式図。 $w \in D$ の関数としてみたとき、Green 関数 $G(z, w)$ は $w \rightarrow z$ で対数発散する。しかし、この近似関数 $\xi_\varepsilon^z(w)$ は頭打ちして、 z を中心とした半径 ε の円板内 $B_\varepsilon(z)$ では平坦化する。

$z \in D, \varepsilon > 0$ とする. ∂D 上の関数 $-\log \max\{\varepsilon, |\cdot - z|\}$ を D 上の調和関数として拡張したものを $\widehat{G}_\varepsilon^z(\cdot)$ と書き, (4.1) の近似 (短距離遮断) として

$$\xi_\varepsilon^z(w) := -\log \max\{\varepsilon, |w - z|\} - \widehat{G}_\varepsilon^z(w), \quad z, w \in D, \quad z \neq w \quad (4.4)$$

を導入する. (図 4 参照.) これは w の連続関数ではあるが, \max の演算があるので微分不可能である. よって, $C_c^\infty(D)$ には入らないが, その完備化空間 $W(D)$ には入る. (4.2) に対応して

$$\Delta \xi_\varepsilon^z(\cdot) = -2\pi \rho_\varepsilon^z(\cdot) \quad (4.5)$$

と書くことにする. z を中心とした半径 ε の円板を $B_\varepsilon(z)$ を書き, その円周を $\partial B_\varepsilon(z)$ と記すことにする. $B_\varepsilon(z) \cap D \neq \emptyset$ と仮定する. $w \notin B_\varepsilon(z)$ ならば, $\xi_\varepsilon^z(w) = G(z, w)$ であるので, $\rho_\varepsilon^z(w) = 0$ である. ρ_ε^z の台は $\partial B_\varepsilon(z)$ であり, そこでの規格化された一様測度を与えることになる. 次の関数を考える.

$$H_\varepsilon(z) := \langle H, \xi_\varepsilon^z \rangle_\nabla, \quad z \in D \quad (4.6)$$

(2.4) より, これは

$$\begin{aligned} H_\varepsilon(z) &= \frac{1}{2\pi} \langle H, -\Delta \xi_\varepsilon^z \rangle = \langle H, \rho_\varepsilon^z \rangle = \int_{\partial B_\varepsilon(z) \cap D} H(w) \rho_\varepsilon^z(w) m(dw) \\ &= \partial B_\varepsilon(z) \cap D \text{ 上の } H \text{ の平均} \end{aligned}$$

を与える.

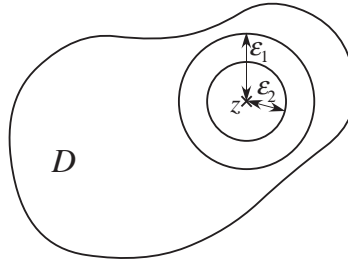


図 5: $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 > 0$ として, $z \in D$ を中心とした半径 ε_1 の円板 $B_{\varepsilon_1}(z)$ と, それの中に含まれる半径 ε_2 の同心円板 $B_{\varepsilon_2}(z)$ を考える.

$\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 > 0$ として, $z \in D$ において次の分散を計算することにする. 図 5 参照.

$$\text{Cov}[H_{\varepsilon_1}(z), H_{\varepsilon_2}(z)] = \mathbb{E}^{\text{GFF}} \left[\langle H, \xi_{\varepsilon_1}^z \rangle_\nabla \langle H, \xi_{\varepsilon_2}^z \rangle_\nabla \right] = \langle \xi_{\varepsilon_1}^z, \xi_{\varepsilon_2}^z \rangle_\nabla$$

上は (2.17) の公式そのものである. 部分積分を行うと,

$$\begin{aligned} \langle \xi_{\varepsilon_1}^z, \xi_{\varepsilon_2}^z \rangle_\nabla &= \frac{1}{2\pi} \int_D (\nabla \xi_{\varepsilon_1}^z)(w) \cdot (\nabla \xi_{\varepsilon_2}^z)(w) m(dw) \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_D (\Delta \xi_{\varepsilon_1}^z)(w) \xi_{\varepsilon_2}^z(w) m(dw) = \int_D \rho_{\varepsilon_1}^z(w) \xi_{\varepsilon_2}^z(w) m(dw) \end{aligned}$$

ここで, $\rho_{\varepsilon_1}^z$ の台は $\partial B_{\varepsilon_1}(z)$ である. よって, 上式は $\xi_{\varepsilon_2}^z(w)$ を $\partial B_{\varepsilon_1}(z) \cap D$ 上で積分することになる. $\xi_{\varepsilon_2}^z(w)$ は $G(z, w)$ に対して, $B_{\varepsilon_2}(z)$ 内を平坦化したものであったが, いま, $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2$ を仮定しているので, $\partial B_{\varepsilon_1}(z) \cap D$

上ではこの平坦化は影響がない。つまり、被積分関数の中の $\xi_{\varepsilon_2}^z(w)$ は $G(z, w)$ に置き換えてよいことになる。したがって、

$$\text{Cov}[H_{\varepsilon_1}(z), H_{\varepsilon_2}(z)] = \int_D \rho_{\varepsilon_1}^z(w) G(w, z) m(dw) = \int_D \left(-\frac{1}{2\pi} \Delta \xi_{\varepsilon_1}^z \right) (w) G(z, w) m(dw)$$

となる。得られた式において、再び部分積分を (先ほどとは反対の方向に 2 回) 行くと、これは

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_D (\nabla \xi_{\varepsilon_1}^z)(w) \cdot (\nabla G(z, \cdot))(w) m(dw) &= \int_D \xi_{\varepsilon_1}^z(w) \left(-\frac{1}{2\pi} \Delta G(z, \cdot) \right) (w) m(dw) \\ &= \int_D \xi_{\varepsilon_1}^z(w) \delta(w - z) m(dw) = \xi_{\varepsilon_1}^z(z) \end{aligned}$$

と書き直せることになる。ここで (4.3) と (4.4) を用いると、 $\varepsilon_1 \downarrow 0$ において

$$\text{Cov}[H_{\varepsilon_1}(z), H_{\varepsilon_2}(z)] = -\log \varepsilon_1 + \log C(z; D) + o(1)$$

という評価が得られることになる。この結果は $\varepsilon_2 (\leq \varepsilon_1)$ には依存しない。特に $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$ とした場合を以下に補題として与えておくことにする。

補題 4.1 各 $z \in D$ に対して、 $H_\varepsilon(z)$ は平均 0 の Gauss 乱数であり、その分散は $\varepsilon \downarrow 0$ において、

$$\text{Var}[H_\varepsilon(z)] = \|\xi_\varepsilon^z\|_{\nabla}^2 = \log \left(\frac{C(z; D)}{\varepsilon} \right) + o(1) \quad (4.7)$$

と振舞う。

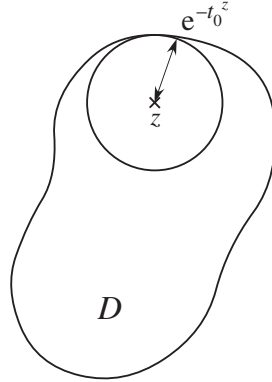


図 6: $t_0^z := \inf\{t > 0 : B_{e^{-t}}(z) \not\subset D\}$ とする。時刻 $e^{-t_0^z}$ を時間の起点とした 1 次元標準ブラウン運動 $(W_t^z)_{t \geq 0}$ を定義することができる。

補題 4.1 の主張をさらに発展させて、次のように述べることができる。(図 6 参照.)

命題 4.2 確率空間 $(\Omega^{\text{GFF}}, \mathcal{F}^{\text{GFF}}, \mathbb{P}^{\text{GFF}})$ の下、各 $z \in D$ に対して、 $(H_{e^{-t}}(z))_{t \geq 0}$ で生成されるフィルトレーションを $(\mathcal{F}_t^{\text{GFF}})_{t \geq 0}$ と書くことにする。 $z \in D$ に対して、

$$t_0^z := \inf\{t : B_{e^{-t}}(z) \subset D\}$$

とする。このとき、

$$W_t^z := H_{e^{-(t+t_0^z)}}(z) - H_{e^{-t_0^z}}(z)$$

とすると、 \mathbb{P}^{GFF} の下

$$(W_t^z)_{t \geq 0} \stackrel{(\text{law})}{=} (B_t)_{t \geq 0}$$

である。ただし、 $(B_t)_{t \geq 0}$ は $(\mathcal{F}_t^{\text{GFF}})$ -1 次元標準ブラウン運動を表す。

4.2 指数型ランダム測度の収束定理

本節では次の定理を証明したい。

定理 4.3 (Duplantier–Sheffield [22]) $D \subsetneq \mathbb{C}$ を単連結領域とし, Dirichlet 境界条件下の Gauss 型自由場 $((\Omega^{\text{GFF}}, \mathcal{F}^{\text{GFF}}, \mathbb{P}^{\text{GFF}}), H)$ に対して, H の $\partial B_\varepsilon(\cdot)$ 上の円周平均を $H_\varepsilon(\cdot)$ とする. 径数 $\gamma \in [0, 2)$ を定めて, D 上のランダムな測度を

$$\mu_\varepsilon^H = \mu_\varepsilon^H(dz) := \varepsilon^{\gamma^2/2} e^{\gamma H_\varepsilon(z)} m(dz) \quad (4.8)$$

と定義する. $\varepsilon = 2^{-k}$ として $k \rightarrow \infty$ の極限をとると, μ_ε^H は \mathbb{P}^{GFF} の下, 確率 1 で D 上のある測度に弱収束する. これを μ^H と書くことにする. すなわち,

$$\mu_{2^{-k}}^H \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{\text{弱収束}} \mu^H, \quad \mathbb{P}^{\text{GFF}}\text{-a.s.}$$

注 4.4 まず, μ_ε^H の定義式 (4.8) になぜ因子 $e^{\gamma^2/2}$ が必要であるかを見ておくことにする. 円周近似 H_ε の定義式 (4.6) と Bochner–Minlos の定理の書き換えである (2.16) より,

$$\mathbb{E}^{\text{GFF}} \left[e^{\gamma H_\varepsilon(z)} \right] = \mathbb{E}^{\text{GFF}} \left[e^{\gamma \langle H, \xi_\varepsilon^z \rangle_\nabla} \right] = \exp \left(\frac{\gamma^2}{2} \|\xi_\varepsilon^z\|_\nabla^2 \right)$$

であることがわかる. ここで, $\|\xi_\varepsilon^z\|_\nabla^2$ に対する補題 4.1 の評価を用いると, $\varepsilon \downarrow 0$ で

$$\mathbb{E}^{\text{GFF}} \left[e^{\gamma H_\varepsilon(z)} \right] \asymp \left(\frac{C(z; D)}{\varepsilon} \right)^{\gamma^2/2} \sim \varepsilon^{-\gamma^2/2} \uparrow \infty$$

となってしまうことがわかる. しかし, 因子 $\varepsilon^{\gamma^2/2}$ を $e^{\gamma H_\varepsilon(z)}$ に掛けておくと, 期待値の収束

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \mathbb{E}^{\text{GFF}} \left[\varepsilon^{\gamma^2/2} e^{\gamma H_\varepsilon(z)} \right] = C(z; D)^{\gamma^2/2} < \infty$$

が保証されることになるのである.

まず, 次の補題を証明する.

補題 4.5 正方領域を S と書き, その閉包を \bar{S} とする. $\bar{S} \subset D$ であるようなすべての S に対して, $\mathbb{E}^{\text{GFF}} [|\mu_{2^{-k}}^H(S) - \mu_{2^{-k-1}}^H(S)|]$ が $k \rightarrow \infty$ に対して指数関数的に 0 に収束するならば, 定理 4.3 が成立する.

証明 正の定数 $a, b > 0$ があって

$$\mathbb{E}^{\text{GFF}} \left[\left| \mu_{2^{-k}}^H(S) - \mu_{2^{-k-1}}^H(S) \right| \right] \leq a e^{-bk}, \quad k \rightarrow \infty \quad (4.9)$$

であるならば,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mu_{2^{-k}}^H(S) < \infty, \quad \mathbb{P}^{\text{GFF}}\text{-a.s.} \quad (4.10)$$

が結論されることを証明すればよい. $b' \in (0, b)$ とすると,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{\text{GFF}} \left[\left| \mu_{2^{-k}}^H(S) - \mu_{2^{-k-1}}^H(S) \right| \right] &= \int_0^\infty x \mathbb{P}^{\text{GFF}} \left[\left| \mu_{2^{-k}}^H(S) - \mu_{2^{-k-1}}^H(S) \right| \in dx \right] \\ &= \int_0^{a e^{-b'k}} x \mathbb{P}^{\text{GFF}} \left[\left| \mu_{2^{-k}}^H(S) - \mu_{2^{-k-1}}^H(S) \right| \in dx \right] + \int_{a e^{-b'k}}^\infty x \mathbb{P}^{\text{GFF}} \left[\left| \mu_{2^{-k}}^H(S) - \mu_{2^{-k-1}}^H(S) \right| \in dx \right] \\ &\geq \int_{a e^{-b'k}}^\infty x \mathbb{P}^{\text{GFF}} \left[\left| \mu_{2^{-k}}^H(S) - \mu_{2^{-k-1}}^H(S) \right| \in dx \right] \geq a e^{-b'k} \times \mathbb{P}^{\text{GFF}} \left[\left| \mu_{2^{-k}}^H(S) - \mu_{2^{-k-1}}^H(S) \right| \geq a e^{-b'k} \right]. \end{aligned}$$

これを (4.9) と合わせると,

$$\mathbb{P}^{\text{GFF}} \left[\left| \mu_{2^{-k}}^H(S) - \mu_{2^{-k-1}}^H(S) \right| \geq ae^{-b'k} \right] \leq ae^{-(b-b')k}$$

が得られる. これは

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}^{\text{GFF}} \left[\left| \mu_{2^{-k}}^H(S) - \mu_{2^{-k-1}}^H(S) \right| \geq ae^{-b'k} \right] < \infty$$

を意味する. したがって, **Borel–Cantelli の補題**より, ある k_0 があって $k \geq k_0$ では

$$\left| \mu_{2^{-k}}^H(S) - \mu_{2^{-k-1}}^H(S) \right| < ae^{-b'k}, \quad \mathbb{P}^{\text{GFF}}\text{-a.s.}$$

であることが結論される. よって (4.10) が導かれるので, 補題は証明されたことになる. ■

それでは, (4.9) を示すことにより, 定理 4.3 を証明することにする.

定理 4.3 の証明 $S = [0, 1]^2 \subset D \subsetneq \mathbb{C}$ と仮定しても一般性は失われないであろう. また,

$$\overline{H_\varepsilon(z)} := \gamma H_\varepsilon(z) + \frac{\gamma^2}{2} \log \varepsilon$$

という略記を用いることにする. すると,

$$\mu_\varepsilon^H(S) = \int_{[0,1]^2} e^{\overline{H_\varepsilon(z)}} m(dz)$$

である. S 内の任意の 1 点 $z \in S$ をとる. $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ として $z = (z_1, z_2)$ と座標表示することにする. $k \in \mathbb{N}$ に対して, この点 z を含めるようにして間隔 2^{-k} の正方格子

$$S_k^z := \left\{ \zeta = (\zeta_1, \zeta_2) \in S : (\zeta_1 - z_1, \zeta_2 - z_2) \in (2^{-k}\mathbb{Z})^2 \right\}$$

を定める. 図 7 参照.

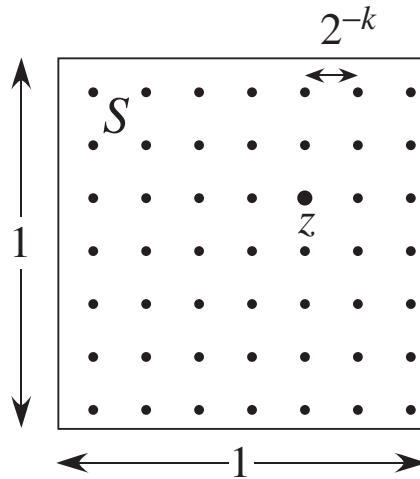


図 7: $k \in \mathbb{N}$ とする. 点 $z = (z_1, z_2)$ を含めるように $S = [0, 1]^2$ 内に定めた格子間隔 2^{-k} の正方格子 S_k^z .

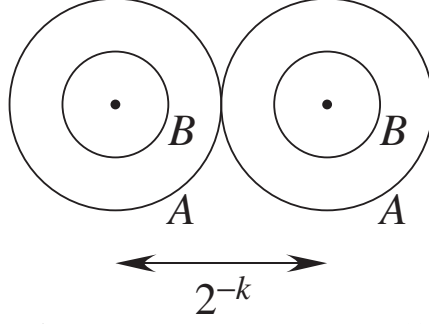


図 8: 格子間隔 2^{-k} の正方格子 S_k^z の各格子点 ζ を中心にして、格子間隔の半分である半径 2^{-k-1} の円を描き、その上での Gauss 型自由場の平均場の指数関数 $e^{\overline{H_{2^{-k-1}}(\zeta)}}$ を算術平均したものが A_k^z 。格子間隔の $1/4$ である半径 2^{-k-2} の円を描き、その上での Gauss 型自由場の平均場の指数関数 $e^{\overline{H_{2^{-k-2}}(\zeta)}}$ を算術平均したものが B_k^z 。

$k \rightarrow \infty$ で $\#S_k^z \asymp 2^{2k}$ である。

$$A_k^z := \frac{1}{2^{2k}} \sum_{\zeta \in S_k^z} e^{\overline{H_{2^{-k-1}}(\zeta)}}, \quad B_k^z := \frac{1}{2^{2k}} \sum_{\zeta \in S_k^z} e^{\overline{H_{2^{-k-2}}(\zeta)}}$$

とする。 A_k^z は格子間隔 2^{-k} の半分の半径の円周上での平均場 $\overline{H_{2^{-k-1}}(z)}$ の指数関数の算術平均（格子点すべての和をとり、格子点の総数 2^{2k} で割ったもの）である。 B_k^z は格子間隔 2^{-k} の $1/4$ の半径の円周上での Gauss 自由場の平均場 $\overline{H_{2^{-k-2}}(z)}$ の指数関数の算術平均である（図 8 参照）。したがって、

$$\mu_{2^{-k-1}}^H(S) = \int_{[0,1]^2} A_k^z m(dz), \quad \mu_{2^{-k-2}}^H(S) = \int_{[0,1]^2} B_k^z m(dz)$$

である。 $\alpha \in (\gamma, 2\gamma)$ として、格子点 S_k^z のランダムな部分格子を

$$\widetilde{S}_k^z = \left\{ \zeta \in S_k^z : H_\varepsilon(z) > \alpha \log \left(\frac{C(z; D)}{\varepsilon} \right), \text{ ただし, } \varepsilon = 2^{-k-1} \text{ とする} \right\}$$

と定義することにする。 $\varepsilon = 2^{-k-1}$ とすると、このランダム部分格子は $\mathcal{F}_{-\log \varepsilon}^{\text{GFF}}$ -可測である。この ε の値は A_k^z で考えている半径と合っているが、 B_k^z で考えている半径 (2^{-k-2}) からは、ずれていることに注意せよ。その上で、

$$\widetilde{A}_k^z := \frac{1}{2^{2k}} \sum_{\zeta \in S_k^z} \mathbf{1}_{(\zeta \in \widetilde{S}_k^z)} e^{\overline{H_{2^{-k-1}}(\zeta)}}, \quad \widetilde{B}_k^z := \frac{1}{2^{2k}} \sum_{\zeta \in S_k^z} \mathbf{1}_{(\zeta \in \widetilde{S}_k^z)} e^{\overline{H_{2^{-k-2}}(\zeta)}}$$

と定義する。ここで、 $\mathbf{1}_E$ は事象 E の指示関数であり、事象 E が起これば 1、そうでなければ 0 となるものである。三角不等式より、

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}^{\text{GFF}} \left[\left| \mu_{2^{-k}}^H(S) - \mu_{2^{-k-1}}^H(S) \right| \right] \\ & \leq \int_{[0,1]^2} \mathbb{E}^{\text{GFF}} \left[\widetilde{A}_k^z \right] m(dz) + \int_{[0,1]^2} \mathbb{E}^{\text{GFF}} \left[\widetilde{B}_k^z \right] m(dz) \\ & \quad + \int_{[0,1]^2} \mathbb{E}^{\text{GFF}} \left[\left| (A_k^z - \widetilde{A}_k^z) - (B_k^z - \widetilde{B}_k^z) \right| \right] m(dz) \end{aligned}$$

が成り立つ。この右辺の 3 項がいずれも $k \rightarrow \infty$ で指数関数的に 0 に収束することを示す。

(i) $k \rightarrow \infty$ で指数関数的に $\mathbb{E}^{\text{GFF}}[\widetilde{A}_k^z] \rightarrow 0$ となることを示す：補題 4.1 より，

$$H_\varepsilon(z) \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2),$$

ただし，

$$\sigma_\varepsilon^2 = \log\left(\frac{C(z; D)}{\varepsilon}\right), \quad \varepsilon = 2^{-k-1}$$

であるから，以下のように計算ができる．

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{\text{GFF}}\left[\mathbf{1}_{(\zeta \in \widetilde{S}_k^z)} e^{\overline{H_\varepsilon(\zeta)}}\right] &= \mathbb{E}^{\text{GFF}}\left[\mathbf{1}_{(\zeta \in \widetilde{S}_k^z)} e^{(\gamma^2/2)\log\varepsilon + \gamma H_\varepsilon(\zeta)}\right] = \varepsilon^{\gamma^2/2} \mathbb{E}^{\text{GFF}}\left[\mathbf{1}_{(\zeta \in \widetilde{S}_k^z)} e^{\gamma H_\varepsilon(\zeta)}\right] \\ &= \frac{\varepsilon^{\gamma^2/2}}{\sqrt{2\pi\sigma_\varepsilon}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{1}_{(x > \alpha\sigma_\varepsilon^2)} e^{\gamma x} e^{-x^2/(2\sigma_\varepsilon^2)} dx = \frac{\varepsilon^{\gamma^2/2}}{\sqrt{2\pi\sigma_\varepsilon}} \int_{\alpha\sigma_\varepsilon^2}^{\infty} e^{\gamma x} e^{-x^2/(2\sigma_\varepsilon^2)} dx \\ &= \frac{\varepsilon^{\gamma^2/2}}{\sqrt{2\pi\sigma_\varepsilon}} e^{\sigma_\varepsilon^2 \gamma^2/2} \int_{\alpha\sigma_\varepsilon^2}^{\infty} e^{-(x - \sigma_\varepsilon^2 \gamma)^2/(2\sigma_\varepsilon^2)} dx \end{aligned}$$

ここで，上の σ_ε の定義より， $e^{\sigma_\varepsilon^2 \gamma^2/2} = C(z, D)^{\gamma^2/2} \varepsilon^{-\gamma^2/2}$ である．積分変数を $x \rightarrow u := (x - \sigma_\varepsilon^2 \gamma)/(\sqrt{2}\sigma_\varepsilon)$ と変換すると，

$$\mathbb{E}^{\text{GFF}}\left[\mathbf{1}_{(\zeta \in \widetilde{S}_k^z)} e^{\overline{H_\varepsilon(\zeta)}}\right] = \frac{C(z; D)^{\gamma^2/2}}{\sqrt{\pi}} \text{Erfc}\left(\frac{\alpha - \gamma}{\sqrt{2}} \sigma_\varepsilon\right)$$

が得られる．ただしここで， Erfc は **Gauss** の誤差関数

$$\text{Erfc}(x) := \int_x^\infty e^{-u^2} du = \frac{e^{-x^2}}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{2^n x^{2n+1}}, \quad x \rightarrow \infty \quad (4.11)$$

である． $k \rightarrow \infty \iff \varepsilon \rightarrow 0 \iff \sigma_\varepsilon \rightarrow \infty$ なので， $\alpha > \gamma$ であるならば， $k \rightarrow \infty$ で

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{\text{GFF}}\left[\mathbf{1}_{(\zeta \in \widetilde{S}_k^z)} e^{\overline{H_\varepsilon(\zeta)}}\right] &\asymp e^{-(\alpha-\gamma)^2 \sigma_\varepsilon^2/2} \\ \implies \mathbb{E}^{\text{GFF}}[\widetilde{A}_k^z] &= \frac{1}{2^{2k}} \sum_{\zeta \in S_k^z} \mathbb{E}^{\text{GFF}}\left[\mathbf{1}_{(\zeta \in \widetilde{S}_k^z)} e^{\overline{H_\varepsilon(\zeta)}}\right] \asymp e^{-(\alpha-\gamma)^2 \sigma_\varepsilon^2/2} \end{aligned}$$

$e^{-\sigma_\varepsilon^2} \asymp 2^{-k-1}$ なので，題意は示された．

(ii) $\mathbb{E}^{\text{GFF}}[\widetilde{B}_k^z] = \mathbb{E}^{\text{GFF}}[\widetilde{A}_k^z]$ を示す：ここでも， $\varepsilon = 2^{-k-1}$ とおく．すると，

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}^{\text{GFF}}\left[\mathbf{1}_{(\zeta \in \widetilde{S}_k^z)} (e^{\overline{H_\varepsilon(\zeta)}} - e^{\overline{H_{\varepsilon/2}(\zeta)}}) \middle| \mathcal{F}_{-\log\varepsilon}^{\text{GFF}}\right] \\ &= \mathbb{E}^{\text{GFF}}\left[\mathbf{1} - 2^{-\gamma^2/2} e^{\gamma(H_{\varepsilon/2}(\zeta) - H_\varepsilon(\zeta))} \middle| \mathcal{F}_{-\log\varepsilon}^{\text{GFF}}\right] \times \mathbf{1}_{(\zeta \in \widetilde{S}_k^z)} e^{\overline{H_\varepsilon(\zeta)}} \end{aligned}$$

$\varepsilon = 2^{-k-1}$ なので，仮に $T := (k+1)\log 2$, $t := \log 2$ とおくと， $\mathcal{F}_{-\log\varepsilon}^{\text{GFF}} = \mathcal{F}_T^{\text{GFF}}$ であり，命題 4.2 より

$$\begin{aligned} H_{\varepsilon/2}(\zeta) - H_\varepsilon(\zeta) &= H_{e^{-((k+1)\log 2 + \log 2)}}(\zeta) - H_{e^{-(k+1)\log 2}}(\zeta) \\ &= H_{e^{-(T+t)}}(\zeta) - H_{e^{-T}}(\zeta) \\ &= W_{T+t}^\zeta - W_T^\zeta \stackrel{(\text{law})}{=} B_{T+\log 2} - B_T \end{aligned}$$

となる．ここで， $(B_t)_{t \geq 0}$ は 1 次元標準ブラウン運動を表す．よって，

$$\mathbb{E}^{\text{GFF}}\left[e^{\gamma(H_{\varepsilon/2}(\zeta) - H_\varepsilon(\zeta))} \middle| \mathcal{F}_{-\log\varepsilon}^{\text{GFF}}\right] = \mathbb{E}^{\text{GFF}}\left[e^{\gamma(B_{T+\log 2} - B_T)} \middle| \mathcal{F}_T^{\text{GFF}}\right] = e^{(\gamma^2/2)\log 2}$$

なので,

$$\mathbb{E}^{\text{GFF}} \left[\mathbf{1}_{(\zeta \in \widetilde{S}_k^z)} (e^{\overline{H_\varepsilon(\zeta)}} - e^{\overline{H_{\varepsilon/2}(\zeta)}}) \middle| \mathcal{F}_{-\log \varepsilon}^{\text{GFF}} \right] = (1 - 2^{-\gamma^2/2} e^{(\gamma^2/2) \log 2}) \mathbf{1}_{(\zeta \in \widetilde{S}_k^z)} e^{\overline{H_\varepsilon(\zeta)}} = 0$$

よって, 題意は証明された.

(iii) $\mathbb{E}^{\text{GFF}} [| (A_k^z - \widetilde{A}_k^z) - (B_k^z - \widetilde{B}_k^z) |] \rightarrow 0$ が指数関数的であることを証明するには,

$$\mathbb{E}^{\text{GFF}} [\{ (A_k^z - \widetilde{A}_k^z) - (B_k^z - \widetilde{B}_k^z) \}^2] \rightarrow 0$$

が指数関数的であることを示せばよい.

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}^{\text{GFF}} \left[\left\{ (A_k^z - \widetilde{A}_k^z) - (B_k^z - \widetilde{B}_k^z) \right\}^2 \middle| \mathcal{F}_{-\log \varepsilon}^{\text{GFF}} \right] \\ &= \mathbb{E}^{\text{GFF}} \left[\left\{ \frac{1}{2^{2k}} \sum_{\zeta \in S_k^z} \mathbf{1}_{(\zeta \in S_k^z \setminus \widetilde{S}_k^z)} e^{\overline{H_\varepsilon(\zeta)}} - \frac{1}{2^{2k}} \sum_{\zeta \in S_k^z} \mathbf{1}_{(\zeta \in S_k^z \setminus \widetilde{S}_k^z)} e^{\overline{H_{\varepsilon/2}(\zeta)}} \right\}^2 \middle| \mathcal{F}_{-\log \varepsilon}^{\text{GFF}} \right] \\ &= \mathbb{E}^{\text{GFF}} \left[\left\{ \frac{1}{2^{2k}} \sum_{\zeta \in S_k^z} \mathbf{1}_{(\zeta \in S_k^z \setminus \widetilde{S}_k^z)} e^{\overline{H_\varepsilon(\zeta)}} (1 - e^{\overline{H_{\varepsilon/2}(\zeta)} - \overline{H_\varepsilon(\zeta)}}) \right\}^2 \middle| \mathcal{F}_{-\log \varepsilon}^{\text{GFF}} \right] \\ &= \mathbb{E}^{\text{GFF}} \left[\left\{ \frac{1}{2^{2k}} \sum_{\zeta \in S_k^z} \mathbf{1}_{(\zeta \in S_k^z \setminus \widetilde{S}_k^z)} e^{\overline{H_\varepsilon(\zeta)}} (1 - e^{\overline{H_{\varepsilon/2}(\zeta)} - \overline{H_\varepsilon(\zeta)}}) \right\} \right. \\ & \quad \times \left. \left\{ \frac{1}{2^{2k}} \sum_{\zeta' \in S_k^z} \mathbf{1}_{(\zeta' \in S_k^z \setminus \widetilde{S}_k^z)} e^{\overline{H_\varepsilon(\zeta')}} (1 - e^{\overline{H_{\varepsilon/2}(\zeta')} - \overline{H_\varepsilon(\zeta')}}) \right\} \middle| \mathcal{F}_{-\log \varepsilon}^{\text{GFF}} \right] \end{aligned}$$

ここで, $\zeta \neq \zeta'$ のときには $\overline{H_\varepsilon(\zeta)}$ と $\overline{H_\varepsilon(\zeta')}$ は独立であるので, (ii) より $\zeta = \zeta'$ の場合だけ考えればよい. よって上は,

$$\mathbb{E}^{\text{GFF}} \left[\frac{1}{2^{4k}} \sum_{\zeta \in S_k^z} \mathbf{1}_{(\zeta \in S_k^z \setminus \widetilde{S}_k^z)} e^{2\overline{H_\varepsilon(\zeta)}} \times C \right]$$

ただし,

$$C := \mathbb{E}^{\text{GFF}} \left[(1 - e^{\overline{H_{\varepsilon/2}(\zeta)} - \overline{H_\varepsilon(\zeta)}})^2 \middle| \mathcal{F}_{-\log \varepsilon}^{\text{GFF}} \right]$$

に等しい. ここで

$$\begin{aligned} C &= \mathbb{E}^{\text{GFF}} \left[(1 - 2^{-\gamma^2/2} e^{\gamma(\overline{H_{\varepsilon/2}(\zeta)} - \overline{H_\varepsilon(\zeta)})})^2 \middle| \mathcal{F}_{-\log \varepsilon}^{\text{GFF}} \right] \\ &= 1 - 2 \cdot 2^{-\gamma^2/2} e^{(\gamma^2/2) \log 2} + 2^{-\gamma^2} e^{2\gamma^2 \log 2} = 2^{\gamma^2} - 1 \end{aligned}$$

であり, この部分は ε には依らない. 他方, (i) と同様の計算をすると,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{\text{GFF}} \left[\mathbf{1}_{(\zeta \in S_k^z \setminus \widetilde{S}_k^z)} e^{2\overline{H_\varepsilon(\zeta)}} \right] &= \frac{\varepsilon^{\gamma^2}}{\sqrt{2\pi}\sigma_\varepsilon} \int_{-\infty}^{\alpha\sigma_\varepsilon} e^{-x^2/(2\sigma_\varepsilon^2)} e^{2\gamma x} dx \\ &= \frac{\varepsilon^{-\gamma^2} C(z, D)^{2\gamma^2}}{\sqrt{\pi}\sigma_\varepsilon} \int_{-\infty}^{(\alpha-2\gamma)\sigma_\varepsilon/\sqrt{2}} e^{-u^2} du \\ &= \frac{\varepsilon^{-\gamma^2} C(z, D)^{2\gamma^2}}{\sqrt{\pi}\sigma_\varepsilon} \int_{(2\gamma-\alpha)\sigma_\varepsilon/\sqrt{2}}^{\infty} e^{-u^2} du \\ &= \frac{\varepsilon^{-\gamma^2} C(z, D)^{2\gamma^2}}{\sqrt{\pi}\sigma_\varepsilon} \text{Erfc} \left(\frac{2\gamma - \alpha}{\sqrt{2}} \sigma_\varepsilon \right) \end{aligned}$$

したがって、 $2\gamma > \alpha$ ならば、 $k \rightarrow \infty \iff \varepsilon \rightarrow 0 \iff \sigma_\varepsilon \rightarrow \infty$ において、

$$\mathbb{E}^{\text{GFF}} \left[\mathbf{1}_{(\zeta \in S_k^z \setminus \widetilde{S}_k^z)} e^{2\overline{H}_\varepsilon(\zeta)} \right] \asymp \varepsilon^{-\gamma^2} e^{\{(2\gamma-\alpha)^2/2\} \log \varepsilon}.$$

このことより、 $k \rightarrow \infty$ で

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{\text{GFF}} \left[\left\{ (A_k^z - \widetilde{A}_k^z) - (B_k^z - \widetilde{B}_k^z) \right\}^2 \right] &\asymp \frac{1}{24k} \sum_{\zeta \in S_k^z} \varepsilon^{-\gamma^2} e^{\{(2\gamma-\alpha)^2/2\} \log \varepsilon} \\ &\asymp \frac{1}{24k} \times 2^{2k} \varepsilon^{-\gamma^2 + (2\gamma-\alpha)^2/2} = 2^{-2k} \varepsilon^{-\gamma^2 + (2\gamma-\alpha)^2/2} \\ &\asymp \varepsilon^{2-\gamma^2 + (2\gamma-\alpha)^2/2} \quad (\because \varepsilon = 2^{-k-1}) \end{aligned}$$

が得られる。ここで

$$f(\alpha) := 2 - \gamma^2 + \frac{(2\gamma - \alpha)^2}{2} = \gamma^2 - 2\alpha\gamma + \frac{\alpha^2}{2} + 2$$

とおき、これが正である条件を求める。明らかに $0 \leq \gamma \leq \sqrt{2} \implies \gamma^2 \leq 2$ であれば $f(\alpha) > 0$ である。 $\gamma^2 > 2$ のときには $f(\alpha) = 0$ は 2 実根

$$\alpha_\pm := 2\gamma \pm \sqrt{2(\gamma^2 - 2)}$$

をもち、 $\gamma < \alpha_-$ であるならば、 $\alpha \in [\gamma, \alpha_-)$ で $f(\alpha) > 0$ となる。ところが、

$$\sqrt{2} < \gamma < 2 \implies \sqrt{2(\gamma^2 - 2)} < \gamma \implies \gamma < \alpha_-$$

である。 $\alpha_- = 2\gamma - \sqrt{2(\gamma^2 - 2)} \leq 2\gamma$ なので、 $\alpha \in [\gamma, \alpha_-)$ なら $\alpha < 2\gamma$ も満たされる。

以上より、 $\gamma \in [0, 2)$ の条件の下では、 $k \rightarrow \infty$ で $\mathbb{E}^{\text{GFF}} [|\mu_{2^{-k}}^H(S) - \mu_{2^{-k-1}}^H(S)|]$ が指数関数的に 0 に収束することが示すことができた。よって、補題 4.5 の (4.9) が示されたので、定理 4.3 が証明されたことになる。■

注 4.6 $\gamma = 2$ の場合には、この方法では $\mu_\varepsilon^H(dz) := \varepsilon^{\gamma^2/2} e^{\gamma H_\varepsilon(z)} m(dz)$ の $\varepsilon \rightarrow 0$ 極限の存在は証明できないようである。また、正方格子を考えて $\varepsilon = 2^{-k}$ とした計算に基づくこの証明が、どの程度一般化されるのかも不明である。

5 Gauss 型自由場と多重 SLE の結合

5.1 量子表面

単連結領域 $D \subsetneq \mathbb{C}$ において 4.2 節の定理 4.3 では、Dirichlet 境界 Gauss 型自由場 $((\Omega^{\text{GFF}}, \mathcal{F}^{\text{GFF}}, \mathbb{P}^{\text{GFF}}), H)$ に対して極限測度

$$\mu^H(dz) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{\gamma^2/2} e^{\gamma H_\varepsilon(z)} m(dz)$$

を定めた。ただし、 $\gamma \in [0, 2)$ であり、 H_ε は超関数に値をとる Dirichlet 境界 Gauss 型自由場 H を半径 ε の円周上で平均化したものであった。この極限測度は **Dirichlet 境界 Liouville 量子重力** とよばれる。ここでは、同様のことを 2.4 節で導入した自由境界 Gauss 型自由場 $((\Omega^{\text{GFF}}, \mathcal{F}^{\text{GFF}}, \mathbb{P}^{\text{GFF}}), \widetilde{H})$ に対して行なったとする：

$$\mu^{\widetilde{H}}(dz) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{\gamma^2/2} e^{\gamma \widetilde{H}_\varepsilon(z)} m(dz). \quad (5.1)$$

この極限測度を自由境界 **Liouville 量子重力** とよぶことにする。

$D' \subsetneq \mathbb{C}$ を D とは別の単連結領域とし, $\varphi: D' \rightarrow D$ を共形変換とする. いま, A を D' 上の可測集合とする. この $A \subset D'$ に測度を与える量子重力は, 引き戻しの関係式

$$\varphi^* \mu^{\tilde{H}}(A) = \mu^{\tilde{H}}(\varphi(A))$$

によって, 領域 D に対して (5.1) で与えられている測度 $\mu^{\tilde{H}}$ を用いて

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varphi(A)} \varepsilon^{\gamma^2/2} e^{\gamma \tilde{H}_\varepsilon(z)} m(dz) \quad (5.2)$$

によって与えられるであろう. 他方, これを D' 上の領域 A の測度を, $A \ni w \mapsto \varphi(w) = z \in \varphi(A)$ によって座標変換したものと見なすことも可能である. この座標変換によって, Gauss 型自由場が $\tilde{H}(w) \rightarrow \tilde{H} \circ \varphi(w)$ と変換されるとともに, 円周平均をとる円の半径も $\varepsilon \rightarrow |\varphi'(w)|\varepsilon$ というように膨張・収縮することになる. ここで $\varphi'(w) := \frac{d\varphi}{dw}(w)$ である. したがって, (5.2) は

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_A (|\varphi'(w)|\varepsilon)^{\gamma^2/2} e^{\gamma(\tilde{H}_\varepsilon \circ \varphi)(w)} |\varphi'(w)|^2 m(dw) \quad (5.3)$$

とも書けることになる. ところが,

$$\begin{aligned} |\varphi'(w)|^{\gamma^2/2} e^{\gamma(\tilde{H}_\varepsilon \circ \varphi)(w)} |\varphi'(w)|^2 &= \exp \left[\gamma(\tilde{H}_\varepsilon \circ \varphi)(w) + \left(\frac{\gamma^2}{2} + 2 \right) \log |\varphi'(w)| \right] \\ &= \exp \left[\gamma \left\{ \tilde{H}_\varepsilon \circ \varphi + \left(\frac{2}{\gamma} + \frac{\gamma}{2} \right) \log |\varphi'| \right\} (w) \right] \end{aligned}$$

であるから,

$$Q := \frac{2}{\gamma} + \frac{\gamma}{2} \quad (5.4)$$

として, 新たに

$$\tilde{H} \circ \varphi + Q \log |\varphi'| \quad (5.5)$$

という場を D' 上に定義してみることにする. そうすると, この新しく導入した場に対応した自由境界 Liouville 量子重力とよばれる領域 A の測度は, D 上の測度から引き戻しによって求めた測度 $\varphi^* \mu^{\tilde{H}}(A)$ と等しいことになる.

以上の考察より, 次の同値関係を定義することにする.

定義 5.1 $\gamma \in (0, 2)$ とする. 2 つの単連結領域 $D_i \subsetneq \mathbb{C}$, $i = 1, 2$ とそれぞれの領域の上での自由境界 Gauss 型自由場 \tilde{H}_{D_i} , $i = 1, 2$ から成る 2 つの対 (D_1, \tilde{H}_{D_1}) と (D_2, \tilde{H}_{D_2}) は, 共形変換 $\varphi: D_1 \rightarrow D_2$ があって, \mathbb{P}^{GFF} の下,

$$\tilde{H}_{D_1} \stackrel{(\text{law})}{=} \tilde{H}_{D_2} \circ \varphi + Q \log |\varphi'| \quad (5.6)$$

の関係が成り立つとき, γ -同値であるという. ただし, Q は (5.4) で与えられる.

(5.6) の右辺は, 共形変換 $\varphi: D_1 \rightarrow D_2$ に伴う Gauss 型自由場の座標変換 $\tilde{H}_{D_1} \rightarrow \tilde{H}_{D_2} \circ \varphi$ の部分の他に, $Q \log |\varphi'|$ という項が加算されている. 対数関数 $\log z$ は複素関数として正則であり, その実部 $\text{Re } \log z = \log |z|$ と虚部 $\text{Im } \log z = \arg z$ はともに調和関数である. (ただしここで, 例えば実軸の正の向きを角度 0 として, $\arg z \in [0, 2\pi)$ と定めるようにする.) したがって, 上の γ -同値類は Gauss 型自由場を, 調和関数を加えるということにより拡張したものになっている.

定義 5.2 単連結領域 $D \subset \mathbb{C}$ 上の Dirichlet 境界条件下 (あるいは自由境界条件下) の Gauss 型自由場 H (あるいは \tilde{H}) に対して, 決定論的な調和関数 u を加えた

$$H + u \quad \text{あるいは} \quad \tilde{H} + u$$

を拡張 Gauss 型自由場という.

定義 5.1 で定義された χ -同値類を成す拡張 Gauss 型自由場を, Sheffield [69] に従って量子表面 (quantum surface) とよぶことにする.

5.2 虚数表面

ここでも $D \subset \mathbb{C}$ を単連結領域とする. まずは $h \in C_c^\infty(D)$ として, 滑らかなベクトル場 $e^{\sqrt{-1}(h/\chi+\theta)}$ を考えることにする. ただし, χ と θ は実の径数とする. このベクトル場のフローを考える. 出発点を領域の境界上の 1 点 $x \in \partial D$ としてそこをスタートするフロー線が, 時刻 $t \geq 0$ で径数付けられているものとする. これを $\eta := \{\eta_t : t \geq 0\}$ と書くことにして, 次の常微分方程式に従って定まるものと仮定する

$$\frac{d\eta_t}{dt} = e^{\sqrt{-1}\{h(\eta_t)/\chi+\theta\}}, \quad t \geq 0, \quad \eta_0 = x \in \partial D \quad (5.7)$$

また, D とは別の単連結領域 $D' \subset \mathbb{C}$ を考え, 共形変換 $\varphi : D' \rightarrow D$ で変換されるものとする. 上で定めたフロー線 η を φ によって D' 内に引き戻したものを,

$$\hat{\eta}_t := \varphi^{-1} \circ \eta_t \quad \iff \quad \varphi(\hat{\eta}_t) = \eta_t$$

とする. 後者の式の両辺を t で微分すると

$$\varphi'(\hat{\eta}_t) \frac{d\hat{\eta}_t}{dt} = \frac{d\eta_t}{dt}$$

となる. ここで $\varphi'(z) := \frac{d\varphi(z)}{dz}$ であるが, これを $\varphi'(z) = |\varphi'(z)|e^{\sqrt{-1}\arg \varphi'(z)}$ と極座標表示として, 少し式変形すると,

$$\frac{d\hat{\eta}_t}{dt} = \frac{1}{|\varphi'(\hat{\eta}_t)|} e^{\sqrt{-1}\{(h \circ \varphi - \chi \arg \varphi')(\hat{\eta}_t)/\chi + \theta\}}, \quad t \geq 0$$

を得る. ここで時間変更 $t \rightarrow \tau = \tau(t)$ を $t = \int_0^\tau \frac{ds}{|\varphi'(\hat{\eta}_s)|}$ に従って行い, $\check{\eta}_t := \hat{\eta}(\tau(t))$ と書くことにすると, 上の方程式は

$$\frac{d\check{\eta}_t}{dt} = e^{\sqrt{-1}\{(h \circ \varphi - \chi \arg \varphi')(\check{\eta}_t)/\chi + \theta\}}, \quad t \geq 0$$

となる. 時間変更して径数を変えても, フロー線はそのままであるから, フロー線を決めるベクトル場を与える関数 h としては, D 上の h と $D' = \varphi^{-1}(D)$ 上の $h \circ \varphi - \chi \arg \varphi'$ とが対応することになる.

Miller と Sheffield は, Dirichlet 境界 Gauss 型自由場 H に対して, 同様の考察を行った [49, 50, 51, 52]. その結果, 次のような同値関係を定義した.

定義 5.3 $\chi \in \mathbb{R}$ とする. 2 つの単連結領域 $D_i \subset \mathbb{C}$, $i = 1, 2$ とそれぞれの領域の上での Dirichlet 境界 Gauss 型自由場 H_{D_i} , $i = 1, 2$ から成る 2 つの対 (D_1, H_{D_1}) と (D_2, H_{D_2}) は, 共形変換 $\varphi : D_1 \rightarrow D_2$ があって, \mathbb{P}^{GFF} の下,

$$H_{D_1} \stackrel{(\text{law})}{=} H_{D_2} \circ \varphi - \chi \arg \varphi' \quad (5.8)$$

の関係が成り立つとき, χ -同値であるという.

$\arg \varphi'$ は調和関数であり, χ -同値類をなす場も拡張 Gauss 型自由場であると言える. Miller–Sheffield [49] に従って, この χ -同値類を虚数表面 (imaginary surface) とよぶことにする. ([69] では, これを AC 表面 (AC surface) とよんでいる. AC は altimeter (高度計) と compass (方位磁針) を意味するそうである.)

5.3 複素対数ポテンシャルと局所マルチンゲール

多重 SLE (3.5) とその駆動過程 (3.1) はそれぞれ

$$\begin{aligned}\frac{dg_{\mathbb{H}_t^\eta}(z)}{dt} &= \sum_{i=1}^N \frac{2}{g_{\mathbb{H}_t^\eta}(z) - X_t^{(i)}}, \quad t \geq 0, \\ dX_t^{(i)} &= \sqrt{\kappa} B_t^{(i)} + F^{(i)}(\mathbf{X}_t) dt, \quad t \geq 0, \quad i = 1, \dots, N\end{aligned}$$

で与えられた. また, $T \in (0, \infty)$ を任意に指定したとき, 時間区間 $[0, T]$ での後進多重 SLE (3.12) とその駆動過程 (3.11) はそれぞれ,

$$\begin{aligned}\frac{df_{\mathbb{H}_t^\eta}^T(z)}{dt} &= - \sum_{i=1}^N \frac{2}{f_{\mathbb{H}_t^\eta}^T(z) - Y_{T;t}^{(i)}}, \quad t \geq 0, \\ dY_{T;t}^{(i)} &= \sqrt{\kappa} \tilde{B}_t^{(i)} - F^{(i)}(\mathbf{Y}_{T;t}) dt, \quad t \geq [0, T], \quad i = 1, \dots, N\end{aligned}$$

で与えられた. ただし, $(B_t^{(i)})_{t \geq 0}, (\tilde{B}_t^{(i)})_{t \geq 0}, i = 1, \dots, N$ は互いに独立なブラウン運動である. この 2 つの系を意識して, $\sigma_1, \sigma_2 \in \{-1, 1\}$ という 2 つのパリティ変数を導入することにより, ここでは次の形の方程式系を考えることにする.

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi_t(z)}{dt} &= \sigma_1 \sum_{i=1}^N \frac{2}{\varphi_t(z) - \xi_t^{(i)}}, \quad t \geq 0, \\ d\xi_t^{(i)} &= \sqrt{\kappa} B_t^{(i)} + \sigma_2 F^{(i)}(\xi_t) dt, \quad t \geq 0, \quad i = 1, \dots, N\end{aligned} \tag{5.9}$$

$z \in \mathbb{C}, x^{(i)} \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, N$ に対して, 次の複素値対数ポテンシャルを導入する (付録 A.2 節を参照).

$$\Phi(z, \mathbf{x}) := \sum_{i=1}^N \log(z - x^{(i)}) \tag{5.10}$$

その上で, 確率過程 $(\Phi(\varphi_t(z), \xi_t))_{t \geq 0}$ を考える.

$$\frac{\partial}{\partial z} \log(z - x) = \frac{1}{z - x}, \quad \frac{\partial}{\partial x} \log(z - x) = -\frac{1}{z - x}, \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} \log(z - x) = -\frac{1}{(z - x)^2}$$

であるから, 伊藤の公式より

$$\begin{aligned}d \log(\varphi_t(z) - \xi_t^{(i)}) &= \frac{1}{\varphi_t(z) - \xi_t^{(i)}} \left[d\varphi_t(z) - d\xi_t^{(i)} \right] \\ &= \frac{1}{\varphi_t(z) - \xi_t^{(i)}} \left[2\sigma_1 \sum_{j=1}^N \frac{1}{\varphi_t(z) - \xi_t^{(j)}} dt - \sqrt{\kappa} dB_t^{(i)} - \sigma_2 F^{(i)}(\xi_t) dt \right] \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{1}{(\varphi_t(z) - \xi_t^{(i)})^2} \kappa dt\end{aligned}$$

となり

$$\begin{aligned}
d\Phi(\varphi_t(z), \boldsymbol{\xi}_t) &= -\sqrt{\kappa} \sum_{i=1}^N \frac{1}{\varphi_t(z) - \xi_t^{(i)}} dB_t^{(i)} + 2\sigma_1 \left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{\varphi_t(z) - \xi_t^{(i)}} \right)^2 dt \\
&\quad - \sigma_2 \sum_{i=1}^N \frac{1}{\varphi_t(z) - \xi_t^{(i)}} F^{(i)}(\boldsymbol{\xi}_t) dt - \frac{\kappa}{2} \sum_{i=1}^N \frac{1}{(\varphi_t(z) - \xi_t^{(i)})^2} dt
\end{aligned} \tag{5.11}$$

を得る. この右辺第 2 項に現れる因子は

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{\varphi_t(z) - \xi_t^{(i)}} \right)^2 &= \sum_{i=1}^N \sum_{1 \leq j \leq N, j \neq i} \frac{1}{(\varphi_t(z) - \xi_t^{(i)})(\varphi_t(z) - \xi_t^{(j)})} + \sum_{i=1}^N \frac{1}{(\varphi_t(z) - \xi_t^{(i)})^2} \\
&= 2 \sum_{i=1}^N \frac{1}{\varphi_t(z) - \xi_t^{(i)}} \sum_{\substack{1 \leq j \leq N, \\ j \neq i}} \frac{1}{\xi_t^{(i)} - \xi_t^{(j)}} + \sum_{i=1}^N \frac{1}{(\varphi_t(z) - \xi_t^{(i)})^2}
\end{aligned}$$

と式変形される. また, (5.9) の第 1 式の両辺を z で微分すると

$$d\varphi_t'(z) = -2\sigma_1 \varphi_t'(z) \sum_{i=1}^N \frac{1}{(\varphi_t(z) - \xi_t^{(i)})^2} dt$$

を得るので,

$$d \log \varphi_t'(z) = -2\sigma_1 \sum_{i=1}^N \frac{1}{(\varphi_t(z) - \xi_t^{(i)})^2} dt$$

という等式が得られる. さらに, (5.11) の両辺に $\frac{2}{\sqrt{\kappa}}$ を掛けると, 次が得られる.

$$\begin{aligned}
\frac{2}{\sqrt{\kappa}} d\Phi(\varphi_t(z), \boldsymbol{\xi}_t) &= -2 \sum_{i=1}^N \frac{1}{\varphi_t(z) - \xi_t^{(i)}} dB_t^{(i)} \\
&\quad + \frac{2}{\sqrt{\kappa}} \sum_{i=1}^N \frac{1}{\varphi_t(z) - \xi_t^{(i)}} \left[4\sigma_1 \sum_{\substack{1 \leq j \leq N, \\ j \neq i}} \frac{1}{\xi_t^{(i)} - \xi_t^{(j)}} - \sigma_2 F^{(i)}(\boldsymbol{\xi}_t) \right] dt \\
&\quad - \frac{1}{\sigma_1 \sqrt{\kappa}} \left(2\sigma_1 - \frac{\kappa}{2} \right) d \log \varphi_t'(z).
\end{aligned} \tag{5.12}$$

以上の計算結果を, 拡張自由境界 Gauss 型自由場に対して定義 5.1 で定めた γ -同値関係

$$\tilde{H}_{D_1} \stackrel{(\text{law})}{=} \tilde{H}_{D_2} \circ \varphi + Q \log |\varphi'|, \quad \text{ただし, } Q = \frac{2}{\gamma} + \frac{\gamma}{2},$$

および, 拡張 Dirichlet 境界 Gauss 型自由場に対して定義 5.3 で定めた χ -同値関係

$$H_{D_1} \stackrel{(\text{law})}{=} H_{D_2} \circ \varphi - \chi \arg \varphi'$$

と比較することにする. その結果, 次のことに気が付く.

(Oi) $\sigma_1 = -1$ とすると,

$$(5.12) \text{ の最後の項の実部} = -d\left(Q \log |\varphi_t'(z)|\right), \quad \text{ただし, } Q := \frac{2}{\gamma} + \frac{\gamma}{2} = \frac{2}{\sqrt{\kappa}} + \frac{\sqrt{\kappa}}{2}.$$

(Oii) $\sigma_1 = 1$ とすると,

$$(5.12) \text{ の最後の項の虚部} = -d\left(\chi \arg \varphi'_t(z)\right), \quad \text{ただし, } \chi = \frac{2}{\sqrt{\kappa}} - \frac{\sqrt{\kappa}}{2}.$$

また, (5.12) の右辺第 2 項に関しては次のことが言える.

(Oiii) $\sigma_1 = -1$ のときは $\sigma_2 = -1$ とし, $\sigma_1 = 1$ のときには $\sigma_2 = 1$ として, いずれも

$$F^{(i)}(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{\substack{1 \leq j \leq N, \\ j \neq i}} \frac{4}{\xi_t^{(i)} - \xi_t^{(j)}}, \quad i = 1, \dots, N \quad (5.13)$$

とおくと, (5.12) の右辺第 2 項は零となる.

注 5.4 上の観察 (Oi), (Oii) により, Q, χ という径数に比例した付加項が見出された. 前者は, 1.4 節で解説した Liouville 2 次元重力に関する ‘物理的な’ 考察においては, 曲がった平面の曲率に起因するものであった. また, 5.1 節での量子表面に対する heuristic な議論では, 座標変換によるヤコビアンと Gauss 型自由場を平均化する円周の半径補正から生じた. ここでは, この付加項は伊藤の公式におけるいわゆる伊藤項 (2 階微分の項) から来るものである. そして, これが SLE に起因することは, Q と χ が SLE の径数である κ の関数として定まることから明らかである. このことは Sheffield [69] と Miller–Sheffield [49, 50, 51, 52] において, Gauss 型自由場を 1 本の SLE 曲線と結合することにより発見された事実である. この講義は, この事実が Gauss 型自由場を多重 SLE と結合させた場合にも成り立つことを説明するものである. この話のからくりは, Gauss 型自由場と SLE とを関連付ける関数として (5.10) の形の複素値対数ポテンシャルを導入したことにある. Sheffield [69] と Miller–Sheffield [49] は $\log(z - x)$ を用いた. (これに関しては [19, 66, 31] も参照すべきである.) 我々が見出したのは, 彼らの結果の多重化は, 単純に対数関数の和 (5.10), すなわち $\sum_{i=1}^N \log(z - x^{(i)})$ を考えることで達成できるということである [34, 35]. 観察 (Oiii) は Dyson 模型というランダム行列理論で詳しく研究されている確率過程に関するものであるが, このような多粒子系の登場は, 当然ながら, 多重化の考察で始めて現れる側面である.

以上の観察 (Oi)–(Oiii) より, 次が結論される.

命題 5.5 (5.13) を仮定する.

(i) $T \in (0, \infty)$ を指定する.

$$\gamma = \sqrt{\kappa}, \quad \text{したがって, } Q = \frac{2}{\sqrt{\kappa}} + \frac{\sqrt{\kappa}}{2} \quad (5.14)$$

とする. $T \in (0, \infty)$ に対して,

$$\frac{2}{\sqrt{\kappa}} \operatorname{Re} \Phi(f_{\mathbb{H}_t^\eta}^T(z), \mathbf{Y}_{T;t}) + Q \operatorname{Re} \log f_{\mathbb{H}_t^\eta}^T(z) = \frac{2}{\sqrt{\kappa}} \sum_{i=1}^N \log \left| f_{\mathbb{H}_t^\eta}^T(z) - Y_{T;t}^{(i)} \right| + Q \log \left| f_{\mathbb{H}_t^\eta}^T(z) \right|, \quad t \in [0, T]$$

は局所マルチンゲールであり,

$$d \left[\frac{2}{\sqrt{\kappa}} \sum_{i=1}^N \log \left| f_{\mathbb{H}_t^\eta}^T(z) - Y_{T;t}^{(i)} \right| + Q \log \left| f_{\mathbb{H}_t^\eta}^T(z) \right| \right] = -2 \sum_{i=1}^N \operatorname{Re} \frac{1}{f_{\mathbb{H}_t^\eta}^T(z) - Y_{T;t}^{(i)}} d\tilde{B}_t^{(i)}, \quad t \in [0, T] \quad (5.15)$$

が成り立つ.

(ii) $\chi = \frac{2}{\sqrt{\kappa}} - \frac{\sqrt{\kappa}}{2}$ とする. このとき,

$$-\frac{2}{\sqrt{\kappa}} \operatorname{Im} \Phi(g_{\mathbb{H}_t^\eta}(z), \mathbf{X}_t) - \chi \operatorname{Im} \log g_{\mathbb{H}_t^\eta}'(z) = -\frac{2}{\sqrt{\kappa}} \sum_{i=1}^N \arg(g_{\mathbb{H}_t^\eta}(z) - X_t^{(i)}) - \chi \arg g_{\mathbb{H}_t^\eta}'(z), \quad t \in [0, \infty)$$

は局所マルチンゲールであり,

$$d \left[-\frac{2}{\sqrt{\kappa}} \sum_{i=1}^N \arg(g_{\mathbb{H}_t^\eta}(z) - X_t^{(i)}) - \chi \arg g_{\mathbb{H}_t^\eta}'(z) \right] = 2 \sum_{i=1}^N \operatorname{Im} \frac{1}{g_{\mathbb{H}_t^\eta}(z) - X_t^{(i)}} dB_t^{(i)}, \quad t \in [0, \infty) \quad (5.16)$$

が成り立つ.

注 5.6 (1.20) で定義した Virasoro 中心元 c_κ と $\chi_\kappa := \frac{2}{\sqrt{\kappa}} - \frac{\sqrt{\kappa}}{2}$ との間には, 関係式

$$c_\kappa = 1 - 6\chi_\kappa^2 \quad (5.17)$$

が成り立つ. この関係式から, SLE の径数 $\kappa > 0$ に対して $c_\kappa \leq 1$ であり, 最大値 $c_\kappa = 1$ は $\chi_\kappa = 0 \iff \kappa = 4$ のときに限って実現されることがわかる.

この結果を命題 3.3 の (3.14), および命題 3.1 の (3.6) と比べると, 次が結論される.

$$\begin{aligned} & d \left\langle \frac{2}{\sqrt{\kappa}} \sum_{i=1}^N \log |f_{\mathbb{H}^\eta}^T(z) - Y_{T;\cdot}^{(i)}| + Q \log |f_{\mathbb{H}^\eta}^T'(z)|, \frac{2}{\sqrt{\kappa}} \sum_{i=1}^N \log |f_{\mathbb{H}^\eta}^T(w) - Y_{T;\cdot}^{(i)}| + Q \log |f_{\mathbb{H}^\eta}^T'(w)| \right\rangle_t \\ &= 4 \sum_{i=1}^N \operatorname{Re} \frac{1}{f_{\mathbb{H}_t^\eta}^T(z) - Y_{T;t}^{(i)}} \operatorname{Re} \frac{1}{f_{\mathbb{H}_t^\eta}^T(w) - Y_{T;t}^{(i)}} dt = -d\tilde{G}^{f_{\mathbb{H}^\eta}^T}(z, w), \\ & d \left\langle -\frac{2}{\sqrt{\kappa}} \sum_{i=1}^N \arg(g_{\mathbb{H}^\eta}(z) - X^{(i)}) - \chi \arg g_{\mathbb{H}^\eta}'(z), -\frac{2}{\sqrt{\kappa}} \sum_{i=1}^N \arg(g_{\mathbb{H}^\eta}(w) - X^{(i)}) - \chi \arg g_{\mathbb{H}^\eta}'(w) \right\rangle_t \\ &= 4 \sum_{i=1}^N \operatorname{Im} \frac{1}{g_{\mathbb{H}_t^\eta}(z) - X_t^{(i)}} \operatorname{Im} \frac{1}{g_{\mathbb{H}_t^\eta}(w) - X_t^{(i)}} dt = -dG^{g_{\mathbb{H}^\eta}}(z, w). \end{aligned}$$

また, (3.16), および (3.9) と比べると, $\operatorname{supp}(f) \subset A \subset \mathbb{H}$ である関数 $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{H})$ に対して,

$$\begin{aligned} & d \left\langle \left\langle \frac{2}{\sqrt{\kappa}} \sum_{i=1}^N \log |f_{\mathbb{H}^\eta}^T(\cdot) - Y_{T;\cdot}^{(i)}| + Q \log |f_{\mathbb{H}^\eta}^T'(\cdot)|, f \right\rangle_t \right\rangle = -d\tilde{E}^{f_{\mathbb{H}^\eta}^T}(f), \\ & d \left\langle \left\langle -\frac{2}{\sqrt{\kappa}} \sum_{i=1}^N \arg(g_{\mathbb{H}^\eta}(\cdot) - X^{(i)}) - \chi \arg g_{\mathbb{H}^\eta}'(\cdot), f \right\rangle_t \right\rangle = -dE^{g_{\mathbb{H}^\eta}}(f), \end{aligned} \quad (5.18)$$

となることが分かる.

5.4 拡張 Gauss 型自由場値の確率過程とその定常性

\mathbb{H} 上の Dirichlet 境界 Gauss 型自由場を $H(\cdot)$, 自由境界 Gauss 型自由場を $\tilde{H}(\cdot)$ と記すことにする. 次のような時間発展系を導入する.

$$\begin{aligned}\tilde{H}_t(\cdot) &:= \tilde{H} \circ f_{\mathbb{H}_t^\eta}^T(\cdot) + \frac{2}{\sqrt{\kappa}} \sum_{i=1}^N \log \left| f_{\mathbb{H}_t^\eta}^T(\cdot) - Y_{T;t}^{(i)} \right| + Q \log \left| f_{\mathbb{H}_t^\eta}^T{}'(\cdot) \right|, \quad 0 \leq t \leq T < \infty, \\ H_t(\cdot) &:= H \circ g_{\mathbb{H}_t^\eta}(\cdot) - \frac{2}{\sqrt{\kappa}} \sum_{i=1}^N \arg(g_{\mathbb{H}_t^\eta}(\cdot) - X_t^{(i)}) - \frac{2}{\sqrt{\kappa}} \arg(g_{\mathbb{H}_t^\eta}'(\cdot)), \quad t \geq 0.\end{aligned}\tag{5.19}$$

注 5.7 我々は定義 5.2 において, Gauss 型自由場に決定論的な調和関数を加えたものを拡張 Gauss 型自由場とよぶことにした. (5.19) で加えられた調和関数項には $\log \left| f_{\mathbb{H}_t^\eta}^T(\cdot) - Y_{T;t}^{(i)} \right|$ や $\arg(g_{\mathbb{H}_t^\eta}(\cdot) - X_t^{(i)})$ があり, これらは SLE 曲線 $\eta^{(i)}$ の上では (一意に) 定義されない. したがって, \tilde{H}_t や H_t は \mathbb{H} 全体の上ではなく, \mathbb{H}_t^η の上でのみ拡張 Gauss 型自由場と見なすことが可能である. ただし, $\mathbb{H}_t^\eta, t > 0$ は (3.4), すなわち

$$\mathbb{H}_t^\eta := \mathbb{H} \setminus \bigcup_{i=1}^N \eta^{(i)}(0, t] \text{ の非有界成分}, \quad t > 0$$

と定義したものである. ここでは, H 内の開集合 A を選び, A が \mathbb{H}_t^η に含まれている間だけに, 時間区間を限定して考えることにする. ただし, $v_A := \inf\{\text{Im } z : z \in A\}$ としたとき, $v_A \geq \exists \delta > 0$ であるものとする. すなわち, 領域 A と実軸の間に隙間があるものと仮定する. (図 9 参照.) このような A に対して $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ -停止時刻

$$\tau_A := \sup \left\{ t \geq 0 \mid A \subset \mathbb{H}_t^\eta \right\}\tag{5.20}$$

と定義すると $\tau_A > 0$ であり, $t \in [0, \tau_A]$ の間はこの領域 A の中に SLE 曲線が侵入してくることはなく, A 内のすべての点に対して多重 SLE $g_{\mathbb{H}_t^\eta}$ が定義される. よって, (5.19) を拡張 Gauss 型自由場値の確率過程と見なすことができることになる. このことはしかし, テスト関数 $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{H})$ としては, $\text{supp}(f) \subset A$ となるものだけを考えなければならないことを意味する.

以上に述べたような制限の下ではあるが, 次の定理 5.8 は, Gauss 型自由場と多重 SLE との結合状態とは, この 2 つを結合することで得られる拡張 Gauss 型自由場値の確率過程が定常性を持つことを意味することを述べたものである.

定理 5.8 $v_A \geq \exists \delta > 0$ である領域 A に対して, $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ -停止時刻 τ_A を (5.20) のように定め, $0 < T < \tau_A$ とする. (5.19) において, $(\mathbf{X}_t)_{t \geq 0}$ を (1.29) で与えられる径数 $8/\kappa$ の Dyson 模型とし, $(\mathbf{Y}_{T;t})_{t \in [0, T]}$ を (1.30) で与えられる時間区間 $[0, T]$ における径数 $8/\kappa$ の後進 Dyson 模型とする. このとき, $\text{supp}(f) \subset A$ であるすべての $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{H})$ に対して,

$$\langle \tilde{H}_0, f \rangle \stackrel{(\text{law})}{=} \langle \tilde{H}_t, f \rangle, \quad \langle H_0, f \rangle \stackrel{(\text{law})}{=} \langle H_t, f \rangle, \quad t \in [0, T]\tag{5.21}$$

が成り立つ.

証明 (5.21) の最初の等式を証明する. 実径数 $\theta \in \mathbb{R}$ を導入して, $\langle \tilde{H}_t, f \rangle$ の特性関数 $\mathbb{E}[\exp(\sqrt{-1}\theta \langle \tilde{H}_t, f \rangle)]$ を考える. ここで \mathbb{E} は多重 SLE と Gauss 型自由場の結合確率法則 \mathbb{P} に対する期待値を表す.

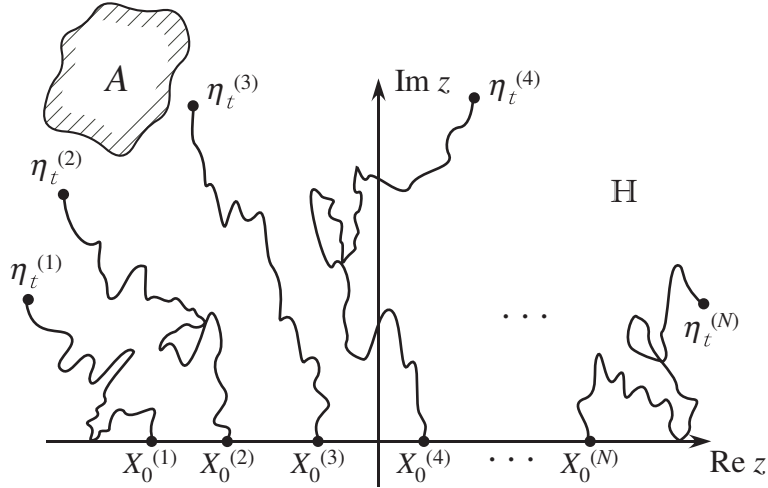


図 9: 実軸との間に隙間があるような領域 A に対して, $A \subset \mathbb{H}_t^\eta$ である時間区間を考えることにする.

$(2/\sqrt{\kappa}) \sum_{i=1}^N \log |f_{\mathbb{H}_t^\eta}^T(\cdot) - Y_{T;t}^{(i)}| + Q \log |f_{\mathbb{H}_t^\eta}^{T'}(\cdot)|$ は \mathcal{F}_t -可測であるから,

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\exp(\sqrt{-1}\theta \langle \tilde{H}_t, f \rangle) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left[\exp(\sqrt{-1}\theta \langle \tilde{H} \circ f_{\mathbb{H}_t^\eta}^T, f \rangle) \middle| \mathcal{F}_t \right] \exp \left(\sqrt{-1}\theta \left\langle \frac{2}{\sqrt{\kappa}} \sum_{i=1}^N \log |f_{\mathbb{H}_t^\eta}^T(\cdot) - Y_{T;t}^{(i)}| + Q \log |f_{\mathbb{H}_t^\eta}^{T'}(\cdot)|, f \right\rangle \right) \right] \end{aligned}$$

が成り立つ. ここで, (3.15) で与えられた $\tilde{E}^{f_{\mathbb{H}_t^\eta}^T}(f)$ の定義より, $\text{Var}[\langle \tilde{H} \circ f_{\mathbb{H}_t^\eta}^T, f \rangle] = \tilde{E}^{f_{\mathbb{H}_t^\eta}^T}(f)$ であることから, Bochner–Minlos の定理より導かれた補題 2.15 より,

$$\mathbb{E} \left[\exp(\sqrt{-1}\theta \langle \tilde{H} \circ f_{\mathbb{H}_t^\eta}^T, f \rangle) \middle| \mathcal{F}_t \right] = \exp \left(-\frac{\theta^2}{2} \tilde{E}^{f_{\mathbb{H}_t^\eta}^T}(f) \right)$$

となる. したがって,

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\exp(\sqrt{-1}\theta \langle \tilde{H}_t, f \rangle) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\exp \left(-\frac{\theta^2}{2} \tilde{E}^{f_{\mathbb{H}_t^\eta}^T}(f) + \sqrt{-1}\theta \left\langle \frac{2}{\sqrt{\kappa}} \sum_{i=1}^N \log |f_{\mathbb{H}_t^\eta}^T(\cdot) - Y_{T;t}^{(i)}| + Q \log |f_{\mathbb{H}_t^\eta}^{T'}(\cdot)|, f \right\rangle \right) \right] \end{aligned}$$

を得る. (5.18) より, これは \mathcal{F}_t -マルチンゲールの期待値であるので, 次に等しい.

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\exp \left(-\frac{\theta^2}{2} \tilde{E}^{f_{\mathbb{H}_t^\eta}^T}(f) + \sqrt{-1}\theta \left\langle \frac{2}{\sqrt{\kappa}} \sum_{i=1}^N \log |f_{\mathbb{H}_t^\eta}^T(\cdot) - Y_{T;t}^{(i)}| + Q \log |f_{\mathbb{H}_t^\eta}^{T'}(\cdot)|, f \right\rangle \right) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\exp(\sqrt{-1}\theta \langle \tilde{H}_0, f \rangle) \right] \end{aligned}$$

よって, (5.21) の最初の等式が証明された. 2 番目の等式も同様に証明できる. ■

注 5.9 ここでは, 拡張 Gauss 型自由場と多重 SLE の結合を, $A \subset \mathbb{H}_t^\eta$ である領域 A においてのみ考えている. したがって, SLE-包 $K_t^\eta := \overline{\mathbb{H}} \setminus \mathbb{H}_t^\eta$ がどのような状態にあってもよいことになる. よって, 上の主張は径数 κ に依らずに成立する.

6 おわりに

本講義で解説した Gauss 型自由場と多重 SLE との結合状態について、また、そこで重要な役割を果たした Dyson 模型に関してコメントする。

- (i) ここでは Gauss 型自由場と多重 SLE に対してそれぞれ確率空間を用意した上で、それら 2 つの結合を考えた。しかし、Gauss 型自由場の各々の実現に対して、それと結合する多重 SLE 曲線が決定論的に定まるということが本当のところは正しく、この結合系を記述する確率空間は前者のみで十分と考えられる。このような主張は Gauss 型自由場と 1 本の SLE 曲線との結合を議論している Dubédat [19], Sheffield [69], Miller–Sheffield [49, 50, 51, 52] などでも証明されている。ここでは講師の力量不足のため、そのレベルまで話ができなかった。ただ、[34] では Gauss 型自由場の特徴付けに関する次の 2 つの問題を、多重 SLE との結合状態を利用して解決している。

- 共形溶接問題 (conformal welding problem)
- フロー線問題 (flow line problem)

Sheffield [69] は径数 γ をもつ 2 つの Liouville 量子重力を考え、その境界を“溶接”する問題を考えた。そして、共形不変性を保つという要請のもとに溶接された境界は、 $\kappa = \gamma^2$ としたときの SLE_κ 曲線を与えることを証明している。これは SLE_κ 曲線に対する新しい定義であると思なすことができる。本講義では、その多重曲線拡張を議論したことになる。

フロー線問題についてはすでに 5.2 節で少し述べた。これについても、Sheffield [69] や Miller–Sheffield [49, 50, 51, 52] が 1 本の SLE 曲線の場合について詳しく研究をしている。我々の場合には、Gauss 自由場と結合した多重 SLE 曲線が多重フロー線を実現していることになる。 $\kappa = 4$ の場合には、このフロー線、すなわち SLE_4 曲線が Gauss 自由場の等高線を実現しているという結果が [65, 66] で報告されている。

- (ii) 単独の SLE から多重 SLE へ拡張する際の指導原理は複数あり、それは多重 SLE を駆動する確率過程 $(\mathbf{X}_t)_{t \geq 0}$ をどのように選ぶべきであるかという問題と言えると 1.3 節では述べた。しかしこれは必ずしも正確な主張ではない。1 本の SEL 曲線を考えるが、駆動過程としてブラウン運動 $(\sqrt{\kappa}B_t)_{t \geq 0}$ と共に ($n \in \mathbb{N}$ として) 実軸上に n 成分確率過程 $(\mathbf{Z}_t)_{t \geq 0}$ を導入する方法もある。時間発展する共形写像 $(g_t)_{t \geq 0}$ に対する方程式は元々の SLE と同様に

$$\frac{dg_t(z)}{dt} = \frac{2}{g_t(z) - X_t}, \quad t \geq 0, \quad g_0(z) = z \in \mathbb{H}$$

で与えられるが、駆動過程は

$$dX_t = \sqrt{\kappa}dB_t + b(X_t, \mathbf{Z}_t)dt, \quad t \geq 0, \quad X_0 \in \mathbb{R}$$

という形で与える。ここで、 $b(x, \mathbf{z})$ は $x \in \mathbb{R}$ と n 成分ベクトル $\mathbf{z} = (z^{(1)}, \dots, z^{(n)}) \in \mathbb{R}^n$ の実関数である。そして、 $(\mathbf{Z}_t)_{t \geq 0}$ は

$$Z_t^{(i)} = g_t(Z_0^{(i)}), \quad t \geq 0, \quad Z_0^{(i)} \in \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, N$$

のように, g_t のフローに沿って実軸上を時間変化するものとする. このような系を 2 つ用意する. 時刻として t と s というように 2 系統を考え, また, 径数 κ とは別に $\tilde{\kappa}$ を導入し,

$$\begin{aligned} \frac{dg_t(z)}{dt} &= \frac{2}{g_t(z) - X_t}, \quad dX_t = \sqrt{\kappa} dB_t + b(X_t, Y_t, \mathbf{Z}_t; \boldsymbol{\rho}) dt, \\ Y_t &= g_t(Y_0), \quad Z_t^{(i)} = g_t(Z_0^{(i)}), \quad t \geq 0, \quad i = 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (6.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{g}_s(z)}{ds} &= \frac{2}{\tilde{g}_s(z) - \tilde{Y}_s}, \quad d\tilde{Y}_s = \sqrt{\tilde{\kappa}} d\tilde{B}_s + \tilde{b}(\tilde{X}_s, \tilde{Y}_s, \tilde{\mathbf{Z}}_s; \boldsymbol{\rho}) ds, \\ \tilde{X}_s &= \tilde{g}_s(\tilde{X}_0), \quad \tilde{Z}_s^{(i)} = \tilde{g}_s(\tilde{Z}_0^{(i)}), \quad s \geq 0, \quad i = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (6.2)$$

とおく. その上で, Dubédat [18] は 2 つの SLE 曲線 $(\eta_t)_{t \geq 0}$ と $(\tilde{\eta}_s)_{s \geq 0}$ に対して, 微小時間 ε の間での生成操作として 2 通りを考え,

$$\eta_\varepsilon \cup g_\varepsilon^{-1}(\tilde{\eta}_\varepsilon) \stackrel{(\text{law})}{=} \tilde{g}_{c\varepsilon}^{-1}(\eta_{\varepsilon'}) \cup \tilde{\eta}_{c\varepsilon} \quad (6.3)$$

が成り立つという要請をおいた. Dubédat は (6.3) より $\tilde{\varepsilon}$ と ε' を定め, この可換条件を満たすために関数 b および \tilde{b} に課される条件式を明らかにしている. 特に, 関数 $b = b(x, z)$ が実径数 $\boldsymbol{\rho} = (\rho^{(1)}, \dots, \rho^{(n)}) \in \mathbb{R}^n$ を用いて, $b(x, z) = \sum_{i=1}^n \frac{\rho^{(i)}}{z^{(i)} - x}$ の形で与えられるとき, (6.1) の解 $(g_t)_{t \geq 0}$ を $\text{SLE}_{\kappa, \boldsymbol{\rho}}$ という. Dubédat [18] は可換 $\text{SLE}_{\kappa, \boldsymbol{\rho}}$ 系の構成を行っているが, これは多重 SLE の構成方法を与えるものであると考えることができる. 実際, 多重 SLE の構成に関する Bauer–Bernard–Kytölä [4] の議論と比較すると, 適当な設定においては両者は等価であり, 双方ともに 1.4 節で述べた駆動過程のドリフト項に対する条件式 (1.23)–(1.25) を導くことが確かめられる [41]. 1.3 節で述べた多重 SLE 駆動過程の選定問題とは, SLE_κ から $\text{SLE}_{\kappa, \boldsymbol{\rho}}$ への可換的拡張問題も含んでいるものと考えられるべきである. この事項については, レポート問題として課してみることにした.

(iii) この講義では, 多重 SLE の駆動過程として Dyson 模型 (1.27), あるいは (1.29), およびその後進過程 (1.30) を採用した. この Dyson 模型はランダム行列理論 [48, 24, 1] において最もよく研究されている固有値過程である. 本講義では示すことができていないが, この Dyson 模型で駆動される多重 SLE 曲線 $\eta^{(i)}, i = 1, \dots, N$ は, いずれも $t \rightarrow \infty$ において $\eta_t^{(i)} \rightarrow \infty$ となる. すなわち, 実軸上の点 $\eta_0^{(i)} \in \mathbb{R}$ から無限遠点 ∞ に向かう n 本の SLE 曲線の束を形成する. そのため, Bauer–Bernard–Kytölä [4] はこの場合を弦状多重 SLE (chordal multiple SLE) と称している. 他方, 多重 SLE 研究としては, 複数の SLE 曲線が領域 $D \subset \mathbb{C}$ 内で衝突することがある場合の方が多く研究されている [4, 6, 44, 56]. 格子上の統計力学模型に見られるクラスター配置の連続極限を記述する上では, そのような場合の方が有効であるようである. ここで着目した Dyson 模型で駆動される多重 SLE は, 1 本の SLE 曲線が $\kappa = 4$ と $\kappa = 8$ でその定性的な様相を大きく変えたことに相当する転移を示すことが予想される. そのため, 2 次元平面上の高分子鎖集団における **coil-globule** 転移の数理模型としても考えられるのではないかと思われる. この問題に対して, Gauss 型自由場との結合を通じて研究を進めることができるものと考えられる.

(iv) ランダム行列理論 [74, 48, 24, 1] とそれに関連する多変数 (多粒子) 確率過程 [8, 9, 36, 37, 38, 25, 26, 33] は多くのバリエーションが考えられる. そのため, 多岐に亘る研究が盛んである. これに応じて, ここで扱った Dyson 模型で駆動される多重 SLE もいくつものバリエーションが考えられる [72, 34, 35]. これについては, レポート問題という形で議論したい. また, ランダム行列に関連する確率過程の流体力学極限 [60, 11, 12, 1] や無限粒子極限 [38, 53, 54, 73, 55] の研究も盛んである. 多重 SLE における対応する話題も興味深い [17, 16, 29, 30].

7 レポート問題

[問題 1] 1.1 節ではコンパクト \mathbb{H} -包全体 \mathcal{Q} の元 K に対して, 流体力学条件

$$g_{\mathbb{H}\setminus K}(z) = z + \frac{\text{hcap}(K)}{z} + O\left(\frac{1}{|z|^2}\right) \quad (7.1)$$

を満たす共形変換 $g_{\mathbb{H}\setminus K} : \mathbb{H} \setminus K \rightarrow \mathbb{H}$ を考えた. K を \mathcal{Q} の元として $r(> 0)$ 倍だけ拡大・縮小し, 実軸に沿って $b \in \mathbb{R}$ だけ平行移動したものを $rK + b$ と書くことにする. g は共形変換であることから

$$g_{\mathbb{H}\setminus(rK+b)}(z) = rg_{\mathbb{H}\setminus K}((z-b)/r) + b \quad (7.2)$$

が成り立つ.

- (1) (7.1) による半平面容量 $\text{hcap}(K)$ の定義より, 次を導きなさい.

$$\text{hcap}(rK + b) = r^2 \text{hcap}(K) \quad (7.3)$$

- (2) $U_t \in \mathbb{R}, t \geq 0$ で駆動される Loewner 方程式

$$\frac{dg_t(z)}{dt} = \frac{2}{g_t(z) - U_t}, \quad t \geq 0, \quad g_0(z) = z \in \mathbb{H}$$

を考える. 両辺を z で微分すると

$$\frac{dg'_t(z)}{dt} = -\frac{2g'_t(z)}{(g'_t(z) - U_t)^2} \quad (7.4)$$

が得られる. いま, $0 < t = \varepsilon \ll 1$ とする. 初期条件 $g_0(z) = z \in \mathbb{H}$ より, 次の評価を導きなさい.

$$g'_\varepsilon(z) = 1 - \frac{2}{(z - U_0)^2} \varepsilon + O(\varepsilon^2) \quad (7.5)$$

- (3) ε を微小量とする. g_ε は $U_0 \in \mathbb{R}$ を出発点とする短い截線 $\eta(0, \varepsilon]$ を消去する等角写像である ($g_\varepsilon : \mathbb{H} \setminus \eta(0, \varepsilon] \rightarrow \mathbb{H}$). いま, 実軸上の $y \neq U_0$ を出発点とする別の短い截線 $\tilde{\eta}(0, \tilde{\varepsilon}]$ があったとする. この截線を g_ε で写した像を $g_\varepsilon(\tilde{\eta}(0, \tilde{\varepsilon}))$ と書くことにする. このとき,

$$\text{hcap}(g_\varepsilon(\tilde{\eta}(0, \tilde{\varepsilon}))) = g'_\varepsilon(y)^2 \text{hcap}(\tilde{\eta}(0, \tilde{\varepsilon})) + o(\varepsilon) \quad (7.6)$$

が成り立つことを示しなさい.

[問題 2] 複素平面 \mathbb{C} の第 1 象限 (first orthant) を $\mathbb{O} := \{z \in \mathbb{C} : \text{Re } z > 0, \text{Im } z > 0\}$ と書くことにする. この上での Gauss 型自由場と多重 SLE の結合について, 次の誘導に従って考察せよ. ただし, 本講義ノート本文での記号で添え字 \mathbb{H} を \mathbb{O} に替えたものは, それらの意味を推測することは容易であろうから, 特に定義などは書かないことにする.

- (1) \mathbb{O} 上の Gauss 型自由場の Green 関数は, Dirichlet 境界条件下と自由境界条件下で, それぞれ次

のように与えられることを示せ.

$$\begin{aligned} G_{\mathbb{O}}(z, w) &= \log \left| \frac{(z - \bar{w})(z + \bar{w})}{(z - w)(z + w)} \right| \\ &= \log |z - \bar{w}| + \log |z + \bar{w}| - \log |z - w| - \log |z + w|, \\ &= \operatorname{Re} \log(z - \bar{w}) + \operatorname{Re} \log(z + \bar{w}) - \operatorname{Re} \log(z - w) - \operatorname{Re} \log(z + w), \end{aligned} \quad (7.7)$$

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{\mathbb{O}}(z, w) &= -\log |z - \bar{w}| - \log |z + \bar{w}| - \log |z - w| - \log |z + w|, \\ &= -\operatorname{Re} \log(z - \bar{w}) - \operatorname{Re} \log(z + \bar{w}) - \operatorname{Re} \log(z - w) - \operatorname{Re} \log(z + w), \end{aligned} \quad (7.8)$$

$z, w, \in \mathbb{O}, z \neq w.$

(2) \mathbb{O} 上の多重 SLE として, 次の形の方程式を考えることにする [72, 35]:

$$\frac{dg_{\mathbb{O}_t^\eta}(z)}{dt} = \sum_{i=1}^N \left(\frac{2}{g_{\mathbb{O}_t^\eta}(z) - X_t^{(i)}} + \frac{2}{g_{\mathbb{O}_t^\eta}(z) + X_t^{(i)}} \right) + \frac{4\delta}{g_{\mathbb{O}_t^\eta}(z)}, \quad 0 \leq t < \infty, \quad (7.9)$$

$$\frac{df_{\mathbb{O}_t^\eta}^T(z)}{dt} = -\sum_{i=1}^N \left(\frac{2}{f_{\mathbb{O}_t^\eta}^T(z) - Y_{T;t}^{(i)}} + \frac{2}{f_{\mathbb{O}_t^\eta}^T(z) + Y_{T;t}^{(i)}} \right) - \frac{4\delta}{g_{\mathbb{O}_t^\eta}(z)}, \quad 0 \leq t \leq T < \infty. \quad (7.10)$$

ただし, δ は未定径数とする. 命題 3.1 と 3.3 に対応するものを証明せよ.

(3) (7.9) と (7.10) の駆動過程はともに $\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ 上の N 粒子系であり, 次の確率微分方程式系を満たすものとする:

$$dX_t^{(i)} = \sqrt{\kappa} dB_t^{(i)} + F^{(i)}(\mathbf{X}_t) dt, \quad 0 \leq t < \infty, \quad (7.11)$$

$$dY_{T;t}^{(i)} = \sqrt{\kappa} d\tilde{B}_t^{(i)} - F^{(i)}(\mathbf{X}_t) dt, \quad 0 \leq t < T < \infty. \quad (7.12)$$

ただし, $\nu \geq 0$ として,

$$F_{\mathbb{O}}^{(i)}(\mathbf{x}) = \frac{8(\nu+1) - \kappa}{2} \frac{1}{x^{(i)}} + 4 \sum_{\substack{1 \leq j \leq N, \\ j \neq i}} \left(\frac{1}{x^{(i)} - x^{(j)}} + \frac{1}{x^{(i)} + x^{(j)}} \right), \quad i = 1, \dots, N, \quad (7.13)$$

とする. この N 粒子確率過程 $(\mathbf{X}_t)_{t \geq 0}$ はランダム行列理論で良く研究されているものであり, ここでは, 径数 $(8/\kappa, \nu)$ をもつ **Bru-Wishart** 過程とよぶことにする [74, 8, 9, 36, 1, 35] (付録 A.1 節を参照). 複素値対数ポテンシャルとして, (5.10) の代わりに

$$\Phi_{\mathbb{O}}(z, \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N \left\{ \log(z - x^{(i)}) + \log(z + x^{(i)}) \right\} + q \log z \quad (7.14)$$

を採用することにする. ここで q は未定径数とする. δ, ν, q の間に適当な関係を設定することにより, 命題 5.5 に対応するものを証明せよ.

(4) \mathbb{O} 上の Gauss 型自由場と多重 SLE の結合系に対して, 定理 5.8 に対応するものを証明せよ.

(5) 共形変換

$$\phi(z) = \sqrt{z} \quad (7.15)$$

によって, \mathbb{H} は \mathbb{O} に写される. 上で求めた \mathbb{O} 上の結果を, 本講義で述べた \mathbb{H} 上の結果から直接的に, 共形写像 (7.15), あるいはそれに随伴する同値類として結論付けることは可能であるか.

[問題 3] \mathbb{C} 上の単位円板を $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ とする. この上ではどうなるであろうか. まず, \mathbb{D} 上の Gauss 型自由場の Green 関数を, Dirichlet 境界条件下と自由境界条件下で求めよ. \mathbb{D} 上の **radial 多重 SLE** は

$$\frac{dg_{\mathbb{D}_t^\eta}(z)}{dt} = g_{\mathbb{D}_t^\eta}(z) \sum_{i=1}^N \frac{e^{\sqrt{-1}X_t^{(i)}} + g_{\mathbb{D}_t^\eta}(z)}{e^{\sqrt{-1}X_t^{(i)}} - g_{\mathbb{D}_t^\eta}(z)}, \quad t \geq 0, \quad g_{\mathbb{D}_t^\eta}(z) = g_{\mathbb{D}}(z) = z \in \mathbb{D} \quad (7.16)$$

で与えられる [30]. 他方, 単位円周 $\partial\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ 上の **Dyson 模型** は次の確率微分方程式系によって与えられる [12, 10, 32, 30]:

$$dX_t^{(i)} = \sqrt{\kappa} dB_t^{(i)} + 2 \sum_{\substack{1 \leq j \leq N, \\ j \neq i}} \cot\left(\frac{X_t^{(i)} - X_t^{(j)}}{2}\right) dt, \quad t \geq 0, \quad i = 1, \dots, N. \quad (7.17)$$

(7.17) で駆動される (7.16) を考えることにする. \mathbb{D} 上の Gauss 型自由場と上記のような多重 SLE を結合させるにはどのような複素値対数ポテンシャルを考えればよいだろうか. \mathbb{H} と \mathbb{D} とは Möbius 変換で共形変換される. この事実が, 上の問いに解答する上で役立つ.

[問題 4] Gauss 型自由場と多重 SLE を考える単連結領域 $D \subset \mathbb{C}$ として, 本講義では $D = \mathbb{H}$ を考え, 上の 2 つの問題ではそれぞれ $D = \mathbb{O}$ と $D = \mathbb{D}$ の場合を問うた. これらの間の変換則を議論し, 統一的に見ることは可能であろうか. 文献 [67] では Schramm と Wilson が radial SLE ($D = \mathbb{D}$ の場合), chordal SLE ($D = \mathbb{H}$ の場合), および双極状 SLE (dipolar SLE) (帯状領域 (strip) $D = \mathbb{S} := \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z \in (0, \pi/2)\}$ の場合) という 3 つのバリエーションの間の変換則を論じている. この文献を参考にして, 上の問いに関して議論せよ.

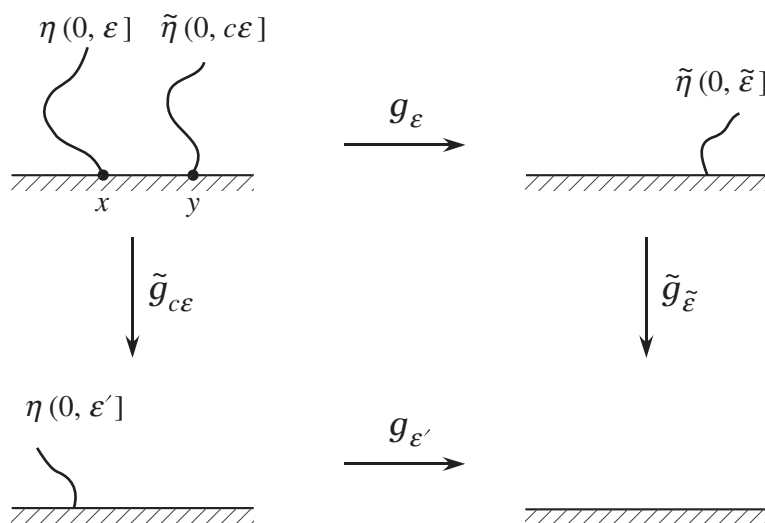


図 10: 2 本の截線 $\eta(0, \varepsilon]$ と $\tilde{\eta}(0, c\varepsilon]$ を消去する共形変換 $\mathbb{H} \setminus \{\eta(0, \varepsilon] \cup \tilde{\eta}(0, c\varepsilon]\} \rightarrow \mathbb{H}$ を行うために 2 つのスキームを考える. 上は, この 2 つのスキームの可換図である.

[問題 5] $0 < \varepsilon \ll 1$ とし, c を未定径数とする. $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, x \neq y$ とし, x を出発点とする短い截線 $\eta(0, \varepsilon]$ と, y を出発点とする短い截線 $\tilde{\eta}(0, c\varepsilon]$ の 2 本があるものとする. 前者を截線 1, 後者を截線 2 とよぶことにする. $\text{hcap}(\eta(0, \varepsilon]) = 2\varepsilon, \text{hcap}(\tilde{\eta}(0, c\varepsilon]) = 2c\varepsilon$ である. この両者を消去する共形変換

$$\mathbb{H} \setminus \{\eta(0, \varepsilon] \cup \tilde{\eta}(0, c\varepsilon]\} \rightarrow \mathbb{H}$$

を 2 通りのスキームで実行する。図 10 を参照せよ。

- (1) 最初のスキームは、はじめに截線 1 を単独で消去する共形変換 g_ε を施すものである。 g_ε を施した結果、截線 2 は $\tilde{\eta}(0, \tilde{\varepsilon}]$ になったとする。 g_ε を施した後に残った截線 2 の半平面容量に対して、[問題 1] (3) より、

$$\text{hcap}(\tilde{\eta}(0, \tilde{\varepsilon}]) = g'_\varepsilon(y)^2 \text{hcap}(\tilde{\eta}(0, c\varepsilon]) + o(\varepsilon^2) \quad (7.18)$$

が成り立つことになる。これより、次の関係式を導きなさい。

$$\tilde{\varepsilon} = c\varepsilon \left(1 - \frac{4\varepsilon}{(y-x)^2} \right) + o(\varepsilon^2) \quad (7.19)$$

この後に、残りの截線 2 を消去する共形変換 $\tilde{g}_{\tilde{\varepsilon}}$ を施すことにする。

- (2) 2 番目のスキームでは、上とは逆にまず截線 2, すなわち $\tilde{\eta}(0, c\varepsilon]$ を先に単独で消去する共形写像を施す。この共形変換は $\tilde{g}_{c\varepsilon}$ と表される。未定径数 ε' を導入して、この変換で截線 1 は $\eta(0, \varepsilon']$ に写されたとする。共形変換 $\tilde{g}_{c\varepsilon}$ が施された後に残った截線 1 の平面容量に対しては、

$$\text{hcap}(\eta(0, \varepsilon']) = \tilde{g}'_{c\varepsilon}(x)^2 \text{hcap}(\eta(0, \varepsilon]) \quad (7.20)$$

が成り立つことになる。これより、次の等式を導きなさい。

$$\varepsilon' = \varepsilon \left(1 - \frac{4c\varepsilon}{(x-y)^2} \right) + o(\varepsilon^2) \quad (7.21)$$

この後に、残りの截線 1 を消去する共形変換 $g_{\varepsilon'}$ を施すことにする。

(6.1) で与えられた時間発展系 $(X_t, Y_t, \mathbf{Z}_t)_{t \geq 0}$ の時間発展生成子は

$$\mathcal{L} = \frac{\kappa}{2} \partial_x^2 + b(x, y, \mathbf{z}) \partial_x + \frac{2}{y-x} \partial_y + \sum_{i=1}^n \frac{2}{z_i - x} \partial_{z_i} \quad (7.22)$$

で与えられる。 $f = f(x, y, \mathbf{z}) \in \mathcal{C}_c^2(\mathbb{R}^{n+2})$ に対して、期待値の時間発展は

$$\frac{d}{dt} \mathbb{E}[f(X_t, Y_t, \mathbf{Z}_t)] = \mathbb{E}[(\mathcal{L}f)(X_t, Y_t, \mathbf{Z}_t)]$$

に従うので、 $\mathcal{P}_t := e^{t\mathcal{L}}$ とおくと、その解は

$$\mathbb{E}[f(X_t, Y_t, \mathbf{Z}_t)] = (\mathcal{P}_t f)(X_0, Y_0, \mathbf{Z}_0)$$

で与えられることになる。同様に (6.2) の系に対しては、時間発展生成子は

$$\mathcal{M} = \frac{\kappa}{2} \partial_y^2 + \tilde{b}(x, y, \mathbf{z}) \partial_y + \frac{2}{x-y} \partial_x + \sum_{i=1}^n \frac{2}{z_i - y} \partial_{z_i} \quad (7.23)$$

で与えられる。 $\mathcal{Q}_s := e^{s\mathcal{M}}$ とおく。上の (1) で説明した最初のスキームは

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[f(\tilde{g}_\varepsilon(X_\varepsilon), Y_\varepsilon, \tilde{g}_\varepsilon(\mathbf{Z}_\varepsilon))] &= \mathbb{E}[(\mathcal{Q}_{\tilde{\varepsilon}} f)(X_\varepsilon, Y_\varepsilon, \mathbf{Z}_\varepsilon)] \\ &= (\mathcal{P}_\varepsilon \mathcal{Q}_{\tilde{\varepsilon}} f)(X_0, Y_0, \mathbf{Z}_0) \\ &= \left[\left(1 + \varepsilon \mathcal{L} + \frac{\varepsilon^2}{2} \mathcal{L}^2 \right) \left(1 + \tilde{\varepsilon} \mathcal{M} + \frac{\tilde{\varepsilon}^2}{2} \mathcal{M}^2 \right) f \right] (X_0, Y_0, \mathbf{Z}_0) + o(\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (7.24)$$

を与え、2番目のスキームは

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}[f(X_{\varepsilon'}, g_{\varepsilon'}(Y_{c\varepsilon}), \tilde{g}_{\varepsilon'}(\mathbf{Z}_{c\varepsilon}))] \\
&= (\mathcal{Q}_{c\varepsilon} \mathcal{P}_{\varepsilon'} f)(X_0, Y_0, \mathbf{Z}_0) \\
&= \left[\left(1 + c\varepsilon \mathcal{M} + \frac{(c\varepsilon)^2}{2} \mathcal{M}^2 \right) \left(1 + \varepsilon' \mathcal{L} + \frac{\varepsilon'^2}{2} \mathcal{L}^2 \right) f \right] (X_0, Y_0, \mathbf{Z}_0) + o(\varepsilon^2) \quad (7.25)
\end{aligned}$$

を与えることになる。

- (3) 小問 (1), (2) で導いた関係式 (7.19) と (7.21) を代入して $\tilde{\varepsilon}$ と ε' を消去した上で、(7.24) と (7.25) を等置することにより、次の交換関係を導きなさい。

$$[\mathcal{L}, \mathcal{M}] := \mathcal{L}\mathcal{M} - \mathcal{M}\mathcal{L} = \frac{4}{(y-x)^2}(\mathcal{M} - \mathcal{L}) \quad (7.26)$$

[問題 6] [問題 5] の続きとして、以下の問いに答えなさい。

- (1) 係数 C_{xy}, C_x, C_y を次式で定義する。

$$[\mathcal{L}, \mathcal{M}] - \frac{4}{(y-x)^2}(\mathcal{M} - \mathcal{L}) = C_{xy} \partial_x \partial_y + C_x \partial_x + C_y \partial_y \quad (7.27)$$

次を導きなさい。

$$\begin{aligned}
C_{xy} &= \kappa \partial_x \tilde{b} - \tilde{\kappa} \partial_y b, \\
C_x &= \frac{2\partial_x b}{y-x} + \sum_{i=1}^n \frac{2\partial_{z_i} b}{y-z_i} - \tilde{b} \partial_y b + \frac{2b}{(y-x)^2} + \frac{2(6-\kappa)}{(y-x)^3} - \frac{\tilde{\kappa}}{2} \partial_y^2 b, \\
C_y &= - \left[\frac{2\partial_x \tilde{b}}{x-y} + \sum_{i=1}^n \frac{2\partial_{z_i} \tilde{b}}{x-z_i} - b \partial_x \tilde{b} + \frac{2\tilde{b}}{(x-y)^2} + \frac{2(6-\tilde{\kappa})}{(x-y)^3} - \frac{\kappa}{2} \partial_x^2 \tilde{b} \right]. \quad (7.28)
\end{aligned}$$

可換条件 (7.26) $\iff C_{xy} = C_x = C_y = 0$ である。

- (2) 以下では簡単のため、 $n=0$ とし z 依存性は考えないことにする。さらに、 $\rho, \tilde{\rho} \in \mathbb{R}$ として、

$$b(x, y) = \frac{\rho}{x-y}, \quad \tilde{b}(x, y) = \frac{\tilde{\rho}}{y-x} \quad (7.29)$$

と仮定する。このとき、可換条件は次に等しいことを導きなさい。

$$\tilde{\rho} = \frac{\tilde{\kappa}}{\kappa} \rho, \quad (7.30)$$

$$(\tilde{\kappa} - 4)\rho - \frac{\tilde{\kappa}}{\kappa} \rho^2 + 2(6 - \kappa) = 0, \quad (7.31)$$

$$(\kappa - 4)\frac{\tilde{\kappa}}{\kappa} \rho - \frac{\tilde{\kappa}}{\kappa} \rho^2 + 2(6 - \tilde{\kappa}) = 0. \quad (7.32)$$

- (3) (7.31) と (7.32) が共通の根 ρ を持つ必要がある。終結式を求めよ。その結果、 $\kappa, \tilde{\kappa}, \rho, \tilde{\rho}$ の間にどのような関係が成り立つべきか、必要な場合には場合分けして答えよ。

(4) 小問 (1) で得た $C_{xy} = 0$ は

$$\text{rot} \begin{pmatrix} \tilde{\kappa} \tilde{b} \\ \kappa \tilde{b} \end{pmatrix} = 0$$

と書ける. このことから, 正則関数で与えられるポテンシャル ψ があって,

$$b = \kappa \partial_x \log \psi, \quad \tilde{b} = \tilde{\kappa} \partial_y \log \psi \quad (7.33)$$

と書けることを証明しなさい.

(5) $C_x = C_y = 0$ より, 次の方程式を導きなさい.

$$\begin{aligned} \frac{\kappa}{2} \partial_x^2 \psi - 2 \left(\frac{1}{x-y} \partial_y + \frac{h_{\tilde{\kappa}}}{(x-y)^2} \right) \psi &= 0, \\ \frac{\tilde{\kappa}}{2} \partial_y^2 \psi - 2 \left(\frac{1}{y-x} \partial_x + \frac{h_{\kappa}}{(y-x)^2} \right) \psi &= 0. \end{aligned} \quad (7.34)$$

ただし, $h_{\kappa} = \frac{6-\kappa}{2\kappa}, h_{\tilde{\kappa}} = \frac{6-\tilde{\kappa}}{2\tilde{\kappa}}$ である. (7.34) は 1.4 節で述べた演算子 (1.24) に対する補助関数 Z の ‘null 条件’ (1.25) の $N=2$ の場合に他ならない.

A ランダム行列理論と関連する多粒子確率過程

A.1 固有値過程と特異値過程

$N \in \mathbb{N}$ に対して, H_N を $N \times N$ のエルミート行列全体の空間とし, U_N を $N \times N$ のユニタリー行列全体の空間 (ユニタリー群) とする. 複素数値過程 $(M_{ij}(t))_{t \geq 0, 1 \leq i, j \leq N}$, $t \geq 0$ を考える. ただし, エルミート条件

$$\overline{M_{ji}(t)} = M_{ij}(t), \quad i, j = 1, \dots, N$$

を課すことにする. 空間 $S = \mathbb{R}$ と $S = \mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ に対して, **Weyl 領域** (Weyl chamber) を次式で定義する.

$$\mathbb{W}_N(S) := \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N) \in S^N : x_1 < \dots < x_N\}$$

また, この閉包を $\overline{\mathbb{W}_N(S)} = \{\mathbf{x} \in S^N : x_1 \leq \dots \leq x_N\}$ と書くことにする. 各時刻 $t \geq 0$ において, $M(t)$ を次のように対角化するユニタリー行列 $U(t) = (U_{ij}(t))_{1 \leq i, j \leq N} \in U_N$ が存在する

$$U^\dagger(t) M(t) U(t) = \text{diag}(\Lambda_1(t), \dots, \Lambda_N(t))$$

ただしここで, $M(t)$ の固有値を $\{\Lambda_i(t)\}_{i=1}^N$ と書いた. また, $U^\dagger(t)$ は $U(t)$ のエルミート共役を表す; $U_{ij}^\dagger(t) = \overline{U_{ji}(t)}$, $1 \leq i, j \leq N$. 固有値は次が成り立つように番号付けをすることにする.

$$\mathbf{\Lambda} := (\Lambda_1(t), \dots, \Lambda_N(t)) \in \overline{\mathbb{W}_N(\mathbb{R})}, \quad t \geq 0.$$

行列過程の変動 $dM(t) := (dM_{ij}(t))_{1 \leq i, j \leq N}$ に対して, 次のような 2 次変動を考える.

$$\Gamma_{ij,kl}(t) := \left\langle (U^\dagger dMU)_{ij}, (U^\dagger dMU)_{kl} \right\rangle_t, \quad 1 \leq i, j, k, l \leq N, \quad t \geq 0.$$

次を証明することができる [8, 36, 1].

命題 A.1 $(M_{ij}(t))_{t \geq 0}, 1 \leq i, j \leq N$ は半マルチンゲールであるとする. このとき, 固有値過程 $(\Lambda(t))_{t \geq 0}$ は次の連立の確率微分方程式に従う.

$$d\Lambda_i(t) = d\mathcal{M}_i(t) + dJ_i(t), \quad t \geq 0, \quad i = 1, \dots, N$$

ただしここで, $(\mathcal{M}_i(t))_{t \geq 0}, i = 1, \dots, N$ は 2 次変動

$$\langle \mathcal{M}_i, \mathcal{M}_j \rangle_t = \int_0^t \Gamma_{ii,jj}(s) ds,$$

をもつマルチンゲールであり, また, $(J_i(t))_{t \geq 0}, 1 \leq i \leq N$ は次式に従う有界変動過程である.

$$dJ_i(t) = \sum_{j=1}^N \frac{\mathbf{1}_{\Lambda_i(t) \neq \Lambda_j(t)}}{\Lambda_i(t) - \Lambda_j(t)} \Gamma_{ij,ji}(t) dt + d\Upsilon_i(t), \quad t \geq 0, \quad i = 1, \dots, N.$$

上の式の最後の項 $d\Upsilon_i(t)$ は $(U^\dagger(t)dM(t)U(t))_{ii}$ の有界変動部分を表す.

$\nu \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ として, $(B_{ij}(t))_{t \geq 0}, (\tilde{B}_{ij}(t))_{t \geq 0}, 1 \leq i \leq N + \nu, 1 \leq j \leq N$ を互いに独立な 1 次元標準ブラウン運動とする. $1 \leq i \leq j \leq N$ に対して,

$$S_{ij}(t) = \begin{cases} B_{ij}(t)/\sqrt{2}, & (i < j), \\ B_{ii}(t), & (i = j), \end{cases} \quad A_{ij}(t) = \begin{cases} \tilde{B}_{ij}(t)/\sqrt{2}, & (i < j), \\ 0, & (i = j), \end{cases}$$

とおき, $S_{ij}(t) = S_{ji}(t)$ and $A_{ij}(t) = -A_{ji}(t), t \geq 0, 1 \leq j < i \leq N$ とする.

例 A.2 正行列値の確率過程 $M(t) = (M_{ij}(t))_{1 \leq i, j \leq N}$,

$$M_{ij}(t) = S_{ij}(t) + \sqrt{-1}A_{ij}(t), \quad t \geq 0, \quad 1 \leq i, j \leq N$$

を考える. すると, $t \geq 0, 1 \leq i, j, k, \ell \leq N$ に対して, 次を得ることが⁵できる.

$$\begin{aligned} \langle dM_{ij}, dM_{k\ell} \rangle_t &= \delta_{i\ell} \delta_{jk} dt, \\ \Gamma_{ij,k\ell}(t) &= \delta_{i\ell, jk}, \\ \langle d\mathcal{M}_i, d\mathcal{M}_j \rangle_t &= \Gamma_{ii,jj}(t) dt = \delta_{ij} dt, \\ \Gamma_{ij,ji}(t) &\equiv 1. \end{aligned}$$

よって, 命題 A.1 より, 固有値過程 $(\Lambda(t))_{t \geq 0}$ は, 次の方程式で $\beta = 2$ としたものに従うことが導かれる.

$$d\Lambda_i(t) = dB_i(t) + \frac{\beta}{2} \sum_{1 \leq j \leq N, j \neq i} \frac{dt}{\Lambda_i(t) - \Lambda_j(t)}, \quad t \geq 0, \quad i = 1, \dots, N \quad (\text{A.1})$$

ここで, $(B_i(t))_{t \geq 0}, 1 \leq i \leq N$ は, 上で用いた $(B_{ij}(t))_{t \geq 0}$ や $(\tilde{B}_{ij}(t))_{t \geq 0}$ とは独立な 1 次元標準ブラウン運動である. 通常は (A.1) を径数 β の **Dyson** のブラウン運動模型, あるいは単に **Dyson** 模型とよぶ [23, 33].

例 A.3 $(N + \nu) \times N$ の矩形行列に値をとる確率過程

$$K(t) = (B_{ij}(t) + \sqrt{-1}\tilde{B}_{ij}(t))_{1 \leq i \leq N + \nu, 1 \leq j \leq N}, \quad t \geq 0$$

を考え、 H_N -値の確率過程を

$$M(t) = K^\dagger(t)K(t), \quad t \geq 0$$

で定義する。行列 M は正定値であり、よってその固有値は非負である; $\Lambda_i(t) \in \mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$, $t \geq 0, 1 \leq i \leq N$. このとき, $t \geq 0, 1 \leq i, j, k, \ell \leq N$ に対して, 次を示すことができる.

$$\begin{aligned} dM_{ij}(t) \text{ の有界変動部分} &= 2(N + \nu)\delta_{ij}dt, \\ \langle dM_{ij}, dM_{k\ell} \rangle_t &= 2(M_{i\ell}(t)\delta_{jk} + M_{k\ell}(t)\delta_{i\ell})dt, \\ d\Upsilon_i(t) &= 2(N + \nu)dt, \\ \Gamma_{ij,ji}(t) &= 2(\Lambda_i(t) + \Lambda_j(t)), \\ \langle dM_i, dM_j \rangle_t &= \Gamma_{ii,jj}(t)dt = 4\Lambda_i(t)\delta_{ij}dt. \end{aligned}$$

よって, 命題 A.1 より, $(M(t))_{t \geq 0}$ の固有値過程は

$$\begin{aligned} d\Lambda_i(t) &= 2\sqrt{\Lambda_i(t)}d\tilde{B}_i(t) \\ &+ \beta \left[(\nu + 1) + 2\Lambda_i(t) \sum_{1 \leq j \leq N, j \neq i} \frac{1}{\Lambda_i(t) - \Lambda_j(t)} \right] dt, \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

$t \geq 0, 1 \leq i \leq N$ with $\beta = 2$ で与えられることになる. ただしここで, $(\tilde{B}_i(t))_{t \geq 0, 1 \leq i \leq N}$ は, 矩形行列の成分を与えるために用いた $(B_{ij}(t))_{t \geq 0}$ and $(\tilde{B}_{ij}(t))_{t \geq 0, 1 \leq i, j \leq N}$ とは異なる, 互いに独立な 1 次元標ブラウン運動である.

$M(t)$ の固有値の正の平方根は, 矩形行列 $K(t)$ の特異値 (singular value) を与える. これを

$$\mathcal{S}_i(t) = \sqrt{\Lambda_i(t)}, \quad t \geq 0, \quad 1 \leq i \leq N \quad (\text{A.3})$$

と書くことにする. これらに対する確率微分方程式は (A.2) から次の式で $\beta = 2$ としたもので与えられることが分かる.

$$\begin{aligned} d\mathcal{S}_i(t) &= d\tilde{B}_i(t) + \frac{\beta(\nu + 1) - 1}{2\mathcal{S}_i(t)} dt \\ &+ \frac{\beta}{2} \sum_{1 \leq j \leq N, j \neq i} \left(\frac{1}{\mathcal{S}_i(t) - \mathcal{S}_j(t)} + \frac{1}{\mathcal{S}_i(t) + \mathcal{S}_j(t)} \right) dt, \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

$t \geq 0, 1 \leq i \leq N$. ただし, $\nu \in \mathbb{N}_0$ である. 通常は (A.2), あるいは (A.4) を **Bru-Wishart** 過程とよぶ.

A.2 1次元に閉じ込められた2次元クーロンガス系

$\beta = 8/\kappa$ とおき, $Y_i^{\mathbb{R}}(t) := \Lambda_i(\kappa t)$, および $Y_i^{\mathbb{R}^+}(t) := \mathcal{S}_i(\kappa t), t \geq 0, 1 \leq i \leq N$ とおくと, (A.1) と (A.4) はそれぞれ, 次のように書き替えられる.

$$\begin{aligned} dY_i^{\mathbb{R}}(t) &= \sqrt{\kappa}dB_i(t) + 4 \sum_{1 \leq j \leq N, j \neq i} \frac{dt}{Y_i^{\mathbb{R}}(t) - Y_j^{\mathbb{R}}(t)}, \quad t \geq 0, \quad 1 \leq i \leq N, \\ dY_i^{\mathbb{R}^+}(t) &= \sqrt{\kappa}d\tilde{B}_i(t) + \frac{8(\nu + 1) - \kappa}{2Y_i^{\mathbb{R}^+}(t)} dt \\ &+ 4 \sum_{1 \leq j \leq N, j \neq i} \left(\frac{1}{Y_i^{\mathbb{R}^+}(t) - Y_j^{\mathbb{R}^+}(t)} + \frac{1}{Y_i^{\mathbb{R}^+}(t) + Y_j^{\mathbb{R}^+}(t)} \right) dt, \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

上の2つの系は、対数関数を用いて与えられるポテンシャルを

$$\phi^S(\mathbf{x}) := \begin{cases} 4 \sum_{1 \leq i < j \leq N} \log(x_j - x_i), & (S = \mathbb{R}), \\ 4 \sum_{1 \leq i < j \leq N} \left[\log(x_j - x_i) + \log(x_j + x_i) \right] + \frac{8(\nu + 1) - \kappa}{2} \sum_{i=1}^N \log x_i, & (S = \mathbb{R}_+). \end{cases}$$

このように導入しておく、 $S = \mathbb{R}$, あるいは $S = \mathbb{R}_+$ として、

$$dY_i^S(t) = \sqrt{\kappa} dB_i(t) + \left. \frac{\partial \phi^S(\mathbf{x})}{\partial x_i} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{Y}^S(t)} dt, \quad t \geq 0, \quad 1 \leq i \leq N$$

このように表される。2次元平面上で静電磁気学を考えた場合、2つの電荷の間にはたらくクーロン力は距離に反比例し、よって、静電ポテンシャルは対数関数で与えられる。このことから、Dyson 模型や Bru–Wishart 過程は 2次元クーロン気体 (2D–Coulomb gas) が実軸 \mathbb{R} やその正の部分 \mathbb{R}_+ といった 1次元空間に閉じ込められた系であると思うことができる。

B 追加文献

講義中の質問やコメントに関して、次の文献を追加する。

- 離散複素解析 (discrete complex analysis) に関するもの [21, 20].
- グリーン関数の一般論に関するもの [15].

謝辞

この2年間、研究室のセミナーで越田真史氏 (中央大学学振研究員, Aalto University 客員研究員) に多くのことを教えていただいた。また、共著論文 [34, 35] を発表することができた。本講義はそれらを基にしている。越田氏にここに深く感謝する。

参考文献

- [1] G. W. Anderson, A. Guionnet, O. Zeitouni, *An Introduction to Random Matrices*, Cambridge University Press, Cambridge (2010).
- [2] 新井朝雄, 量子数理物理学における汎関数積分法, 共立出版, 東京 (2010).
- [3] M. Bauer, D. Bernard, SLE $_{\kappa}$ growth processes and conformal field theories, *Phys. Lett. B* **543** (2002) 135–138.
- [4] M. Bauer, D. Bernard, K. Kytölä, Multiple Schramm–Loewner evolutions and statistical mechanics martingales, *J. Stat. Phys.* **120** (2005) 1125–1163.
- [5] V. Beffara, The dimension of the SLE curves, *Ann. Probab.* **36** (2008) 1421–1452.
- [6] V. Beffara, E. Peltola, H. Wu, On the uniqueness of global multiple SLE, [arXiv:math.PR/1801.07699](https://arxiv.org/abs/math.PR/1801.07699).

- [7] A. A. Belavin, A. M. Polyakov, A. B. Zamolodchikov, Infinite conformal symmetry in two-dimensional quantum field theory, *Nucl. Phys. B* **241** (1984) 333–380.
- [8] M. F. Bru, Diffusions of perturbed principal component analysis, *J. Multivariate Anal.* **29** (1989) 127–136.
- [9] M. F. Bru, Wishart process, *J. Theor. Probab.* **4** (1991) 725–751.
- [10] J. Cardy, Stochastic Loewner evolution and Dyson’s circular ensemble. *J. Phys. A Math. Gen.* **36** (2003) L379–L386; Corrigendum. *ibid.*, 12343.
- [11] E. Cépa, D. Lépingle, Diffusing particles with electrostatic repulsion, *Probab. Theory Relat. Fields* **107** (1997) 429–449.
- [12] E. Cépa, D. Lépingle, Brownian particles with electrostatic repulsion on the circle: Dyson’s model for unitary random matrices revisited, *ESAIM, Probab. Stat.* **5** (2001) 203–224.
- [13] D. Chelkak, H. Duminil-Copin, C. Hongler, A. Kemppainen, S. Smirnov, Convergence of Ising interfaces to Schramm’s SLE curves, *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I Math.* **352** (2014) 157–161.
- [14] D. Chelkak, S. Smirnov, Universality in the 2D Ising model and conformal invariance of fermionic observables, *Inv. Math.* **189** (2012) 515–580.
- [15] K. L. Chung, Z. Zhao, *From Brownian motion to Schrödinger’s equation*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften (Fundamental Principles of Mathematical Sciences), 312, Springer-Verlag, Berlin (1995).
- [16] A. del Monaco, I. Hotta, S. Schleiβinger, Tightness results for infinite-slit limits of the chordal Loewner equation, *Comput. Methods Funct. Theory* **18** (2018) 9–33.
- [17] A. del Monaco, S. Schleiβinger, Multiple SLE and the complex Burgers equation, *Math. Nachr.* **289** (2016) 2007–2018.
- [18] J. Dubédat, Commutative relations for Schramm–Loewner evolutions, *Commun. Pure Appl. Math.* **60** (2007) 1792–1847.
- [19] J. Dubédat, SLE and the free field: partition functions and couplings, *J. Amer. Math. Soc.*, **22** (2009) 995–1054.
- [20] H. Duminil-Copin, Parafermionic observables and their applications to planar statistical physics models, *Ensaos Math.* vol. 25 (2013), pp. 1–371.
- [21] H. Duminil-Copin, S. Smirnov, Conformal invariance of lattice models, *Clay Mathematics Proceedings*, vol. 15 (2012), pp.213–276.
- [22] B. Duplantier, S. Sheffield, Liouville quantum gravity and KPZ, *Invent. Math.* **185** (2011) 333–393.
- [23] F. J. Dyson, A Brownian-motion model for the eigenvalues of a random matrix, *J. Math. Phys.* **3** (1962) 1191–1198.

- [24] P. J. Forrester, *Log-gases and Random Matrices*, London Math. Soc. Monographs, Princeton University Press, Princeton (2010).
- [25] P. Graczyk, J. Malecki, Multidimensional Yamada–Watanabe theorem and its applications to particle systems, *J. Math. Phys.* **54** (2013) 021503/1–15.
- [26] P. Graczyk, J. Malecki, Strong solutions of non-colliding particle systems, *Electron. J. Probab.* **19** (2014) no.119, 1–21.
- [27] K. Graham, On multiple Schramm–Loewner evolutions, *J. Stat. Mech. Theory Exp.* **2007** (2007) P03008.
- [28] T. Hida, *Brownian Motion*, Application of Mathematics, vol.11, Springer, Heidelberg (1980).
- [29] I. Hotta, M. Katori, Hydrodynamic limit of multiple SLE, *J. Stat. Phys.* **171** (2018) 166–188.
- [30] I. Hotta, S. Schleiβinger, Limits of radial multiple SLE and a Burgers–Loewner differential equation, *J. Theor. Probab.* (2020); <https://doi.org/10.1007/s10959-020-00996-0>
- [31] N.-G. Kang, N. G. Makarov, *Gaussian Free Field and Conformal Field Theory*, *Astérisque* **353**, Société Mathématique de France, Paris (2013).
- [32] M. Katori, Determinantal martingales and noncolliding diffusion processes, *Stoch. Proc. Appl.* **124** (2014) 3724–3768.
- [33] M. Katori, *Bessel Processes, Schramm–Loewner Evolution, and the Dyson Model*, Springer Briefs in Mathematical Physics 11, Springer, Tokyo (2015).
- [34] M. Katori, S. Koshida, Conformal welding problem, flow line problem, and multiple Schramm–Loewner evolution, *J. Math. Phys.* **61** (2020) 083301/1–25.
- [35] M. Katori, S. Koshida, Gaussian free fields coupled with multiple SLEs driven by stochastic log-gases, to be published in *Advanced Study in Pure Mathematics*.
- [36] M. Katori, H. Tanemura, Symmetry of matrix-valued stochastic processes and noncolliding diffusion particle systems, *J. Math. Phys.* **45** (2004) 3058–3085.
- [37] M. Katori, H. Tanemura, Noncolliding Brownian motion and determinantal processes, *J. Stat. Phys.* **129** (2007) 1233–1277.
- [38] M. Katori, H. Tanemura, Non-equilibrium dynamics of Dyson’s model with an infinite number of particles, *Commun. Math. Phys.* **293** (2010) 469–497.
- [39] A. Kemppainen, *Schramm–Loewner Evolution*, Springer Briefs in Mathematical Physics 24, Springer (2017).
- [40] S. Koshida, Multiple backward Schramm–Loewner evolution and coupling with Gaussian free field, [arXiv:1908.07180](https://arxiv.org/abs/1908.07180).
- [41] S. Koshida, private communication.

- [42] M. J. Kozdron, G. F. Lawler, The configurational measure on mutually avoiding SLE paths, In *Universality and renormalization*, Fields Inst. Commun., Vol. 50, Amer. Math. Soc., Providence, RI (2007), pp.199–224.
- [43] P. P. Kufarev, V. V. Sobolev, L. V. Sporysheva, A certain method of investigation of extremal problems for functions that are univalent in the half-plane, *Trudy Tomsk. Gos. Univ. Ser. Meh.-Mat.*, **200** (1968) 142–164.
- [44] K. Kytölä, E. Peltola, Pure partition functions of multiple SLEs, *Commun. Math. Phys.* **346** (2016) 237–292.
- [45] G. F. Lawler, *Conformally Invariant Processes in the Plane*, Amer. Math. Soc., Providence, RI (2005).
- [46] G. Lawler, O. Schramm, W. Werner, Conformal invariance of planar loop-erased random walks and uniform spanning trees, *Ann. Probab.* **32** (2004) 939–995.
- [47] K. Löwner, Untersuchungen über schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises I, *Math. Ann.* **89** (1923) 103–121.
- [48] M. L. Mehta, *Random Matrices*, 3rd edn, Pure and Applied Mathematics (Amsterdam), Vol. 142 Elsevier/Academic Press, Amsterdam (2004).
- [49] J. Miller, S. Sheffield, Imaginary geometry I : Interacting SLEs, *Probab.Theory Relat. Fields* **164** (2016) 553–705.
- [50] J. Miller, S. Sheffield, Imaginary geometry II : Reversibility of $SLE_{\kappa}(\rho_1, \rho_2)$ for $\kappa \in (0, 4)$, *Ann. Probab.* **44** (2016) 1647–1722.
- [51] J. Miller, S. Sheffield, Imaginary geometry III : Reversibility of SLE_{κ} for $\kappa \in (4, 8)$, *Ann. Math.* **184** (2016) 455–486.
- [52] J. Miller, S. Sheffield, Imaginary geometry IV : Interior rays, whole-plane reversibility, and space-filling trees, *Probab.Theory Relat. Fields* **169** (2017) 729–869.
- [53] H. Osada, Infinite-dimensional stochastic differential equations related to random matrices, *Probab. Theory Relat. Fields* **153** (2012) 471–509.
- [54] H. Osada, Interacting Brownian motions in infinite dimensions with logarithmic potentials, *Ann. Probab.* **41** (2013) 1–49.
- [55] H. Osada, H. Tanemura, Infinite-dimensional stochastic differential equations and tail σ -fields, *Probab. Theory Relat. Fields* **177** (2020) 1137–1242.
- [56] E. Petola, H. Wu, Global and local multile SLEs for $\kappa \leq 4$ and connection probabilities for level lines of GFF, *Commun. Math. Phys.* **366** (2019) 469–536 (2019).
- [57] A. M. Polyakov, Quantum geometry of bosonic strings, *Phys. Lett. B* **103** (1981) 207–210.
- [58] A. M. Polyakov, Quantum geometry of fermionic strings, *Phys. Lett. B* **103** (1981) 211–213.

- [59] A. M. Polyakov, Quantum gravity in two-dimensions, *Mod. Phys. Lett. A* **2** (1987) 893–898.
- [60] L. C. G. Rogers, Z. Shi, Interacting Brownian particles and the Wigner law, *Probab. Theory Relat. Fields* **95** (1993) 555–570.
- [61] S. Rohde, O. Schramm, Basic properties of SLE, *Ann. Math.* **161** (2005) 883–924.
- [62] O. Roth, S. Schleissinger, The Schramm–Loewner equation for multiple slits, *J. Anal. Math.* **131** (2017) 73–99.
- [63] O. Schramm, Scaling limits of loop-erased random walks and uniform spanning trees, *Israel J. Math.* **118** (2000) 221–288.
- [64] O. Schramm, S. Sheffield, The harmonic explorer and its convergence to SLE(4), *Ann. Probab.* **33** (2005) 2127–2148.
- [65] O. Schramm, S. Sheffield, Contour lines of the two-dimensional discrete Gaussian free field, *Acta Math.* **202** (2009) 21–137.
- [66] O. Schramm, S. Sheffield, A contour line of the continuum Gaussian free field, *Probab. Theory Relat. Fields* **157** (2013) 47–80.
- [67] O. Schramm, D. B. Wilson, SLE coordinate changes, *New York J. Math.* **11** (2005) 659–669; <http://nyjm.albany.edu/j/2005/11-31p.pdf>; [arXiv:math.PR/0505368](https://arxiv.org/abs/math.PR/0505368)
- [68] S. Sheffield, Gaussian free fields for mathematicians, *Probab. Theory Relat. Fields* **139** (2007) 521–541.
- [69] S. Sheffield, Conformal weldings of random surfaces: SLE and the quantum gravity zipper, *Ann. Probab.* **44** (2016) 3474–3545.
- [70] S. Smirnov Critical percolation in the plane: conformal invariance, Cardy’s formula, scaling limits, *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I Math.* **333** (2001) 239–244.
- [71] S. Smirnov, Conformal invariance in random cluster models. I. Holomorphic fermions in the Ising model, *Ann. Math.* **172** (2010) 1435–1467.
- [72] T. Takebe, Dispersionless BKP hierarchy and quadrant Löwner equation, *SIGMA* **10** (2014) 23.
- [73] L. -C. Tsai, Infinite dimensional stochastic differential equations for Dyson’s model, *Probab. Theory Relat. Fields* **166** (2016) 801–850.
- [74] J. Wishart, The generalized product moment distribution in samples from a normal multivariate population, *Biometrika* **20A** (1928) 32–52.