# 多重シュラム・レヴナー発展と
# ダイソンのブラウン運動模型

香取 眞理　(中央大学理工学部)*

**概　要**

シュラム・レヴナー発展（Schramm–Loewner evolution: SLE）は実軸上のブラウン運動で駆動される共形変換（等角写像）の時間発展系である．これは，SLE 曲線とよばれるランダムな截線，あるいはそれで囲まれる領域（SLE 包）を複素上半平面 $\mathbb{H}$ から取り除いた結果得られる非有界領域を，再び $\mathbb{H}$ に写す共形変換の（時刻 $t \geq 0$ を径数とする）1 径数族である．SLE 曲線の確率法則の解明は，確率論，および統計物理学の分野で重要な研究課題となっている．この系を，実軸上の相互作用多粒子系で駆動される複数本の SLE 曲線の時間発展系（多重 SLE）に拡張したい．そのためにどのような多粒子駆動過程を設定すべきかが問題となる．その解決のために，まず $\mathbb{H}$ 上にガウス型自由場（GFF）を定義し，それを基にシェフィールドやミラーらに従って量子曲面，および虚曲面とよばれる拡張 GFF を導入する．その上で，これら超関数に値をとる確率場と SLE の結合とよばれるある種の定常状態が成立する条件を調べる．そして，量子曲面，あるいは虚曲面と結合する多重 SLE の駆動過程は，ダイソンのブラウン運動模型として一意に定まることを証明する．ダイソンのブラウン運動模型はランダム行列理論において動的な対数ガス系の典型例として詳しく研究されてきた 1 次元相互作用多粒子系である．多重 SLE/GFF 結合の共形共変性を利用することにより，ダイソンのブラウン運動模型で駆動される多重 SLE にも，元来の SLE と同様に 3 つの相があることを示す．本講演は越田真史氏 (Aalto 大) との共同研究に基づく．

2022 年度年会のアブストラクトと同一[1]

## 1. はじめに

本講演では，多重シュラム・レヴナー発展の駆動過程に対する選定問題を議論する．そのために，まず元来のシュラム・レヴナー発展について簡単な説明を行うことにする．より詳しくは [7, 44, 33, 39] などを参照されたい．

### 1.1. レヴナー方程式とその多重截線系への拡張

上半平面を $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ と書く．また，$\overline{\mathbb{H}} := \mathbb{H} \cup \mathbb{R}$ とする．時刻 $t \in [0, \infty)$ で径数付けられた $\overline{\mathbb{H}}$ 内の連続曲線を $\eta := \{\eta_t : t \in [0, \infty)\} \subset \overline{\mathbb{H}}$ と記す．ただし，これは次の条件を満たすものとする．(C1) $\eta_0 = 0$, かつ, $\lim_{t \to \infty} |\eta_t| = \infty$．(C2) $\eta$ は単純曲線．すなわち，$t \neq t'$ ならば，$\eta_t \neq \eta_{t'}$. (C3) すべての $t \in (0, \infty)$ において，$\eta(0, t] := \{\eta_u : u \in (0, t]\} \subset \mathbb{H}$．$\eta(0, t], t \geq 0$, あるいは $\eta$ は $\mathbb{H}$ 上の截線とよばれる．以下しばらくの間は，$\mathbb{H}^\eta_t := \mathbb{H} \setminus \eta(0, t]$, $t \in (0, \infty)$ と定義することにする．また，$\mathbb{H}^\eta_0 := \mathbb{H}$ とする．

一般に，有界領域 $K \subset \mathbb{H}$ に対して $K = \mathbb{H} \cap \overline{K}$ であり，また，$\mathbb{H} \setminus K$ が単連結であるとき，$K$ をコンパクト $\mathbb{H}$–包という．コンパクト $\mathbb{H}$–包全体の集合を $\mathcal{Q}$ と書くことにする．$\eta(0, t] \in \mathcal{Q}, t \in (0, \infty)$ である．

---

本研究は科研費 (C) (課題番号:19K03674), (B) (課題番号:18H01124), (S) (課題番号:16H06338), (A) (課題番号:21H04432) の助成を受けたものである．
2010 Mathematics Subject Classification: 60D05,60J67,82C22,60B20
キーワード：多重シュラム・レヴナー発展, ガウス型自由場, 量子曲面, 虚曲面, 多重 SLE/GFF 結合

* 〒 112–8551 東京都文京区春日 1–13–27　中央大学理工学部物理学科
e-mail: katori@phys.chuo-u.ac.jp
web: https://www.phys.chuo-u.ac.jp/j/katori/

各 $t \in (0,\infty)$ において，$\mathbb{H}_t^\eta$ は $\mathbb{C}$ の真部分集合である単連結領域なので，リーマンの写像定理より，$\mathbb{H}_t^\eta \to \mathbb{H}$ とする共形変換 (等角写像) が存在する．(本講演では，共形変換は正則関数による1対1写像を意味する．依って，その逆写像も共形変換である.) これを $g_{\mathbb{H}_t^\eta}$ と書くことにする．通常のリーマン写像関数 $h$ は，$\mathbb{C}$ 上の真部分集合である単連結領域 $D \subsetneq \mathbb{C}$ を単位円板 $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ に移す共形変換の中から, ある $z_0 \in D$ に対して，$h(z_0) = 0$ と $h'(z_0) := dh(z_0)/dz > 0$ という条件を課すことにより一意に定めた共形変換である．それに対して，$g_{\mathbb{H}_t^\eta}$ には流体力学条件とよばれる次の条件を課すことにする．

**流体力学条件** $|z| \to \infty$ において，$g_{\mathbb{H}_t^\eta}(z) = z + \dfrac{\mathrm{hcap}(\eta(0,t])}{z} + \mathrm{O}(1/|z|^2)$. すなわち，$g_{\mathbb{H}_t^\eta}(z)$ をローラン展開したとき，その最高次の項 $z$ の係数は 1 であり，定数項は 0 である[2].

$1/z$ の係数は径数 $t$ に依存するが，截線 $\eta(0,t]$ の**半平面容量**（half-plane capacity）とよぶべき意味付けが可能である．そのためこの係数を $\mathrm{hcap}(\eta(0,t])$ と書いた[3]. 以下では，$\mathrm{hcap}(\eta(0,t])$ が時刻 $t$ の連続な単調増加関数で微分可能であるように，截線 $\eta$ の径数 $t$ が選ばれているものと仮定する．以上より，リーマンの写像定理に相当する主張を，次のように述べることができる．

**補題 1.1.** 条件 (C1)–(C3) を満たす截線 $\eta$ が与えられたとする．このとき，各時刻 $t \in (0,\infty)$ において，$\mathbb{H}_t^\eta$ を $\mathbb{H}$ に移す共形変換で流体力学条件を満たすものが唯一定まる．

上の定義と補題 1.1 より，条件 (C1)–(C3) を満たす截線 $\eta$ が 1 つ与えられると，時刻 $t \in [0,\infty)$ で径数付けられた共形変換の族 $(g_{\mathbb{H}_t^\eta})_{t\ge 0}$ が得られることになる．レヴナー理論 [46] は，この族を時間発展方程式の解として与えるものである．(レヴナーは $\mathbb{D}$ への共形写像について論じている．ここで述べた $\mathbb{H}$ への共形写像に対しては，通常, 文献 [43] が引用されている.)

**定理 1.2.** 上で定義された共形変換の 1 径数族 $(g_{\mathbb{H}_t^\eta})_{t\ge 0}$ に対して，$U_0 = 0$,

$$U_t = g_{\mathbb{H}_t^\eta}(\eta_t) := \lim_{z\to\eta_t : z \in \mathbb{H}_t^\eta} g_{\mathbb{H}_t^\eta}(z), \quad t \in (0,\infty)$$

とする．このとき，$(g_{\mathbb{H}_t^\eta})_{t\ge 0}$ は常微分方程式

$$\frac{dg_t(z)}{dt} = \frac{1}{g_t(z) - U_t}\frac{d}{dt}\mathrm{hcap}(\eta(0,t]), \quad z \in \mathbb{H}_t^\eta, \quad t \ge 0$$

の初期条件 $g_0(z) = z, z \in \mathbb{H}$ の下での解として与えられる：$g_{\mathbb{H}_t^\eta}(z) = g_t(z)$, $z \in \mathbb{H}_t^\eta$, $t \ge 0$. 特に，時刻 $t$ を $\mathrm{hcap}(\eta(0,t]) = 2t$, $t \ge 0$ となるようにとると，

$$\frac{dg_t(z)}{dt} = \frac{2}{g_t(z) - U_t}, \quad z \in \mathbb{H}_t^\eta, \quad t \ge 0 \tag{1.1}$$

証明は例えば, [44] の Proposition 4.4 を参照. (1.1) を **弦状レヴナー方程式** (chordal Loewner equation) とよび, その解として与えられる共形変換の 1 径数族 $(g_{\mathbb{H}_t^\eta})_{t\ge 0}$ は共形変換の時間発展

[2] 2 次元平面上 ($\mathbb{R}^2 \ni (x,y) \simeq z := x + \sqrt{-1}y \in \mathbb{C}$) の非粘性渦なしの流れは速度ポテンシャル $\phi(z)$ と流れ関数 $\psi(z)$ をもち，$W(z) := \phi(z) + \sqrt{-1}\psi(z)$ を複素速度ポテンシャルという．各点 $z$ での流速 $\boldsymbol{v} = (v_x, v_y)$ は $\partial W/\partial z = v_x - \sqrt{-1}v_y$ と求められる．したがって，$x$ 軸 (実軸) の正の向きの大きさ 1 の一様流では $W(z) = z$. 上式は $g_{\mathbb{H}_t^\eta}(z) \asymp z, |z| \to \infty$ を意味するので，$g_{\mathbb{H}_t^\eta}(z)$ をこの複素速度ポテンシャルと見なしたとき,「流体中に置かれた物体 (障害物) から十分に離れた位置では流れは一様流となる」という流体力学での通常の境界条件に相当するのでこのようによばれている．今の場合は，截線 $\eta(0,t]$ が流体場中に置かれた物体 (障害物) ということになる．

[3] $(\mathcal{B}_t)_{t\ge 0}$ を標準複素ブラウン運動とする． $y > 0$ とし，虚軸上の点 $\sqrt{-1}y$ を出発点としたときの期待値を $\mathbf{E}^{\sqrt{-1}y}[\cdot]$ と書くことにする．$K \in \mathcal{Q}$ に対して，$\tau_K := \inf\{t > 0 : \mathcal{B}_t \in \mathbb{R} \cup K\}$ としたとき，$\mathrm{hcap}(K) = \lim_{y\to\infty} y\mathbf{E}^{\sqrt{-1}y}[\mathrm{Im}\,\mathcal{B}_{\tau_K}]$ が成り立つことが証明できる．例えば，[44] の Proposition 3.41 を参照.

系という意味で**弦状レヴナー鎖** (chordal Loewner chain)，あるいは**弦状レヴナー発展** (chordal Loewner evolution) と称される [4]．

上の結果をそのまま多重截線の場合に拡張して考えてみる．$N \in \{2, 3, \dots\}$ とする．$\overline{\mathbb{H}}$ 内の $N$ 本の連続曲線を考え，それらに添え字 $i = 1, \dots, N$ を付ける．各曲線は $s^{(i)} \in [0, \infty)$ で径数付けられているものとする：$\eta^{(i)} := \{\eta^{(i)}_{s^{(i)}} : s^{(i)} \in [0, \infty)\} \subset \overline{\mathbb{H}}$, $i = 1, 2, \dots, N$．次の条件を課す．(C1$'$a) $\eta^{(i)}_0 \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, N$ であり，$\eta^{(1)}_0 < \eta^{(2)}_0 < \cdots < \eta^{(N)}_0$．(C1$'$b) すべての $i = 1, \dots, N$ において，$\displaystyle\lim_{s^{(i)} \to \infty} |\eta^{(i)}_{s^{(i)}}| = \infty$．(C2$'$a) 各曲線 $\eta^{(i)}$ はどれも単純曲線．(C2$'$b) $N$ 本の曲線は互いに交わりを持たない．すなわち，$i \neq j$ に対して $\eta^{(i)} \cap \eta^{(j)} = \emptyset$．(C3$'$) すべての $i = 1, \dots, N$ において，任意の $s^{(i)} \in (0, \infty)$ で $\eta^{(i)}(0, s^{(i)}] \subset \mathbb{H}$．

各 $\boldsymbol{s} := (s^{(1)}, \dots, s^{(N)}) \in [0, \infty)^N$ において，$\bigcup_{i=1}^N \eta^{(i)}(0, s^{(i)}]$ を**多重截線**とよぶ．そして，$\displaystyle\mathbb{H}^{\eta}_{\boldsymbol{s}} := \mathbb{H} \Big\backslash \bigcup_{i=1}^N \eta^{(i)}(0, s^{(i)}]$ とする．ただし，$\mathbf{0} := (0, \dots, 0)$ に対して $\mathbb{H}^{\eta}_{\mathbf{0}} := \mathbb{H}$．各 $\boldsymbol{s} \in [0, \infty)^N$ において，$\mathbb{H}^{\eta}_{\boldsymbol{s}}$ は $\mathbb{C}$ の単連結な真部分集合であるので，リーマンの写像定理より $\mathbb{H}^{\eta}_{\boldsymbol{s}} \to \mathbb{H}$ とする共形変換が存在する．これを $g_{\mathbb{H}^{\eta}_{\boldsymbol{s}}}$ と書くことにする．次の**流体力学条件**を課すことにする．

**流体力学条件**　$|z| \to \infty$ において，$\displaystyle g_{\mathbb{H}^{\eta}_{\boldsymbol{s}}}(z) = z + \frac{1}{z} \mathrm{hcap}\Big( \bigcup_{i=1}^N \eta^{(i)}(0, s^{(i)}] \Big) + \mathrm{O}(1/|z|^2)$.

この $N$ 径数族 $(g_{\mathbb{H}^{\eta}_{\boldsymbol{s}}}(z))_{\boldsymbol{s} \in [0,\infty)^N}$ に対して, $U^{(i)}_{\mathbf{0}} = 0$, $\displaystyle U^{(i)}_{\boldsymbol{s}} = g_{\mathbb{H}^{\eta}_{\boldsymbol{s}}}(\eta^{(i)}_{s^{(i)}}) := \lim_{z \to \eta^{(i)}_{s^{(i)}} : z \in \mathbb{H}^{\eta}_{\boldsymbol{s}}} g_{\mathbb{H}^{\eta}_{\boldsymbol{s}}}(z)$, $\boldsymbol{s} \in [0, \infty)^N \setminus \mathbf{0}$, $i = 1, \dots, N$ として，定理 1.2 の証明と同様の考察を行うと，$(g_{\mathbb{H}^{\eta}_{\boldsymbol{s}}}(z))_{\boldsymbol{s} \in [0,\infty)^N}$ は次の $N$ 連立常微分方程式を満たすことが導かれる．

$$\frac{\partial g_{\boldsymbol{s}}(z)}{\partial s^{(i)}} = \frac{1}{g_{\boldsymbol{s}}(z) - U^{(i)}_{\boldsymbol{s}}} \frac{\partial}{\partial s^{(i)}} \mathrm{hcap}\Big( \bigcup_{j=1}^N \eta^{(j)}(0, s^{(j)}] \Big), \quad s^{(i)} \geq 0 \quad 1 \leq i \leq N$$

ただし $\{\eta^{(i)}\}_{i=1}^N$ は, 微分 $\displaystyle\frac{\partial}{\partial s^{(i)}} \mathrm{hcap}\Big( \bigcup_{j=1}^N \eta^{(j)}(0, s^{(j)}] \Big)$ が定義できるように $\boldsymbol{s} = (s^{(1)}, \dots, s^{(N)})$ で径数付けられていると仮定する．

我々は，$N$ 径数 $\boldsymbol{s} = (s^{(1)}, \dots, s^{(N)})$ がすべて 1 つの時刻 $t \geq 0$ だけに依存している場合を考えることにする．すなわち，$s^{(i)} = s^{(i)}(t), t \geq 0, i = 1, \dots, N$ であり，これらは $t$ の単調増加関数であり $\mathcal{C}^1$–級連続関数であるとする．このとき $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{s}(t), t \geq 0$ とすると，微分の連鎖則より，

$$\frac{dg_t(z)}{dt} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial g_{\boldsymbol{s}}(z)}{\partial s^{(i)}} \frac{ds^{(i)}(t)}{dt} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{g_t(z) - U^{(i)}_t} \frac{\partial}{\partial s^{(i)}} \mathrm{hcap}\Big( \bigcup_{j=1}^N \eta^{(j)}(0, s^{(j)}] \Big)\Big|_{\boldsymbol{s} = \boldsymbol{s}(t)} \frac{ds^{(i)}(t)}{dt}$$

が得られる．ここで，$\displaystyle w^{(i)}_t := \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s^{(i)}} \mathrm{hcap}\Big( \bigcup_{j=1}^N \eta^{(j)}(0, s^{(j)}] \Big)\Big|_{\boldsymbol{s} = \boldsymbol{s}(t)} \frac{ds^{(i)}(t)}{dt}$, $i = 1, \dots, N$, $t \geq 0$ とおくと，$\displaystyle\frac{d}{dt} \mathrm{hcap}\Big( \bigcup_{j=1}^N \eta^{(j)}(0, s^{(j)}(t)] \Big) = 2 \sum_{i=1}^N w^{(i)}_t$ となる．$t \geq 0$ に対して，$\eta^{(i)}_t := \eta^{(i)}_{s^{(i)}(t)}$, $U^{(i)}_t := U^{(i)}_{\boldsymbol{s}(t)}$, $i = 1, \dots, N$, $\mathbb{H}^{\eta}_t := \mathbb{H}^{\eta}_{\boldsymbol{s}(t)}$, $g_t := g_{\boldsymbol{s}(t)}$ と書き直すことにする．すると，(定理 1.2 を $N = 1$ の場合として含めた) 次の一般化が得られる [58].

---

[4] Loewner が元来考えた $\mathbb{D}$ への共形変換の族とその方程式は，**放射状**（radial）という単語を冠して区別される．以下で説明するシュラム・レヴナー発展（SLE）に関しても同様の区別を行う．しかし，本講演では放射状の場合は扱わないので，以後はこのような冠詞は付けず，そのような場合には弦状であることを意味するものとする．

**定理 1.3.** $N \in \mathbb{N}$ とする．$\mathbb{H}$ 内の (多重) 截線が $\mathrm{hcap}\Big(\bigcup_{i=1}^{N} \eta^{(i)}(0,t]\Big) = 2t, t \geq 0$ を満たすように時刻 $t \geq 0$ で径数付けらえているものとする．このとき，$w_t^{(i)} \geq 0, i = 1, \dots, N, \sum_{i=1}^{N} w_t^{(i)} = 1$, $t \geq 0$ を満たす重み関数 $(w_t^{(i)})_{t\geq 0}$ があり，$(g_{\mathbb{H}_t^\eta})_{t\geq 0}$ は常微分方程式

$$\frac{dg_t(z)}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \frac{2w_t^{(i)}}{g_t(z) - U_t^{(i)}}, \quad t \geq 0 \tag{1.2}$$

の初期条件 $g_0(z) = z \in H$ の下での解として与えられる：$g_{\mathbb{H}_t^\eta}(z) = g_t(z), z \in \mathbb{H}_t^\eta, t \geq 0$. ただしここで，$U_t^{(i)} = g_{\mathbb{H}_t^\eta}(\eta_t^{(i)}) := \lim_{z \to \eta_t^{(i)} : z \in \mathbb{H}_t^\eta} g_{\mathbb{H}_t^\eta}(z), i = 1, \dots, N, t \geq 0$ である．

重み関数が截線間において，また時間経過において，ともに均一であるものとすると，$w_t^{(i)} = 1/N, i = 1, \dots, N, t \geq 0$ と定まる．その上で $t/N \to t$ という自明な時間変更を行い，また，$g_{Nt}, U_{Nt}^{(i)}, i = 1, \dots, N$ を改めて $g_t, U_t^{(i)}, i = 1, \dots, N$ を書くことにすると，(1.2) は

$$\frac{dg_t(z)}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \frac{2}{g_t(z) - U_t^{(i)}}, \quad t \geq 0 \tag{1.3}$$

と書き直される．本講演では，(1.3) を **多重レヴナー方程式**とよび，初期条件 $g_0(z) = z \in \mathbb{H}$ の下での解 $(g_{\mathbb{H}_t^\eta})_{t\geq 0}$ を**多重レブナー発展**とよぶことにする．

### 1.2. シュラム・レヴナー発展 (SLE)

我々はレブナー方程式 (1.1) を，実関数 $U_t : [0, \infty) \in t \mapsto U_t \in \mathbb{R}$ が与えられた上で解く．その意味で $(U_t)_{t\geq 0}$ をレヴナー方程式の駆動関数, あるいはレヴナー発展 $(g_{\mathbb{H}_t^\eta}(z))_{t\geq 0}$ の駆動過程という．この駆動過程は截線 $\eta(0,t], t \in (0, \infty)$ の各時刻での先端 $\eta_t$ の $g_{\mathbb{H}_t^\eta}$ による像である．($g_{\mathbb{H}_t^\eta}$ は $\mathbb{H}_t^\eta$ を $\mathbb{H}$ に写すので，像には截線はなくなる．截線の先端は $\mathbb{H}$ の境界である $\mathbb{R}$ 上の 1 点に写される.) したがって，手順としては 截線 $\eta(0,t] \Longrightarrow$ 駆動過程 $U_t$ ということになる．

シュラム [59] はこの逆問題（截線 $\eta(0,t] \Longleftarrow$ 駆動過程 $U_t$）を考えた．すなわち，1 次元空間 $\mathbb{R}$ 上の駆動過程を与えることにより 2 次元平面 $\mathbb{H}$ 上に曲線を描かせるという発想である．さらに，この $\mathbb{H}$ 上の曲線として，格子上の**統計力学模型**や**フラクタル模型**の連続極限において得られるものを実現させることを目指した．シュラムは $\kappa > 0$ という径数を導入し，$U_t = \sqrt{\kappa} B_t, t \geq 0$ とした．ブラウン運動のスケーリング性より $\sqrt{\kappa} B_t \stackrel{(\mathrm{law})}{=} B_{\kappa t}, t \geq 0$ であるから，$\kappa$ は時間を $t \mapsto \kappa t$ と変更する時間スケール径数と見ることができる．この結果得られる確率過程

$$\frac{dg_{\mathbb{H}_t^\eta}(z)}{dt} = \frac{2}{g_{\mathbb{H}_t^\eta}(z) - \sqrt{\kappa} B_t}, \quad z \in \mathbb{H}_t^\eta, \quad t \geq 0$$

を**シュラム・レヴナー方程式**とよび，この解が与える確率的レヴナー発展を**シュラム・レヴナー発展** (Schramm–Loewner evolution) と称する．二義性が生じてしまうが，両者とも SLE と略称することにする．すぐ下で説明するように，SLE の振舞は径数 $\kappa$ の値によって定性的にも定量的にも異なる．そのため，径数を込めて $\mathrm{SLE}_\kappa$ という略記もしばしば使われる．

上述のように，SLE はブラウン運動で駆動されるので，それが属する確率空間はブラウン運動のそれである．しかしここでは，これを SLE の確率空間であると見なして，$(\Omega^{\mathrm{SLE}}, \mathcal{F}^{\mathrm{SLE}}, \mathbb{P}^{\mathrm{SLE}})$ と書くことにする．また，フィルトレーションを $(\mathcal{F}_t^{\mathrm{SLE}})_{t\geq 0}$ と記す．

1.1 節では截線 $\eta$ を与えるところから話を始めたので，(C1)–(C3) のように截線に対して条件を課した．しかしシュラムの理論では，$\eta_t \in \mathbb{H}$ は各時刻 $t \geq 0$ において

$$\sqrt{\kappa} B_t = g_{\mathbb{H}_t^\eta}(\eta_t) := \lim_{z \to \eta_t : z \in \mathbb{H}_t^\eta} g_{\mathbb{H}_t^\eta}(z) \tag{1.4}$$

を満たすものというだけであり，これが $t$ を径数とする曲線となるかどうかは一般には保証されない．しかし実際には，これは確率 1 で曲線になることが，$\kappa = 8$ の場合にはローラー・シュラム・ヴェルナー [45] によって，また，$\kappa \neq 8$ の場合にはローデとシュラム [57] によって証明されている．

**命題 1.4.** $\mathbb{P}^{\mathrm{SLE}}$ の下，(1.4) は確率 1 で連続曲線 $\eta = \{\eta_t : t \geq 0\} \subset \overline{\mathbb{H}}$ を定める．これは確率 1 で条件 (C1) を満たす．

SLE によって定まる截線を**SLE 曲線**，あるいは径数も付して **$\mathrm{SLE}_\kappa$ 曲線**という．上述のように $\mathrm{SLE}_\kappa$ 曲線は截線条件 (C1) は満たすが, (C2), (C3) は $\kappa \in (0, 4]$ のときだけしか満たされない．以下に述べるように，$\kappa > 4$ においては $\eta(0, \infty)$ は自己接触し[5]，そのため，$\mathbb{H} \setminus \eta(0, t]$ は複数の連結領域成分に分割される．そこで，次のように定義しておくことにする．

**定義 1.5.** $t \in (0, \infty)$ において，$\mathbb{H}^\eta_t :=$「$\mathbb{H} \setminus \eta(0, t]$ の内の非有界な連結領域成分」とする．また，$K^\eta_t := \overline{\mathbb{H} \setminus \mathbb{H}^\eta_t}, t \geq 0$ とし，これを SLE 包とよぶ．

**命題 1.6.** $\mathbb{P}^{\mathrm{SLE}}$ の下，以下が成り立つ．

(a) $\kappa \in (0, 4]$ のとき，$\mathrm{SLE}_\kappa$ 曲線 $\eta$ は確率 1 で (C1)–(C3) を満たす．すなわち，$\eta$ は単純曲線であり，$\eta(0, \infty) \subset \mathbb{H}$ である．

(b) $\kappa \in (4, 8)$ のとき, $\mathrm{SLE}_\kappa$ 曲線 $\eta$ は正の確率で自己接触し，また，実軸 $\mathbb{R}$ にも接する．すなわち，正の確率で，$t \neq t'$ に対して $\eta_t = \eta_{t'}$ となる点があり，$\eta \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$ である．確率 1 で $\displaystyle\bigcup_{t \in (0, \infty)} K^\eta_t = \overline{\mathbb{H}}$ であるが，$\eta[0, \infty) \cap \mathbb{H} \neq \mathbb{H}$ である（$\mathrm{SLE}_\kappa$ 曲線間に隙間がある）．

(c) $\kappa \geq 8$ のとき, $\mathrm{SLE}_\kappa$ 曲線 $\eta$ は確率 1 で $\overline{\mathbb{H}}$ を稠密に充填する．

定性的な違いが生じるので，上を称して $\mathrm{SLE}_\kappa$ は **3 相** (three phases) をもつという言い方をすることもある．$\kappa = 4$ と $\kappa = 8$ が**臨界値**, あるいは**相転移点**であるということになる．命題 1.6 の証明は [44, 33, 39] などを参照．

上の命題は $\mathrm{SLE}_\kappa$ 曲線の定性的な振る舞いが径数 $\kappa$ に依存することを述べたものであるが，$\kappa$ を特別な値に設定すると，統計力学やフラクタル物理学で研究されてきた重要な 2 次元模型における臨界状態やフラクタル構造を定量的に再現することも知られている．その対応を次に示した．いずれも双方向矢印の右側は離散モデルにおいてグラフ（格子）上に定義されるランダムな経路（格子経路）であり，その**スケーリング極限**とよばれる連続極限が，双方向矢印の左にある特定の $\kappa$ の値における $\mathrm{SLE}_\kappa$ 曲線に確率測度として弱収束することを意味する．ただし，自己回避曲線に関しては未だ予想である．

| | | |
|---|---|---|
| $\mathrm{SLE}_2$ | $\Longleftrightarrow$ | ループ除去ランダム・ウォーク (loop-erased random walk)[45] |
| $\mathrm{SLE}_{8/3}$ | $\Longleftrightarrow$ | 自己回避ウォーク (self-avoiding walk)[予想] |
| $\mathrm{SLE}_3$ | $\Longleftrightarrow$ | 臨界イジング模型 (critical Ising model) の界面 (interface)[18, 17] |
| $\mathrm{SLE}_4$ | $\Longleftrightarrow$ | ガウス型自由曲面模型 (Gaussian free surface model) の等高線 [60, 61, 62] |
| $\mathrm{SLE}_{16/3}$ | $\Longleftrightarrow$ | 臨界イジング模型 (critical Ising model) の FK–界面 (FK-interface)[66, 17] |
| $\mathrm{SLE}_6$ | $\Longleftrightarrow$ | 臨界浸透模型 (critical percolation) の探索過程 (exploration process)[65] |
| $\mathrm{SLE}_8$ | $\Longleftrightarrow$ | 一様全域木模型 (uniform spanning tree) のランダムなペアノ曲線 [45] |

[5] SLE 曲線は「交差する (intersect)」ことはない．そこで，本稿では「接触する (osculate)」という言い回しを使うことにした．

さらに，ベファーラ [11] によって，SLE$_\kappa$ 曲線のハウスドルフ次元 $d^{\rm H}_\kappa$ の $\kappa$ 依存性が明らかにされた: $d^{\rm H}_\kappa = 1+\kappa/8\,(\kappa \in (0,8))$, $d^{\rm H}_\kappa = 2\,(\kappa \geq 8)$.

SLE$_\kappa$ と**共形場理論**（conformal field theory）との関係は重要である．ヴィラソロ中心元 $c$ とスケーリング次元 $h$ (共形ウェイトともよばれる，ヴィラソロ代数の表現における最大ウェイトのこと) は径数 $\kappa$ と $c = c_\kappa := \dfrac{(6-\kappa)(3\kappa-8)}{2\kappa}$, $h = h_\kappa := \dfrac{6-\kappa}{2\kappa}$ という関係式を満たす [9].

### 1.3. 多重 SLE 駆動過程の選定問題

シュラムの発想に従って，(1.3) で与えられる多重レヴナー方程式を確率過程としたい．それには，駆動過程を確率過程として与えればよいことになる．$N$ 重 SLE を与えるためには，$\mathbb{R}$ 上の $N$ 変数 ($N$ 粒子) 確率過程を指定することになる．これを $\boldsymbol{X}_t = (X^{(1)}_t, \dots, X^{(N)}_t) \in \mathbb{R}^N$, $t \geq 0$ と書くと，

$$\frac{dg_t(z)}{dt} = \sum_{i=1}^N \frac{2}{g_t(z) - X^{(i)}_t}, \quad t \geq 0, \quad g_0(z) = z \in \mathbb{H} \tag{1.5}$$

という方程式を解くことになる．これを**多重シュラム・レヴナー方程式** (multiple SLE equation) とよび，その解 $(g_t)_{t\geq 0}$ を**多重シュラム・レヴナー発展** (multiple SLE evolution) とよぶことにする．両者とも**多重 SLE** と略称することにする．

問題は，この駆動関数 $(\boldsymbol{X}_t)_{t\geq 0}$ をどのような指導原理に従って与えるのが妥当であるか，ということである．シュラム [59] が SLE の駆動関数としてブラウン運動を用いた際に行ったのと同様な考察を行うことにより，バウアー・ベルナール・キトラ [10], および グラハム [28] は次を結論づけている．(i) $(\boldsymbol{X}_t)_{t\geq 0}$ は半マルチンゲールである．(ii) $\boldsymbol{X}_t = (X^{(1)}_t, \cdots X^{(N)}_t), t \geq 0$ の 2 次変動を，$\kappa > 0$ として，$\langle dX^{(i)}_\cdot, dX^{(j)}_\cdot \rangle_t = \kappa \delta_{ij} dt$, $i, j = 1, \dots, N, t \geq 0$ としても一般性を失わない．これに従うと $(\boldsymbol{X}_t)_{t\geq 0}$ は，$(B^{(i)}_t)_{t\geq 0}, i = 1, \dots, N$ を互いに独立な 1 次元標準ブラウン運動として，次の形の確率微分方程式に従うことになる：

$$dX^{(i)}_t = \sqrt{\kappa} dB^{(i)}_t + F^{(i)}(\boldsymbol{X}_t) dt, \quad t \geq 0, \quad i = 1, \dots, N \tag{1.6}$$

ここで，$F^{(i)}, i = 1, \dots, N$ は時刻 $t$ には陽には依存しないものと仮定する．「$F^{(i)}(\boldsymbol{X}), i = 1, \dots, N$ の $\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^N$ 依存性をどのように設定すべきか」がここでの問題設定となる．

上述の多重 SLE 駆動過程の選定問題に対して，次のような観点から研究がなされている：(i) 共形場理論との対応 [15, 10], (ii) 可換 SLE 条件 [22], (iii) 1 本の SLE に対する絶対連続性 [28], (iv) 統計力学模型からの考察 [15, 10, 42], (v) 径数付け不変性 [28]．このうち，(i) の共形場理論との対応に基づく構成がもっとも系統系であるとともに，複数の SLE 曲線の時間発展則に対して可換条件を課す (ii) の方法も等価な結論を導くことを確認することができる [41]．(i) では (1.6) の有界変動項を定める関数 $\{F^{(i)}\}_{i=1}^N$ は**SLE 分配関数**とよばれる関数 $Z = Z(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x} = (x^{(1)}, \dots, x^{(N)})$ を用いて，$F^{(i)}(\boldsymbol{x}) = 2 \displaystyle\sum_{1\leq j\leq N, j\neq i} \frac{1}{x^{(i)} - x^{(j)}} + \kappa \frac{\partial}{\partial x^{(i)}} \log Z(\boldsymbol{x})$ で与えられる．$Z$ は微分演算子 $\mathcal{D}^{(i)} := \dfrac{\kappa}{2}\dfrac{\partial^2}{\partial {x^{(i)}}^2} - 2\Big(\displaystyle\sum_{1\leq j\leq N, j\neq i} \frac{1}{x^{(i)} - x^{(j)}}\frac{\partial}{\partial x^{(j)}} + \frac{h_\kappa}{(x^{(i)} - x^{(j)})^2}\Big)$, $i = 1, \dots, N$ ($h_\kappa$ はスケーリング次元) に対して，$\mathcal{D}^{(i)} Z(\boldsymbol{x}) = 0$, $i = 1, \dots, N$ の解として定められる．この式は共形場理論におけるベラビン・ポリヤコフ・ザモロチコフ方程式 [12] の特別な場合と見なすことができる．その解は一般には複雑なものとなるが，[10] に極めて簡単な解の一例が与えられている．それは，$Z(\boldsymbol{x}) = \displaystyle\prod_{1\leq i<j\leq N} (x^{(j)} - x^{(i)})^{2/\kappa}$ である．これは $\kappa \dfrac{\partial}{\partial x^{(i)}} \log Z = 2 \displaystyle\sum_{1\leq j\leq N, j\neq i} \frac{1}{x^{(i)} - x^{(j)}}$ を与えるので，$F^{(i)}(\boldsymbol{x}) = 4 \displaystyle\sum_{1\leq j\leq N, j\neq i} \frac{1}{x^{(i)} - x^{(j)}}$, $i = 1, \dots, N$ と定まる．したがって，この場

合には $\mathbb{R}$ 上の $N$ 変数 ($N$ 粒子) 確率過程として

$$dX_t^{(i)} = \sqrt{\kappa} dB_t^{(i)} + 4 \sum_{1 \leq j \leq N, j \neq i} \frac{1}{X_t^{(i)} - X_t^{(j)}} dt, \quad t \geq 0, \quad i = 1, \dots, N \tag{1.7}$$

が選ばれることになる．ここで $t \to t/\kappa$ という時間変更を行い，$\Lambda_t^{(i)} := X_{t/\kappa}^{(i)}, t \geq 0, i = 1, \dots, N$ と書くことにする．さらに，

$$\beta = \frac{8}{\kappa} \tag{1.8}$$

とおくと，(1.7) は次の確率微分方程式系に変換される：

$$d\Lambda_t^{(i)} = dB_t^{(i)} + \frac{\beta}{2} \sum_{1 \leq j \leq N, j \neq i} \frac{1}{\Lambda_t^{(i)} - \Lambda_t^{(j)}} dt, \quad t \geq 0, \quad i = 1, \dots, N$$

この確率過程 $(\boldsymbol{\Lambda}_t)_{t \geq 0}$ はランダム行列理論 [5, 3, 47, 26, 8] において，径数 $\beta$ をもつ**ダイソンのブラウン運動模型**とよばれ，非常によく研究されている [2, 6, 25, 33] (付録 A.1 節を参照)．本講演では，(1.8) の下，上述の自明な時間変更をする前の (1.7) を**径数 $8/\kappa$ をもつダイソンのブラン運動模型**とよぶことにする．

$T \in (0, \infty)$ を指定し，$Y_{T;t}^{(i)} := X_{T-t}^{(i)}, t \in [0, T], i = 1, \dots, N$ とおくと，

$$dY_{T;t}^{(i)} = \sqrt{\kappa} dB_t^{(i)} - 4 \sum_{\substack{1 \leq j \leq N, \\ j \neq i}} \frac{1}{Y_{T;t}^{(i)} - Y_{T;t}^{(j)}} dt, \quad t \in [0, T], \quad i = 1, \dots, N \tag{1.9}$$

が得られる．(1.9) の解として与えられる $(\boldsymbol{Y}_{T;t})_{t \in [0,T]}$ をここでは，時間区間 $[0, T]$ における径数 $\beta = 8/\kappa$ をもつ**後進ダイソン・ブラウン運動模型**とよぶことにする [34, 40]．

本講演は，多重 SLE の駆動確率過程 $(\boldsymbol{X}_t)_{t \geq 0}$ としてダイソンのブラウン運動模型が選ばれるからくりを，より確率論的に説明しようとするものである．ここでは，ガウス型自由場（GFF）から生成される**リウビル 2 次元重力**に着目し，その共形変換則に対する考察からシェフィールドとミラー [64, 48, 49, 50, 51] が導入した**量子曲面** (quantum surface) と**虚曲面** (imaginary surface) とよばれる**拡張 GFF** を考察する．その上で，多重 SLE をこれらの確率場と結合させることによって，その駆動過程選定問題に答えようという試みである [4, 34, 35, 36, 40].

## 2. ガウス型自由場（GFF）の構成と基本的な性質

### 2.1. ボホナー・ミンロスの定理

複素平面上の単連結領域 $D \subsetneq \mathbb{C}$ を考える．これは有界であるものと仮定する．まずはじめは，ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ が $L^2(D, m(dz))$ 空間として実現される場合を考えることにする．ここで，$m$ は $\mathbb{C}$ 上のルベーグ測度 $m(dz) = d\mathrm{Re}\, z\, d\mathrm{Im}\, z = \sqrt{-1} dz d\bar{z}/2$ を表し，内積は $\langle f, g \rangle := \int_D f(z) g(z) m(dz)$, $f, g \in L^2(D, m(dz))$ で与えられる．$\Delta$ を $L^2(D, m(dz))$ におけるディリクレ・ラプラシアンとする．いま $D$ は有界としているので，$-\Delta$ は正の離散的な固有値をもつ．

$$-\Delta e_n = \lambda_n e_n, \quad e_n \in L^2(D, m(dz)), \quad n \in \mathbb{N}$$

ここで，固有値は $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots$ となるように順番付ける．このとき固有関数の列 $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は $L^2(D, m(dz))$ の完備正規直交関数系を与える．

**ディリクレ内積**を次式で定義する．

$$\langle f, g \rangle_{\nabla} := \frac{1}{2\pi} \int_D (\nabla f)(z) \cdot (\nabla g)(z) m(dz) \tag{2.1}$$

この内積による $\mathcal{C}_c^\infty(D)$ の完備化空間を $W(D)$ と書くことにする．ノルムを $\|f\|_\nabla=\sqrt{\langle f,f\rangle_\nabla}$, $f\in W(D)$ と記す．ここで，$u_n:=\sqrt{2\pi/\lambda_n}\,e_n$, $n\in\mathbb{N}$ と定義すると，$\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は，$W(D)$ に対して完備正規直交関数系を与えることになる．

$u_n$ の実係数形式無限和全体が成す空間を $\widehat{\mathcal{H}}(D)$ とする．この空間は写像 $\widehat{\mathcal{H}}(D)\ni f:=\sum_{n\in\mathbb{N}}\widehat{f}_n u_n\mapsto(\widehat{f}_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ により，$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ と同型と見なせる．また，この $\widehat{\mathcal{H}}(D)$ の部分空間として，$W(D)$ は 2 乗総和可能数列空間 $\ell^2(\mathbb{N})\subset\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ と同型である．$\widehat{\mathcal{H}}(D)$ に含まれる 2 つの無限和 $f=\sum_{n\in\mathbb{N}}\widehat{f}_n u_n$, $g=\sum_{n\in\mathbb{N}}\widehat{g}_n u_n$ に対して $\sum_{n\in\mathbb{N}}|\widehat{f}_n\widehat{g}_n|<\infty$ であるとき，この 2 つに対して $\langle f,g\rangle_\nabla:=\sum_{n\in\mathbb{N}}\widehat{f}_n\widehat{g}_n$ と書き，これを $f$ と $g$ のペアリングということにする．$f,g\in W(D)$ であるならば，当然このペアリングはディリクレ内積 (2.1) に等しい．

各 $a\in\mathbb{R}$ に対して $\langle f,g\rangle_a:=\langle(-\Delta)^{-a}f,(-\Delta)^{-a}g\rangle_\nabla$, $f,g\in\mathcal{H}_a(D)$ を内積とするヒルベルト空間を考えることにする．ノルムは $\|\cdot\|_a:=\sqrt{\langle\cdot,\cdot\rangle_a}$．これを $\mathcal{H}_a(D)$ と記す．特に $a=1/2$ とすると，$\langle f,g\rangle_{1/2}=\left\langle(-\Delta)^{-1/2}f,(-\Delta)^{-1/2}g\right\rangle_\nabla=\langle f,g\rangle/(2\pi)$, $f,g\in\mathcal{H}_{1/2}(D)$. したがって，$\mathcal{H}_{1/2}(D)$ は $L^2(D,m(dz))$ と同一視できる．

以上の設定の下，次の 2 つの補題が証明される [1].

**補題 2.1.** $a<b$ ならば，$\mathcal{H}_a(D)\subset\mathcal{H}_b(D)$.

**補題 2.2.** $\mathcal{H}_a(D)$ と $\mathcal{H}_{-a}(D)$ はディリクレ内積に関して双対なヒルベルト空間を成す.

上述のように $\mathcal{H}_{1/2}(D)\simeq L^2(D,m(dz))$ であるので，$a>1/2$ のときには $\mathcal{H}_a(D)$ の元は関数ではなく，超関数である．ヒルベルト空間の族 $\{\mathcal{H}_a\}_{a<-1/2}$ の共通部分 $\mathcal{E}(D)^*:=\bigcap_{a<-1/2}\mathcal{H}_a(D)$ はノルムの族 $\{\|\cdot\|_a\}_{a<-1/2}$ に同伴するフレッシェ空間である．その双対空間は補題 2.2 より $\mathcal{E}(D):=\bigcup_{a>1/2}\mathcal{H}_a(D)$ で与えられることになる．また，補題 2.1 より包含関係 $\mathcal{E}(D)^*\subset W(D)\subset\mathcal{E}(D)$ の成立が結論される [63, 1]．ここで，$(\mathcal{E}(D)^*,W(D),\mathcal{E}(D))$ は**ゲルファントの三つ組み**とよばれる．$\Sigma_{\mathcal{E}(D)}:=\sigma(\{\langle\cdot,f\rangle_\nabla : f\in\mathcal{E}(D)^*\})$ とする．

**ボホナー・ミンロスの定理**とよばれる次の定理が成り立つ [29, 63, 1].

**定理 2.3.** $\psi$ を $W(D)$ 上の連続な正型関数であり，$\psi(0)=1$ であるものとする．このとき $(\mathcal{E}(D),\Sigma_{\mathcal{E}(D)})$ 上の確率測度 $\mathbf{P}$ で $\psi(f)=\int_{\mathcal{E}(D)}e^{\sqrt{-1}\langle h,f\rangle_\nabla}\mathbf{P}(dh)$, $f\in\mathcal{E}(D)^*$ を満たすものが唯一存在する．

以下では特に $\Psi(f):=e^{-\|f\|_\nabla^2/2}$ の場合を考える．このときには，上の定理における関数 $f$ の集合を $\mathcal{E}(D)^*$ から $W(D)$ に拡張することができる [1]．よって，$(\mathcal{E}(D),\Sigma_{\mathcal{E}(D)})$ 上の確率測度 $\mathbf{P}$ として次を満たすものが定義されることになる．

$$e^{-\|f\|_\nabla^2/2}=\int_{\mathcal{E}(D)}e^{\sqrt{-1}\langle h,f\rangle_\nabla}\mathbf{P}(dh),\quad f\in W(D) \tag{2.2}$$

**定義 2.4.** 確率空間 $(\Omega^{\mathrm{GFF}},\mathcal{F}^{\mathrm{GFF}},\mathbb{P}^{\mathrm{GFF}})$ において，等長写像

$$H:W(D)\to L^2(\Omega^{\mathrm{GFF}},\mathcal{F}^{\mathrm{GFF}},\mathbb{P}^{\mathrm{GFF}})$$

があり，各 $f\in W(D)$ に対して，$\langle H,f\rangle_\nabla$ が平均零のガウス確率変数を与えるものとする．このとき，対 $((\Omega^{\mathrm{GFF}},\mathcal{F}^{\mathrm{GFF}},\mathbb{P}^{\mathrm{GFF}}),H)$ を**ディリクレ境界ガウス型自由場 (Gaussian free field : GFF)** という．

各 $f\in W(D)$ に対して，$h\mapsto\langle h,f\rangle_\nabla$, $h\in\mathcal{E}(D)$ によって与えられる確率変数を $H(f):=\langle H,f\rangle_\nabla\in L^2(\mathcal{E}(D),\mathbf{P})$ と書くことにする．すると (2.2) より，対 $((\mathcal{E}(D),\Sigma_{\mathcal{E}(D)},\mathbf{P}),H)$ は定

義2.4 を満たすことになる．以下では，確率空間 $(\Omega^{\mathrm{GFF}}, \mathcal{F}^{\mathrm{GFF}}, \mathbb{P}^{\mathrm{GFF}}) := (\mathcal{E}(D), \Sigma_{\mathcal{E}(D)}, \mathbf{P})$ の参照を省略して，単に $H$ をディリクレ境界の下でのGFF と称することにする．GFF $H$ とペアリングをとる $f \in W(D)$ は，確率場 $H$ に対するテスト関数の役割をする．

この定義より，(2.2) は

$$\mathbb{E}^{\mathrm{GFF}}[e^{\sqrt{-1}\langle H,f\rangle_\nabla}] = e^{-\|f\|_\nabla^2/2}, \quad f \in W(D) \tag{2.3}$$

と書けることになる．この式から，ガウス確率変数の族 $\{\langle H, f\rangle_\nabla : f \in W(D)\}$ のすべてのモーメントが計算できることになる．例えば，共分散は

$$\mathrm{Cov}[\langle H, f\rangle_\nabla, \langle H, g\rangle_\nabla] := \mathbb{E}^{\mathrm{GFF}}\Big[\langle H, f\rangle_\nabla \langle H, g\rangle_\nabla\Big] = \langle f, g\rangle_\nabla, \quad f, g \in W(D)$$

で与えられる．よって, 分散は $\mathrm{Var}[\langle H, f\rangle_\nabla] := \mathbb{E}^{\mathrm{GFF}}\Big[\langle H, f\rangle_\nabla^2\Big] = \|f\|_\nabla^2$, $f \in W(D)$ となる．$\theta \in \mathbb{R}$ という径数を導入し，(2.3) で $f \to \theta f$ と置き換えた上で，上の結果を用いると次が導かれる．

**補題 2.5.** ディリクレ境界GFF の特性関数は次で与えられる．

$$\mathbb{E}^{\mathrm{GFF}}[e^{\sqrt{-1}\theta\langle H,f\rangle_\nabla}] = e^{-(\theta^2/2)\mathrm{Var}[\langle H,f\rangle_\nabla]}, \quad \theta \in \mathbb{R}, \quad f \in W(D)$$

### 2.2. ディリクレ境界 GFF の共形不変性

$D, D' \subsetneq \mathbb{C}$ はいずれも単連結領域であり，$\varphi : D' \to D$ を共形変換とする．

**補題 2.6.** ディリクレ内積 (2.1) は共形変換不変であり，等式 $\int_D (\nabla f)(z) \cdot (\nabla g)(z) m(dz) = \int_{D'} (\nabla(f \circ \varphi))(z) \cdot (\nabla(g \circ \varphi))(z) m(dz)$ がすべての $f, g \in \mathcal{C}_{\mathrm{c}}^\infty(D)$ に対して成り立つ．

この補題より，$\varphi$ の引き戻し $\varphi^* : W(D) \ni f \mapsto f \circ \varphi \in W(D')$ は等長変換であることになる．このことより，これまでは有界な単連結領域の上だけでGFF を定義していたが，以下のように，非有界な単連結領域上の GFF を定義することができる：領域 $D'$ は有界であり，この上でGFF が定義されているものとする．いま，領域 $D$ は非有界であるとする．このとき，$\{\langle \varphi_* H, f\rangle_\nabla : f \in W(D)\}$ を等式 $\langle \varphi_* H, f\rangle_\nabla := \langle H, \varphi^* f\rangle_\nabla$, $f \in W(D)$ が成り立つように定義することにする．その結果, GFF の共分散の変換則は，次のように与えられることになる：$f, g \in W(D)$ に対して，

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}[\langle \varphi_* H, f\rangle_\nabla, \langle \varphi_* H, g\rangle_\nabla] &= \mathbb{E}^{\mathrm{GFF}}\Big[\langle \varphi_* H, f\rangle_\nabla \langle \varphi_* H, g\rangle_\nabla\Big] = \langle \varphi^* f, \varphi^* g\rangle_\nabla = \langle f, g\rangle_\nabla \\ &= \mathbb{E}^{\mathrm{GFF}}\Big[\langle H, f\rangle_\nabla \langle H, g\rangle_\nabla\Big] = \mathrm{Cov}[\langle H, f\rangle_\nabla, \langle H, g\rangle_\nabla]\end{aligned}$$

$H$ の引き戻しに対して $\varphi_* H = H \circ \varphi$ という等式が成り立つものと解釈する．上の等式をもって, ディリクレ境界GFF は共形変換不変であるという．

### 2.3. ディリクレ境界 GFF の共分散核

形式的に部分積分を行うと $\langle H, f\rangle_\nabla = (1/2\pi) \int_D H(z)(-\Delta f)(z) m(dz) = (1/2\pi)\langle H, (-\Delta) f\rangle$ という式変形ができる．そこで我々は,

$$\langle H, f\rangle := 2\pi \langle H, (-\Delta)^{-1} f\rangle_\nabla, \quad f \in \mathsf{D}((-\Delta)^{-1})$$

と定義することにする．ここで，$\mathsf{D}((-\Delta)^{-1})$ は $(-\Delta)^{-1}$ の定義域を表す．$(-\Delta)^{-1}$ は積分演算子として

$$((-\Delta)^{-1} f)(z) = \frac{1}{2\pi} \int_D G_D(z, w) f(w) m(dw), \quad \text{a.e.}\, z \in D, \quad f \in \mathsf{D}((-\Delta)^{-1})$$

というように表される．ここで，積分核 $G_D(z,w)$ はディリクレ境界条件下のグリーン関数とよばれる．これを用いると，$f,g\in \mathsf{D}((-\Delta)^{-1})$ であるとき $\langle H,f\rangle$ と $\langle H,g\rangle$ の共分散は

$$\mathrm{Cov}[\langle H,f\rangle,\langle H,g\rangle]:=\mathbb{E}^{\mathrm{GFF}}[\langle H,f\rangle\langle H,g\rangle]=\int_{D\times D} f(z)G_D(z,w)g(w)m(dz)m(dw) \tag{2.4}$$

と書けることになる．そこで，$\langle H,f\rangle=\displaystyle\int_D H(z)f(z)m(dz)$, $f\in\mathsf{D}((-\Delta)^{-1})$ という略記を許すことにすると，GFF の共分散核がグリーン関数ということになる：$\mathrm{Cov}[H(z),H(w)]:=\mathbb{E}^{\mathrm{GFF}}[H(z)H(w)]=G_D(z,w)$, $z,w\in D$, $n\neq w$. 上述の GFF の共形不変性より，共形変換 $\varphi: D'\to D$ によってグリーン関数の関数形は不変であり，$G_{D'}(z,w)=G_D(\varphi(z),\varphi(w))$, $z,w\in D'$ のように，単に座標変換 $(z,w)\to(\varphi(z),\varphi(w))$ をすればよいことになる．

(2.4) より，$\mathcal{C}_{\mathrm{c}}^{\infty}(D)\subset\mathsf{D}((-\Delta)^{-1})$ である．以下では，$\mathcal{C}_{\mathrm{c}}^{\infty}(D)$ に対するガウス確率変数族 $\{\langle H,f\rangle : f\in\mathcal{C}_{\mathrm{c}}^{\infty}(D)\}$ をもって，ディリクレ境界 GFF を特定することにする．

**例 2.1** $D$ が上半平面 $\mathbb{H}$ であるとき，

$$G_{\mathbb{H}}(z,w)=\log\left|\frac{z-\overline{w}}{z-w}\right|=\mathrm{Re}\,\log\frac{z-\overline{w}}{z-w},\quad z,w\in\mathbb{H},\ z\neq w$$

### 2.4. 自由境界 GFF

単連結領域 $D$ 上の滑らかな実関数であり，その勾配がコンパクトな台をもつもの全体を $\mathcal{C}_{\nabla}^{\infty}(D)$ と書くことにする．$D$ 上の定数関数全体を $\mathcal{N}$ と書くと，商空間 $\mathcal{C}_{\nabla}^{\infty}/\mathcal{N}$ はディリクレ内積に対して前ヒルベルト空間をなす．$f\in\mathcal{C}_{\nabla}^{\infty}(D)$ であるとき，$[f]:=f+\mathcal{N}$ とし，その完備化空間を $\widetilde{W}(D)$ と書くことにする．このような自由境界条件の下でも，以下のようにボホナー・ミンロスの定理が成り立つ．

**定理 2.7.** 確率空間 $(Q,\mathcal{B}_Q,\widetilde{\mathbf{P}})$ と確率変数の族 $\{\langle\widetilde{H},[f]\rangle_{\nabla}\in L^2(Q,\mathcal{B}_Q,\widetilde{\mathbf{P}}) : [f]\in\widetilde{W}(D)\}$ があり，次を満たす：$[f],[g]\in\widetilde{W}(D), a,b\in\mathbb{R}$ に対して $(\widetilde{H},a[f]+b[g])_{\nabla}=a(\widetilde{H},[f])_{\nabla}+b(\widetilde{H},[g])_{\nabla}$ が成り立ち，

$$\int_Q e^{\sqrt{-1}\langle\widetilde{h},[f]\rangle_{\nabla}}\widetilde{\mathbf{P}}(d\widetilde{h})=e^{-\|[f]\|_{\nabla}^2/2},\quad [f]\in\widetilde{W}(D)$$

ディリクレ境界 GFF のときと同様に，$\langle\widetilde{H},[f]\rangle^{\sim}:=2\pi\langle\widetilde{H},(-\Delta)^{-1}[f]\rangle_{\nabla}$, $[f]\in\mathsf{D}((-\Delta)^{-1})$ と定義する．自由境界 GFF の共分散核を表すグリーン関数を定義するため，$(-\Delta)^{-1}$ を積分作用素として表したいが，$[f]\in\widetilde{W}(D)$ は定数分だけの不定性がある．そこで，次のようなノイマン境界値問題を考えることにする．すなわち，$D$ 上の適当な関数 $\rho$ と境界 $\partial D$ 上の法線ベクトル場 $v$ に対して，次を満たす $\overline{D}$ 上の関数 $h$ を求める：$D$ 内で $-\Delta h=2\pi\rho$, $\partial D$ 上で $\dfrac{\partial h}{\partial n}=v$. ここで，$\partial/\partial n$ は $\partial D$ 上での法線ベクトル場に沿った方向微分を表す．発散定理より，解 $h$ があるならば $\int_D 2\pi\rho(z)m(dz)=\int_{\partial D}v(d)\ell(dz)$ が成り立つ．($\ell$ は $\partial D$ 上のルベーグ測度.) 逆にこれが成り立てば，解 $h$ が存在し，解は定数分の不定性の除けば一意に定まる．$v=0$ の場合の解は，ノイマン境界グリーン関数 $\widetilde{G}(z,w), z,w\in D$ を用いて $h(z)=\int_D\widetilde{G}(z,w)f(w)m(dw)$, $z\in D$ と表せるが，これは $[h]\in\widetilde{W}(D)$ の 1 つの元（特解）を与えることになる．以上より，$[f]\in\widetilde{W}(D)$ への $(-\Delta)^{-1}$ の作用は，2 つのステップを踏んで考えればよいことになる．まず，$[f]$ の代表元として $\int_D f(z)m(dz)=0$ となるものを選び，これを用いて $(-\Delta)^{-1}[f]=\left[\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_D\widetilde{G}(z,w)f(w)m(dw)\right]$ とする．$\mathcal{C}_{\nabla}^{\infty}(D)$ の部分空間として，上の意味で代表元となる関数から成る空間を ${}^0\mathcal{C}_{\nabla}^{\infty}(D):=\left\{f\in\mathcal{C}_{\nabla}^{\infty}(D) : \int_D f(z)m(dz)=0\right\}$ とする．そして，$f\in{}^0\mathcal{C}_{\nabla}^{\infty}(D)$ に対して $\langle\widetilde{H},f\rangle:=\langle\widetilde{H},[f]\rangle^{\sim}$ と定義することにする．以上の設定よ

り，ガウス確率変数の族 $\{\langle\widetilde{H},f\rangle : f\in {}^0\mathcal{C}^\infty_\nabla(D)\}$ があって，その共分散はノイマン境界グリーン関数 $\widetilde{G}$ を用いて

$$\mathbb{E}^{\mathrm{GFF}}\Big[\langle\widetilde{H},f\rangle\langle\widetilde{H},g\rangle\Big]=\int_{D\times D}f(z)\widetilde{G}(z,w)g(w)m(dz)m(dw),\quad f,g\in {}^0\mathcal{C}^\infty_\nabla(D)$$

と表現されることになる．ディリクレ境界 GFF と同様に，略記法 $\langle\widetilde{H},f\rangle=\int_D\widetilde{H}(z)f(z)m(dz)$, $f\in {}^0\mathcal{C}^\infty_\nabla(D)$ を導入し，$\mathrm{Cov}[\widetilde{H}(z),\widetilde{H}(w)]:=\mathbb{E}^{\mathrm{GFF}}\Big[\widetilde{H}(z)\widetilde{H}(w)\Big]=\widetilde{G}(z,w)$, $z,w\in D$, $z\neq w$ と書いて，ノイマン境界条件下のグリーン関数を自由境界 GFF の共分散核と見なす．

**例 2.2** $D$ が上半平面 $\mathbb{H}$ であるとき，

$$\widetilde{G}_{\mathbb{H}}(z,w)=-\log|(z-\overline{w})(z-w)|=-\mathrm{Re}\,\log(z-\overline{w})(z-w),\quad z,w\in\mathbb{H},\ z\neq w.$$

### 2.5. 多重 SLE による GFF の変換

SLE の確率空間と GFF の確率空間とを結合させたものとして $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P}):=(\Omega^{\mathrm{SLE}}\times\Omega^{\mathrm{GFF}}$, $\mathcal{F}^{\mathrm{SLE}}\vee\mathcal{F}^{\mathrm{GFF}}$, $\mathbb{P}^{\mathrm{SLE}}\otimes\mathbb{P}^{\mathrm{GFF}})$. を考えることにする．多重 SLE と GFF は以後，$(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ に拡張して考えることにし，多重 SLE は $\mathcal{F}_t:=\mathcal{F}^{\mathrm{SLE}}_t\vee\{\emptyset,\Omega^{\mathrm{GFF}}\}$ で定義されるフィルトレーション $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ に適合しているものとみなす．

$(\boldsymbol{X}_t)_{t\geq0}$ を駆動過程とする多重 SLE (1.5) が，初期条件 $g_0(z)=z\in\mathbb{H}$ の下で唯一の解 $(g_t)_{t\geq0}$ をもつものと仮定する．さらに，この解は $\mathbb{R}$ 上に拡張することができて $X^{(i)}_t=g_t(\eta^{(i)}_t)$ を満たす $\eta^{(i)}_t, i=1,\dots,N, t\geq 0$ が得られるものとし，$\eta^{(i)}:=\{\eta^{(i)}_t : t\in[0,\infty)\}$, $i=1,\dots,N$ と定義する．これらが，$\eta^{(i)}_0=X^{(i)}_0\in\mathbb{R}, i=1,\dots,N$ を起点とする $\overline{H}$ 内の $N$ 本の截線を成す場合を考えたい．しかし，これらが 1.1 節で述べた多重截線の条件 (C1′a)–(C3′) を一般に満たすことは期待できない．そこで，以下では各 $t\geq 0$ に対して，

$$\mathbb{H}^\eta_t:=\mathbb{H}\Big\backslash\bigcup_{i=1}^N\eta^{(i)}(0,t]\ \text{ の非有界成分},\quad t>0 \tag{2.5}$$

と定義することにする．すると，(1.5) の解 $g_t$ は $\mathbb{H}^\eta_t$ を $\mathbb{H}$ に写す共形変換であるので，これを $g_{\mathbb{H}^\eta_t}$ と書くことにする [6]．

我々は，共形変換の時間発展である多重 SLE により GFF が時間の経過とともに変換されていく過程を考える．ディリクレ境界グリーン関数と自由境界グリーン関数に対して，

$$G^{g_{\mathbb{H}^\eta_t}}(z,w):=G_{\mathbb{H}}(g_{\mathbb{H}^\eta_t}(z),g_{\mathbb{H}^\eta_t}(w)),\quad \widetilde{G}^{g_{\mathbb{H}^\eta_t}}(z,w):=\widetilde{G}_{\mathbb{H}}(g_{\mathbb{H}^\eta_t}(z),g_{\mathbb{H}^\eta_t}(w)),\quad t\geq 0$$

と書くことにする．また，これらを共分散核としてもつディリクレ境界 GFF と自由境界 GFF をそれぞれ，$H\circ g_{\mathbb{H}^\eta_t}(\cdot)$ と $\widetilde{H}\circ g_{\mathbb{H}^\eta_t}(\cdot)$ と記すことにする．

### 2.6. 後進多重 SLE とそれによる GFF の変換

ある時刻 $T\in(0,\infty)$ を定めて，多重 SLE の時間反転方程式を次式で定義することにする．

$$\frac{df^T_{\mathbb{H}^\eta_t}(z)}{dt}=-\sum_{i=1}^N\frac{2}{f^T_{\mathbb{H}^\eta_t}(z)-Y^{(i)}_{T;t}},\quad 0\leq t\leq T,\quad f^T_{\mathbb{H}^\eta_0}(z)=f^T_{\mathbb{H}}(z)=z\in\mathbb{H}.$$

これを (時間区間 $[0,T]$ での) **後進多重シュラム・レヴナー方程式**, その解 $(f^T_{\mathbb{H}^\eta_t}(z))_{t\in[0,T]}$ を**後進多重シュラム・レヴナー発展**とよび，ともに**後進多重 SLE** と略称することにする [34, 40].

共形変換 $g_T:\mathbb{H}^\eta_T\to\mathbb{H}$ の逆変換を $g_T^{-1}$ と書くことにする．これは共形変換 $\mathbb{H}\to\mathbb{H}^\eta_T$ を与える．次を証明することができる．

---

[6] 多重 SLE と GFF の結合を成立させた結果，駆動過程に対する選定問題が解決するとともに，$\{\eta^{(i)}\}_{i=1}^N$ は確率 1 で截線として実現されることが証明される．また，その定性的な振る舞いも明らかになる [36]．本稿の本文最後の定理 3.6 を参照．

**補題 2.8.** 等式 $f^T_{\mathbb{H}^\eta_T}(z) = g^{-1}_{\mathbb{H}^\eta_T}(z)$, $z \in \mathbb{H}$ が成り立つ.

ディリクレ境界グリーン関数と自由境界グリーン関数に対して,

$$G^{f^T_{\mathbb{H}^\eta_t}}(z,w) := G_{\mathbb{H}}(f^T_{\mathbb{H}^\eta_t}(z), f^T_{\mathbb{H}^\eta_t}(w)), \quad \widetilde{G}^{f^T_{\mathbb{H}^\eta_t}}(z,w) := \widetilde{G}_{\mathbb{H}}(f^T_{\mathbb{H}^\eta_t}(z), f^T_{\mathbb{H}^\eta_t}(w)), \quad t \in [0,T]$$

と書くことにする．$G^{f^T_{\mathbb{H}^\eta_t}}$ を共分散核としてもつディリクレ境界 GFF を $H \circ f^T_{\mathbb{H}^\eta_t}(\cdot)$ と書き, $\widetilde{G}^{f^T_{\mathbb{H}^\eta_t}}$ を共分散核としてもつ自由境界 GFF を $\widetilde{H} \circ f^T_{\mathbb{H}^\eta_t}(\cdot)$ と記す.

# 3. 拡張 GFF と多重 SLE の結合

## 3.1. 量子曲面

$\gamma \in [0,2)$ とする．単連結領域 $D \subsetneq \mathbb{C}$ においてディリクレ境界 GFF $H$ に対して極限測度

$$\mu^H(dz) := \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{\gamma^2/2} e^{\gamma H_\varepsilon(z)} m(dz)$$

を定める．ここで，各 $z \in D$ において $H_\varepsilon(z)$ は超関数に値をとるディリクレ境界 GFF $H$ を $z$ を中心とした半径 $\varepsilon$ の円周上で平均化したものである[7]. この極限測度は，ポリヤコフの2次元量子重力理論 [55] に対する確率論的定式化としてデュプランティエとシェフィールド [24] によって導入されたものであり，**ディリクレ境界リウヴィル量子重力**とよばれる．ここでは，同様のことを2.4 節で導入した自由境界 GFF $((\Omega^{\mathrm{GFF}}, \mathcal{F}^{\mathrm{GFF}}, \mathbb{P}^{\mathrm{GFF}}), \widetilde{H})$ に対して行なったとする：$\mu^{\widetilde{H}}(dz) := \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{\gamma^2/2} e^{\gamma \widetilde{H}_\varepsilon(z)} m(dz)$. この極限測度を**自由境界リウヴィル量子重力**とよぶことにする．

$D' \subsetneq \mathbb{C}$ を $D$ とは別の単連結領域とし，$\varphi : D' \to D$ を共形変換とする．いま，$A$ を $D'$ 上の可測集合とする．自由境界リウヴィル量子重力がこの $A \subset D'$ に与える測度は, 引き戻しの関係式 $\varphi^* \mu^{\widetilde{H}}(A) = \mu^{\widetilde{H}}(\varphi(A))$ によって，領域 $D$ 上に与えられた測度 $\mu^{\widetilde{H}}$ を用いて,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varphi(A)} \varepsilon^{\gamma^2/2} e^{\gamma \widetilde{H}_\varepsilon(z)} m(dz) \tag{3.1}$$

によって与えられるであろう．他方これは，$D'$ 上の領域 $A$ の測度を，$A \ni w \mapsto \varphi(w) = z \in \varphi(A)$ によって座標変換したものと見なすことも可能である．この座標変換によって，GFF が $\widetilde{H} \to \widetilde{H} \circ \varphi$ と変換されるとともに，円周平均をとる円の半径も $\varepsilon \to |\varphi'(w)|\varepsilon$ というように膨張・収縮することになる．ここで $\varphi'(w) := d\varphi(w)/dw$ である．したがって，(3.1) は

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_A (|\varphi'(w)|\varepsilon)^{\gamma^2/2} e^{\gamma(\widetilde{H}_\varepsilon \circ \varphi)(w)} |\varphi'(\omega)|^2 m(dw)$$

とも書ける．ところが $|\varphi'(w)|^{\gamma^2/2} e^{\gamma(\widetilde{H}_\varepsilon \circ \varphi)(w)} |\varphi'(w)|^2 = \exp\left[\gamma\left\{\widetilde{H}_\varepsilon \circ \varphi + \left(\frac{2}{\gamma} + \frac{\gamma}{2}\right) \log|\varphi'|\right\}(w)\right]$ であるから,

$$Q := \frac{2}{\gamma} + \frac{\gamma}{2} \tag{3.2}$$

として，新たに $\widetilde{H} \circ \varphi + Q \log|\varphi'|$ という場を $D'$ 上に定義してみる．すると，この新しく導入した場に対応した量子重力が領域 $A$ に与える測度は，上で始めに述べた測度 $\varphi^* \mu^{\widetilde{H}}(A)$ と等しいことになる．

以上の考察より，次の同値関係を定義することにする．

---

[7] 各 $z \in D$ に対して，$H_\varepsilon(z)$ は平均零のガウス確率変数であり，その分散は $\varepsilon \downarrow 0$ で $\mathrm{Var}[H_\varepsilon(z)] = \log(C(z;D)/\varepsilon) + o(1)$ と振舞う ($C(z;D)$ は共形半径). したがって，$\varepsilon \downarrow 0$ で $\mathbb{E}^{\mathrm{GFF}}[e^{\gamma H_\varepsilon(z)}] \sim \varepsilon^{-\gamma^2/2} \uparrow \infty$. この期待値の発散を打ち消すために因子 $\varepsilon^{\gamma^2/2}$ がかけられている.

**定義 3.1.** $\gamma \in (0,2)$ とする．2 つの単連結領域 $D_i \subsetneq \mathbb{C}$, $i=1,2$ とそれぞれの領域の上での自由境界 GFF $\widetilde{H}_{D_i}, i=1,2$ から成る 2 つの対 $(D_1, \widetilde{H}_{D_1})$ と $(D_2, \widetilde{H}_{D_2})$ を考える．共形変換 $\varphi : D_1 \to D_2$ に対して，$\mathbb{P}^{\rm GFF}$ の下,

$$\widetilde{H}_{D_1} \stackrel{\rm (law)}{=} \widetilde{H}_{D_2} \circ \varphi + Q \log |\varphi'| \tag{3.3}$$

の関係が成り立つとき，この 2 つの対は $\gamma$–同値であるという．ただし，$Q$ は (3.2) で与えられる．このとき $(D_1, \widetilde{H}_{D_1}) \sim_\gamma (D_2, \widetilde{H}_{D_2})$ と書くことにする．

(3.3) の右辺は，共形変換 $\varphi : D_1 \to D_2$ に伴う GFF の座標変換 $\widetilde{H}_{D_1} \to \widetilde{H}_{D_2} \circ \varphi$ の部分の他に，$Q \log |\varphi'|$ という項が加算されている．対数関数 $\log z$ は複素関数として正則であり，その実部 $\mathrm{Re} \log z = \log |z|$ と虚部 $\mathrm{Im} \log z = \arg z$ はともに調和関数である．(ただしここで，実軸の正の向きを角度 0 として，$\arg z \in [0, 2\pi)$ と定めるものする.) したがって，上の $\gamma$–同値類は, 調和関数を加えるということにより GFF を拡張したものとなっている．

**定義 3.2.** 単連結領域 $D \subsetneq \mathbb{C}$ 上のディリクレ境界 GFF $H$（あるいは自由境界 GFF $\widetilde{H}$）に対して，決定論的な調和関数 $u$ を加えた $H+u$（あるいは $\widetilde{H}+u$）を**拡張 GFF** という．

定義 3.1 で定義された $\gamma$–同値類を成す拡張 GFF を，シェフィールド [64] に従って**量子曲面** (quantum surface) とよぶ．

### 3.2. 虚曲面

$D \subsetneq \mathbb{C}$ を単連結領域とする．まずは $h \in \mathcal{C}_{\rm c}^\infty(D)$ として滑らかなベクトル場 $e^{\sqrt{-1}(h/\chi+\theta)}$ を考えることにする．ただし，$\chi$ と $\theta$ は実の径数とする．このベクトル場のフローを考える．出発点を領域の境界上の 1 点 $x \in \partial D$ として，そこをスタートするフロー線が時刻 $t \geq 0$ で径数付けられているものとする．これを $\eta := \{\eta_t : t \in [0, \infty)\}$ と書くことにして，次の常微分方程式に従って定まるものと仮定する

$$\frac{d\eta_t}{dt} = e^{\sqrt{-1}\{h(\eta_t)/\chi+\theta\}}, \quad t \geq 0, \quad \eta_0 = x \in \partial D \tag{3.4}$$

また，$D$ とは別の単連結領域 $D' \subsetneq \mathbb{C}$ を考え，共形変換 $\varphi : D' \to D$ で変換されるものとする．上で定めたフロー線 $\eta$ を $\varphi$ によって $D'$ 内に引き戻したものを，$\widehat{\eta}_t := \varphi^{-1} \circ \eta_t \iff \varphi(\widehat{\eta}_t) = \eta_t$ とする．後者の式の両辺を $t$ で微分すると $\varphi'(\widehat{\eta}_t) d\widehat{\eta}_t/dt = d\eta_t/dt$ となる．ここで $\varphi'(z) := d\varphi(z)/dz$ であるが，これを $\varphi'(z) = |\varphi'(z)| e^{\sqrt{-1} \arg \varphi'(z)}$ と極座標表示して，少し式変形すると，$d\widehat{\eta}_t/dt = e^{\sqrt{-1}\{(h\circ\varphi - \chi \arg \varphi')(\widehat{\eta}_t)/\chi+\theta\}}/|\varphi'(\widehat{\eta}_t)|$, $t \geq 0$ を得る．ここで時間変更 $t \to \tau = \tau(t)$ を $t = \int_0^\tau ds/|\varphi'(\widehat{\eta}_s)|$ に従って行い，$\widetilde{\eta}_t := \widehat{\eta}(\tau(t))$ と書くことにすると，上の方程式は

$$\frac{d\widetilde{\eta}_t}{dt} = e^{\sqrt{-1}\{(h\circ\varphi - \chi \arg \varphi')(\widetilde{\eta}_t)/\chi+\theta\}}, \quad t \geq 0$$

となる．時間変更して径数を変えてもフロー線はそのままであるから, フロー線を決めるベクトル場を与える関数 $h$ としては，$D$ 上の $h$ と $D' = \varphi^{-1}(D)$ 上の $h \circ \varphi - \chi \arg \varphi'$ は等価と見なせることになる．

ミラー と シェフィールド は，ディリクレ境界 GFF $H$ に対して，上と同様の考察を行った [48, 49, 50, 51]. その結果，次のような同値関係を定義した．

**定義 3.3.** $\chi \in \mathbb{R}$ とする．2 つの単連結領域 $D_i \subsetneq \mathbb{C}$, $i=1,2$ とそれぞれの領域の上でのディリクレ境界 GFF $H_{D_i}, i=1,2$ から成る 2 つの対 $(D_1, H_{D_1})$ と $(D_2, H_{D_2})$ を考える．共形変換 $\varphi : D_1 \to D_2$ に対して，$\mathbb{P}^{\rm GFF}$ の下，$H_{D_1} \stackrel{\rm (law)}{=} H_{D_2} \circ \varphi - \chi \arg \varphi'$ の関係が成り立つとき，この 2 つの対は $\chi$–同値であるといい，$(D_1, H_{D_1}) \sim_\chi (D_2, H_{D_2})$ と書くことにする．

$\arg\varphi'$ は調和関数であり，$\chi$–同値類を成す確率場も拡張 GFF であるといえる．ミラー・シェフィールド [48] に従って，この $\chi$–同値類を**虚曲面** (imaginary surface) とよぶことにする．([64] では，これを **AC 曲面** (AC surface) とよんでいる．AC は altimeter (高度計) と compass (方位磁針) を意味する.)

### 3.3. 拡張 GFF に値をとる確率過程とその定常性

これまでと同様に，$\mathbb{H}$ 上のディリクレ境界 GFF を $H$, 自由境界 GFF を $\widetilde{H}$ と記す．次のような時間発展系を導入する．

$$\widetilde{H}_t(\cdot) := \widetilde{H} \circ f^T_{\mathbb{H}^\eta_t}(\cdot) + Q \log \left| {f^T_{\mathbb{H}^\eta_t}}'(\cdot) \right| + \frac{2}{\sqrt{\kappa}} \sum_{i=1}^N \log \left| f^T_{\mathbb{H}^\eta_t}(\cdot) - Y^{(i)}_{T;t} \right|, \quad 0 \leq t \leq T < \infty,$$

$$H_t(\cdot) := H \circ g_{\mathbb{H}^\eta_t}(\cdot) - \chi \arg {g_{\mathbb{H}^\eta_t}}'(\cdot) - \frac{2}{\sqrt{\kappa}} \sum_{i=1}^N \arg\left(g_{\mathbb{H}^\eta_t}(\cdot) - X^{(i)}_t\right), \quad t \geq 0. \tag{3.5}$$

定義より，$\widetilde{H}_0 = \widetilde{H}$, $H_0 = H$ である．

(3.5) の 2 つの式の第 1 項は，それぞれ 2.6 節と 2.5 節で述べた多重 SLE による GFF の変換である．それらに第 2 項を加えることで，3.1 節と 3.2 節で導入した量子曲面と虚曲面の形になっている．それぞれ $N$ 個の関数の和から成る第 3 項が，多重 SLE とこれらの確率場との結合の仕方を指定するものである．各時刻 $t \geq 0$ で，これらは $\mathbb{H}^\eta_t$ の上では調和関数であるので，第 1 項と（$N$ 和から成る）第 3 項の和は定義 3.2 の意味で $\mathbb{H}^\eta_t$ 上の拡張 GFF である．したがって，$\widetilde{H}_t$ と $H_t$ は全体として，それぞれ $\mathbb{H}^\eta_t$ 上の量子曲面と虚曲面の形になっている．

1 つのブラウン運動 $\sqrt{\kappa}B_t, t \geq 0$ で駆動されるシュラムが導入した元来の $\mathrm{SLE}_\kappa$ と GFF との結合は，デュベダ [23], シュラム・シェフィールド [62], シェフィールド [64], ミラー・シェフィールド [48, 49, 50, 51] で研究されている．そこでの「結合関数」は $(2/\sqrt{\kappa}) \log |f^T_{\mathbb{H}^\eta_t}(\cdot) - \sqrt{\kappa}B_t|$, および $-(2/\sqrt{\kappa}) \arg(g_{\mathbb{H}^\eta_t}(\cdot) - \sqrt{\kappa}B_t)$ であった．その結果，$\kappa > 0$ に対して，

$$\gamma = \sqrt{\kappa}, \quad Q = \frac{2}{\sqrt{\kappa}} + \frac{\sqrt{\kappa}}{2}, \quad \chi = \frac{2}{\sqrt{\kappa}} - \frac{\sqrt{\kappa}}{2}, \tag{3.6}$$

としたときに限り，$\mathrm{SLE}_\kappa$ と GFF との結合が成立することが証明された [23, 64, 48, 49, 50, 51]. 我々はこれらの関数の和を結合関数として採用した．共形場理論からの考察 [32] より，$\kappa \neq 4$ のときには，これが可能な唯一のものであることが越田により示されている [40].

この結合関数には $\log |f^T_{\mathbb{H}^\eta_t}(\cdot) - Y^{(i)}_{T;t}|$ や $\arg(g_{\mathbb{H}^\eta_t}(\cdot) - X^{(i)}_t)$ があり，これらは SLE 曲線 $\eta^{(i)}$ の上では (一意に) 定義されない．ここでは，$\mathbb{H}$ 内の開集合 $A$ を選び，$A$ が $\mathbb{H}^\eta_t$ に含まれている間だけに時間区間を限定して考えることにする．そのために $A$ として，$v_A := \inf\{\mathrm{Im}\, z : z \in A\}$ としたとき，$v_A \geq {}^\exists\delta > 0$ であるものだけを考えることにする．すなわち，領域 $A$ と実軸の間に隙間があるものとする．このような $A$ に対して $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$–停止時刻 $\tau_A := \sup\{t \geq 0 : A \subset \mathbb{H}^\eta_t\}$ と定義すると $\tau_A > 0$ であり，$t \in [0, \tau_A]$ の間はこの領域 $A$ の中に SLE 曲線が侵入してくることはなく，$A$ 内のすべての点に対して (3.5) が定義される．よって，テスト関数 $f \in \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{c}}(\mathbb{H})$ として，$\mathrm{supp}\,(f) \subset A$ であるものだけを採用することにすれば，(3.5) を**拡張 GFF 値確率過程**と見なすことができることになる．

以上のような制限はあるが，我々は多重 SLE と GFF との結合を，この 2 者を結合することで得られる拡張 GFF 値確率過程が定常性をもつことをもって定義したい．

**定義 3.4.** $v_A \geq {}^\exists\delta > 0$ である領域 $A$ に対して，$(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$–停止時刻 $\tau_A$ を上述のように定め，$0 < T < \tau_A$ とする．多重 SLE とその後進版の駆動過程が，それぞれ $(\boldsymbol{X}_t)_{t \geq 0}$ と $(\boldsymbol{Y}_{T;t})_{t \in [0,T]}$ で与えられたとき，$\mathrm{supp}\,(f) \subset A$ であるすべての $f \in \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{c}}(\mathbb{H})$ に対して，

$$\langle \widetilde{H}_0, f \rangle \stackrel{\text{(law)}}{=} \langle \widetilde{H}_t, f \rangle, \qquad \langle H_0, f \rangle \stackrel{\text{(law)}}{=} \langle H_t, f \rangle, \quad t \in [0, T]$$

が成り立つものとする．このとき，多重 SLE と GFF の間に結合が成立するという．

$\gamma, Q, \chi$ という拡張 GFF のパラメータは，先行研究と同じく，パラメータ $\kappa > 0$ により (3.6) のように与えられるものとする．以下が，本講演の主定理である [34, 35, 36]．

**定理 3.5.** $(\boldsymbol{X}_t)_{t\geq 0}$ が径数 $\beta = 8/\kappa$ のダイソンのブラウン運動模型 (1.7) であり，$(\boldsymbol{Y}_{T;t})_{t\in[0,T]}$ が径数 $\beta = 8/\kappa$ の時間区間 $[0,T]$ における後進ダイソン・ブラウン運動模型 (1.9) であるときに限り，多重 SLE と GFF との間に結合が成立する．

(3.5) の $\widetilde{H}_t$ および $H_t$ の表式のうち，第 1 項を除いた部分，すなわち $\mathbb{H}_t^{\eta}$ 上の調和関数の部分をそれぞれ，$\widetilde{\mathfrak{h}}_t$, $\mathfrak{h}_t$ と書くことにする．定理 3.5 は次の事実によって証明される．駆動過程として径数 $\beta = 8/\kappa$ のダイソンのブラウン運動模型，およびその後進版を選定した場合に限り，各 $z \in A$ において $(\widetilde{\mathfrak{h}}_t(z))_{t\in[0,T]}$ と $(\mathfrak{h}_t(z))_{t\in[0,T]}$ は連続局所マルチンゲールとなり，それらの相互変動過程は

$$d\langle \widetilde{\mathfrak{h}}_\cdot(z), \widetilde{\mathfrak{h}}_\cdot(w)\rangle_t = -d\widetilde{G}^{f^T_{\mathbb{H}_t^{\eta}}}(z,w), \quad d\langle \mathfrak{h}_\cdot(z), \mathfrak{h}_\cdot(w)\rangle_t = -dG^{g_{\mathbb{H}_t^{\eta}}}(z,w), \quad z, w \in A$$

で与えられる．これは，多重 SLE により変換されたことにより生じた GFF の共分散核の増分は，結合された多重 SLE からの寄与によって完全に打ち消されることを意味する．その結果，定常性が実現されることになるのである．

上で (3.5) で与えられた $\widetilde{H}_t$ と $H_t$ はそれぞれ量子曲面と虚曲面の形をしていると述べた．これらの拡張 GFF は，定義 3.1 および定義 3.3 では $\gamma$–同値類と $\chi$–同値類として定められたが, 定理 3.5 はこの 2 つの同値類の元が多重 SLE に伴なう時間発展として実現されることを意味している．$\mathbb{H}$ と初期値である元来の GFF の対は，これら同値類の代表元を与える：$(\mathbb{H}_t^{\eta}, \widetilde{H}_t) \sim_{\gamma} (\mathbb{H}, \widetilde{H}_0)$, $(\mathbb{H}_t^{\eta}, H_t) \sim_{\chi} (\mathbb{H}, H_0)$, $t \geq 0$.

### 3.4. 多重 SLE の 3 相

本稿冒頭の 1.1 節後半で述べたように，多重截線は元来は多時刻 $\boldsymbol{s} = (s^{(1)}, \dots, s^{(N)})$ で径数付けられたものであった．それらが 1 つの時刻 $t \geq 0$ に従って「均一に」時間経過する場合を特にここでは多重レブナー発展とよび，その確率過程版を扱ってきた．しかし，多重截線の時間発展を不均一にすることも可能である．例えば，$i \in \{1, \dots, N\}$ を 1 つ選び，$s^{(i)}$ のみを時間経過させたとすると，$i$ 番目の截線 $\eta^{(i)}(0, s^{(i)}]$ のみが $\mathbb{H}$ 内で成長することになる．この場合，他の截線は実軸 $\mathbb{R}$ 上の起点 $\eta_0^{(j)} = X^{(j)}, j \neq i$ として留まるが，$\eta^{(i)}_{s^{(i)}}$ の成長に伴ない, これにより駆動される SLE によって $\mathbb{R}$ 上を運動し，$X^{(i)}_{\boldsymbol{s}}$ と相互作用することになる．このような系は，截線は 1 本のままではあるがシュラムの $\mathrm{SLE}_{\kappa}$ を拡張したものであり，$\mathrm{SLE}_{(\kappa,\rho)}$ とよばれる [21]．不均一な多時刻発展をする多重 SLE は，ある種の可換条件の下，均一時刻多重 SLE と共形変換によって関係付けられる [22]．デュベダ [23] が指摘しているように，$\mathrm{SLE}_{(\kappa,\rho)}$ と GFF の結合は共形共変性とよぶべき変換性をもつ．この特性を利用することにより，ミュラー・シェフィールド [48] などの先行研究との比較が可能となる．さらに，ダイソンのブラウン運動模型に関する知見を援用することにより，次を証明することができる [36]．

**定理 3.6.** $(\boldsymbol{X}_t)_{t\geq 0}$ を径数 $\beta = 8/\kappa$ をもつダイソンのブラウン運動模型とし，これにより駆動される多重 SLE を $(g_t)_{t\geq 0}$ とする．以下が確率 1 で成立する．各 $i = 1, \dots, N$ に対して，極限 $\eta_t^{(i)} = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} g_t^{-1}(X_t^{(i)} + \sqrt{-1}\varepsilon)$ がすべての時刻 $t \geq 0$ において存在し，$\eta^{(i)} = \eta^{(i)}[0, \infty)$ は連続曲線を成す．また，$\lim_{t\to\infty} |\eta_t^{(i)}| = \infty$ である．さらに $\kappa$ 依存性に関して次が成り立つ．

(a) $\kappa \in (0, 4]$ のとき，確率 1 で，$\eta^{(i)}, i = 1, \dots, N$ は各々単純曲線であり，互いに接触することはなく，また，$\eta^{(i)} \subset \mathbb{H}$ である．

(b) $\kappa \in (4, 8)$ のとき，正の確率で，$\eta^{(i)}, i = 1, \dots, N$ は自己接触するとともに，互いに接触し，また，実軸 $\mathbb{R}$ とも接触する．

(c) $\kappa = 8$ のとき，$\eta^{(i)}, i = 1, \dots, N$ は，確率 1 で $\mathbb{H}$ を充填する．

径数 $\beta$ をもつダイソンのブラウン運動模型は $\beta \geq 1$ の場合に確率 1 で非衝突過程である [2, 56, 16, 27]．定理 3.6 の主張が $\kappa = 8/\beta \leq 8$ に限られているのは，この径数領域に対応してのことである．駆動過程が衝突を起こすときには，多時刻径数付けされた多重截線を 1 時刻径数付けすることはできないであろう．$\kappa > 8$ のときの多重 SLE 曲線の特徴づけは今後の課題の1つである．

## 4. おわりに

ランダム行列理論に関連する多粒子確率過程は多くのバリエーションが考えられる [2, 6, 13, 14, 37, 33]．そのため，多岐に亘る研究が盛んである．これに応じて，ここで扱ったダイソンのブラウン運動模型で駆動される多重 SLE にもいくつかのバリエーションが考えられる [67, 34, 35]. また，ランダム行列に関連する確率過程の**流体力学極限** [8] や**無限粒子極限** [38, 52, 53, 68, 54] の研究も盛んである．このうち，流体力学極限に関する計算は多重 SLE に対しても報告されているが [20, 19, 30, 31]，無限粒子極限に関する研究はまだない．本講演では最後に，多重 SLE と GFF の結合に関連する今後の課題をいくつか述べる予定である．

## A. 付録

### A.1. ランダム行列理論と関連する多粒子確率過程

$N \in \mathbb{N}$ に対して，$\mathsf{H}_N$ を $N \times N$ のエルミート行列全体の空間とし，$\mathsf{U}_N$ を $N \times N$ のユニタリー行列全体の空間 (ユニタリー群) とする．エルミート条件 $\overline{M_{ji}(t)} = M_{ij}(t)$ を満たす複素数値過程 $(M_{ij}(t))_{t \geq 0}$, $i, j = 1, \dots, N$, $t \geq 0$ を用いて，$\mathsf{H}_N$ 値過程 $M(t) = (M_{ij}(t))_{1 \leq i,j \leq N}$, $t \geq 0$ を定義する．空間 $S = \mathbb{R}$ と $S = \mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ に対して，ワイル領域 $\mathbb{W}_N(S) := \{\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_N) \in S^N : x_1 < \cdots < x_N\}$ を定義する．また，この閉包を $\overline{\mathbb{W}_N(S)} = \{\boldsymbol{x} \in S^N : x_1 \leq \cdots \leq x_N\}$ と書くことにする．各時刻 $t \geq 0$ において，$M(t)$ を次のように対角化するユニタリー行列 $U(t) = (U_{ij}(t))_{1 \leq i,j \leq N} \in \mathsf{U}_N$ が存在する

$$U^\dagger(t) M(t) U(t) = \mathrm{diag}(\Lambda_1(t), \dots, \Lambda_N(t))$$

ただしここで，$M(t)$ の固有値を $\{\Lambda_i(t)\}_{i=1}^N$ と書いた．また，$U^\dagger(t)$ は $U(t)$ のエルミート共役を表す; $U_{ij}^\dagger(t) = \overline{U_{ji}(t)}, 1 \leq i, j \leq N$. 固有値は $\boldsymbol{\Lambda} := (\Lambda_1(t), \dots, \Lambda_N(t)) \in \overline{\mathbb{W}_N(\mathbb{R})}$, $t \geq 0$ が成り立つように番号付けをすることにする．$\mathsf{H}_N$ 値過程の変動 $dM(t) := (dM_{ij}(t))_{1 \leq i,j \leq N}$ に対して，次のような相互変動過程を考える．

$$\Gamma_{ij,k\ell}(t) := \left\langle (U^\dagger dMU)_{ij}, (U^\dagger dMU)_{k\ell} \right\rangle_t, \quad 1 \leq i, j, k, \ell \leq N, \quad t \geq 0$$

次が証明できる [13, 37, 8, 33].

**命題 A.1.** $(M_{ij}(t))_{t \geq 0}, 1 \leq i, j \leq N$ は半マルチンゲールであるとする．このとき，固有値過程 $(\boldsymbol{\Lambda}(t))_{t \geq 0}$ は次の連立の確率微分方程式に従う．

$$d\Lambda_i(t) = d\mathcal{M}_i(t) + dJ_i(t), \quad t \geq 0, \quad i = 1, \dots, N$$

ただしここで，$(\mathcal{M}_i(t))_{t \geq 0}, i = 1, \dots, N$ は相互変動過程 $\langle \mathcal{M}_i, \mathcal{M}_j \rangle_t = \displaystyle\int_0^t \Gamma_{ii,jj}(s) ds$ をもつマルチンゲールであり，また，$(J_i(t))_{t \geq 0}, 1 \leq i \leq N$ は次式に従う有界変動過程である．

$$dJ_i(t) = \sum_{j=1}^N \frac{\mathbf{1}_{(\Lambda_i(t) \neq \Lambda_j(t))}}{\Lambda_i(t) - \Lambda_j(t)} \Gamma_{ij,ji}(t) dt + d\Upsilon_i(t), \quad t \geq 0, \quad i = 1, \dots, N$$

ただし，$\mathbf{1}_{(\omega)}$ は条件 $\omega$ の指示関数であり，$d\Upsilon_i(t)$ は $(U^\dagger(t) dM(t) U(t))_{ii}$ の有界変動部分を表す．

$\nu \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ として，$(B_{ij}(t))_{t\geq 0}$, $(\widetilde{B}_{ij}(t))_{t\geq 0}$, $1 \leq i \leq N+\nu$, $1 \leq j \leq N$ を互いに独立な 1 次元標準ブラウン運動とする．$1 \leq i \leq j \leq N$ に対して,

$$S_{ij}(t) = \begin{cases} B_{ij}(t)/\sqrt{2} & (i<j) \\ B_{ii}(t) & (i=j) \end{cases} \qquad A_{ij}(t) = \begin{cases} \widetilde{B}_{ij}(t)/\sqrt{2} & (i<j) \\ 0 & (i=j) \end{cases}$$

とおき，$S_{ij}(t) := S_{ji}(t)$, $A_{ij}(t) := -A_{ji}(t)$, $t \geq 0$, $1 \leq j < i \leq N$ とする．

**例 A.1** $M_{ij}(t) := S_{ij}(t) + \sqrt{-1}A_{ij}(t)$, $t \geq 0$, $1 \leq i,j \leq N$ として，$\mathsf{H}_N$ 値確率過程 $M(t) = (M_{ij}(t))_{1\leq i,j\leq N}$ を考える．すると，$t \geq 0$, $1 \leq i,j,k,\ell \leq N$ に対して，$\langle dM_{ij}, dM_{k\ell}\rangle_t = \delta_{i\ell}\delta_{jk}dt, \Gamma_{ij,k\ell}(t) = \delta_{i\ell,jk}, \langle d\mathcal{M}_i, d\mathcal{M}_j\rangle_t = \Gamma_{ii,jj}(t)dt = \delta_{ij}dt, \Gamma_{ij,ji}(t) \equiv 1$ が成り立つ．よって，命題 A.1 より，固有値過程 $(\boldsymbol{\Lambda}(t))_{t\geq 0}$ は，次の方程式で $\beta = 2$ としたものに従うことが導かれる．

$$d\Lambda_i(t) = dB_i(t) + \frac{\beta}{2}\sum_{1\leq j\leq N, j\neq i}\frac{dt}{\Lambda_i(t)-\Lambda_j(t)}, \quad t \geq 0, \quad i = 1,\dots,N \tag{A.1}$$

ここで，$(B_i(t))_{t\geq 0}$, $i = 1,\dots,N$ は，上で用いた $(B_{ij}(t))_{t\geq 0}$ や $(\widetilde{B}_{ij}(t))_{t\geq 0}$ とは別の，互いに独立な 1 次元標準ブラウン運動である．(A.1) を径数 $\beta$ の**ダイソンのブラウン運動模型**とよぶ [25, 33].

**例 A.2** $(N+\nu)\times N$ の矩形行列値の確率過程 $K(t) := (B_{ij}(t)+\sqrt{-1}\widetilde{B}_{ij}(t))_{1\leq i\leq N+\nu, 1\leq j\leq N}, t \geq 0$ を考え，$\mathsf{H}_N$ 値の確率過程を $M(t) = K^{\dagger}(t)K(t)$, $t \geq 0$ で定義する．行列 $M$ は正定値であり，よってその固有値は非負である：$\Lambda_i(t) \in \mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}, t \geq 0, i = 1,\dots,N$. このとき，$t \geq 0$, $1 \leq i,j,k,\ell \leq N$ に対して, $dM_{ij}(t)$ の有界変動部分 $= 2(N+\nu)\delta_{ij}dt$, $\langle dM_{ij}, dM_{k\ell}\rangle_t = 2(M_{i\ell}(t)\delta_{jk} + M_{k\ell}(t)\delta_{i\ell})dt$, $d\Upsilon_i(t) = 2(N+\nu)dt$, $\Gamma_{ij,ji}(t) = 2(\Lambda_i(t)+\Lambda_j(t))$, $\langle d\mathcal{M}_i, d\mathcal{M}_j\rangle_t = \Gamma_{ii,jj}(t)dt = 4\Lambda_i(t)\delta_{ij}dt$ であることが示せる．よって，命題 A.1 より，$(M(t))_{t\geq 0}$ の固有値過程は次式で $\beta = 2$ としたものに従うことになる．

$$d\Lambda_i(t) = 2\sqrt{\Lambda_i(t)}d\widetilde{B}_i(t) + \beta\Big[(\nu+1) + 2\Lambda_i(t)\sum_{1\leq j\leq N, j\neq i}\frac{1}{\Lambda_i(t)-\Lambda_j(t)}\Big]dt \tag{A.2}$$

$t \geq 0, i = 1,\dots,N$. ただしここで，$(\widetilde{B}_i(t))_{t\geq 0}$, $i = 1,\dots,N$ は，矩形行列の成分を与えるために用いた $(B_{ij}(t))_{t\geq 0}$ と $(\widetilde{B}_{ij}(t))_{t\geq 0}$, $1 \leq i \leq N+\nu$, $1 \leq j \leq N$ とは別の，互いに独立な 1 次元標ブラウン運動である．

$M(t)$ の固有値の正の平方根は矩形行列 $K(t)$ の特異値を与える．これを $\mathcal{S}_i(t) = \sqrt{\Lambda_i(t)}$, $t \geq 0, i = 1,\dots,N$ と書くことにする．これらに対する確率微分方程式は (A.2) から次の式で $\beta = 2$ としたもので与えられることが分かる．

$$d\mathcal{S}_i(t) = d\widetilde{B}_i(t) + \frac{\beta(\nu+1)-1}{2\mathcal{S}_i(t)}dt + \frac{\beta}{2}\sum_{1\leq j\leq N, j\neq i}\left(\frac{1}{\mathcal{S}_i(t)-\mathcal{S}_j(t)} + \frac{1}{\mathcal{S}_i(t)+\mathcal{S}_j(t)}\right)dt, \tag{A.3}$$

$t \geq 0, i = 1,\dots,N$. (A.3) を**ブルー・ウィシャート過程**とよぶ [14, 69]. 我々は [35] で, $\mathbb{R}_+$ 上の (A.3) で駆動される, $\mathbb{C}$ の第 1 象限 $\mathbb{O} := \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\, z > 0, \mathrm{Im}\, z > 0\}$ 内の多重 SLE と GFF との結合についても議論した.

## 参考文献


[1] 新井朝雄：「量子数理物理学における汎関数積分法」, 共立出版, 東京 (2010).

[2] 香取眞理，種村秀紀：非衝突過程・行列値過程・行列式過程，数学 **61** (3) (2009) 225–247.

[3] 木村太郎：「ランダム行列の数理」，森北出版，東京 (2021).

[4] 越田真史：多重 SLE/GFF 結合から動的ランダム行列理論へ, 日本物理学会誌 **76** (9) (2021) 584–588.

[5] 永尾太郎：「ランダム行列の基礎」，東京大学出版会，東京 (2005).

[6] 長田博文：ランダム行列,「確率論ハンドブック」(伊藤清 企画・監修，渡辺信三，重川一郎 編) 11.5 節，丸善出版，東京 (2012).

[7] 白井朋之，香取眞理：SLE (Schramm–Loewner Evolution)，「確率論ハンドブック」(伊藤清 企画・監修，渡辺信三，重川一郎 編) 11.4 節，丸善出版，東京 (2012).

[8] G. W. Anderson, A. Guionnet, O. Zeitouni: *An Introduction to Random Matrices*, Cambridge University Press, Cambridge (2010).

[9] M. Bauer, D. Bernard: $\mathrm{SLE}_\kappa$ growth processes and conformal field theories, Phys. Lett. B **543** (2002) 135–138.

[10] M. Bauer, D. Bernard, K. Kytölä: Multiple Schramm–Loewner evolutions and statistical mechanics martingales, J. Stat. Phys. **120** (2005) 1125–1163.

[11] V. Beffara: The dimension of the SLE curves, Ann. Probab. **36** (2008) 1421–1452.

[12] A. A. Belavin, A. M. Polyyakov, A. B. Zamolodchikov: Infinite conformal symmetry in two-dimensional quantum filed theory, Nucl. Phys. B **241** (1984) 333–380.

[13] M. F. Bru: Diffusions of perturbed principal component analysis, J. Multivariate Anal. **29** (1989) 127–136.

[14] M. F. Bru: Wishart process, J. Theor. Probab. **4** (1991) 725–751.

[15] J. Cardy: Stochastic Loewner evolution and Dyson's circular ensemble, J. Phys. A Math. Gen. **36** (2003) L379-L386; Corrigendum. ibid., 12343.

[16] E. Cépa, D. Lépingle: Diffusing particles with electrostatic repulsion, Probab. Theory Relat. Fields **107** (1997) 429–449.

[17] D. Chelkak, H. Duminil-Copin, C. Hongler, A. Kemppainen, S. Smirnov: Convergence of Ising interfaces to Schramm's SLE curves, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I Math. **352** (2014) 157–161.

[18] D. Chelkak, S. Smirnov: Universality in the 2D Ising model and conformal invariance of fermionic observables, Inv. Math. **189** (2012) 515–580.

[19] A. del Monaco, I. Hotta, S. Schleißinger: Tightness results for infinite-slit limits of the chordal Loewner equation, Comput. Methods Funct. Theory **18** (2018) 9–33.

[20] A. del Monaco, S. Schleißinger: Multiple SLE and the complex Burgers equation, Math. Nachr. **289** (2016) 2007–2018.

[21] J. Dubédat: $\mathrm{SLE}(\kappa, \rho)$ martingales and duality, Ann. Probab. **33** (2005) 223–243.

[22] J. Dubédat: Commutative relations for Schramm–Loewner evolutions, Commun. Pure Appl. Math. **60** (2007) 1792–1847.

[23] J. Dubédat: SLE and the free field: partition functions and couplings, J. Amer. Math. Soc., **22** (2009) 995–1054.

[24] B. Duplantier, S. Sheffield: Liouville quantum gravity and KPZ, Invent. Math. **185** (2011) 333–393.

[25] F. J. Dyson: A Brownian-motion model for the eigenvalues of a random matrix, J. Math. Phys. **3** (1962) 1191–1198.

[26] P. J. Forrester: *Log-gases and Random Matrices*, London Math. Soc. Monographs, Princeton University Press, Princeton (2010).

[27] P. Graczyk, J. Małecki: Multidimensional Yamada–Watanabe theorem and its applications to particle systems, J. Math. Phys. **54** (2013) 021503/1–15.

[28] K. Graham: On multiple Schramm–Loewner evolutions, J. Stat. Mech. Theory Exp. **2007** (2007) P03008.

[29] T. Hida: *Brownian Motion*, Application of Mathematics, vol.11, Springer, Heidelberg (1980).

[30] I. Hotta, M. Katori: Hydrodynamic limit of multiple SLE, J. Stat. Phys. **171** (2018) 166–188.

[31] I. Hotta, S. Schleißinger: Limits of radial multiple SLE and a Burgers–Loewner differential equation, J. Theor. Probab. **34** (2021) 755–783.

[32] N.-G. Kang, N. G. Makarov: *Gaussian Free Field and Conformal Field Theory*, *Astérisque* **353**, Société Mathématique de France, Paris (2013).

[33] M. Katori: *Bessel Processes, Schramm–Loewner Evolution, and the Dyson Model*, SpringerBriefs in Mathematical Physics 11, Springer, Tokyo (2016).

[34] M. Katori, S. Koshida: Conformal welding problem, flow line problem, and multiple Schramm–

Loewner evolution, J. Math. Phys. **61** (2020) 083301/1–25.

[35] M. Katori, S. Koshida: Gaussian free fields coupled with multiple SLEs driven by stochastic log-gases, Advanced Study in Pure Mathematics **87** (2021) 315–340.

[36] M. Katori, S. Koshida: Three phases of multiple SLE driven by non-colliding Dyson's Brownian motions, J. Phys. A: Math. Theor. **54** (2021) 325002 (19 pages).

[37] M. Katori, H. Tanemura: Symmetry of matrix-valued stochastic processes and noncolliding diffusion particle systems, J. Math. Phys. **45** (2004) 3058–3085.

[38] M. Katori, H. Tanemura: Non-equilibrium dynamics of Dyson's model with an infinite number of particles, Commun. Math. Phys. **293** (2010) 469–497.

[39] A. Kemppainen: *Schramm–Loewner Evolution*, SpringerBriefs in Mathematical Physics 24, Springer (2017).

[40] S. Koshida: Multiple backward Schramm–Loewner evolution and coupling with Gaussian free field, Lett. Math. Phys. **111** (2021) 30 (41 pages).

[41] S. Koshida: private communication.

[42] M. J. Kozdron, G. F. Lawler: The configurational measure on mutually avoiding SLE paths, In *Universality and renormalization*, Fields Inst. Commun., Vol. 50, Amer. Math. Soc., Providence, RI (2007), pp.199–224.

[43] P. P. Kufarev, V. V. Sobolev, L. V. Sporyševa: A certain method of investigation of extremal problems for functions that are univalent in the half-plane, Trudy Tomsk. Gos. Univ. Ser. Meh.-Mat., **200** (1968) 142–164.

[44] G. F. Lawler: *Conformally Invariant Processes in the Plane*, Amer. Math. Soc., Providence, RI (2005).

[45] G. Lawler, O. Schramm, W. Werner: Conformal invariance of planar loop-erased random walks and uniform spanning trees, Ann. Probab. **32** (2004) 939–995.

[46] K. Löwner: Untersuchungen über schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises I, Math. Ann. **89** (1923) 103–121.

[47] M. L. Mehta: *Random Matrices*, 3rd edn, Pure and Applied Mathematics (Amsterdam), Vol. 142 Elsevier/Academic Press, Amsterdam (2004).

[48] J. Miller, S. Sheffield: Imaginary geometry I : Interacting SLEs, Probab.Theory Relat. Fields **164** (2016) 553–705.

[49] J. Miller, S. Sheffield: Imaginary geometry II : Reversibility of $\mathrm{SLE}_\kappa(\rho_1, \rho_2)$ for $\kappa \in (0, 4)$, Ann. Probab. **44** (2016) 1647–1722.

[50] J. Miller, S. Sheffield: Imaginary geometry III : Reversibility of $\mathrm{SLE}_\kappa$ for $\kappa \in (4, 8)$, Ann. Math. **184** (2016) 455–486.

[51] J. Miller, S. Sheffield: Imaginary geometry IV : Interior rays, whole-plane reversibility, and space-filling trees, Probab. Theory Relat. Fields **169** (2017) 729–869.

[52] H. Osada: Infinite-dimensional stochastic differential equations related to random matrices, Probab. Theory Relat. Fields **153** (2012) 471–509.

[53] H. Osada: Interacting Brownian motions in infinite dimensions with logarithmic potentials, Ann. Probab. **41** (2013) 1–49.

[54] H. Osada, H. Tanemura: Infinite-dimensional stochastic differential equations and tail $\sigma$-fields, Probab. Theory Relat. Fields **177** (2020) 1137–1242.

[55] A, M. Polyakov: Quantum gravity in two-dimensions, Mod. Phys. Lett. A **2** (1987) 893–898.

[56] L. C. G. Rogers, Z. Shi: Interacting Brownian particles and the Wigner law, Probab. Theory Relat. Fields **95** (1993) 555–570.

[57] S. Rohde, O. Schramm: Basic properties of SLE, Ann. Math. **161** (2005) 883–924.

[58] O. Roth, S. Schleissinger: The Schramm–Loewner equation for multiple slits, J. Anal. Math. **131** (2017) 73–99.

[59] O. Schramm: Scaling limits of loop-erased random walks and uniform spanning trees, Israel J. Math. **118** (2000) 221–288.

[60] O. Schramm, S. Sheffield: The harmonic explorer and its convergence to SLE(4), Ann. Probab. **33** (2005) 2127–2148.

[61] O. Schramm, S. Sheffield: Contour lines of the two-dimensional discrete Gaussian free field, Acta Math. **202** (2009) 21–137.

[62] O. Schramm, S. Sheffield: A contour line of the continuum Gaussian free field, Probab. Theory Relat. Fields **157** (2013) 47–80.

[63] S. Sheffield: Gaussian free fields for mathematicians, Probab. Theory Relat. Fields **139** (2007) 521–541.

[64] S. Sheffield: Conformal weldings of random surfaces: SLE and the quantum gravity zipper, Ann. Probab. **44** (2016) 3474–3545.

[65] S. Smirnov: Critical percolation in the plane: conformal invariance, Cardy's formula, scaling limits, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I Math. **333** (2001) 239–244.

[66] S. Smirnov: Conformal invariance in random cluster models. I. Holomorphic fermions in the Ising model, Ann. Math. **172** (2010) 1435–1467.

[67] T. Takebe: Dispersionless BKP hierarchy and quadrant Löwner equation, SIGMA **10** (2014) 023 (13 pages).

[68] L. -C. Tsai: Infinite dimensional stochastic differential equations for Dyson's model, Probab. Theory Relat. Fields **166** (2016) 801–850.

[69] J. Wishart: The generalized product moment distribution in samples from a normal multivariate population, Biometrika **20A** (1928) 32–52.