行列式点過程の楕円関数拡張[1]

香取 眞理　(中央大学理工学部)*

2020 年 10 月 10 日

概　要

楕円関数拡張をキーワードにして，確率論に関係する２つの話題を取り上げる．前半は単位円周上の非衝突ブラウン周遊過程とその配置が与える行列式点過程について，後半は円環上の Gauss 型解析関数とその零点分布について議論する．後者は白井朋之氏（九大 IMI）との最近の共同研究に基づく．途中，テータ関数の基本的な性質，いくつかの行列式恒等式，また，Hilbert 関数空間の再生核である Bergman 核と Szegő 核について簡単な解説を行う．

1. はじめに

径数 q を導入し，自然数 $n \in \mathbb{N}$ の類似として

$$[n]_q := \frac{1-q^n}{1-q} = 1 + q + \cdots + q^{n-1} \tag{1.1}$$

によって q–数を定義し，これに基づいて関数論や組み合わせ論，あるいは確率論を展開することを q–拡張（q–類似）とよぶ [22, 10]．$q \to 1$ の極限で $[n]_q \to n$ となり元の体系に戻る．本稿の表題にある楕円関数拡張とは，この q–拡張のさらなる拡張であり，そこでは $\theta(q^n; p)$ のような形の複数の（楕円）テータ関数の積やそれらの比を要素として数学的な形式を論じる．新たな径数 p はノーム（nome）とよばれ，$|p| \in (0, 1)$ を満たす複素数で与えられる．$p \to 0$ の極限で q–拡張に戻る [14, 20, 64, 60, 27, 52, 54, 31, 55, 7] [2]．

講演者の力量不足のため，ここでは確率論，特に行列式点過程（determinantal point process; DPP）に関連して楕円関数拡張を議論することに留める．テータ関数の定義とその基本的性質はすぐ後に述べるが，まずは，テータ関数がどのような場面で出てくるかを具体的に示す例を２つ述べることにする．この２つの例に対する考察を展開する形で本講演を行う予定である。

1.1. 単位円周上のブラウン運動

複素平面 $\mathbb{C}$ 上に原点を中心とする単位円板 $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ を考える．ここでは，この境界である単位円周 $\mathbb{S} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ に着目する．以下，虚数単位を $i = \sqrt{-1}$ と書き，

本研究は科研費 (C) (課題番号:19K03674), (B) (課題番号:18H01124), (S) (課題番号:16H06338) の助成を受けたものである．
2010 Mathematics Subject Classification: 60J65,60G55,33C52,33E05,15A15,30B20,46E22,32A25
キーワード：非衝突ブラウン周遊過程，行列式点過程, 相関関数, ガウス型解析関数，零点分布，パーマネント–行列式点過程, テータ関数，楕円関数拡張，再生核ヒルベルト空間
* 〒 112–8551 東京都文京区春日 1–13–27　中央大学理工学部物理学科
e-mail: `katori@phys.chuo-u.ac.jp`
web: `https://www.phys.chuo-u.ac.jp/j/katori/`
[1] この原稿は，一般社団法人日本数学会の 2020 年秋季総合分科会における総合講演・企画特別講演アブストラクトに掲載されたものである．このアブストラクトの著作権は日本数学会及び著者に属するものである．
[2] 行列式恒等式とパフィアン恒等式を系統的に論じた Krattenthaler 氏のレヴュー論文 [41] は有名であるが，その続編として 2005 年に出版された [42] の 5.11 節に楕円関数拡張が取り上げられている．その冒頭の文章が面白い．In special functions theory there is currently a disease rapidly spreading, generalising the earlier mentioned q-disease (see Footnote 20). It could be called the“elliptic disease.” 途中にある “q–病” に対する脚注 20 ([42] p.108, 5.2 節）も是非一読を．オリジンは伊達・神保・国場・三輪・尾角 [14] であると 2017 年３月にウィーン ESI で開催された研究会のウェッブページ https://www.mat.univie.ac.at/ schlosse/esi/EHF2017/ に書かれている．本講演者は野海正俊氏の講義や解説記事で楕円関数拡張について教えていただいた．最近のものとして伊藤雅彦氏と野海氏の解説記事 [1] を挙げておく．

点 $z \in \mathbb{S}$ を $x \in [0, 2\pi)$ を用いて $z = e^{ix}$ と表すことにする．またこのとき，$x \in \mathsf{S} := [0, 2\pi)$ と書くことにする．

$\mathbb{S}$ 上の 1 次元標準ブラウン運動を考える．時刻 t で $z = 1 \in \mathbb{S} \Leftrightarrow x = 0 \in \mathsf{S}$ を出発するものとする．このとき，時刻 $t > 0$ における位置 $z = e^{ix} \in \mathbb{S} \Leftrightarrow x \in \mathsf{S}$ での確率密度を $\mathrm{p}_{\mathbb{S}}(0, 0; t, x)$ と書くことにすると，これは次のように二通りに表わすことができる．

$$\mathrm{p}_{\mathbb{S}}(0, 0; t, x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2 t/2} \cos(nx) = \sum_{w=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-(x+2\pi w)^2/(2t)} \tag{1.2}$$

最初のものは拡散方程式の $\mathbb{S}$ 上の基本解をフーリエ解析を用いて解いた結果である．他方 2 番目のものは，拡散方程式の $\mathbb{R}$ 上の基本解を円周 $\mathbb{S}$ 上の経路の回転数 w に関して足し合わせることによって得たものである．そこで，時刻 t に依存した 2 種類のノームを

$$p_t := e^{-t}, \quad \widetilde{p}_t := e^{-4\pi^2/t} \tag{1.3}$$

で定義する．すると，上記の推移確率密度は，次節の (2.1) で定義されるテータ関数 $\theta(z; p)$ を用いて

$$\mathrm{p}_{\mathbb{S}}(0, 0; t, x) = \frac{1}{2\pi} (p_t; p_t)_\infty \theta(-p_t^{1/2} e^{ix}; p_t) = \frac{e^{-x^2/(2t)}}{\sqrt{2\pi t}} (\widetilde{p}_t; \widetilde{p}_t)_\infty \theta(-\widetilde{p}_t^{1/2} e^{-2\pi x/t}; \widetilde{p}_t) \tag{1.4}$$

というように，やはり二通りに表されることになる．ただし，$(p, p)_\infty := \prod_{n=1}^{\infty}(1 - p^n)$ である[3]．この等式は，ノーム p のテータ関数からノーム $\widetilde{p}$ のテータ関数への変換公式を与える．これはヤコビの虚数変換とよばれている．(テータ関数の引数をよく見ると，位置を表す変数が e^{ix} から $e^{-2\pi x/t}$ に変わっていて，あたかも S 上の座標 x が虚数になったように見える．)

1.2. 単位円板上と円環上の Gauss 型解析関数

密度 $e^{-|z|^2}/\pi$ をもつ標準複素 Gauss 確率変数の独立同分布列を $\{\zeta_n : n = 0, 1, \dots\}$ と書くことにして，

$$X_{\mathbb{D}}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \zeta_n z^n \tag{1.5}$$

を考える．$|\zeta_n|^{1/n} \xrightarrow{\text{a.s.}} 1$ であるので，このランダムな Taylor 展開は $z \in \mathbb{D}$ において確率 1 で収束し，$\mathbb{S}$ は収束域の自然境界となる．これは平均が零の解析的な Gauss 場であり，その分布は次の共分散核で定まる．

$$\mathbf{E}[X_{\mathbb{D}}(z)\overline{X_{\mathbb{D}}(w)}] = \frac{1}{1 - z\overline{w}} =: S_{\mathbb{D}}(z, w), \quad z, w \in \mathbb{D} \tag{1.6}$$

この確率場 $\{X_{\mathbb{D}}(z) : z \in \mathbb{D}\}$ を $\mathbb{D}$ 上の（複素）Gauss 型解析関数（Gaussian analytic functions; GAF）とよぶ（4.2 節の定義 4.1 を参照）．この相関核 $S_{\mathbb{D}}$ は Hardy 空間とよばれる Hilbert 関数空間の再生核であり，特に Szegő 核とよばれる（4.1 節参照）．この Gauss 場の零点が与える点過程 $\mathcal{Z}_{X_{\mathbb{D}}} := \sum_{z \in \mathbb{D}: X_{\mathbb{D}}(z)=0} \delta_z$ に関して多くの興味深い研究がある [26, 56]．特に Peres と Virág [51] は $\mathcal{Z}_{X_{\mathbb{D}}}$ は DPP であり，その相関関数（3.2 節を参照）を指定する相関核（3.5 節の定義 3.8 を参照）は

$$S_{\mathbb{D}}(z, w)^2 = K_{\mathbb{D}}(z, w) = \frac{1}{(1 - z\overline{w})^2}, \quad z, w \in \mathbb{D} \tag{1.7}$$

---

[3] 楕円関数拡張はノーム $p \to 0$ の極限で q 拡張に戻ると述べたが，今の場合にはもっと単純で，$(p; p)_\infty$ も $\theta(-p^{1/2} z; p)$ もこの極限で 1 になってしまう（次節の (2.5) を参照）．(1.3) の定義より，$t \to \infty$ で $p_t \to 0$ となるので，(1.4) の最初の式から，長時間極限では $\mathrm{p}_{\mathbb{S}}(0, 0; t, x)dx$ は S 上の一様分布 $\lambda_{\mathsf{S}}(dx) := dx/(2\pi)$ に収束することが分かる．他方，$t \to 0$ では $\widetilde{p}_t \to 0$ であるので，(1.4) の 2 番目の式から，$\lim_{t \to 0} \mathrm{p}_{\mathbb{S}}(0, 0; t, x)dx = \lim_{t \to 0} e^{-x^2/(2t)}/\sqrt{2\pi t}dx = \delta_0(dx)$ となり，x を出発点とするという初期条件を確かに満たしていることが見てとれる．

で与えられることを証明した．$K_{\mathbb{D}}$ は Bergman 空間とよばれる Hardy 空間とは別の Hilbert 関数空間の再生核を与える（4.1参照）．これは，GAF とその零点分布という 2 つの確率場によって，有名な 2 つの Hilbert 関数空間を結び付ける大変美しい結果である．

実径数 $q \in (0,1)$ を 1 つ定めて円環 $\mathbb{A}_q := \{z \in \mathbb{C} : q < |z| < 1\}$ を定義する．2019 年 8 月に京大でお会いした際に，白井朋之氏（九大 IMI）が $\mathbb{D}$ 上の Peres–Virág の話を $\mathbb{A}_q$ に拡張したらどうなるか一緒に考えませんか，と誘ってくださった[4]．Hardy 空間 $H^2(\mathbb{A}_q)$ の再生核（$\mathbb{A}_q$ 上の Szegő 核）は

$$S_{\mathbb{A}_q}(z,w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(z\overline{w})^n}{1+q^{2n+1}}, \quad z,w \in \mathbb{A}_q \tag{1.8}$$

で与えられる [50, 53, 46]. そこで我々は，$\mathbb{A}_q$ 上の GAF として，次のランダムな Laurent 展開を考えることにした．

$$X_{\mathbb{A}_q}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \zeta_n \frac{z^n}{\sqrt{1+q^{2n+1}}} \tag{1.9}$$

その共分散核 $\mathbf{E}[X_{\mathbb{A}_q}(z)\overline{X_{\mathbb{A}_q}(w)}]$ が (1.8) で与えられるからである．$X_{\mathbb{A}_q}(z)$ は $z \in \mathbb{A}_q$ のとき確率 1 で収束し，$\mathbb{A}_q$ の外周 $\mathbb{S} := \{e^{i\phi} : \phi \in [0,2\pi)\}$ と内周 $q\mathbb{S} := \{qe^{i\phi} : \phi \in [0,2\pi)\}$ は収束域の自然境界になっている．(1.8) はノームが $p = q^2$ であるテータ関数を用いて，

$$S_{\mathbb{A}_q}(z,w) = \frac{(q^2;q^2)_\infty^2 \theta(-qz\overline{w};q^2)}{\theta(-q;q^2)\theta(z\overline{w};q^2)}, \quad z,w \in \mathbb{A}_q \tag{1.10}$$

と書き直すことができる [46]．$q \to 0$ で円環 $\mathbb{A}_q$ は単位円板 $\mathbb{D}$ に移行する．このときノーム $p = q^2 \to 0$ となる．(1.10) に含まれる $(q^2;q^2)_\infty$, $\theta(-qz\overline{w};q^2)$, $\theta(-q;q^2)$ はこの極限でいずれも 1 になるが，分母にある $\theta(z\overline{w};q^2)$ は $1 - z\overline{w}$ になる（次節の (2.5) を参照）．したがって，$S_{\mathbb{A}_q}$ はこの極限で（予想通り） $S_{\mathbb{D}}$ に移行する．逆に言うと，$\mathbb{A}_q$ 上の Szegő 核 $S_{\mathbb{A}_q}$ は $\mathbb{D}$ 上の Szegő 核 $S_{\mathbb{D}}$ の楕円関数拡張であり，よって，我々の GAF (1.9) は Peres–Virág の GAF (1.5) の楕円関数拡張ということになる．それでは $\mathbb{S}_{\mathbb{A}_q}$ の零点分布もやはり DPP であり，その相関核は $\mathbb{A}_q$ 上の Bergman 空間の再生核で与えられるのであろうか．以下に解説するように，このいずれも否定され，予想外の結果が導かれることになる [38]．

2. テータ関数の定義と基本的性質

p を $|p| \in (0,1)$ を満たす複素数として固定する．次の有限積，あるいは無限積を p–Pochhammer 記号という．

$$(a;p)_n := \prod_{j=0}^{n-1}(1-ap^j), \quad (a;p)_\infty := \prod_{j=0}^{\infty}(1-ap^j)$$

また，それぞれの積を $(a_1,\dots,a_m;p)_\sharp := \prod_{k=1}^m (a_k;p)_\sharp$ （$\sharp = n, \infty$）と略記する．本稿では，次式で定義される z の関数をノーム p のテータ関数とよぶ．

$$\theta(z;p) := (z, p/z; p)_\infty \tag{2.1}$$

また，テータ関数の積を $\theta(z_1,\dots,z_m;p) := \prod_{k=1}^m \theta(z_k;p)$ と略記する．$n \in \mathbb{N}$ に対して，ω_k を 1 の k 乗根，たとえば $\omega_k = e^{2\pi i/k}$ とする．すると，定義 (2.1) より

$$\theta(z^k;p^k) = \prod_{j=0}^{k-1}\theta(\omega_k^j z;p), \quad \theta(z;p) = \prod_{j=0}^{k-1}\theta(p^j z;p^k) \tag{2.2}$$

[4] 長谷部高広氏，佐久間紀佳氏，矢野孝次氏，B. Collins 氏によって 2019 年 8 月 19 日–23 日に京大数学教室にて開催された日仏国際会議 Interactions between commutative and non-commutative probability に参加させていただいた．そこで，旧友の Nizar Demni 氏が我々に，(2019 年 4 月に亡くなった）Jaak Peetre 氏による円環上のラプラス場に関する研究について議論してきたことがきっかけであった．

が成り立つことが示せる．

注 2.1. 冒頭の (1.1) で定義した q–数 $[n]_q$ の階乗を $[n]_q! := [n]_q[n-1]_q\cdots[1]_q$ と定義し，これを q–階乗とよぶが，q–Pochhammer 記号を用いると $[n]_q! = (q;q)_n/(1-q)^n$ と書ける．$(1-q)^n$ が余分に思われるかもしれないが，q–二項係数というものも考えると，

$$\binom{n}{k}_q := \frac{[n]_q!}{[n-k]_q![k]_q!} = \frac{(q;q)_n}{(q;q)_{n-k}(q;q)_k}$$

で与えられるので，p–Pochhammer 記号 $(a;p)_n$ は（単に径数を q から p に言い直した）p-階乗 $(p;p)_n$ に 1 変数 a を挿入した変形版と見なすことができる．(実際 $(a;p)_n$ は p-shifted factorial ともよばれる.）テータ関数はその 2 つの積で (2.1) のように定義されるので，楕円関数拡張を p–拡張の一種と見なしてしまうこともできる．

注 2.2. テータ関数の記法はいろいろとある．例えば，岩波数学公式 III の第 2 章では,「Jacobi の楕円テータ関数」として知られる記法が使われている．そこでの $\vartheta_1(v,\tau)$ と本稿での θ との関係は（$p=q^2 := e^{2\tau\pi i}$ として）次式で与えられる．

$$\vartheta_1(v;\tau) = ie^{-\pi vi}p^{1/8}(p;p)_\infty\theta(e^{2\pi vi};p)$$

よって，$\vartheta(v;\tau)$ は無限 p–Pochhammer の 3 重積（掛ける $ie^{-\pi vi}p^{1/8}$）である．この 3 重積は

$$(p;p)_\infty\theta(z;p) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n p^{\binom{n}{2}}z^n \tag{2.3}$$

と Laurent 展開できる．これが有名な Jacobi の三重積恒等式である．

z の関数として $\theta(z;p)$ は$\mathbb{C}^\times := \{z\in\mathbb{C} : |z|>0\}$ で解析的である．零点はすべて一位であり，$\{p^n : n\in\mathbb{Z}\}$ で尽くされる．次の関数等式を満たす．

$$\theta(1/z;p) = -\frac{1}{z}\theta(z;p), \quad \theta(pz;p) = -\frac{1}{z}\theta(z;p) \tag{2.4}$$

前者は反転性，後者は擬周期性とよばれる．両者を続けて用いると，$\theta(p/z;p)=\theta(z;p)$ という関係式が得られる．

p–Pochhammer 記号を使った定義式 (2.1) から

$$\lim_{p\to 0}\theta(z;p) = 1-z \tag{2.5}$$

であることが容易に確認できる．上の注 2.1 では径数 p は単に q の言い直しとも見なせると言ったが，p とは別個に q を用意した場合を考えることもできる．そうしておいて，(2.5) で $z=q^n$ としてみると，$\lim_{p\to 0}\theta(q^n;p) = 1-q^n = (1-q)[n]_q$ が得られる．これをもって，q–数はテータ関数のノーム $p\to 0$ 極限（掛ける $1-q$）であると思うこともできる．あるいは，$z=e^{-2ix}$ とした場合を考えると，$\lim_{p\to 0}\theta(e^{-2ix};p) = 2ie^{-ix}\sin x$ を得るので，$p\to 0$ 極限でテータ関数は三角関数（や双曲線関数）に帰着される（逆にいえば，テータ関数は三角関数の p–拡張である）ともいえる．実際，テータ関数は関数等式

$$\theta(xy,x/y,uv,u/v;p) - \theta(xv,x/v,uy,u/y;p) = \frac{u}{y}\theta(yv,y/v,xu,x/u;p) \tag{2.6}$$

を満たすが，これは三角関数の加法定理の楕円関数拡張と見なすことができる[5]．これを Weierstrass の加法公式とよぶ[6]．この応用として次の恒等式を導くことができる．$r,x_1,x_2,a_1,a_2\in$

[5] 例えば，$x=e^{-2i\phi_x}$, $y=e^{-2i\phi_y}$, $u=e^{-2i\phi_u}$, $v=e^{-2i\phi_v}$ として，$p\to 0$ の極限 (2.5) をとると，4 種類の sine 関数の間の関係式が得られるが，これは三角関数の加法定理の一つ $\sin(\phi_x+\phi_y)\sin(\phi_x-\phi_y) = \sin^2\phi_x - \sin^2\phi_y$ に他ならないことが分かる．この式を $(\phi_x+\phi_y)(\phi_x-\phi_y) = \phi_x^2-\phi_y^2$ という初等的な因数分解の式の「三角関数拡張」と見なしたとすると，その上位にある楕円関数拡張が (2.6) ということになる．

[6] Riemann の加法定理とよばれることが多いが，Weierstrass の名前を冠するべきであると [40] にあるので，それに従った．

$\mathbb{C} \setminus \{p^n : n \in \mathbb{Z}\}$ に対して，

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\theta(rx_1a_1;p)}{\theta(r,x_1a_1;p)} & \dfrac{\theta(rx_1a_2;p)}{\theta(r,x_1a_2;p)} \\ \dfrac{\theta(rx_2a_1;p)}{\theta(r,x_2a_1;p)} & \dfrac{\theta(rx_2a_2;p)}{\theta(r,x_2a_2;p)} \end{vmatrix} = \frac{x_2a_2\theta(rx_1x_2a_1a_2, x_1/x_2, a_1/a_2;p)}{\theta(r,x_1a_1,x_1a_2,x_2a_1,x_2a_2;p)} \tag{2.7}$$

左辺の行列式は 2 つの項の差で与えられるが，通分すると右辺の分母が出てくる．分子に (2.6) を使うと等式が証明される．Frobenius の行列式恒等式として知られる次式は，(2.7) の多変数拡張である．$n = 2, 3, \dots$ に対して

$$\det_{1\le j,k\le n}\left[\frac{\theta(rx_ja_k;p)}{\theta(r,x_ja_k;p)}\right] = \frac{\theta(r\prod_{\ell=1}^n x_\ell a_\ell;p)\prod_{1\le j<k\le n} x_ka_k\theta(x_j/x_k, a_j/a_k;p)}{\theta(r;p)\prod_{j=1}^n\prod_{k=1}^n \theta(x_ja_k;p)} \tag{2.8}$$

ただし，$r, x_j, a_j \in \mathbb{C} \setminus \{p^n : n \in \mathbb{Z}\}$ とする[7]．

本稿では以下，ノームが実数の場合だけを取り扱う：$p \in (0,1)$．このときには，$\overline{\theta(z;p)} = \theta(\overline{z};p)$ であり，$x \in (-\infty, 0)$, あるいは，$x \in (p^{2n+1}, p^{2n}), n \in \mathbb{Z}$ で $\theta(x;p) > 0$ となる．

次の無限級数は Ramanujan の ${}_1\psi_1$ 関数とよばれる．

$${}_1\psi_1(a;b;p,z) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(a;p)_n}{(b;p)_n} z^n, \quad |b/a| < |z| < 1 \tag{2.9}$$

有名な Ramanujan の ${}_1\psi_1$–和公式 [11, 22, 63] とは次のものを指す．

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(a;p)_n}{(b;p)_n} z^n = \frac{(az, p/(az), p, b/a;p)_\infty}{(z, b/(az), b, p/a;p)_\infty}, \quad |b/a| < |z| < 1 \tag{2.10}$$

3. 単位円周上の非衝突ブラウン周遊過程と行列式点過程

3.1. 単位円周上の KMLGV 行列式と結合確率密度

本稿の冒頭で，円周 $\mathbb{S}$ 上のブラウン運動を一つ考えた．ここでは $N \in \mathbb{N}$ として，N 個のブラウン運動を考えることにする．$0 \le s < t < \infty$ として，時刻 s での配置を $\boldsymbol{u} = (u_1, \dots, u_N)$, 時刻 t での配置を $\boldsymbol{v} = (v_1, \dots, v_N)$ とする．いずれにおいても重複点はないものとする．$\mathbb{S}$ 上の重複のない N 点の配置空間 $\mathbb{W}_N(\mathsf{S}) := \{\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_N) \in \mathsf{S}^N : 0 \le x_1 < \dots < x_N < 2\pi\}$ はワイル・アルコーブ (Weyl alcove) とよばれる．この N 個のブラウン運動に対して,「時間区間 $[s,t]$ の間，互いに衝突することがなく，したがって，粒子の順番は保たれたままである」という条件を課す．強い斥力相互作用をもった粒子系の統計力学模型（vicious walk 模型とよばれる [15]）を得るためである．

Karlin–McGregor [28], Lindström [44], あるいは Gessel–Viennot [23] の議論を思い出すと，N 個のブラウン運動の時空平面 $[s,t] \times \mathbb{S}$ 上の非衝突経路全体の確率重率は，行列式 $\det_{1\le j,k\le N}[\mathrm{p}_{\mathbb{S}}(s,u_j;t,v_k)]$ で与えられることが予想できる．これを Karlin–McGregor– Lindström–Gessel–Viennot (KMLGV) 行列式 [28, 44, 23] という．この主張のポイントは次のようである．$j = 1, \dots, N$ に対して，j 番目のブラウン運動の経路 $(s,u_j) \rightsquigarrow (t,v_j)$ 全体の確率重率は $\mathrm{p}_{\mathbb{S}}(s,u_j;t,v_j) := \mathrm{p}_{\mathbb{S}}(0,0;t-s,v_j-u_j)$ で与えられる．(右辺は (1.2) あるいは (1.4) で定義されたもの.）しかし，N 本の非交差経路全体の確率重率を計算するには，出発点と終点をそれぞれ $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ の各成分から任意に選んで得られる $N \times N$ 個のデータ $\mathrm{p}_{\mathbb{S}}(s,u_j;t,v_k)$, $j,k \in \{1,\dots,N\}$ が必要となる．これらを各成分としてもつ行列の行列式は成分の N 重積の

---

[7] この式は Cauchy の行列式恒等式 $\det_{1\le j,k\le n}[(1-x_ja_k)^{-1}] = \prod_{1\le j<k\le n}(x_k-x_j)(a_k-a_j)\Big/\prod_{j=1}^n\prod_{k=1}^n(1-x_ja_k)$ の楕円関数拡張として [42, 52] などに登場する．そこでは，Frobenius の 1882 年の論文が引用されている．

足し引きを計算した結果得られるが，これがちょうど，接触したり交差したりする経路の確率重率を差し引いて，非交差経路の分だけを取り出す操作になっているのである．

ところが，上の予想はNが奇数のときには正しいが，偶数のときには正しくないことが1990年にForresterによって指摘された[16]. 円筒状の時空平面$[s,t]\times\mathbb{S}$を巻き付くN本の非交差経路を$[s,t]\times\mathbb{R}$上に展開して描いてみた結果である．このパリティ問題は2004年になってFulmekによって解決された[21] [8]. それによると，Nが偶数の場合には，(1.2)の2番目の表式の回転数についての和を交代和に置き直すことになる．これを$\widetilde{\mathrm{p}}_{\mathbb{S}}$と書くことにすると，そのテータ関数表示は

$$\widetilde{\mathrm{p}}_{\mathbb{S}}(0,0;t,x):=\sum_{w=-\infty}^{\infty}(-1)^w\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-(x+2\pi w)^2/(2t)}=\frac{1}{2\pi}e^{-ix/2}p_t^{1/8}(p_t;p_t)_\infty\theta(-e^{ix};p_t) \tag{3.1}$$

で与えられる．$\widetilde{\mathrm{p}}_{\mathbb{S}}(s,u;t,v):=\widetilde{\mathrm{p}}_{\mathbb{S}}(0,0;t-s,v-u)$として行列式$\det_{1\le j,k\le N}[\widetilde{\mathrm{p}}_{\mathbb{S}}(s,u_j;t,v_k)]$を計算すると，$N$が偶数の場合には，これこそが$N$本の非交差経路全体の確率重率を与えるのである．

パリティ変数$\sigma(N):=1$ (Nが奇数のとき) $\sigma(N):=0$ (N偶数のとき) を導入し，

$$\mathrm{p}_{\mathbb{S}}^{\sigma}(s,u;t,v):=\begin{cases}\mathrm{p}_{\mathbb{S}}(s,u;t,v), & \sigma=1\text{ のとき}\\ \widetilde{\mathrm{p}}_{\mathbb{S}}(s,u;t,v), & \sigma=0\text{ のとき}\end{cases} \tag{3.2}$$

と定義しておくことにする．$\mathrm{p}_{\mathbb{S}}^{\sigma(N)}(s,u;t,v)$は$N$が偶数のとき正値ではないが，Chapman–Kolmogorovの式は満たす．他方，行列式$\det_{1\le j,k\le N}[\mathrm{p}_{\mathbb{S}}^{\sigma(N)}(s,u_j;t,v_k)]$, $N\in\mathbb{N}$は上述のように正値であり，$0\le t_1<t_2<t_3<\infty$に対してChapman–Kolmogorovの式

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{W}_N(\mathsf{S})}\det_{1\le j,k\le N}[\mathrm{p}_{\mathbb{S}}^{\sigma(N)}(t_1,u_j^{(1)};t_2,u_k^{(2)})]\det_{1\le j,k\le N}[\mathrm{p}_{\mathbb{S}}^{\sigma(N)}(t_2,u_j^{(2)};t_3,u_k^{(3)})]d\boldsymbol{u}^{(2)}\\&\quad=\det_{1\le j,k\le N}[\mathrm{p}_{\mathbb{S}}^{\sigma(N)}(t_1,u_j^{(1)};t_3,u_k^{(3)})]\end{aligned}$$

も満たす ($d\boldsymbol{u}^{(2)}:=\prod_{j=1}^N du_j^{(2)}$) [9]. よって，行列式$\det_{1\le j,k\le N}[\mathrm{p}_{\mathbb{S}}^{\sigma(N)}(s,u_j;t,v_k)]$を$N$個のブラウン運動からなる粒子系の推移密度と見なすことができる．

ここでは，初期配置と終配置がともに$\boldsymbol{u}\in\mathbb{W}_N(\mathsf{S})$で与えられる時間区間$[0,T]$での周遊過程を考えることにしよう．$M\in\mathbb{N}$に対して，$0<t_1<\cdots<t_M<T$を満たす時刻の列$(t_1,\dots,t_M)$に対して，結合確率密度を$\mathbf{p}_{\mathbb{S}}^{\sigma(N)}(t_1,\boldsymbol{x}^{(1)};\dots;t_M,\boldsymbol{x}^{(M)};T,\boldsymbol{u})$と書くことにする．$\boldsymbol{x}^{(m)}=(x_1^{(m)},\dots,x_N^{(m)}), m=1,\dots,M$である．

定義 3.1. $\boldsymbol{u}\in\mathbb{W}_N(\mathsf{S})$を初期配置かつ終配置とする時間区間$[0,T]$での$\mathbb{S}$上$N$–非衝突ブラウン周遊過程は，任意の$M\in\mathbb{N}$と任意の時刻列$(t_1,\dots,t_M)$に対して，結合確率密度が次式で与えられるマルコフ過程である．$\boldsymbol{x}^{(m)}\in\mathbb{W}_N(\mathsf{S}),\forall m\in\{1,\dots,M\}$のとき，

$$\begin{aligned}\mathbf{p}_{\mathbb{S}}^{\sigma(N)}(t_1,\boldsymbol{x}^{(1)};\dots;t_M,\boldsymbol{x}^{(M)};T,\boldsymbol{u})&=\det_{1\le j,k\le N}[\mathrm{p}_{\mathbb{S}}^{\sigma(N)}(0,u_j;t_1,x_k^{(1)})]\\&\times\prod_{m=1}^{M-1}\det_{1\le j,k\le N}[\mathrm{p}_{\mathbb{S}}^{\sigma(N)}(t_m,x_j^{(m)};t_{m+1},x_k^{(m+1)})]\frac{\det_{1\le j,k\le N}[\mathrm{p}_{\mathbb{S}}^{\sigma(N)}(t_M,x_j^{(M)};T,u_k)]}{\det_{1\le j,k\le N}[\mathrm{p}_{\mathbb{S}}^{\sigma(N)}(0,u_j;T,u_k)]}\end{aligned}$$

とし，$\boldsymbol{x}^{(m)}\notin\mathbb{W}_N(\mathsf{S})$である時刻$t_m$がある場合には，$\mathbf{p}_{\mathbb{S}}^{\sigma(N)}(t_1,\boldsymbol{x}^{(1)};\dots;t_M,\boldsymbol{x}^{(M)};T,\boldsymbol{u})=0$とする．

[8] Fulmekの論文は離散系（周期的な非交差格子経路）に対するものである．[43]でFulmekの議論の連続極限として$\mathbb{S}$上の非衝突ブラウン運動が定式化されている．他方，永尾太郎氏とForresterの2003年の論文[49]には，このパリティ問題に対して正しい処方箋が示されており，時空相関関数の厳密解が与えられている．

[9] 行列式の公式としては，これはAndréief恒等式とよばれている．GramやHeineの名が冠されることも多い．

3.2. 点過程に対する相関関数の定義

上述の定義 3.1 で $M=1, t_1=t$ の場合を考えると，時刻 $t \in (0,T)$ での配置 $\boldsymbol{x}$ に対する確率密度が得られる：$\boldsymbol{x} \in \mathbb{W}_N(\mathsf{S})$ に対しては

$$\mathbf{p}_{\mathbb{S}}^{\sigma(N)}(t,\boldsymbol{x};T,\boldsymbol{u}) = \det_{1\le j,k\le N}[\mathrm{p}_{\mathbb{S}}^{\sigma(N)}(0,u_j;t,x_k)] \frac{\det_{1\le j,k\le N}[\mathrm{p}_{\mathbb{S}}^{\sigma(N)}(t,x_j;T,u_k)]}{\det_{1\le j,k\le N}[\mathrm{p}_{\mathbb{S}}^{\sigma(N)}(0,u_j;T,u_k)]} \tag{3.3}$$

であり，$\boldsymbol{x} \notin \mathbb{W}_N(\mathsf{S})$ に対しては $\mathbf{p}_{\mathbb{S}}^{\sigma(N)}(t,\boldsymbol{x};T,\boldsymbol{u})=0$ である．本稿では，$\mathbb{S}$ 上の N–非衝突ブラウン周遊過程が各時刻 $t \in (0,T)$ で与える粒子配置を，径数 $t \in (0,T)$ をもつ点過程として特徴付けしたい．

点過程について，少し一般的な議論をしておくことにする．S を可分な局所コンパクト・ハウスドルフ空間とし，参照測度（reference measure）として Radon 測度 λ をもつものとする．S 上の点過程 Ξ の配置空間は

$$\mathrm{Conf}(S) := \Big\{\xi = \sum_j \delta_{x_j} : x_j \in S,\ \text{すべての有界な}\ \Lambda \subset S\ \text{に対して}\ \xi(\Lambda) < \infty\Big\}$$

で与えられる．確率空間を $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ とする．$n \in \mathbb{N}$ に対して，$L(\in \mathbb{N})$ 個の S の部分領域 $\Lambda_j \subset S, j=1,\dots,L$ として $\Lambda_j \cap \Lambda_k = \emptyset, j \neq k$ であるものと，$\sum_{j=1}^L n_j = n$ を満たす L 個の指数 $(n_1,\dots,n_L) \in \mathbb{N}_0^L$ を考える．このような条件を満たす任意の $\{(\Lambda_j,n_j)\}_{j=1}^L$ に対して，

$$\mathrm{E}\left[\prod_{j=1}^L \binom{\Xi(\Lambda_j)}{n_j}\right] = \prod_{j=1}^L \frac{1}{n_j!}\lambda^n(\Lambda_1^{n_1}\times\cdots\times\Lambda_L^{n_L})$$

となるような S^n 上の測度 λ^n があるとき，これを点過程 Ξ の相関測度という.（ただし，組合せ数 $\binom{N}{n} := N!/\{n!(N-n)!\}$ に対して，$n<0, n>N$ のときには $\binom{N}{n}\equiv 0$ と解釈する.）その上で，相関測度が参照測度の n–直積測度 $\lambda^{\otimes n}$ と絶対連続であるとき，その Radon–Nikodym 微分を $\rho^n(x_1,\dots,x_n)$ と書き，参照測度 λ に対する n–点相関関数という．すなわち，

$$\lambda^n(dx_1\cdots dx_n) = \rho^n(x_1,\dots,x_n)\lambda^{\otimes n}(dx_1\cdots dx_n)$$

が成り立つとき，(S,λ) 上の点過程 Ξ は n–点相関関数 $\rho^n(x_1,\dots,x_n)$ をもつという．

3.5 節において，$\mathbb{S}$ 上 N–非衝突ブラウン周遊過程が各時刻 $t \in (0,T)$ での粒子配置として与える S 上の点過程 Ξ^t について述べる．この点過程は S 上の一様測度 $\lambda_{\mathsf{S}}(dx) = dx/(2\pi)$ に対して相関関数をもち，それらは次節で説明する Rosengren–Schlosser のテータ関数を成分にもつ行列の行列式によって系統的に与えられることになる．

3.3. Rosengren–Schlosser のテータ関数と Macdonald 分母式

(2.5) で右辺の $1-z$ を仮に y と置いてみると，左辺のテータ関数は単項式 y を楕円関数拡張したものと思える．それでは，$y=1-z$ の多項式の楕円関数拡張は何であろうか．$y=1-z$ の n 次多項式に対応するのは，θ の n 次式と思えば良さそうに思える．ところが (2.2) を見ると，θ の冪数は表示するときのノームの取り方に依存して変わってしまうことに気が付く．それでは，表示方法に依らないノームの本質は何かというと，(2.4) の第 2 式が表すように，それは擬周期である．Rosengren と Schlosser はテータ関数を分類するのに次のような定義をおいた [52].

定義 3.2. $f(z)$ を $\mathbb{C}^\times$ 上の解析関数とする．次の等式が成り立つとき，f をノルム（norm）r をもつ A_{n-1} 型テータ関数という．

$$f(pz) = \frac{(-1)^n}{rz^n}f(z)$$

(2.4) の第 2 式を上の定義式と見比べると，$\theta(z;p)$ はノルム $r=1$ の A_0 型テータ関数ということになる．ノルム r をもつ A_{n-1} 型テータ関数の一般形は，C と $b_1,\dots,b_n$ を z に依らない定数であり $\prod_{j=1}^n b_j = r$ を満たすものとしたとき，$f(z)=C\theta(b_1 z,\dots,b_n z;p)$ で与えられる [52]．これはノーム p のテータ関数を n 個掛けたものであり，n 次多項式の楕円関数拡張という訳である [10].

注 3.3. 径数 r をノルムとよぶが，これは一般には複素数であり，特に正値である必要はない．

ノームを p に固定した上で，ノルム r をもつ A_{n-1} 型テータ関数全体を $\mathcal{E}_{(p,n,r)}$ と書くことにする．これは n 次元関数空間を成す．n 個の関数を

$$\psi_j^{(n,r)}(z;p) := z^{j-1}\theta\big((-1)^{n-1}rp^{j-1}z^n;p^n\big) = z^{j-1}\prod_{k=0}^{n-1}\theta\big(\zeta\alpha^{j-1}\omega_n^k z;p\big), \quad j=1,\dots,n \tag{3.4}$$

と定義する．ただし，$\zeta^n=(-1)^{n-1}r$, $\alpha^n=p$ とする．次を証明することができる [62].

補題 3.4. $\{\psi_j^{(n,r)}(z;p)\}_{j=1}^n$ は $\mathcal{E}_{(p,n,r)}$ の基底を成す．

Rosengren–Schlosser [52] は次の行列式恒等式を証明した．

命題 3.5. $\boldsymbol{z}=(z_1,\dots,z_n)\in(\mathbb{C}^\times)^n$ に対して，

$$W_{A_{n-1}}(\boldsymbol{z};p) := \prod_{1\le j<k\le n} z_k\theta(z_j/z_k;p) \tag{3.5}$$

とする．次の等式が成り立つ．

$$\det_{1\le j,k\le n}\Big[\psi_j^{(n,r)}(z_k;p)\Big] = \frac{(p,p)_\infty^n}{(p^n,p^n)_\infty^n}\theta\Big(r\prod_{\ell=1}^n z_\ell;p\Big)W_{A_{n-1}}(\boldsymbol{z};p) \tag{3.6}$$

(3.5) で与えられる $W_{A_{n-1}}$ は A 型の既約被約アフィン・ルート系（irreducible reduced affine root system）[45] の Macdonald 分母式とよばれる [11].

(2.5) を用いて $p\to 0$ 極限をとると，Rosengren–Schlosser の A_{n-1} 型テータ関数は

$$\lim_{p\to 0}\psi_j^{(n,r)}(z;p) := \begin{cases} 1-(-1)^{n-1}rz^n, & n=1 \text{ のとき} \\ z^{j-1}, & n=2,\dots,n \text{ のとき}\end{cases}$$

となる．これらの関数の張る空間 $\mathcal{E}_{(0,n,r)}$ は n 次多項式から成るが，最高次数である n 次の係数と定数項の比は $(-1)^{n-1}r$ であるという拘束条件が生じるので，空間の次元は n である．(3.5) の $p\to 0$ 極限 $W_{A_{n-1}}(\boldsymbol{z};0):=\lim_{p\to 0}W_{A_{n-1}}(\boldsymbol{z};p)=\prod_{1\le j<k\le n}(z_k-z_j)$ は Weyl 分母式とよばれる．また，行列式恒等式 (3.6) は次に帰着される．

$$\det_{1\le j,k\le n}\Big[z_k^{j-1}-(-1)^{n-1}rz_k^n\delta_{j1}\Big] = \Big(1-r\prod_{\ell=1}^n z_\ell\Big)\prod_{1\le j<k\le n}(z_k-z_j) \tag{3.7}$$

[10] $p\to 0$ の極限では，「ノルム r をもつ A_{n-1} 型テータ関数」は n 次多項式 $a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n$ で定数項 a_0 と最高次数の係数 a_n の間に $r=(-1)^n a_n/a_0$ という関係式が成り立つものということになる．したがって，$\prod_{j=1}^n b_j=r$ であるような定数 $b_1,\dots,b_n$ があって $C(1-b_1z)\cdots(1-b_nz)$ の形で与えられる n 次多項式はノルム r をもつ [52].

[11] Rosengren と Schlosser は，既約被約アフィン・ルート系の 7 つの型 $R_n=A_{n-1}$, B_n, $B_n^\vee$, C_n, $C_n^\vee$, BC_n, D_n に対して，定義 3.2 と同様に R_n 型テータ関数を定義し，それらの行列式として各 Macdonald 分母式を与えている [52]. ただし，ノーム p とは別の径数であるノルム r を含むのは A_{n-1} 型だけである．また，他のルート系は R_n というように下付き添え字が n であるが，A 型だけ A_{n-1} と書く．以下，本文中に記したように，$p\to 0$ 極限を見るとこれら A 型の特殊事情を少し理解できた気がする．

$r=0$ とすると n 次多項式の空間 $\mathcal{E}_{(0,n,r)}$ における上述の拘束条件がなくなり，次数が一つ下がった $n-1$ 次多項式全体の空間として $\mathcal{E}_{(0,n,0)}$ が得られる．この事柄を逆に言うと，元の $\mathcal{E}_{(p,n,r)}$ は『$n-1$』次多項式全体からなる空間を（r–ノルム条件を課した状況で）楕円関数拡張したものと言える．恒等式 (3.7) で $r=0$ とすると，$\det_{1\le j,k\le n}[z_k^{j-1}] = \prod_{1\le j<k\le n}(z_k - z_j)$ となる．右辺は Vandermonde 行列式であり，これを Weyl の分母公式という．

3.4. Forrester の行列変換と直交性

$\mathbb{W}_N(\mathsf{S})$ 内の配置として，特に等間隔のものを考えることにする．すなわち，

$$u_\ell^0 := \frac{2\pi}{N}(\ell-1), \quad \ell=1,\dots,N \tag{3.8}$$

とし，$\boldsymbol{u}^0=(u_1^0,\dots,u_N^0)$ とおく．これに合わせて，$j,\ell=1,\dots,N$ に対して

$$a_{j\ell}(p,N) := \frac{2\pi}{(p^{N^2};p^{N^2})_\infty N} \times \begin{cases} p^{-(j-1)^2/2} e^{i(j-1)u_\ell^0}, & N \text{ が奇数のとき} \\ p^{-(j-1/2)^2/2} e^{i(j-1/2)u_\ell^0}, & N \text{ が偶数のとき} \end{cases}$$

と定義しておく．

補題 3.6. 次の等式が成り立つ[12]．

$$\sum_{\ell=1}^N a_{j\ell}(p_t,N)\,\mathrm{p}_{\mathbb{S}}^{\sigma(N)}(0,u_\ell^0;t,x_k) = \psi_j^{(N,r_t)}(e^{ix_k};p_{Nt}) \times \begin{cases} 1, & N \text{ が奇数のとき} \\ e^{ix_k/2}, & N \text{ が偶数のとき} \end{cases} \tag{3.9}$$

ただし，

$$r_t = r_t(N) := \begin{cases} -p_{tN^2/2}, & N \text{ が奇数のとき} \\ p_{tN(N+1)/2}, & N \text{ が偶数のとき} \end{cases} \tag{3.10}$$

とする．

証明．(1.4), (3.1), (3.2) に従って，$\mathrm{p}_{\mathbb{S}}^{\sigma(N)}$ をテータ関数で表し，Laurent 展開 (2.3) を行う．それに, $n,N\in\mathbb{N}$ に対する恒等式 $\sum_{\ell=1}^N e^{inu_\ell^0} = N\sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}(n+Nm=0)$ を適用する．ただし，$\mathbf{1}(\omega)$ は条件 ω の指示関数であり，ω が満たされれば 1, そうでないときには 0 を与えるものとする．最後に $\psi_j^{(n,r)}$ を定義する (3.4) の第 1 式を用いればよい．ノーム p_t は (1.3) の第 1 式で与えられているので, $p_t^N = e^{-Nt} = p_{Nt}$ が成り立つ． ∎

いま仮に，(3.9) の左辺の $a_{j\ell}(p_t,N)$ を (j,ℓ) 成分とする行列を A，$\mathrm{p}_{\mathbb{S}}^{\sigma(N)}(0,u_\ell^0;t,x_k)$ を (ℓ,k) 成分とする行列を P と書き，右辺を (j,k) 成分とする行列を Ψ と書くことにすると，$\mathsf{AP}=\Psi$ と書けるので，この式を行列 P から行列 Ψ への（行列 A による）変換公式と見なすことができる．両辺の行列式をとると,（行列 A は正則であることが示せるので [34]）3.1 節で議論した $\mathbb{S}$ 上のブラウン運動の KMLGV 行列式 $\det\mathsf{P}$ が（3.3 節の (3.6) 式で $\det\Psi$ と関係付けられる）A 型既約被約アフィン・ルート系の Macdonald 分母式 $W_{A_{N-1}}$ とが比例関係にあることが結論される．

ここで，(3.9) の右辺の A 型テータ関数の引数は $\mathbb{S}$ 上の点 e^{ix_k} となっていることに注目する．そこで，$\mathbb{S}$ 上の線積分によって次のように内積を定義することにする．

$$\langle f,g\rangle_{H^2(\mathbb{D})} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\phi})\overline{g(e^{i\phi})}\,d\phi \tag{3.11}$$

[12] 上述の「Forrester のパリティ問題」の影響で，N が偶数のときには右辺に $e^{ix_k/2}$ という因子が付いてしまう．ただ，(3.13) のように，このような表式とその複素共役との積を考える場合には，この因子は相殺される．

この内積は4.1 で Hardy 空間における内積としても使うので $H^2(\mathbb{D})$ という添え字をつけておくことにする．すると，Rosengren–Schlosser のテータ関数はこの内積に関して次の直交関係を満たすことが証明できる．

補題 3.7. $T \in (0,\infty)$ とすると，任意の $t \in (0,T)$ に対して，

$$\left\langle \psi_j^{(n,r_t)}(\cdot;p_t), \psi_k^{(n,r_{T-t})}(\cdot;p_{T-t}) \right\rangle_{H^2(\mathbb{D})} = c_j^{(n,r_T)}(t,T)\delta_{jk}, \quad j,k=1,\dots,n$$

が成り立つ．ただし，

$$c_j^{(n,r)}(t,T) = c_j^{(n,r)}(T-t,T) := \frac{(p_{nT};p_{nT})_\infty}{(p_{nt};p_{nt})_\infty (p_{n(T-t)};p_{n(T-t)})_\infty} \psi_j^{(n,r)}(1;p_T) \quad j=1,\dots,n$$

である．

証明．(3.4) の第 1 式で定義された $\psi_j^{(n,r)}$ に対して Laurent 展開 (2.3) を行う．ここでは，恒等式 $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i\{(j-k)+(\ell-m)n\}\phi} d\phi = \mathbf{1}((j-k)+(\ell-m)n=0)$ を用いる．$j,k=1,\dots,n$ に対して，$\ell, m \in \mathbb{Z}$ である場合には，$\mathbf{1}((j-k)+(\ell-m)n=0) = \mathbf{1}(j=k)\mathbf{1}(\ell=m)$ である．また，(1.3) より，$p_t p_{T-t} = p_T$ が成り立つことを用いると，命題が証明できる．∎

補題 3.7 は，径数が t である関数と $T-t$ である関数との間の直交性を示しており，($t \neq T/2$ の場合には）双直交性（biorthogonality）とよばれる．補題 3.6 と $t=T/2$ の場合（通常の直交性の場合）の補題 3.7 とは Forrester のランダム行列の教科書 [19] の pp.216–217 に書かれている[13]．ただし，アフィン・ルート系との関連は言及されていない．既約被約アフィン・ルート系の他の 6 つの型 $R = B, B^\vee, C, C^\vee, BC, D$ に対しても，この 2 つの補題に相当する結果を証明することができる [34]．また，これらの 7 つの既約被約アフィン・ルート系に随伴するテータ関数を用いることによって，$\mathbb{C}$ 上のある有界領域での面積分によって定義した内積に対する直交関数系を構成することも可能である [35]．

補題 3.7 の結果より，

$$\varphi_j^{(N)}(z,t) := \frac{1}{\sqrt{c_j^{(N,r_T)}(Nt,NT)}} \psi_j^{(N,r_t)}(z;p_{Nt}), \quad j=1,\dots,N, \quad t \in (0,T) \tag{3.12}$$

と定義すると，$\{\varphi_j^{(N)}(\cdot,t) : j=1,\dots,N, t\in(0,T)\}$ は内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{H^2(\mathbb{D})}$ に対して正規双直交系を成すことになる．この定義より，$\mathbb{S}$ 上の N–非衝突ブラウン周遊過程の時刻 $t \in (0,T)$ での確率密度 (3.3) は

$$\mathbf{p}_{\mathbb{S}}^{\sigma(N)}(t,\boldsymbol{x};T,\boldsymbol{u}^0) = \det_{1\le j,k\le N}[\varphi_j^{(N)}(e^{ix_k},t)] \overline{\det_{1\le j,k\le N}[\varphi_j^{(N)}(e^{ix_k},T-t)]} \tag{3.13}$$

で与えられることになる [34]．また，命題 3.5 の (3.6) より，この確率密度は Macdonald 分母式と双線形関係

$$\mathbf{p}_{\mathbb{S}}^{\sigma(N)}(t,\boldsymbol{x};T,\boldsymbol{u}^0) \propto W_{A_{N-1}}(e^{i\boldsymbol{x}};p_{Nt}) \overline{W_{A_{N-1}}(e^{i\boldsymbol{x}};p_{N(T-t)})}, \quad t\in(0,T) \tag{3.14}$$

にあることが結論される．ただしここで，$e^{i\boldsymbol{x}} := (e^{ix_1},\dots,e^{ix_N})$ という略記を用いた[14]．

[13] そればかりではなく，（ノルム r に対して (3.10) と同等の特別な設定をした形ではあるが）命題 3.5 の (3.6) も Forrester の教科書 [19] の p.216 に Proposition 5.6.3 として証明されている．これらの記述は，1990 年の論文 [16, 17] や 2006 年の「1 成分プラズマ模型の楕円関数拡張」の論文 [18] などに部分的に書かれていたことを纏めたものと思われる．ランダム行列理論のバイブルとして Mehta の教科書 [47] が有名であるが，Mehta は旧約，Forrester は新約といった感じであろうか．

[14] 本稿冒頭の (1.4) や (3.1) を思い出すと，個々のブラウン運動を記述するテータ関数のノームは $p_t = e^{-t}$ であっ

3.5. 行列式点過程（DPP）

行列式点過程 (DPP) は次のように定義される．Soshnikov [59] および白井–高橋 [57, 58] によって一般論が展開されている．([36, 37] も参照のこと．)

定義 3.8. (S,λ) 上の点過程 Ξ がすべての $n \in \mathbb{N}$ に対して n–点相関関数 ρ^n をもち，ある関数 $K : S \times S \to \mathbb{C}$ を用いて

$$\rho^n(x_1,\dots,x_n) = \det_{1\le j,k\le n}[K(x_j,x_k)]$$

という表式が任意の $n \in \mathbb{N}$，任意の配置 $(x_1,\dots,x_n) \in S^n$ に対して成り立つとき，Ξ を (S,λ) 上の DPP であるという．このとき，関数 K を相関核とよぶ．

$\boldsymbol{u} \in \mathbb{W}_N(\mathsf{S})$ を初期配置および終配置とする時間区間 $[0,T]$ での $\mathbb{S}$ 上 N–非衝突ブラウン周遊過程が各時刻 $t \in (0,T)$ で与える粒子配置 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{W}_N(\mathsf{S})$ は，一般には (3.3) で与えられることを 3.2 節で導いた．3.4 節では，初期配置と終配置が特に，(3.8) で与えられる $\mathbb{S}$ 上の等間隔配置 $\boldsymbol{u}^0$ のときには，確率密度 $\mathbf{p}_{\mathbb{S}}^{\sigma(N)}(t,\boldsymbol{x};T,\boldsymbol{u}^0), \boldsymbol{x} \in \mathbb{W}_N(\mathsf{S})$ は (3.13) という表現をもつことを導いた．これを用いて，$t \in (0,T)$ を径数にもつ S 上の点過程の族 $\{\Xi_{\mathbb{S}}^t\}_{t\in(0,T)}$ を定義する．まず，$\boldsymbol{x} \in \mathsf{S}^N$ が重複点（$x_j = x_k$ となるような $j \neq k$ の対）をもたない場合には，$\kappa(\boldsymbol{x}) := (x_{\kappa(1)},\dots,x_{\kappa(N)}) \in \mathbb{W}_N(\mathsf{S})$ となるような置換 $\kappa \in \mathfrak{S}_N$ が存在するので，それを用いて

$$\Xi_{\mathbb{S}}^t(d\boldsymbol{x}) = \frac{1}{N!}\mathbf{p}_{\mathbb{S}}^{\sigma(N)}(t,\kappa(\boldsymbol{x});T,\boldsymbol{u}^0)d\boldsymbol{x}$$

とする．$\boldsymbol{x} \in \mathsf{S}^N$ に重複点がある場合には $\Xi_{\mathbb{S}}^t(d\boldsymbol{x}) = 0$ とする [15]．(一般に，重複点をもたない点過程を単純点過程という．) 次が成り立つ．

定理 3.9. S 上の一様分布 $\lambda_{\mathsf{S}}(dx) = dx/(2\pi)$ を参照測度とする．各 $t \in (0,T)$ に対して，$\Xi_{\mathbb{S}}^t$ は $(\mathsf{S},\lambda_{\mathsf{S}})$ 上の DPP であり，相関核は $K_{\mathbb{S}}^t(x,y) = \sum_{j=1}^N \varphi_j^{(N)}(e^{ix},t)\overline{\varphi_j^{(N)}(e^{iy},T-t)}$, $x,y \in \mathsf{S}$ で与えられる．

証明は，(3.12) の定義に下，補題 3.7 が与える $\{\varphi_j^{(N)}(\cdot,t)\}_{1\le j\le N, t\in(0,T)}$ 正規双直交性に基づく．ランダム行列理論では標準的とされるものであるので，本稿では省略する [16]．

注 3.10. 時間区間 $(0,T)$ のちょうど真ん中の時刻，すなわち $t = T/2$ のときには，相関核は

$$K_{\mathbb{S}}^{T/2}(x,y) = \sum_{j=1}^N \varphi_j^{(N)}(e^{ix},T/2)\overline{\varphi_j^{(N)}(e^{iy},T/2)} \tag{3.15}$$

で与えられる．このときに限り，相関核は Hermite 性 $\overline{K_{\mathbb{S}}^{T/2}(x,y)} = K_{\mathbb{S}}^{T/2}(y,x)$ をもつ．また，A 型テータ関数の空間 $\mathcal{E}_{(p_{NT/2},N,r_{(p_{T/2},N)})}$ に (3.11) の内積を導入することによって N 次元 Hilbert 空間を考えたとすると，(3.15) はその再生核を与えることになる．この (3.15) を相関核としてもつ DPP はランダム行列理論で研究されている Gauss 型円アンサンブル（GCE) の楕円関数拡張と見なすことができる [36, 37].

た．これが N 個集まった粒子系を記述するために直交テータ関数系 $\{\varphi_j^{(N)}(\cdot,t)\}_{1\le j\le N,t\in(0,T)}$ を導入したが，これを与える $\psi_j^{(N,r)}(\cdot;p_{Nt})$ のノームは，補題 3.6 の (3.9) と (3.12) を見ると分かるように，$p_{Nt} = e^{-Nt}$ である．（A_{N-1} 型 ルート系として見るときも，命題 3.5 の (3.6) が示すように，ノームは $\psi_j^{(N,r)}(\cdot;p_{Nt})$ と同じく p_{Nt} である．）ところが $\psi_j^{(N,r)}(\cdot;p_{Nt})$ は，(3.4) の第 1 式に従ってノーム $p_{N^2t} = e^{-N^2t}$ のテータ関数で与えられることになる．このような階層性を目の当たりにすると「物理屋」としての血が騒ぐ．

[15] 重複点をもつ配置は $\mathbb{W}_N(\mathsf{S})$ の境界 $\partial\mathbb{W}_N(\mathsf{S})$ を成す．(3.3) や (3.13) にある行列式表示より，$\mathbb{W}_N(\mathsf{S}) \ni \boldsymbol{x} \to \boldsymbol{y} \in \partial W_N(\mathsf{S})$ の極限で $\Xi_{\mathbb{S}}^t(d\boldsymbol{x}) \to \Xi_{\mathbb{S}}^t(d\boldsymbol{y}) = 0$ となることが分かる．

[16] [34] の Appendix C に書いておいた．

$t = T/2$ の場合には，(3.14) より，

$$\begin{aligned}\mathbf{p}_{\mathbb{S}}^{\sigma(N)}(T/2, \boldsymbol{x}; T, \boldsymbol{u}^0) &= c|W_{A_{N-1}}(\boldsymbol{z}; p_{NT/2})|^2 \\ &= c \prod_{1 \le j < k \le N} |z_j|^2 \theta(z_j/z_k, \overline{z_j}/\overline{z_k}; p_{NT/2}) \end{aligned} \tag{3.16}$$

である．$\boldsymbol{z} := e^{i\boldsymbol{x}}$ とおいて (3.5) を用いた．ただし，c は定数ではなく $\boldsymbol{z}$ やノルム径数 $r_{T/2}$ などに依存する．2 節で述べておいた Frobenius の行列式恒等式 (2.8) を用いると，(3.16) は $\det_{1\le j,k\le N}\left[S_{\mathbb{A}_{\widehat{q}}}(z_j, z_k)\right]$ に比例することが分かる．ただし，$\widehat{q} = p_{NT/2}^{1/2}$ である．ここで，$S_{\mathbb{A}_{\widehat{q}}}$ は (1.10) で与えられた関数，すなわち，円環 $\mathbb{A}_{\widehat{q}}$ 上の Szegő 核である．ここで，後半の話題に移ることにする．

4. 再生核と Gauss 型解析関数（GAF）

4.1. Bergman 核と Szegő 核

領域 $D \subsetneq \mathbb{C}, D \neq \emptyset$ 上の解析関数からなる Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ を考える．その内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}}$ に対して，領域内の各点 $z \in D$ に対して，次の式が成り立つような $k_z \in \mathcal{H}$ が唯一存在：$\langle f, k_z \rangle_{\mathcal{H}} = f(z), \forall f \in \mathcal{H}$. この式で特に $f = k_w, w \in D$ と置いたものを

$$k_{\mathcal{H}}(z, w) := \langle k_w, k_z \rangle_{\mathcal{H}} = k_w(z)$$

と書き，これを $\mathcal{H}$ の再生核とよぶ．定義よりこれはエルミート核であり，z に関しては解析的，w に関しては反解析的である．再生核は正定値である：任意の $n \in \mathbb{N}$, $z_1, \dots, z_n \in D$, $\xi_1, \dots, \xi_n \in \mathbb{C}$ に対して，

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} k_{\mathcal{H}}(z_j, z_k) \xi_j \overline{\xi_k} = \Big\| \sum_{j=1}^{n} \overline{\xi_j} k_{\mathcal{H}}(\cdot, z_j) \Big\|_{\mathcal{H}}^2 \ge 0$$

である．再生核 $k_{\mathcal{H}}$ は $\mathcal{H}$ の正規直交基底 $\{e_n : n \in \mathcal{I}\}$ を用いて

$$k_{\mathcal{H}}(z, w) = \sum_{n \in \mathcal{I}} e_n(z) \overline{e_n(w)}, \quad z, w \in D \tag{4.1}$$

で与えられる．

単位円板 $\mathbb{D}$ 上の Bergman 空間 $L^2_{\mathrm{B}}(\mathbb{D})$ は $\mathbb{C}$ 上の Lebesgue 測度 $m(dz) := dxdy, z = x + iy \in \mathbb{C}$ に対して $\mathbb{D}$ 上の 2 乗可積分な解析関数全体の成す Hilbert 空間であり，内積は

$$\langle f, g \rangle_{L^2_{\mathrm{B}}(\mathbb{D})} := \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} f(z) \overline{g(z)} m(dz) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\widehat{f}(n) \overline{\widehat{g}(n)}}{n+1}$$

で与えられる．ただしここで，$\widehat{f}(n)$ は f の原点の周りの Taylor 展開 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{f}(n) z^n$ の n 次の係数を表す．$L^2_{\mathrm{B}}(\mathbb{D})$ の正規直交基底 $\widetilde{e}_n(z) := \sqrt{n+1} z^n, n \in \mathbb{N}_0$ より，再生核 (4.1) は

$$K_{\mathbb{D}}(z, w) := k_{L^2_{\mathrm{B}}(\mathbb{D})}(z, w) = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} (n+1)(z\overline{w})^n = \frac{1}{(1 - z\overline{w})^2}, \quad z, w \in \mathbb{D}$$

で与えられる．これを $\mathbb{D}$ 上の Bergman 核とよぶ．他方，$\mathbb{D}$ 上の解析関数であって，その Taylor 係数の 2 乗和が有限であるもの全体が成す Hilbert 関数を $\mathbb{D}$ 上の Hardy 空間 $H^2(\mathbb{D})$ という．この内積は (3.11) で与えられることを示すことができる．この空間の正規直交基底 $e_n(z) = z^n, n \in \mathbb{N}_0$ を用いて，再生核 (4.1) は

$$S_{\mathbb{D}}(z, w) := k_{H^2(\mathbb{D})}(z, w) = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} (z\overline{w})^n = \frac{1}{1 - z\overline{w}}, \quad z, w \in \mathbb{D} \tag{4.2}$$

で与えられる．これを $\mathbb{D}$ 上の Szegő 核という．

円環 $\mathbb{A}_q := \{z \in \mathbb{C} : q < |z| < 1\}$ 上の Bergman 空間 $L^2_{\mathrm{B}}(\mathbb{A}_q)$ の内積は $\langle f, g\rangle_{L^2_{\mathrm{B}}(\mathbb{A}_q)} := (1/\pi)\int_{\mathbb{A}_q} f(z)\overline{g(z)}m(dz)$ で与えられ，

$$\widetilde{e}^{(q)}_n(z) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{n+1}{1-q^{2(n+1)}}}z^n, & n \in \mathbb{Z}\setminus\{-1\} \\ \sqrt{\dfrac{1}{-2\log q}}z^{-1}, & n = -1 \end{cases}$$

は正規直交基底を成す．$\mathbb{A}_q$ 上の Bergman 核は

$$\begin{aligned} K_{\mathbb{A}_q}(z, w) &:= k_{L^2_{\mathrm{B}}(\mathbb{D})}(z, w) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widetilde{e}^{(q)}_n(z)\overline{\widetilde{e}^{(q)}_n(w)} \\ &= -\frac{1}{2\log q}\frac{1}{z\overline{w}} + \frac{1}{z\overline{w}}\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{n}{1-q^{2n}}(z\overline{w})^n, \quad z, w \in \mathbb{A}_q \end{aligned} \tag{4.3}$$

で与えられる [17]．$\mathbb{A}_q$ 上の Hardy 空間 $H^2(\mathbb{A}_q)$ の内積は，$\mathbb{A}_q$ の外周 $\mathbb{S}$ に沿った線積分と内周 $q\mathbb{S}$ に沿った線積分の和

$$\langle f, g\rangle_{H^2(\mathbb{A}_q)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\phi})\overline{g(e^{i\phi})}d\phi + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(qe^{i\phi})\overline{g(qe^{i\phi})}qd\phi \tag{4.4}$$

で与えられる．$H^2(\mathbb{A}_q)$ の正規直交基底は $e^{(q,q)}_n(z) := z^n/\sqrt{1+q^{2n+1}}, n \in \mathbb{Z}$ で与えられるので，この空間の再生核は (1.8) で与えられることになる．

ここまでは，$\mathbb{D}$ 上と $\mathbb{A}_q$ 上とでパラレルに話が進んで来たのであるが，次節で述べるように，$\mathbb{A}_q$ 上ではこれでは話が済まないのである．$r > 0$ という径数を導入し，(4.4) を次の式のように変えたものを内積とする $H^2(\mathbb{A}_q)$ の変形版（これを $H^2_r(\mathbb{A}_q)$ と記すことにする [46]）を考えることが必要となるのである．

$$\langle f, g\rangle_{H^2_r(\mathbb{A}_q)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\phi})\overline{g(e^{i\phi})}d\phi + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(qe^{i\phi})\overline{g(qe^{i\phi})}rd\phi \tag{4.5}$$

両者の違いは僅かである．(4.5) の右辺第 2 項の内周上の線要素が (4.4) での $qd\phi$ から $rd\phi$ に変わっただけである．$H^2_r(\mathbb{A}_q)$ の正規直交基底は $e^{(q,r)}_n(z) = z^n/\sqrt{1+rq^{2n}}, n \in \mathbb{Z}$ で与えられるので，この空間の再生核は

$$S_{\mathbb{A}_q}(z, w; r) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{(q,r)}_n(z)\overline{e^{(q,r)}_n(w)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(z\overline{w})^n}{1+rq^{2n}}, \quad z, w \in \mathbb{A}_q \tag{4.6}$$

で与えられることになる．これは $\mathbb{A}_q$ 上の重み付き Szegő 核（weighted Szegő kernel）の一種である [46]．ここでは，r を重み径数とよぶことにする．定義から，$r = q$ とすると元に戻る：$H^2_q(\mathbb{A}_q) = H^2(\mathbb{A}_q)$ であり，$S_{\mathbb{A}_q}(\cdot, \cdot; q) = S_{\mathbb{A}_q}(\cdot, \cdot)$ である．

この重み付き Szegő 核は Ramanujan の ${}_1\psi_1$ 関数 (2.9) を使って

$$S_{\mathbb{A}_q}(z, w; r) = \frac{1}{1+r}{}_1\psi_1(-r; -rq^2; q^2, z\overline{w})$$

と書けることを容易に確かめることができる．よって，Ramanujan の ${}_1\psi_1$–和公式 (2.10) より，

$$S_{\mathbb{A}_q}(z, w; r) = \frac{(-rz\overline{w}, q^2/(-rz\overline{w}), q^2, q^2; q^2)_\infty}{(z\overline{w}, q^2/(z\overline{w}), -r, q^2/(-r); q^2)_\infty} = \frac{(q^2; q^2)^2_\infty\theta(-rz\overline{w}; q^2)}{\theta(-r, z\overline{w}; q^2)}, \quad z, w \in \mathbb{A}_q \tag{4.7}$$

という結果が得られる．特に $r = q$ とした場合が，1.2 節の (1.10) であった [18]．

---

[17] $K_{\mathbb{A}_q}$ は Weierstrass の $\wp$–関数を用いて表すことができる [9]

[18] Weil の本 [65, 70–71 ページ] によると，Laurent 展開 (4.6) で定義された $S_{\mathbb{A}_q}(\cdot, \cdot; r)$ が無限積の比による表現 (4.7) をもち $\mathbb{C}^\times$ 上の有理関数に解析接続されることは，Kronecker の論文に明示されているそうである．Venkatachaliengar の本 [63] ではこの関数を Jordan–Kronecker 関数とよんでいる．

4.2. 零点付き Gauss 型解析関数と等角写像

領域 $D \subsetneq \mathbb{C}, D \neq \emptyset$ において正定値核 $S_D : D \times D \to \mathbb{C}$ があるものとする．

定義 4.1. D 上の共分散核 S をもつ GAF $\{X_D(z) : z \in D\}$ とは，D 上の解析関数に値をもつ確率場であり，任意の $n \in \mathbb{N}, z_1, \dots, z_n \in D$ に対して，$(X_D(z_1), \dots, X_D(z_n))$ が n 次元標準複素 Gauss 分布 $\mathrm{N}(0, S_D)$ に従うものをいう．したがって，$j, k = 1, \dots, n$ に対して，

$$\mathbf{E}[X_D(z_j)] = 0, \quad \mathbf{E}[X_D(z_j)X_D(z_k)] = 0, \quad \mathbf{E}[X_D(z_j)\overline{X_D(z_k)}] = S_D(z_j, z_k)$$

が成り立つ[19]．

1.2 節ですでに述べたように，Peres と Virág は (1.6) のように，共分散核が Szegő 核 $S_{\mathbb{D}}$ で与えられる $\mathbb{D}$ 上の GAF $X_{\mathbb{D}}$ を考えた [51]．また，我々はその楕円関数拡張として，Szegő 核 $S_{\mathbb{A}_q}$ で共分散核が与えられる $\mathbb{A}_q$ 上の GAF $X_{\mathbb{A}_q}$ を調べた [38]．このように，Hilbert 関数空間の再生核から Gauss 場を定義するのと逆に，Gauss 場から話を始めて，その（正定値である）共分散核が再生核を与えるような Hilbert 関数空間を構成することもできる．これを再生核 Hilbert 空間という [6]．このように，Gauss 場と再生核 Hilbert 空間とは表裏一体である．

いま，上の定義 4.1 で与えられた GAF X_D に対応する再生核 Hilbert 空間を $\mathcal{H}_{S_D}$ と書くことにする．このとき，$S_D(\alpha, \alpha) > 0$ である 1 点 $\alpha \in D$ を選び，

$$S_D^{\alpha}(z, w) := S_D(z, w) - \frac{S_D(z, \alpha) S_D(\alpha, w)}{S_D(\alpha, \alpha)}, \quad z, w \in D \tag{4.8}$$

と定義する．これを再生核とする Hilbert 関数空間は，$\mathcal{H}_{S_D}$ の部分空間 $\mathcal{H}_{S_D}^{\alpha} := \{f \in \mathcal{H}_{S_D} : f(\alpha) = 0\}$ で与えられる．したがって，この再生核 S_D^{α} を共分散核とする平均零の Gauss 場は，$X_D(\alpha) = 0$ という条件の下での X_D と同分布であることが結論される．つまり，$\alpha \in D$ に零点をもつ GAF の共分散核は (4.8) で与えられることになる．これをここでは，α–零点付き GAF とよぶことにする．

(4.2) で与えられる $\mathbb{D}$ 上の Szegő 核の表式からすぐに，次の等式が導かれる．

$$S_{\mathbb{D}}^{\alpha}(z, w) = S_{\mathbb{D}}(z, w) h_{\alpha}(z) \overline{h_{\alpha}(w)}, \quad z, w \in \mathbb{D} \tag{4.9}$$

ただし，

$$h_{\alpha}(z) = \frac{z - \alpha}{1 - z\overline{\alpha}} = z \frac{1 - \alpha/z}{1 - \overline{\alpha} z}, \quad z, w, \alpha \in \mathbb{D} \tag{4.10}$$

である．h_{α} は $h_{\alpha}(\alpha) = 0$, かつ, $h'_{\alpha}(\alpha) := dh_{\alpha}(z)/dz|_{z=\alpha} > 0$ である $\mathbb{D} \to \mathbb{D}$ の等角写像（α を原点に写すリーマンの写像関数）に他ならない[20]．

それでは，(1.9) で $\mathbb{A}_q$ 上に定義した我々の GAF $X_{\mathbb{A}_q}$ にに対する α–零点付き GAF はどのように与えられるのであろうか．重み付き Szegő 核に関する Mccullough と Shen の論文 [46] から，その答えを次のように読み取ることができる．

$$S_{\mathbb{A}_q}^{\alpha}(z, w) = S_{\mathbb{A}_q}(z, w; q|\alpha|^2) h_{\alpha}^{q}(z) \overline{h_{\alpha}^{q}(w)}, \quad z, w, \alpha \in \mathbb{A}_q \tag{4.11}$$

ただし，

$$h_{\alpha}^{q}(z) = z \frac{\theta(\alpha/z; q^2)}{\theta(\overline{\alpha} z; q^2)} = \alpha \frac{\theta(z/\alpha; q^2)}{\theta(z\overline{\alpha}; q^2)} \tag{4.12}$$

---

[19] GAF の各点での値の積のモーメントは，Wick の定理によりパーマネント $\mathrm{per}\, S_D = \mathrm{per}_{1 \le j,k \le n} S_D(z_j, z_k) := \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \prod_{j=1}^{n} S_D(z_j, z_{\sigma(j)})$, を用いて表すことができる（例えば [26] を参照）．

[20] 一般に，単連結領域 $D \subsetneq \mathbb{C}, D \neq \emptyset$ が与えられたとき，$\alpha \in D$ を原点に写すリーマンの写像関数を $\mathsf{h}_{\alpha} : D \to \mathbb{D}$ と書くことにすると，D 上の Szegő 核 S_D と α–零点付き Szegő 核 S_D^{α} との間に $S_D^{\alpha}(z, w) = S_D(z, w) \mathsf{h}_{\alpha}(z) \overline{\mathsf{h}_{\alpha}(w)}, z, w \in D$ の関係が成り立つ [8]．上は $\mathbb{D}$ から $\mathbb{D}$ に写す場合を考えているので，リーマンの写像関数は Möbius 変換 (4.10) で与えられる簡単な場合になっている．

である．この等式自体は，2 節 に書いておいた (2.7) で $r=-q, x_1=z, x_2=\alpha, a_1=\overline{w}, a_2=\overline{\alpha}$ としたものと同等である[21]．したがって，(4.11) はテータ関数の加法定理 (2.6) から導かれる結果である．(2.5) よりすぐに，$\lim_{q\to 0} h^q_\alpha(z)=h_\alpha(z), z\in\mathbb{C}^\times$ であることが分かる．逆に言うと，$h^q_\alpha(z)$ は Möbius 変換 $h_\alpha(z)$ の楕円関数拡張になっている．実際，$h^q_\alpha(z)$ は $\mathbb{A}_q$ を「$\mathbb{D}$ から半径 $|\alpha|$ の円の一部分（円弧状截線）を除いた領域」へ写す等角写像である（$\alpha\in\mathbb{A}_q$ は原点に写される）．

$S_{\mathbb{A}_q}(\cdot,\cdot;q|\alpha|^2)$ は (4.6) あるいは (4.7) で定義された重み付き Szegő 核の重み径数 r を特に $q|\alpha|^2$ としたものである．複数の点 $\alpha_1,\alpha_2,\dots\in\mathbb{A}_q$ に零点を課した場合には，Szegő 核は

$$S^{\alpha_1,\dots,\alpha_n}(z,w)=(S^{\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1}})^{\alpha_n}(z,w),\quad z,w\in\mathbb{A}_q,\quad n=2,3,\dots$$

によって，逐次的に与えられることになる [56]．よって，$n\in\mathbb{N},\alpha_1,\dots,\alpha_n\in\mathbb{A}_q$ に対して $\gamma^q_{\{\alpha_\ell\}_{\ell=1}^n}(z):=\displaystyle\prod_{\ell=1}^n h^q_{\alpha_\ell}(z), z\in\mathbb{A}_q$ と書くことにすると，

$$S^{\alpha_1,\dots,\alpha_n}_{\mathbb{A}_q}(z,w)=S_{\mathbb{A}_q}\Big(z,w;q\prod_{\ell=1}^n|\alpha_\ell|^2\Big)\gamma^q_{\{\alpha_\ell\}_{\ell=1}^n}(z)\overline{\gamma^q_{\{\alpha_\ell\}_{\ell=1}^n}(w)},\quad z,w\in\mathbb{A}_q \tag{4.13}$$

となる．付加する零点を増やしていくにつれて，重み径数 r が逐次的に $q\to q|\alpha_1|^2\to\cdots\to q\prod_{\ell=1}^n|\alpha_\ell|^2$ というように置き替わっていく．

(1.9) で定義された GAF $X_{\mathbb{A}_q}$ の拡張として，$\mathbb{A}_q$ 上の重み付き GAF

$$X^r_{\mathbb{A}_q}(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\zeta_n\frac{z^n}{\sqrt{1+rq^{2n}}},\quad z\in\mathbb{A}_q \tag{4.14}$$

を導入する．重み径数 r を $r=q$ とすると元の GAF に戻る：$X^q_{\mathbb{A}_q}=X_{\mathbb{A}_q}$．この Gauss 場の相関核は $S_{\mathbb{A}_q}(\cdot,\cdot;r)$ で与えられることになる．重み付き Szegő 核に対する上の結果は，確率論的には次のように解釈することができる．

命題 4.2. 任意の $n\in\mathbb{N}$, $\alpha_1,\dots,\alpha_n\in\mathbb{A}_q$ に対して，次の 2 つの GAF は同じ確率法則に従う．

- $X_{\mathbb{A}_q}(\alpha_1)=\cdots=X_{\mathbb{A}_q}(\alpha_n)=0$ の下での GAF $\{X_{\mathbb{A}_q}(z):z\in\mathbb{A}_q\}$
- GAF $\Big\{\gamma^q_{\{\alpha_\ell\}_{\ell=1}^n}(z)X^{q\prod_{\ell=1}^n|\alpha|^2}_{\mathbb{A}_q}(z):z\in\mathbb{A}_q\Big\}$

上の結果を裏返して言うと，$\mathbb{A}_q$ 上の GAF $X_{\mathbb{A}_q}$ に零点を付加していくと，逐次的に重み径数が異なる別の GAF $X^{q\prod_{\ell=1}^n|\alpha|^2}_{\mathbb{A}_q}$ が生成されることになる．(4.9) が示すように，$\mathbb{D}$ 上の GAF においては零点を付加しても別の GAF が生じることはない．

4.3. パーマネント–行列式点過程

重み r 付き GAF $X^r_{\mathbb{A}_q}$ の零点からなる点過程を

$$\mathcal{Z}_{X^r_{\mathbb{A}_q}}:=\sum_{z\in\mathbb{A}_q:X^r_{\mathbb{A}_q}(z)=0}\delta_z$$

と書くことにする．特に $\mathcal{Z}_{X^q_{\mathbb{A}_q}}$ は元の GAF $X_{\mathbb{A}_q}$ の零点過程であり，$\mathcal{Z}_{X_{\mathbb{A}_q}}$ と書くことにする．また，$X_{\mathbb{A}_q}$ に零点 $X_{\mathbb{A}_q}(\alpha_1)=\cdots=X_{\mathbb{A}_q}(\alpha_n)=0$ を課した GAF の零点過程を $\mathcal{Z}^{\alpha_1,\dots,\alpha_n}_{X_{\mathbb{A}_q}}$ と書くことにする．

[21] 4.1 節で導入した重み径数 r は正であるが，3.3 節の文脈でいうと，これは A 型テータ関数のノルムが負である場合になる．注 3.3 で述べたように，定義 3.2 を見る限り「ノルム」が負でも問題ない．

(4.12) で与えられた $h_\alpha^q(z), z \in \mathbb{A}_q$ は $z=\alpha$ のときに限り零であり $\mathbb{A}_q \setminus \{\alpha\}$ では非零である．したがって，$\gamma^q_{\{\alpha_\ell\}_{\ell=1}^n}(z)$ は $z \in \mathbb{A}_q \setminus \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ では 零点をもたない．よって，命題 4.2 から次が結論される．

系 4.3. 任意の $n \in \mathbb{N}, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{A}_q$ に対して，$\mathcal{Z}^{\alpha_1,\dots,\alpha_n}_{X_{\mathbb{A}_q}} \stackrel{\mathrm{d}}{=} \mathcal{Z}_{X^{q\prod_{\ell=1}^n |\alpha_\ell|^2}_{\mathbb{A}_q}}$ である．

$\mathbb{D}$ 上の GAF の零点過程では $\mathcal{Z}^{\alpha_1,\dots,\alpha_n}_{X_\mathbb{D}} \stackrel{\mathrm{d}}{=} \mathcal{Z}_{X_\mathbb{D}}$ である．本稿冒頭の 1.2 節で述べたように，「$\mathcal{Z}_{X_\mathbb{D}}$ は DPP である」という Peres と Virág [51] の美しい結果があるが，$\mathcal{Z}_{X_{\mathbb{A}_q}}$ の振舞はそれとは違って複雑であることが予想される．

$n \times n$ の行列 $M = (m_{jk})_{1 \le j,k \le n}$ に対してパーマネントと行列式をそれぞれ $\mathrm{per}\, M, \det M$ と書いたとき，その積をまとめて

$$\mathrm{perdet}\, M = \mathop{\mathrm{perdet}}_{1 \le j,k \le n} [m_{jk}] := \mathrm{per}\, M \det M$$

と略記することにする．特に M が正定値行列のときには，$\mathrm{perdet}\, M \ge 0$ である．次が証明できた [38]．

定理 4.4. $\mathbb{A}_q$ 上の零点過程 $\mathcal{Z}_{X_{\mathbb{A}_q}}$ は, 参照測度 $\lambda := m/\pi$ に対して相関関数 $\{\rho^n_{\mathbb{A}_q}\}_{n \in \mathbb{N}}$ をもち，それらは次で与えられる．$n \in \mathbb{N}, z_1, \dots, z_n \in \mathbb{A}_q$ に対して，

$$\rho^n_{\mathbb{A}_q}(z_1, \dots, z_n) = \frac{\theta(-q; q^2)}{\theta(-q\prod_{\ell=1}^n |z_\ell|^4; q^2)} \mathop{\mathrm{perdet}}_{1 \le j,k \le n} \left[S_{\mathbb{A}_q}\Big(z_j, z_k; q \prod_{\ell=1}^n |z_\ell|^2\Big)\right] \tag{4.15}$$

である．

すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $\rho^n_{\mathbb{A}_q} > 0$ であることから，$\mathcal{Z}_{X_{A_q}}$ は無限個の点からなる点過程である（つまり，GAF $X_{\mathbb{A}_q}$ の零点は $\mathbb{A}_q$ 上に無限個ある）ことが分かる．$\rho^1_{\mathbb{A}_q}$ は λ に対する密度を与えるが，(4.15) より，

$$\rho^1_{\mathbb{A}_q}(z) = \frac{(q^2;q^2)^4_\infty \theta(-q, -q|z|^4; q^2)}{\theta(|z|^2, -q|z|^2; q^2)^2} \sim \begin{cases} \dfrac{1}{(1-|z|^2)^2}, & |z| \to 1 \\ \dfrac{q^2}{(|z|^2-q^2)^2}, & |z| \to q \end{cases} \tag{4.16}$$

であり，$\mathbb{A}_q$ の外周 $\mathbb{S}$ と内周 $q\mathbb{S}$ に零点が集積している様子が分かる．この点過程 $\mathcal{Z}_{X_{\mathbb{A}_q}}$ は $\mathbb{A}_q$ を $\mathbb{A}_q$ に写す等角写像（これは Schottky の定理より，回転と反転だけからなる）に対して不変である．

4.3.1. $q \to 0$ 極限

証明を与える前に，我々の‘permanent-determinantal point process (PDPP)’ は，$q \to 0$ の極限で Peres–Virág の DPP に帰着することを示しておくことにする．(2.5) より (4.15) の右辺の係数は $\lim_{q\to 0} \theta(-q;q^2)/\theta(-q\prod_{\ell=1}^n |z_\ell|^4; q^2) = 1$ となり，相関核は

$$\lim_{q \to 0} S_{\mathbb{A}_q}\Big(z, w; q\prod_{\ell=1}^n |z_\ell|^2\Big) = \frac{1}{1-z\overline{w}} = S_\mathbb{D}(z,w)$$

となる．$S_\mathbb{D}$ の逆数を成分にもつ行列 $(S_\mathbb{D}(z_j,z_k)^{-1})_{1\le j,k\le n} = (1-z_j\overline{z_k})_{1 \le j,k \le n}$ はランクが 2 であることから，Borchardt の恒等式 [48, 26]

$$\mathop{\mathrm{perdet}}_{1 \le j,k \le n} \left[(1-z_j\overline{z_k})^{-1}\right] = \det_{1 \le j,k \le n}\left[(1-z_j\overline{z_k})^{-2}\right] \tag{4.17}$$

を用いることができる[22]．よって，冒頭の 1.2 節で述べたように，$\mathbb{D}$ 上の GAF $X_\mathbb{D}$ の零点過程は DPP であり，その相関核は (1.7) で与えられることになる [51].

[22] $D \subsetneq \mathbb{C}$ が C^∞ 級境界をもつ成分数 n の有界な多重連結領域であり，Bergman 核 K_D と Szegő 核 S_D をもつとき，$S_D(z,w)^2 = K_D(z,w) + \sum_{j=1}^{n-1} a_j(w)\omega_j'(z)$ という関係が成り立つ [50, 8]．ここで，$\{w_j\}_{j=1}^{n-1}$ は調和測

4.3.2. 定理 4.4 の証明

白井氏の論文 [56] に与えられている次の命題を用いることにする．

命題 4.5 ([56]). 領域 $D \subsetneq \mathbb{C}, D \neq \emptyset$ の上の共分散核が $S(z,w)$ で与えられる GAF を考える．その零点過程の参照測度 $\lambda = m/\pi$ に対する相関関数は，任意の $n \in \mathbb{N}$ において，$\det_{1\le j,k\le n}[S(z_j,z_k)] > 0$ となる n 点 $z_1,\dots,z_n \in D$ に対しては

$$\rho_D^n(z_1,\dots,z_n) = \frac{\mathrm{per}_{1\le j,k\le n}\left[(\partial_z \partial_{\overline{w}} S^{z_1,\dots,z_n})(z_j,z_k)\right]}{\det_{1\le j,k\le n}\left[S(z_j,z_k)\right]}$$

で与えられる．

Mccullough–Shen 等式の n 点拡張 (4.13) に着目する．(4.12) より，

$$h_\alpha^q(\alpha) = 0, \quad {h_\alpha^q}'(\alpha) = \frac{(q^2;q^2)_\infty}{\theta(|\alpha|^2)} > 0 \tag{4.18}$$

であることが示せる．よって，

$$(\partial_z \partial_{\overline{w}} S_{\mathbb{A}_q}^{z_1,\dots,z_n})(z_j,z_k) = S_{\mathbb{A}_q}\Big(z_j,z_k;q\prod_{\ell=1}^n |z_\ell|^2\Big) {\gamma^q}'_{\{z_\ell\}_{\ell=1}^n}(z_j)\overline{{\gamma^q}'_{\{z_\ell\}_{\ell=1}^n}(z_k)}$$

であり，命題 4.5 より，

$$\rho_{\mathbb{A}_q}^n(z_1,\dots,z_n) = \frac{\mathrm{per}_{1\le j,k\le n}\left[S_{\mathbb{A}_q}\big(z_j,z_k;q\prod_{\ell=1}^n|z_\ell|^2\big)\right]\prod_{m=1}^n |{\gamma^q}'_{\{z_\ell\}_{\ell=1}^n}(z_m)|^2}{\det_{1\le j,k\le n}\left[S_{\mathbb{A}_q}(z_j,z_k)\right]} \tag{4.19}$$

を得る．ところが，(4.18) を用いて少し計算すると

$$\prod_{m=1}^n \left|{\gamma^q}'_{\{z_\ell\}_{\ell=1}^n}(z_m)\right|^2 = \left(\frac{(q^2;q^2)_\infty^{2n}\prod_{1\le j<k\le n}|z_k|^2\theta(z_j/z_k,\overline{z_j}/\overline{z_k})}{\prod_{j=1}^n\prod_{k=1}^n \theta(z_j\overline{z_k})}\right)^2$$

と式変形することができるので，Frobenius の行列式恒等式 (2.8) を使って

$$\begin{aligned}\prod_{m=1}^n \left|{\gamma^q}'_{\{z_\ell\}_{\ell=1}^n}(z_m)\right|^2 &= \frac{\theta(-q;q^2)}{\theta(-q\prod_{\ell=1}^n|z_\ell|^4;q^2)} \\ &\qquad \times \det_{1\le j,k\le n}[S_{\mathbb{A}_q}(z_j,z_k)] \det_{1\le j',k'\le n}\left[S_{\mathbb{A}_q}\Big(z_{j'},z_{k'};q\prod_{\ell=1}^n|z_\ell|^2\Big)\right]\end{aligned}$$

と書き直すことができる．この結果を (4.19) に代入すれば (4.15) が得られる． ∎

5. おわりに

今後の研究課題になるのではないかと思われる事項を列挙して，本稿を終わりにしたい．

(i) 本稿では，q–拡張の径数 q と楕円関数拡張の径数 p の他に，r と書いた径数が重要な役割を果たした．話の前半では A_{n-1} 型テータ関数を特徴づけるノルムであったが，後半

度関数である．D が単連結領域のときのみ $S_D^2 = K_D$ であり，(4.17) も成り立つので，「単連結領域 $D \subsetneq \mathbb{C}$ 上では，S_D を相関核とする GAF の零点は K_D を相関核とする DPP を与える」という Peres–Virág の定理が成り立つ．$\mathbb{A}_q$ 上では $S_{\mathbb{A}_q}(z,w)^2 = K_{\mathbb{A}_q}(z,w) + b(q)/(z\overline{w})$, $b(q) = -2\sum_{n\in\mathbb{N}}(-1)^n nq^n/(1-q^{2n}) + 1/(2\log q)$ であり，２つの再生核の間の関係式に $(\log z)' = 1/z$ に比例する新たな項が登場する．今回の我々の結果は，単連結領域から多重連結領域への拡張は，GAF とその零点分布の研究においてもチャレンジングであることを示唆しているように思われる．

の話では円環上の Szegő 核の重み径数であった．しかしてその実体は何か，まだ理解不足である．$q=0$ であるが $r>0$ である $\mathbb{C}^{\times}$ 上の重み付き Szegő 核として

$$\begin{aligned} S_{\mathbb{D}^{\times}}(z,w;r) &:= \lim_{q\to 0} S_{\mathbb{A}_q}(z,w;r) \\ &= \frac{1+z\overline{w}r}{(1+r)(1-z\overline{w})} = \frac{1}{1-z\overline{w}} - \frac{r}{1+r}, \quad z,w\in\mathbb{C}^{\times}, \quad r>0 \end{aligned}$$

を考えることができる [46]. これに付随する GAF や PDPP 自体興味深い [38].

(ii) DPP の動的拡張を行列式過程（determinantal process; DP）という [3, 30]. $\mathbb{S}$ 上非衝突ブラウン運動 [49, 29] や Dyson 模型の楕円関数拡張 [31, 32, 33] に関する知見より，本稿で扱った $\mathbb{S}$ 上の非衝突ブラウン周遊過程も DP であることが予想されるが，時空相関関数の導出はまだされていない．ここで初期配置と終配置が $\boldsymbol{u}^0$ で与えられる場合を詳しく述べたが，$\mathbb{R}$ 上の $\beta=2$–Dyson 模型に対する [39] のように，一般の初期配置と終配置に対して解析することはできないだろうか.

(iii) 3.5 節の注 3.10 では，この非衝突ブラウン周遊過程がちょうど真ん中の時刻 $t=T/2$ で与える点過程 $\Xi_{\mathbb{S}}^{T/2}$ について述べた．これを $\Xi_{\mathbb{S}}^{T/2}=\sum_{j=1}^{N}\delta_{Y_j^{T/2}}$ と書くことにする．これは $\mathbb{S}$ 上の N 点からなる行列式点過程であり，相関核は (3.15) で与えられた. $p\in(0,1)$ を固定した上で，粒子数 N に依存してこの相関核と参照測度をそれぞれ $K_{\mathbb{S}}^{(-\log p)/N}(2x/N,2y/N)$ と $dx/(N\pi)$ のように時空変数をスケール変換し，$N\to\infty$ をとる．すると，相関核は $\mathbb{R}$ 上の Lebesgue 測度 dx に対して，次の関数に一様収束する [34, 37].

$$\mathsf{K}^p(x,y) = \frac{e^{-i(x-y)}}{\pi}\frac{(p;p)_\infty^2}{(p^2;p^2)_\infty}\int_0^1 e^{2i(x-y)s}\frac{\theta(-p^s e^{2ix};p)\theta(-p^s e^{-2iy};p)}{\theta(-p^{2s};p^2)}ds, \quad x,y\in\mathbb{R}$$

このことは，スケール変換した N–点 DPP $(N/2)\circ\Xi_{\mathbb{S}}^{(-\log p)/N} := \sum_{j=1}^{N}\delta_{NY_j^{(-\log p)/N}/2}$ が，$N\to\infty$ 極限で，K^p を相関核にもつ $\mathbb{R}$ 上の DPP に（漠位相に関して）弱収束することを意味する．この極限 DPP を (Ξ,K^p,dx) と書くことにする．(2.5) より，

$$\lim_{p\to 0}\mathsf{K}^p(x,y) = \frac{e^{-i(x-y)}}{\pi}\int_0^1 e^{2i(x-y)s}ds = \frac{\sin(x-y)}{\pi(x-y)} := \mathsf{K}^{\sin}(x,y), \quad x,y\in\mathbb{R}$$

を得る．これを sine 核（あるいは sinc 核 [37]）という．$\mathsf{K}^{\sin}$ を相関核とする $\mathbb{R}$ 上の DPP は sine 点過程とよばれ，ランダム行列理論において中心的な役割を担う [4, 2, 47, 19]. 以上のことは，(Ξ,K^p,dx) は sine 点過程 の楕円関数拡張の一つであることを意味する．sine 点過程, および，その離散版の楕円関数拡張と見なせる DPP として（本講演者が知るところ）他に 2 つの例があり，それぞれ [61] と [13] で報告されている．後者は表現論やヤング図形に関係する確率論 [25, 5] において現れたものである．しかし，これら 3 つの楕円関数 DPP の間の関係は明らかではない.

(iv) 本稿では [46] に従って，(4.12) で定義された関数 $h_\alpha^q(z)$ を用いた．これは $\mathbb{A}_q$ を $\mathbb{D}\setminus\{$ 円弧状截線 $\}$ に写す等角写像を与える．この関数は [53, 17 ページ] や [12, 386–388 ページ] で議論されている Blaschke 因子と

$$\widehat{h}_\alpha^q(z) = z^{-\log\alpha/\log q}h_\alpha^q(z)$$

という関係にある.（ただし，上記の文献では円環として $\{z\in\mathbb{C}: q^{1/2}<|z|<q^{-1/2}\}$ を考えているので，それを $\mathbb{A}_q$ に変換したものを $\widehat{h}_\alpha^q$ と書いた．）この Blaschke 因子は $\mathbb{A}_q$ を $\mathbb{D}$ に写すが単葉ではない．Peres–Virág の $\mathbb{D}$ 上の DPP をこの写像で $\mathbb{A}_q$ に引き戻した点過程はどのように特徴づけられるか.

(v) 4.3.1 節で述べたように，(4.16) において $q \to 0$ 極限をとると，Peres–Virág の $\mathbb{D}$ 上の DPP の（参照測度 $\lambda = m/\pi$ に対する）密度 $\rho_{\mathbb{D}}(z) = (1-|z|^2)^{-2}$ が得られる [51]．計量テンソルが

$$ds^2 = 4\rho_{\mathbb{D}}^1(z)dzd\overline{z} = \frac{4(dx^2+dy^2)}{(1-x^2-y^2)^2}$$

で与えられる Riemann 多様体は Poincaré 円板模型とよばれる [24]．これは 2 次元双曲空間であり，Gauss 曲率は $\mathcal{K}_{\mathbb{D}} = (-1/8)\Delta \log \rho_{\mathbb{D}}^1(z)/\rho_{\mathbb{D}}^1 \equiv -1$ となる（$\Delta = 4\partial_z \partial_{\overline{z}}$ である）．このことから，Peres–Virág の DPP は Poincaré 円板模型上の一様分布であるということができる．このような幾何学的な考察に対する楕円関数拡張は可能か．

参考文献

[1] 伊藤雅彦, 野海正俊 : 楕円超幾何積分と楕円補間函数–q Selberg 積分から楕円 Selberg 積分へ–. 数理解析研究所講究録 **2071** (1), 40–65 (2018)

[2] 長田博文 : ランダム行列．伊藤清 企画・監修，渡辺信三，重川一郎 編「確率論ハンドブック」丸善出版 (2012) 11.5 節

[3] 香取眞理，種村秀紀 : 非衝突過程・行列値過程・行列式過程．数学，**61**, 225–247 (2009)

[4] 永尾太郎 :「ランダム行列の基礎」．東京大学出版会 (2005)

[5] 洞彰人 :「対称群の表現とヤング図形集団の解析学」．数学書房 (2017)

[6] Aronszajn, N.: Theory of reproducing kernels. Trans. Amer. Math. Soc. **68**, 337–404 (1950)

[7] Baba, H., Katori, M.: Excursion processes associated with elliptic combinatorics. J. Stat. Phys. **171**, 1035–1066 (2018)

[8] Bell, S. R.: The Cauchy Transform, Potential Theory and Conformal Mapping. 2nd ed., CRC Press, Boca Raton, FL (2016)

[9] Bergman, S.: The Kernel Function and Conformal Mapping. 2nd ed., Amer. Math. Soc., Providence, RI (1970)

[10] Charalambides, C. A.: Discrete q-Distributions. Wiley, Hoboken (2016)

[11] Cooper, S.: The development of elliptic functions according to Ramanujan and Venkatachaliengar. Res. Lett. Inf. Math. Sci. **1**, 65–78 (2000)

[12] Courant, R., Hilbert, D.: Methods of Mathematical Physics. Vol.1, Wiley-VCH, Weinheim (2004)

[13] Cuenca, C., Gorin, V., Olshanski, G.: The elliptic tail kernel. Int. Math. Res. Not. 2020 https://doi.org/10.1093/imrn/rnaa038

[14] Date, E., Jimbo, M., Kuniba, A., Miwa, T., Okado, M.: Exactly solvable SOS models: Local height probabilities and theta function identities. Nucl. Phys. **B290**, 231–273 (1987)

[15] Fisher, M.E.: Walks, walls, wetting, and melting. J. Stat. Phys. **34**, 667–729 (1984)

[16] Forrester, P. J.: Exact solution of the lockstep model of vicious walkers. J. Phys. A: Math. Gen. **23**, 1259–1273 (1990)

[17] Forrester, P.J.: Theta function generalizations of some constant term identities in the theory of random matrices. SIAM J. Math. Anal. **21**, 270–280 (1990)

[18] Forrester, P. J.: Particles in a magnetic field and plasma analogies: doubly periodic boundary conditions. J. Phys. A: Math. Gen. **39**, 13025–13036 (2006).

[19] Forrester, P. J.: Log-Gases and Random Matrices. Princeton University Press, Princeton, NJ, (2010)

[20] Frenkel, I. B., Turaev, V. G.: Elliptic solutions of the Yang–Baxter equation and modular hypergeometric functions. In: Arnold, V. I., Gelfand, I. M., Smirnov, M., Retakh, V. S. (Eds.), The Arnold–Gelfand Mathematical Seminars, Birkhauser, Boston (1997), pp. 171–204

[21] Fulmek, M.: Nonintersecting lattice paths on the cylinder. Séminaire Lotharingien Combin. **52**, B52b (2004)

[22] Gasper, G., Rahman, M.: Basic Hypergeometric Series. Encyclopedia of Mathematics and Its Applications, Vol. 96, 2nd ed., Cambridge University Press, Cambridge (2004)

[23] Gessel, I., Viennot, G.: Binomial determinants, paths, and hook length formulae. Adv. Math. **58**, 300–321 (1985)

[24] Helgason, S.: Groups and Geometric Analysis, Integral Geometry, Invariant Differential Operators, ans Spherical Functions. Academic Press, New York (1984).

[25] Hora, A.: The Limit Shape Problem for Ensembles of Young Diagrams. Springer Briefs in Mathematical Physic, Vol. 17, Springer, Singapore (2016)

[26] Hough, J. B., Krishnapur, M., Peres, Y., Virág, B.: Zeros of Gaussian Analytic Functions and Determinantal Point Processes. University Lecture Series, Vol. 51, Amer. Math. Soc., Providence, RI (2009)

[27] Kajihara, Y., Noumi, M.: Multiple elliptic hypergeometric series. An approach from the Cauchy determinant. Indag. Math. (N.S.) **14**, 395–421 (2003)

[28] Karlin, S., McGregor, J.: Coincidence probabilities. Pacific J. Math. **9**, 1141–1164 (1959)

[29] Katori, M.: Determinantal martingales and noncolliding diffusion processes. Stochastic Process. Appl. **124**, 3724–3768 (2014)

[30] Katori M.: Bessel Processes, Schramm–Loewner Evolution, and the Dyson Model. Springer Briefs in Mathematical Physic, Vol. 11, Springer, Singapore (2015)

[31] Katori, M.: Elliptic determinantal process of type A. Probab. Theory Relat. Fields **162**, 637–677 (2015)

[32] Katori, M.: Elliptic Bessel processes and elliptic Dyson models realized as temporally inhomogeneous processes. J. Math. Phys. **57**, 103302/1–32 (2016)

[33] Katori, M.: Elliptic determinantal processes and elliptic Dyson models. SIGMA **13**, 079/1–36 (2017)

[34] Katori, M.: Macdonald denominators for affine root systems, orthogonal theta functions, and elliptic determinantal point processes. J. Math. Phys. **60**, 013301/1–27 (2019)

[35] Katori, M.: Two-dimensional elliptic determinantal point processes and related systems. Commun. Math. Phys. **371**, 1283–1321 (2019)

[36] Katori, M., Shirai, T.: Scaling limit for determinantal point processes on spheres. RIMS Kôkyûroku Bessatsu. **B79**, 123–138 (2020)

[37] Katori, M., Shirai, T.: Partial isometries, duality, and determinantal point processes. arXiv:PR /1903.04945

[38] Katori, M., Shirai, T.: in preparation

[39] Katori, M., Tanemura, H.: Non-equilibrium dynamics of Dyson's model with an infinite number of particles. Commun. Math. Phys. **293**, 469–497 (2010)

[40] Koornwinder, T.H.: On the equivalence of two fundamental theta identities. Anal. Appl. (Singap.) **12**, 711-725 (2014)

[41] Krattenthaler, C.: Advanced determinant calculus. Séminaire Lotharingien Combin. **42** ("The Andrews Festschrift"), Article B42q, 67 pp (1999)

[42] Krattenthaler, C.: Advanced determinant calculus: a complement. Linear Algebra Appl. **411**, 68–166 (2005)

[43] Liechty, K., Wang, D.: Nonintersecting Brownian motions on the unit circle. Ann. Probab. **44**, 1134–1211 (2016)

[44] Lindström, B.: On the vector representations of induced matroids. Bull. London Math. Soc. **5**, 85–90 (1973)

[45] Macdonald, I. G.: Affine root systems and Dedekind's η-function. Invent. Math. **15**, 91–143 (1972)

[46] Mccullough, S., Shen, L.C.: On the Szegő kernel of an annulus. Proc. Amer. Math. Soc. **121**, 1111–1121 (1994)

[47] Mehta, M. L.: Random Matrices, 3rd ed., Elsevier, Amsterdam (2004)

[48] Minc, H.: Permanent. Encyclopedia of Mathematics and Its Applications, Vol. 6, Addison–Wesley, Mass. (1978)

[49] Nagao, T., Forrester, P. J.: Dynamical correlations for circular ensembles of random matrices. Nucl. Phys. **B660**, 557–578 (2003)

[50] Nehari, Z.: Conformal Mapping. Dover, New York (1952)

[51] Peres, Y., Virág, B.: Zeros of the i.i.d. Gaussian power series. A conformally invariant determinantal process. Acta Math. **194**, 1–35 (2005)

[52] Rosengren, H., Schlosser, M.: Elliptic determinant evaluations and the Macdonald identities for affine root systems. Compositio Math. **142**, 937–961 (2006)

[53] Sarason, D.: The H^p Spaces of an Annulus. Memoirs of the American Mathematical Society, No. 56, Amer. Math. Soc., Providence, RI (1965)

[54] Schlosser, M.: Elliptic enumeration of nonintersecting lattice paths. J. Combin. Theory Ser. A **114**, 505–521 (2007)

[55] Schlosser, M. J., Spiridonov, V. P., Warnaar, S. O. (Eds.): SIGMA, Special Issue on Elliptic Hypergeometric Functions and Their Applications.
available at https://www.emis.de/journals/SIGMA/EHF2017.html

[56] Shirai, T.: Limit theorems for random analytic functions and their zeros. In: Functions in Number Theory and Their Probabilistic Aspects – Kyoto 2010, RIMS Kôkyûroku Bessatsu **34**, 335–359 (2012)

[57] Shirai, T., Takahashi, Y.: Random point fields associated with certain Fredholm determinants I: fermion, Poisson and boson point process. J. Funct. Anal. **205**, 414–463 (2003)

[58] Shirai, T., Takahashi, Y.: Random point fields associated with certain Fredholm determinants II: fermion shifts and their ergodic and Gibbs properties. Ann. Probab. **31**, 1533–1564 (2003)

[59] Soshnikov, A.: Determinantal random point fields. Russian Math. Surveys **55**, 923–975 (2000)

[60] Spiridonov, V. P.: Theta hypergeometric series. In: Malyshev, V.A., Vershik, A. M. (Eds.), Asymptotic Combinatorics with Applications to Mathematical Physics, Kluwer Academic, Dordrecht (2002) pp. 307–327

[61] Takahashi, Y., Katori, M.: Oscillatory matrix model in Chern-Simons theory and Jacobi-theta determinantal point process. J. Math. Phys. **55**, 093302/1-24 (2014)

[62] Tarasov, V., Varchenko, A.: Geometry of q-hypergeometric functions, quantum affine algebras and elliptic quantum groups. Astérisque **246** (1997)

[63] Venkatachaliengar, K., Cooper, S. (Ed.): Development of Elliptic Functions According to Ramanujan. Monograph in Number Theory, Vol.6, World Scientific, Singapore (2012)

[64] Warnaar, S. O.: Summation and transformation formulas for elliptic hypergeometric series. Constr. Approx. **18**, 479–502 (2002)

[65] Weil, A.: Elliptic Functions According to Eisenstein and Kronecker. Springer, Berlin (1976)