

# 臨界現象・フラクタル曲線と Schramm-Loewner Evolution \*

香取眞理 (中央大学理工学部物理学科) †

## 概要

複素上半面  $\mathbb{H}$  内に、原点から  $\mathbb{H}$  内のある点に至る 1 本の連続曲線を描く。  $\mathbb{H}$  からいま描いた曲線を取り除く。曲線が実軸と接したりループを持つときには、曲線と実軸とで囲まれた有界領域やループで囲まれた有界領域も、曲線と一緒に取り除くことにする。残りは  $\mathbb{H}$  の非有界な部分領域になるが、適当な境界条件を課すことによって、この部分領域を元の  $\mathbb{H}$  全体に写す (つまり元に戻す) 共形変換 (等角の全単射) を一意的に定めることができる。リーマンの写像定理の応用である。この「 $\mathbb{H}$  から曲線  $\gamma$  を消去する変換」の逆変換 (これも共形変換である) を考えよう。すると、元々は何も無かった  $\mathbb{H}$  に曲線を生み出すことができることになる。

時間の役割をする径数  $t$  を導入し、 $t$  の実関数  $U_t$  を考える。  $U_t$  を駆動関数としたレヴナーの微分方程式と呼ばれる方程式

$$\frac{\partial g_t(z)}{\partial t} = \frac{2}{g_t(z) - U_t}, \quad g_0(z) = z, \quad t \geq 0$$

の解として、時間  $t$  を径数とする共形変換の族  $\{g_t(z)\}_{t \geq 0}$  が得られる。この  $g_t(z)$  によって  $\mathbb{H}$  から「逐次消去される」曲線として、時間  $t$  を径数とする曲線  $\gamma(0, t]$  が定められる。

$B_t$  を 1 次元標準ブラウン運動とし、 $\kappa > 0$  を径数とする。Schramm は 2000 年に出版した論文で、

$$U_t = \sqrt{\kappa} B_t$$

としたレヴナー方程式を考え、その解として  $\mathbb{H}$  上のランダムな連続曲線の共形不変な確率測度を生成させるアイデアを発表した。  $U_t = \sqrt{\kappa} B_t$  としたレヴナー方程式を (径数  $\kappa$  を持つ) Schramm-Loewner Evolution ( $SLE_\kappa$ ) と呼ぶ。この方法で得られる連続曲線に対する確率測度の 1 径数族を  $SLE_\kappa$  測度と呼ぶことにする。フラクタル物理学や相転移・臨界現象の統計物理学で重要な役割を果たす様々なランダムな連続曲線の分布関数は、特別な  $\kappa$  の値の  $SLE_\kappa$  測度で実現されることが分かってきた。その結果、興味ある物理系のフラクタル次元や臨界指数が  $\kappa$  の関数として決定された (2006 年に Werner は  $SLE_\kappa$  測度と共形場理論の研究でフィールズ賞を受賞した。)

本講義では、 $SLE_\kappa$  の理論の入門的なレビューをすることによって、ベキ乗則の数理の一面を議論する。

## 目次

1	統計力学模型と連続関数空間上の測度	2
1.1	平面上の統計力学模型の連続極限	2
1.2	共形不変性と領域マルコフ性	7
1.3	制限性と局所性	9
2	確率解析とベッセル過程	9
2.1	ブラウン運動, マルチンゲール, 伊藤の公式	9
2.2	$d$ -次元ベッセル過程 ( $BES_d$ ) の定義	12
2.3	$BES_d$ の次元性	13

\*Summer School 数理物理 2009 「ベキ乗則の数理」における講義ノート (2009 年 8 月 27-29 日, 東京大学大学院数理科学研究科, 駒場)

†電子メール: [katori@phys.chuo-u.ac.jp](mailto:katori@phys.chuo-u.ac.jp) 研究室 HP: <http://www.phys.chuo-u.ac.jp/j/katori/>

3	シュラム・レヴナー発展 (SLE <sub>κ</sub> )	19
3.1	リーマンの写像定理について	19
3.2	複素上半平面内の曲線と共形変換	21
3.3	レヴナーの微分方程式	24
3.4	SLE <sub>κ</sub> と BES <sub>d</sub>	26
4	SLE <sub>κ</sub> と物理系との対応	30
4.1	Schramm のアイデア	30
4.2	局所性と制限性	31
4.3	対応関係	35
A	付録	37
A.1	マルチンゲールと超幾何方程式	37
A.2	ポアソン核の計算について	39
A.3	半平面 capacity について	42
A.4	Φ <sub>t</sub> (z), Φ' <sub>t</sub> (z) および (Φ' <sub>t</sub> (U <sub>t</sub> )) <sup>b</sup> の SDE の導出	45
A.5	SLE マルチンゲール	47

## 1 統計力学模型と連続関数空間上の測度

### 1.1 平面上の統計力学模型の連続極限

複素平面  $\mathbb{C}$  上に正方格子を置き ( $S = \mathbb{Z} \times \sqrt{-1}\mathbb{Z}$ ), そこでの最近接ウォークが描く道を考える. 出発点が  $z \in S$ , 長さが  $n$  の道全体は

$$W_n^z = \left\{ \omega = (\omega(0), \dots, \omega(n)) : \omega(0) = z, \omega(i) \in S, |\omega(i) - \omega(i-1)| = 1, 1 \leq i \leq n \right\}$$

で与えられる. ランダムウォーク (RW) とは, この元の重みをすべて等しいとした一様分布の統計集団を言う.  $|W_n^z| = 4^n$  なので, 各々の道  $\omega \in W_n^z$  の測度は  $4^{-n}$  である.  $\mathbb{C}$  上に正方形の開領域

$$D_0 = \left\{ x + \sqrt{-1}y : -1 < x < 1, 0 < y < 2 \right\},$$

をとり, その境界  $\partial D_0$  上に 2 点  $O = 0$  (原点),  $P = 2\sqrt{-1}$  を指定する.  $N \in \mathbb{N} \equiv \{1, 2, \dots\}$  を定め, これらを原点を中心に  $N$  倍する (図 1 参照). そして,  $NO = 0$  から  $NP = 2N\sqrt{-1}$  に至る RW の道で, 領域  $ND_0$  に含まれるもの全体を  $\Omega_N(D_0; O, P)$  と書くことにして, その測度の総和を考える (このような測度の総和を統計力学では分配関数と呼ぶ):

$$Z_N(D_0; O, P) = \sum_{\omega \in \Omega_N(D_0; O, P)} 4^{-|\omega|}. \quad (1.1)$$

ただし, 道  $\omega$  の長さを  $|\omega|$  と記した. この量は  $N \rightarrow \infty$  で

$$Z_N(D_0; O, P) \sim C(D_0; O, P)N^{-2}, \quad N \rightarrow \infty \quad (1.2)$$

と減衰する. ただし,

$$f(N) \sim g(N), \quad N \rightarrow \infty \quad \iff \quad \frac{f(N)}{g(N)} \rightarrow 1, \quad N \rightarrow \infty$$

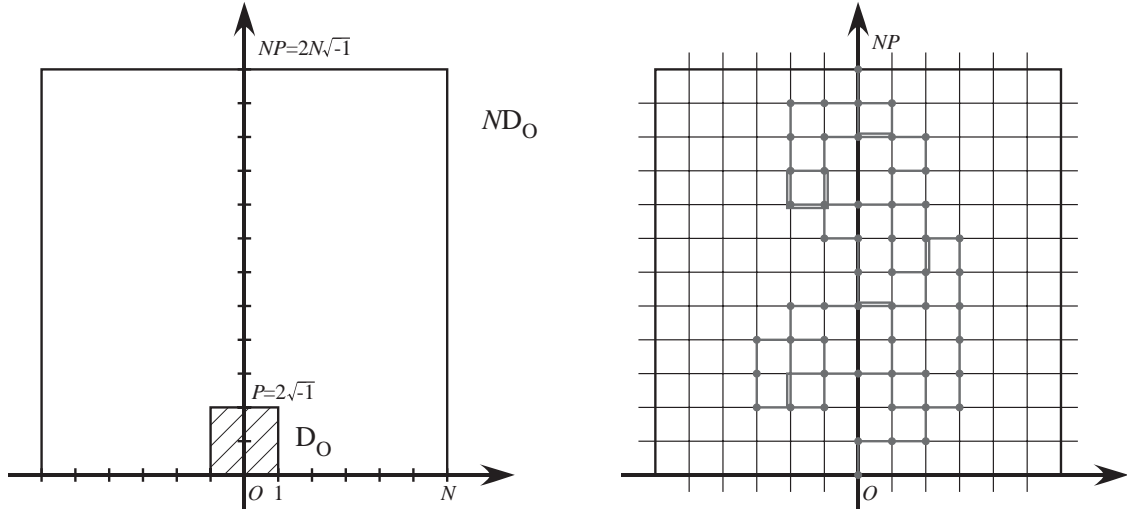


図 1: [左図] 正方形の開領域  $D_0$  を原点を中心に  $N$  倍する．[右図]  $NO = O$  から  $NP = 2N\sqrt{-1}$  に至る RW の道で領域  $ND_0$  に含まれるものの一例．一般にはループを持つ．

である．係数  $C(D_0; O, P)$  は領域  $D_0$  でのポアソン核  $H_{D_0}(\cdot, P)$  の原点  $O \in \partial D_0$  での法線微分で与えられる．

### ループ除去ランダムウォーク (loop-erased RW: LERW)

$\Omega_N(D_0; O, P)$  の元  $\omega = (\omega(0), \omega(1), \dots)$  は一般には  $\omega(i) = \omega(j), i < j$  となる点を含む．このとき，道  $\omega$  は自己交差する，あるいはループを持つと言う．そのような場合，次の操作によって  $\omega$  の部分からなる道  $\hat{\omega} = (\hat{\omega}(0), \hat{\omega}(1), \dots)$  を取り出すことによって，ループを消去することにする：

- (i)  $t_0 = 0, \hat{\omega}(0) = \hat{\omega}(t_0) = 0$  とする．
- (ii)  $m \geq 1$  に対して

$$t_m = \max \left\{ \ell > t_{m-1} : \hat{\omega}(\ell) = \hat{\omega}(t_{m-1} + 1) \right\}, \quad \hat{\omega}(m) = \hat{\omega}(t_m) = \hat{\omega}(t_{m-1} + 1)$$

とする．

$ND_0$  内の  $O \rightarrow NP$  の自己交差のない道全体を  $\Omega_N^0(D_0; O, P)$  と記すことにする．この集合の各元は，一般にはループを持つ幾つかの相異なる RW の道 から上の操作によって得られる．そこで  $\Omega_N^0(D_0; O, P)$  の各元に，その元を与えるループ除去前の RW の道の重みの和  $\sum_{\omega} 4^{-|\omega|}$  を測度として与えることにする．このように定義された道の統計集団をループ除去ランダムウォーク (LERW) と言う．

LERW の連続極限を次のように考える．LERW の道  $\omega = (\omega(0), \dots, \omega(|\omega|))$  に対して，ある指数  $\nu > 0$  を導入して

$$\omega^{1/N} \left( \frac{i}{N^{1/\nu}} \right) = \frac{1}{N} \omega(i), \quad 0 \leq i \leq |\omega| \quad (1.3)$$

とする． $\omega^{1/N}$  は原点  $O$  を出発して， $|\omega|/N^{1/\nu}$  ステップ後に  $P = 2\sqrt{-1}$  に到達する  $D_0$  内の (空間刻み  $1/N$  の) 自己交差のない道である．特定の  $\nu$  の値に対しては， $N \rightarrow \infty$  の極限で，原点から点

$P$  に至る連続な曲線  $\gamma$  の統計集団が得られることが期待される．このとき，各曲線が点  $P$  に到達する「時刻」 $t_\gamma = \lim_{N \rightarrow \infty} |\omega|/N^{1/\nu}$  も確率変数となる：

$$\gamma : (0, t_\gamma) \rightarrow D_0 \quad \text{連続}, \quad \lim_{t \downarrow 0} \gamma(t) = O, \quad \lim_{t \uparrow t_\gamma} \gamma(t) = P, \quad t_\gamma \in (0, \infty). \quad (1.4)$$

この曲線  $\gamma$  のフラクタル次元は

$$d_{\text{LERW}} = \frac{1}{\nu}$$

である．また  $\gamma$  は単純曲線，つまり  $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2), 0 \leq t_1 < t_2 \leq t_\gamma$  であろう．LERW の連続極限として得られる連続関数 (1.4) 全体を  $\mathcal{K}_{\text{LERW}}(D_0; O, P)$  と書くことにする．この関数空間に対する測度を  $\bar{\mu}_{(D_0; O, P)}^{\text{LERW}}$  とすると，その総和は  $C(D_0; O, P)$  であり

$$\bar{\mu}_{(D_0; O, P)}^{\text{LERW}}(\cdot) = C(D_0; O, P) \mu_{(D_0; O, P)}^{\text{LERW}}(\cdot) \quad (1.5)$$

によって， $\mathcal{K}_{\text{LERW}}(D_0; O, P)$  に台を持つ確率測度  $\mu_{(D_0; O, P)}^{\text{LERW}}$  が与えられる．

### 自己回避ウォーク (self-avoiding walk : SAW)

最近接ウォーク  $W_n^z$  の部分集合として，自己交差しないウォーク全体の集合を考える．

$$W_{n,0}^z = \left\{ \omega \in W_n^z : \text{すべての } 0 \leq i < j \leq n \text{ に対して } \omega(i) \neq \omega(j) \right\}.$$

この定義より， $|W_{n,0}^z| < |W_n^z| = 4^n$  であることが分かるが，ある定数  $2 < e^\beta < 3$  があって，

$$|W_{n,0}^z| \simeq e^{\beta n}, \quad n \rightarrow \infty$$

であることが知られている<sup>1</sup>．ただし，

$$f(n) \simeq g(n), \quad n \rightarrow \infty \quad \iff \quad \log f(n) \sim \log g(n), \quad n \rightarrow \infty$$

である．そこで，自己交差しないウォーク  $\omega$  に対してそれぞれ  $e^{-\beta|\omega|}$  の測度を与えた統計集団を考えることにする．これを自己回避ウォーク (SAW) と言う．(1.1) 式に対応する SAW の分配関数は

$$Z_N^{\text{SAW}}(D_0; O, P) = \sum_{\omega \in \Omega_N^0(D_0; O, P)} e^{-\beta|\omega|}$$

である．この分配関数に対して，ある指数  $b_{\text{SAW}} > 0$  があり，

$$Z_N^{\text{SAW}}(D_0; O, P) \sim C^{\text{SAW}}(D_0; O, P) N^{-2b_{\text{SAW}}}, \quad N \rightarrow \infty \quad (1.6)$$

と予想されている．先の LERW の場合は，その測度の総和である分配関数は (ループ除去前の) RW の分配関数 (1.1) と同じなので，(1.2) が成り立つ．これを (1.6) 式と見比べると，LERW の場合は  $b_{\text{LERW}} = 1$  であると言える．SAW の道の連続極限  $\gamma$  も単純曲線であるが，そのフラクタル次元  $d_{\text{SAW}}$  は LERW の次元  $d_{\text{LERW}}$  とは異なるであろう．(1.5) 式と同様に，SAW の連続極限に対する測度を

$$\bar{\mu}_{(D_0; O, P)}^{\text{SAW}}(\cdot) = C^{\text{SAW}}(D_0; O, P) \mu_{(D_0; O, P)}^{\text{SAW}}(\cdot)$$

と書くことにする．

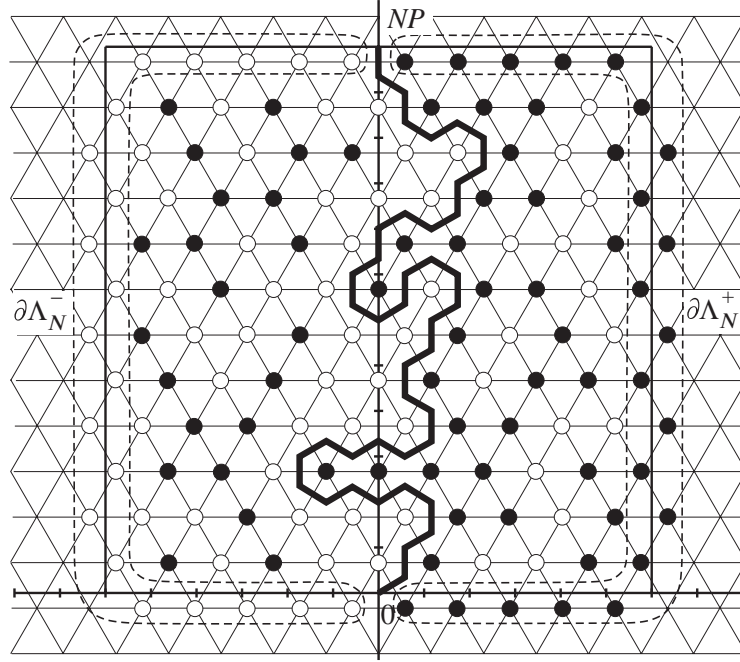


図 2:  $\mathbf{T}$  上の浸透模型と  $\mathbf{H}$  上の浸透探索過程. 値 1 を黒丸, 値 0 を白丸で表した.

### 臨界浸透模型 (critical percolation model)

ここでは  $\mathbb{C}$  上に次のような三角格子  $\mathbf{T}$  を置く :

$$\tau = \exp(2\pi\sqrt{-1}/3), \quad a = \frac{2}{3}, \quad z_0 = a\sqrt{-1} \quad \text{として}$$

$$\mathbf{T} = \left\{ z_0 + (i + j\tau)\sqrt{3}a : i, j \in \mathbb{Z} \right\}.$$

こうすると  $\mathbf{T}$  の双対格子である格子間隔  $a$  の蜂の巣格子  $\mathbf{H}$  が, 原点  $O$  と点  $NP = 2N\sqrt{-1}$ ,  $N \in \mathbb{N}$  を含むようになる. 各点  $z \in \mathbf{T}$  上に確率変数  $\eta(z) \in \{0, 1\}$  を Bernoulli 測度  $\nu_p$ ,  $0 \leq p \leq 1$  で分布させる :

$$\nu_p(\eta(z) = 1) = p, \quad \nu_p(\eta(z) = 0) = 1 - p.$$

三角格子  $\mathbf{T}$  は繊維表面を表し, その内で値 1 を持つ点は濡れた部位を, 値 0 を持つ点は乾いた部位をそれぞれ表すと思うと, これは浸透現象を表す模型と見なせる. 原点を含む浸透領域は  $p \leq 1/2$  のとき確率 1 で有界であるが,  $p > 1/2$  では非有界となる確率が正となる. 以下では, 臨界値

$$p_c = \frac{1}{2} \tag{1.7}$$

の場合を考える. (一般に, 浸透模型の臨界値  $p_c$  は格子に依存する.  $\mathbf{T}$  の場合は (1.7) が成り立つ.) Bernoulli 測度なので, 測度の総和は領域のサイズ  $N$  に依らず 1 である. このことは  $b_{\text{per}} = 0$  を意味する.

$N \in \mathbb{N}$  を定め,  $\mathbf{T} \cap ND_0 = \Lambda_N$  と書くことにする. 図 2 に  $N = 6$  の場合を示した. 以下, この図を用いて説明する.  $\Lambda_N$  の境界近くの格子点  $z \in \mathbf{T}$  で, 点  $O$  と点  $NP$  を結ぶ直線より右側のもの

<sup>1</sup> $e^\beta$  の値は SAW connective constant と呼ばれる格子ごとに定まる定数であるが, 正方格子  $\mathbf{S}$  に対しても厳密な値は分かっていない. 正方格子  $\mathbf{S}$  に対して数値的には約 2.638 と見積もられている.

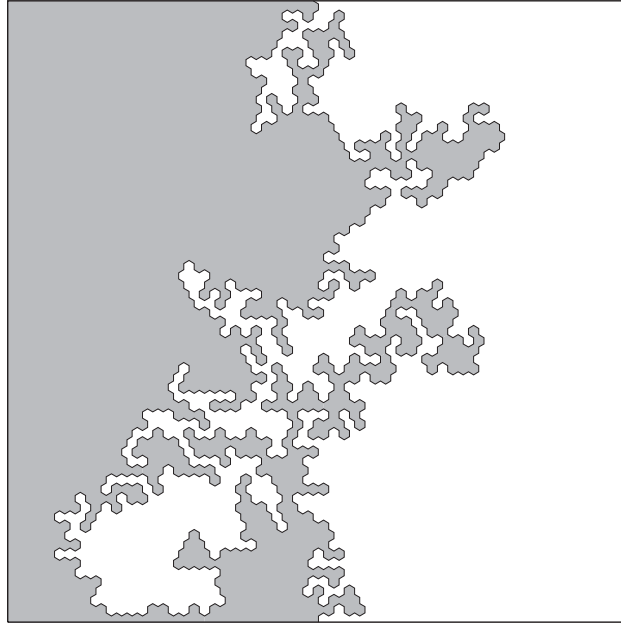
の全体を  $\partial\Lambda_N^+$ , 左側のものを全体を  $\partial\Lambda_N^-$  とする．そして

$$\eta(z) = 1, \quad \forall z \in \partial\Lambda_N^+, \quad \eta(z) = 0, \quad \forall z \in \partial\Lambda_N^- \quad (\text{Dobrushin 境界条件})$$

と境界領域での  $\eta$  の値を固定する．これ以外の領域  $\Lambda_N$  内部の配置は  $\nu_p$  に従ってランダムに分布させる．このようにして与えられた任意の配置  $\eta \in \{0, 1\}^{\Lambda_N}$  に対して,  $\mathbf{H} \cap N\bar{D}_0$  上の原点  $O$  を出発点とする最近接ウォーク  $\omega$  で, その道の進行方向すぐ左側の三角格子点の値はすべて 0 であり (図では白丸), すぐ右側の三角格子点の値はすべて 1 である (黒丸) ものが, 一意的に定まる．これを臨界浸透探索過程 (percolation exploration process) と呼ぶ．再び, 適当な指数  $\nu > 0$  をもって (1.3) とおいて連続極限  $N \rightarrow \infty$  をとると, フラクタル次元

$$d_{\text{per}} = \frac{1}{\nu}$$

を持つ連続な曲線 (1.4) が得られる．この曲線  $\gamma$  は単純曲線ではない (図 3 参照)．浸透探索過程の連続極限  $\gamma$  に対する確率測度を  $\mu_{(D_0; O, P)}^{\text{per}}(\cdot)$  と記すことにする．



(B2)

図 3:  $100 \times 100$  サイトの三角格子上の臨界浸透探索過程の一つのサンプル．グレーの領域と白の領域の境界線として表している．連続極限  $N \rightarrow \infty$  で得られる曲線  $\gamma$  は, 自分自身と何度も接する曲線になる (単純曲線ではない) と期待される．

### 臨界イジング模型 (critical Ising model)

$\bar{\Lambda}_N = \Lambda_N \cup \partial\Lambda_N^+ \cup \partial\Lambda_N^-$  とする．各点  $z \in \bar{\Lambda}_N$  に変数  $\sigma(z) \in \{-1, 1\}$  を与える (スピンと呼ぶ)．

$$\sigma(z) = 1, \quad \forall z \in \partial\Lambda_N^+, \quad \sigma(z) = -1, \quad \forall z \in \partial\Lambda_N^- \quad (\text{Dobrushin 境界条件})$$

と境界領域での  $\sigma$  の値を固定する．領域内部  $\Lambda_N^\circ \equiv \Lambda_N \cap (\partial\Lambda_N^+)^c \cap (\partial\Lambda_N^-)^c$  のスピンはランダムに配置する．Dobrushin 境界条件の下でのスピン配置  $\sigma \in \{-1, 1\}^{\Lambda_N^\circ}$  に対して,

$$E(\sigma) = -\frac{1}{2} \sum_{z, z' \in \bar{\Lambda}_N: |z-z'|=\sqrt{3}a} \sigma(z)\sigma(z')$$

をエネルギーと呼ぶ．径数  $\beta > 0$  の Gibbs 測度

$$\pi_{N,\beta}(\sigma) = \frac{e^{-\beta E(\sigma)}}{Z_{N,\beta}}, \quad Z_{N,\beta} = \sum_{\sigma \in \{-1,1\}^{\Lambda_N}} e^{-\beta E(\sigma)}$$

に従って分布するスピン配置を逆温度  $\beta$  でのイジング模型と言う．これは強磁性体の模型である．各スピン配置に対して，浸透模型の項で述べたのと同様の探索過程  $\omega$  (ただし今度は  $-1$  のスピンと  $+1$  のスピンとの境界線として定義される) が  $H \cap N\bar{D}_0$  上に得られる．これを臨界イジング界面 (Ising interface) 曲線と呼ぶ．特に  $\beta$  の値を  $T$  上のイジング模型の臨界値

$$\beta_c = \frac{1}{4} \log 3 = 0.27465 \dots \iff e^{-2\beta_c} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

に設定し，連続極限をとると，あるフラクタル次元  $d_{\text{Ising}}$  を持つ連続曲線 (1.4) が得られる．これは単純曲線である．この  $\gamma$  の測度を  $\bar{\mu}_{(D_0;O,P)}^{\text{Ising}}(\cdot)$  と記すことにする．

## 1.2 共形不変性と領域マルコフ性

$f$  が  $D_0 \subset \mathbb{C}$  上で正則であり，微分  $f'(z) \neq 0, \forall z \in D_0$  のとき

$$f: D_0 \rightarrow f(D_0) \quad (1.8)$$

を共形変換と言う．以下，本講義録では共形変換は等角の全単射を意味する． $f$  により，境界  $\partial D_0$  上の点  $O, P$  はそれぞれ， $\partial f(D_0)$  上の点  $f(O), f(P)$  に写されるとする (図 4 参照)．1.1 節で述べた平面格子上的統計力学模型の連続極限に伴って得られる，連続関数  $\gamma$  に対する測度

$$\bar{\mu}_{(D_0;O,P)}(\cdot) = C(D_0;O,P) \mu_{(D_0;O,P)}(\cdot) \quad (1.9)$$

は，次の 2 つの性質を持つことが期待される．

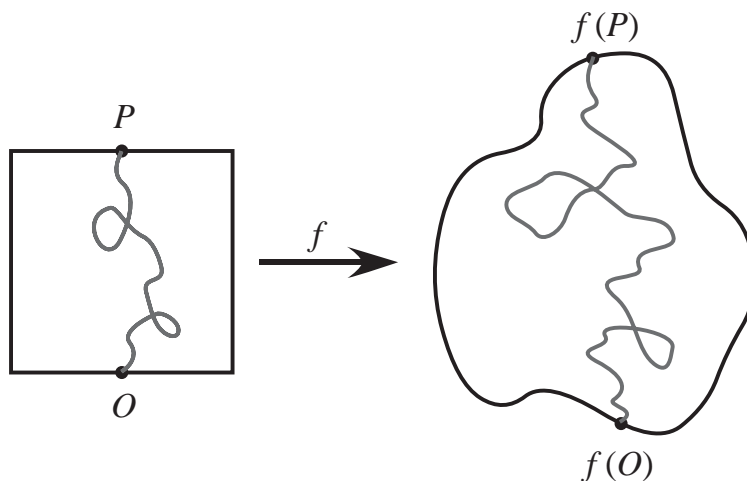


図 4: 共形変換  $f$  によって正方形の開領域  $D_0$  は開領域  $f(D_0)$  に映される．境界  $\partial D_0$  上の 2 点  $O$  と  $P$  は  $\partial f(D_0)$  上の 2 点  $f(O), f(P)$  に写され， $O$  から  $P$  に至る連続曲線は  $f(O)$  から  $f(P)$  に至る連続曲線に写される．

## 共形共変性 (conformal covariance) と共形不変性 (conformal invariance)

任意の共形変換 (1.8) に対して,

$$f \circ \bar{\mu}_{(D_0; O, P)}(\cdot) = |f'(O)|^b |f'(P)|^b \bar{\mu}_{(f(D_0); f(O), f(P))}(\cdot) \quad (1.10)$$

である.  $b$  は 1.1 節で述べたように, 格子上的モデルの分配関数の領域サイズ  $N \rightarrow \infty$  に伴う漸近挙動で決まる値である. (1.10) 式の形から, 境界スケーリング指数 (boundary scaling exponent) と呼ばれる<sup>2</sup>. (1.10) 式は次を意味する:

$$\text{測度の総和の共形共変性: } C(D_0; O, P) = |f'(O)|^b |f'(P)|^b C(f(D_0); f(O), f(P))$$

$$\text{確率測度の共形不変性: } \mu_{(D_0; O, P)}(\cdot) = \mu_{(f(D_0); f(O), f(P))}(\cdot).$$

## 領域マルコフ性 (domain Markov property)

$\mu_{(D_0; O, P)}$  の下で, 曲線  $\gamma$  の初期の一部分  $\gamma(0, t], t \in (0, t_\gamma)$  を観測したとする. この条件の下での曲線の残りの部分の分布は,  $D_0$  から  $\gamma(0, t]$  を除いた開領域で,  $\gamma(t)$  を出発点として  $\gamma(t_\gamma) = P$  を終点とする曲線の分布に等しい:

$$\mu_{(D_0; O, P)}(\cdot \mid \gamma(0, t]) = \mu_{(D_0 \setminus \gamma(0, t]; \gamma(t), P)}(\cdot).$$

この性質を領域マルコフ性と言う (図 5 参照).

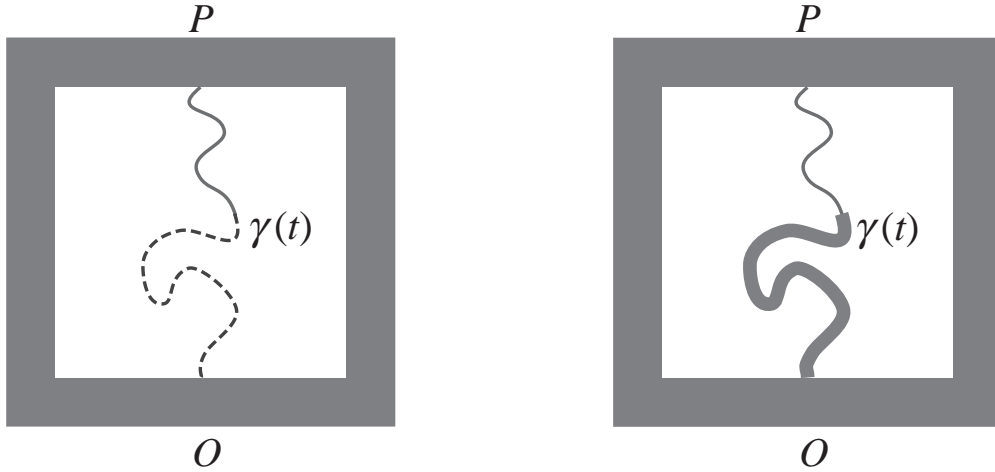


図 5: [左図] 曲線  $\gamma$  の初期の一部分  $\gamma(0, t]$  (点線部分) で条件付けを行い, その先の  $P$  に至る曲線  $\gamma(t, t_\gamma)$  の分布を考える. [右図]  $D_0$  から  $\gamma(0, t]$  を除いた開領域で,  $\gamma(t)$  を出発点として  $P$  に至る曲線の分布を考える. この両者の分布が等しいとき, 曲線の分布は領域マルコフ性を持つと言う.

注 1.1. 曲線  $\gamma$  は (1.4) 式に書いたように変数 (時間と見なす)  $t \in [0, t_\gamma]$  の連続関数である. 共形変換 (1.8) によって, 時間はどのように変換されるべきであろうか. 格子上的統計力学モデルの連続極限をとる際に置いた (1.3) 式のスケール性に従うと, 像曲線  $f \circ \gamma$  上の区間  $f(\gamma[t_1, t_2]), 0 < t_1 < t_2 < t_\gamma,$

<sup>2</sup>1.1 節の (1.2) 式や (1.6) 式は, 格子上的大きな領域  $ND_0$  内での道の測度を,  $1/N$  に縮小した単位領域  $D_0$  内での道の測度に変換したときの変換性を示したものと見なせる. 縮小変換  $f$  も共形変換であり,  $f'(z) \equiv 1/N$  である. これより, 境界スケーリング指数  $b$  は, 1.1 節の  $N \rightarrow \infty$  に伴う分配関数の減衰を表す指数  $b$  と同一視できる.



を移動するのにかかる時間は  $\int_{t_1}^{t_2} |f'(\gamma(s))|^d ds$  で与えられるべきであろう．ただし  $d$  は曲線  $\gamma$  のフラクタル次元である．他方，任意の増加同相写像  $\theta: [0, t_\gamma] \rightarrow [0, t_\gamma]$  に対して  $\gamma(t)$  と  $\gamma(\theta(t))$  を同一視することにより，曲線の径数付けの違いを無視することも出来る．

### 1.3 制限性と局所性

測度 (1.9) は特別な場合，共形共変/不変性と領域マルコフ性に加えて，次のような特性を持つことが予想される．

#### 制限性 (restriction property)

正方形領域  $D_0$  の部分で単連結な領域  $D_1 \subset D_0$  を考える．ただし， $O, P \in \partial D_1$  とする．1.1 節と同様にして，この部分領域で LERW を考え，その連続極限の測度  $\bar{\mu}_{(D_1; O, P)}^{\text{LERW}}$  を定義する．領域を小さくすれば，その内部での  $O \rightarrow P$  なる RW も減る．したがって，RW に対してループ除去して LERW を得る際に，LERW の道に対して付加される重みも減少する．よって一般に Radon-Nikodym 微分に対して

$$\frac{d\bar{\mu}_{(D_1; O, P)}^{\text{LERW}}}{d\bar{\mu}_{(D_0; O, P)}^{\text{LERW}}}(\gamma) < 1, \quad D_1 \subset D_0, \quad D_1 \neq D_0$$

であるはずである．しかし，SAW の連続極限の測度においては

$$\frac{d\bar{\mu}_{(D_1; O, P)}^{\text{SAW}}}{d\bar{\mu}_{(D_0; O, P)}^{\text{SAW}}}(\gamma) = \mathbf{1}\{\gamma(0, t_\gamma) \subset D_1\}, \quad D_1 \subset D_0 \quad (1.11)$$

が成立する．ただし， $\mathbf{1}\{\omega\}$  は事象  $\omega$  の指示関数（条件  $\omega$  が満たされているとき  $\mathbf{1}\{\omega\} = 1$ ，それ以外では  $\mathbf{1}\{\omega\} = 0$ ）．(1.11) を制限性と言う．

浸透模型の確率変数  $\eta$  は Bernoulli 分布に従っているので，浸透探索過程の振る舞いは，その道の左右の最近接三角格子点上の  $\eta$ -配置のみで決まる．このため，連続極限で得られる連続関数の測度  $\mu^{\text{per}}$  には，局所性と呼ばれる次の特性があるはずである．（他方， $\bar{\mu}^{\text{Ising}}$  には局所性は期待できない．）

#### 局所性 (locality property)

単連結な部分領域  $D_1 \subset D_0$  で  $O, P \in \partial D_1$  であるものを考える．このとき，

$$\mu_{(D_1; O, P)}^{\text{per}}(\gamma(0, t]) = \mu_{(D_0; O, P)}^{\text{per}}(\gamma(0, t]) \mathbf{1}\{\gamma(0, t) \subset D_1\}, \quad \forall t \in (0, t_\gamma). \quad (1.12)$$

制限性 (1.11) は曲線全体  $\gamma(0, t_\gamma)$  の性質であるが，局所性 (1.12) は任意の初期部分  $\gamma(0, t], t \in (0, t_\gamma)$  に対して成り立つべき性質であり，より強い独立性である．

## 2 確率解析とベッセル過程

### 2.1 ブラウン運動，マルチンゲール，伊藤の公式

- $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  を確率空間とする．ここで  $\Omega$  は標本空間， $\Omega$  の部分集合  $A \subset \Omega$  は事象を表すが， $\mathcal{F}$  はこの事象の全体であり， $\sigma$ -加法族をなす．（すなわち，(i)  $\Omega \in \mathcal{F}$ ，(ii)  $A \in \mathcal{F}$  なら  $A$  の補集合  $A^c \in \mathcal{F}$ ，(iii)  $A_1, A_2, \dots, \in \mathcal{F}$  なら  $\cup_n A_n \in \mathcal{F}$ ，という 3 条件を満たす．）また  $\mathbb{P}$  は確率分布関数（確率法則）を表す． $\Omega$  上に定義される実数値関数  $f$  が  $\mathcal{F}$ -可測とは，任意の実数  $a$  に対して， $\{\omega \in \Omega : f(\omega) \leq a\} \in \mathcal{F}$  であることを言う [6, 14]．

- 確率過程は確率変数の時間発展である．過去の軌跡を「情報」と見るとき，情報の増大系が得られることになる．これを表すのがフィルトレーション (filtration, 情報系)  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$  である．これは, (i)  $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}, 0 \leq s < t$ , (ii) 各  $t$  に対して  $\mathcal{F}_t$  は  $\sigma$  加法族をなす, という 2 条件を満たすものである． $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}; \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0})$  をフィルター付き確率空間と言う．

- 1次元標準  $\mathcal{F}_t$ -ブラウン運動 (Brownian motion) とは, 次を満たす確率過程  $B_t$  である．(以下, 特に断りのないときには, これを単にブラウン運動とよび, BM と略記することにする.)

- (i) 各  $0 < s < t$  に対して,  $B_t - B_s$  は  $\mathcal{F}_t$ -可測であり,  $\mathcal{F}_s$  と独立である．その分布は, 平均 0, 分散  $t - s$  の正規分布である;

$$\mathbb{P}(B_t - B_s \in [a, b]) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2(t-s)}\right\} dx. \quad (2.1)$$

- (ii) 確率 1 で,  $t \mapsto B_t$  は連続．すなわち,  $\exists \tilde{\Omega} \subset \Omega$  s.t.  $\mathbb{P}(\tilde{\Omega}) = 1$  かつ,  $\omega \in \tilde{\Omega}$  のとき  $B_t(\omega)$  は  $t$  の連続関数.

- (i) の性質から, 任意の  $c > 0$  に対して,  $\frac{1}{c}B_{c^2t}$  の分布と  $B_t$  の分布は等しいことが分かる．これを

$$\frac{1}{c}B_{c^2t} \stackrel{d}{=} B_t \quad \forall c > 0 \quad (2.2)$$

と書くことにする．(d は distribution の意味.) これを, BM のスケール性 (scaling property) と言う．

- $B_t^1, B_t^2, \dots, B_t^d$  が独立な BM であるとき,  $B_t = (B_t^1, B_t^2, \dots, B_t^d)$  を  $d$  次元 BM と言う．
- $B_t^1$  と  $B_t^2$  が独立な BM であるとき  $B_t = B_t^1 + \sqrt{-1}B_t^2$  を (標準) 複素 BM と言う．

注 2.1. 特に断りのないときは,  $\mathbb{P}(B_0 = 0) = 1$ , つまり, ( $d$  次元)BM は原点からスタートするものとする．一般化して,  $z \in \mathbb{R}^d$  (あるいは  $z \in \mathbb{C}$ ) に対して,  $z$  からスタートした ( $d$  次元)BM を考えたいときには,  $z$  だけ空間座標をずらして  $\mathbb{P}^z(B_t \in \cdot) \equiv \mathbb{P}(B_t + z \in \cdot)$  とする．こうすれば  $\mathbb{P}^z(B_0 = z) = 1$  となる．

- $\mathbb{P}$  (または  $\mathbb{P}^z$ ) に関する期待値 (expectation) を  $\mathbb{E}$  (または  $\mathbb{E}^z$ ) と書くことにする．
- $Z_t$  を確率過程とする．条件付き期待値  $\mathbb{E}[Z_t | \mathcal{F}_s], s < t$  は次を満たすものとして定義される;

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{E}[Z_t | \mathcal{F}_s], A\right] = \mathbb{E}[Z_t | A], \quad \forall A \in \mathcal{F}_s, \quad s \leq t. \quad (2.3)$$

- $Z_t$  が ( $\mathcal{F}_t$ -) マルチンゲール (martingale) であるとは,  $Z_t$  が, 各  $t \geq 0$  で  $\mathbb{E}[|Z_t|] < \infty$ , かつ

$$\mathbb{E}[Z_t | \mathcal{F}_s] = Z_s, \quad \forall s \leq t \quad (2.4)$$

を満たす確率過程であることを意味する．上の条件付き期待値の定義式 (2.3) より, (2.4) は

$$\mathbb{E}[Z_t, A] = \mathbb{E}[Z_s, A], \quad \forall A \in \mathcal{F}_s \quad (2.5)$$

に等しい．

- $\tau$  が  $\mathcal{F}_t$ -停止時刻 (stopping time)  $\iff$  各  $t$  に対して,  $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$
- $Z_t$  が局所マルチンゲール (local martingale)  
 $\iff$   $\mathcal{F}_t$ -停止時刻の列  $\tau_1 < \tau_2 < \dots$  ( $\tau_j \rightarrow \infty, j \rightarrow \infty$ ) が存在して, 各  $j$  に対して  $Z_{t \wedge \tau_j}$  はマルチンゲール. ただし,  $a \wedge b = \min\{a, b\}$ .
- $\tau$  を  $\mathcal{F}_t$ -停止時刻とする. 任意の有界な  $\mathcal{F}_t$ -可測関数  $f$  に対して

$$\mathbb{E}^x[f(Z_{\tau+t})|\mathcal{F}_\tau] = \mathbb{E}^{Z_\tau}[f(Z_t)] \quad \forall t \geq 0 \quad (2.6)$$

が成り立つとき, 確率過程  $Z_t$  は強マルコフ性 (strong Markov property) を持つと言う.

**注 2.2.** 定義より, ( $d$ 次元)BM はマルチンゲールであり, 強マルコフ性をもつことが分かる. 一般に, 強マルコフ性をもつ連続確率過程を拡散過程と言う.

- 時間に比例した変動をもつ (つまり速度が定義できる) 確率過程を有界変動過程と言う. マルチンゲールと有界変動過程の和で与えられる確率過程を半マルチンゲールと呼ぶ.
- 確率過程  $Z_t$  の二次変分 (quadratic variation) を  $\langle Z \rangle_t$  とおく:

$$\langle Z \rangle_t = \mathbb{P}\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^n (Z(t_{j+1}) - Z(t_j))^2$$

ただしここで,  $\mathbb{P}\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty}$  は時間区間  $[0, t]$  の分割  $0 \equiv t_0 < t_1 < \dots < t_n \equiv t$  を無限に細かくしていく極限における確率収束を意味するものとする<sup>3</sup>.  $Z_t$  が有界変動過程である場合は  $\langle Z \rangle_t = 0$  である. また, 確率過程  $Z_t, \hat{Z}_t$  に対して

$$\langle Z, \hat{Z} \rangle_t \equiv \frac{1}{4} \left\{ \langle Z + \hat{Z} \rangle_t - \langle Z - \hat{Z} \rangle_t \right\}$$

と定義し, さらに  $dZ_t d\hat{Z}_t = d\langle Z, \hat{Z} \rangle_t$  という記法を用いることにする. BM の二次変分は  $dB_t dB_t = dt$  であるが, 逆に二次変分が  $dt$  である連続マルチンゲールは BM に限る. 一般に連続なマルチンゲールは二次変分により一意に定まる.  $B_t^1$  と  $B_t^2$  が互いに独立な BM であるとき  $dB_t^1 dB_t^2 = 0$  となるので,  $d$ 次元 BM  $B_t = (B_t^1, B_t^2, \dots, B_t^d)$  に対して  $dB_t^i dB_t^j = \delta_{ij} dt$  が成立する. 多次元の場合でも  $dM_t^i dM_t^j, 1 \leq i, j \leq d$  が与えられるとマルチンゲール  $M_t = (M_t^1, M_t^2, \dots, M_t^d)$  が一意に決まることが知られている.

- $Z_t = (Z_t^1, Z_t^2, \dots, Z_t^d)$  をマルチンゲール部分が  $M_t$ , 有界変動部分が  $A_t = (A_t^1, A_t^2, \dots, A_t^d)$  である  $d$ 次元半マルチンゲールとする.  $F$  を  $\mathbb{R}^d$  上で定義された 2 階微分可能な実数値関数としたとき確率過程  $F(Z_t)$  は,

$$dF(Z_t) = \sum_{j=1}^d \frac{\partial F}{\partial x_j}(Z_t) (dM_t^j + dA_t^j) + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq j, k \leq d} \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_k}(Z_t) dM_t^j dM_t^k \quad (2.7)$$

と展開することができる. これを伊藤の公式と言う.

右辺の第 2 項は有界変動部分であるが, 以下ではこれをドリフト項とも呼ぶことにする.

<sup>3</sup>確率変数の列  $\{X_n\}_{n=1}^\infty$  と確率変数  $X$  が同一の確率空間  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  で定義されているものとする.  $n \rightarrow \infty$  のとき  $\{X_n\}$  が  $X$  に確率収束するとは, 任意の  $\varepsilon > 0$  に対して  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) = 0$  となることを言う. ここではこれを  $\mathbb{P}\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty}$  と記した.

## 2.2 $d$ -次元ベッセル過程 (BES $_d$ ) の定義

$d = 1, 2, 3, \dots$  として,  $d$  次元ブラウン運動  $B_t = (B_t^1, B_t^2, \dots, B_t^d)$  を考える. これは  $\mathbb{R}^d$  内のベクトル値確率過程と見なせるが, このベクトルの大きさ ( $B_t$  の動径成分  $|B_t|$ )

$$X_t = \sqrt{\sum_{j=1}^d (B_t^j)^2} \quad (2.8)$$

を考えると, これは 1 次元拡散過程となる. ただし,  $X_t \in \mathbb{R}_+ \equiv \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$  である.

$$F(x_1, x_2, \dots, x_d) = \sqrt{\sum_{j=1}^d x_j^2} \text{ とおくと, } \frac{\partial F}{\partial x_k} = \frac{x_k}{F}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_k^2} = \frac{1}{F} - \frac{x_k^2}{F^3} \text{ であるが}$$

$$\sum_{k=1}^d \frac{\partial^2 F}{\partial x_k^2} = \frac{1}{F} \left\{ d - \frac{1}{F^2} \sum_{k=1}^d x_k^2 \right\} = \frac{d-1}{F}$$

なので, 伊藤の公式 (2.7) と,  $B_t^1, \dots, B_t^d$  の独立性

$$dB_t^k dB_t^\ell = \delta_{k\ell} dt, \quad 1 \leq k, \ell \leq d \quad (2.9)$$

より  $dX_t = \frac{1}{X_t} \sum_{k=1}^d B_t^k dB_t^k + \frac{d-1}{2} \frac{dt}{X_t}$  となる. ここで, マルチンゲール部分の二次変分をとると, 再び (2.9) より

$$\left( \frac{1}{X_t} \sum_{k=1}^d B_t^k dB_t^k \right)^2 = \frac{1}{X_t^2} \sum_{k=1}^d (B_t^k)^2 (dB_t^k)^2 = \frac{1}{X_t^2} \sum_{k=1}^d (B_t^k)^2 dt = dt$$

であるから, これは, 上の  $\{B_t^j\}_{j=1}^d$  とは別の BM,  $B_t$  によって  $dB_t$  と与えられるものとしてよい. 以上より,  $X_t$  が満たす確率微分方程式 (stochastic differential equation, SDE) は

$$dX_t = dB_t + \frac{d-1}{2} \frac{1}{X_t} dt \quad (2.10)$$

で与えられることが分かった [6, 14, 8, 9].

以下では  $d \geq 1$  として, 一般に (2.10) の SDE に従う 1 次元拡散過程を考えることにする. ( $d = 1$  のときは原点に反射壁を置くものとする:  $X_t = |B_t|$ ) これを  $d$ -次元ベッセル過程 (Bessel process) とよび, 以下では BES $_d$  と略記することにする. (2.10) の右辺の第 1 項はマルチンゲール部分 (BM), 第 2 項が有界変動部分 (ドリフト項) であるので, BES $_d$  は半マルチンゲールであることが分かる.

**注 2.3.** ベッセル過程という呼び名は,  $X_t$  の推移 (確率) 密度が, 以下に示すように変形ベッセル関数  $I_\nu$  で表されることによる. SDE (2.10) に対応して, コルモゴロフ後進方程式 (Kolmogorov backward equation)

$$\frac{\partial}{\partial t} p(t; x, y) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} p(t; x, y) + \frac{d-1}{2} \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} p(t; x, y) \quad (2.11)$$

が得られる.  $d \geq 2$ , および  $1 \leq d < 2$  で原点に反射条件を課した場合, BES $_d$  の対称な推移密度 ( $p(t; x, y) = p(t; y, x)$  とする) は (2.11) の解

$$p(t; x, y) = \frac{1}{2t} (xy)^{-\nu} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2t}\right) I_\nu\left(\frac{xy}{t}\right) \quad (2.12)$$

で与えられる．ただし，

$$\nu = \frac{d-2}{2} \geq -\frac{1}{2} \iff d = 2(\nu+1) \geq 1 \quad (2.13)$$

であり， $I_\nu(z)$  は変形ベッセル関数

$$I_\nu(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+1+\nu)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+\nu}$$

である．ここで， $\Gamma(z)$  はガンマ関数：

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-u} u^{z-1} du, \quad \Re z > 0$$

を表す．スピード測度と呼ばれる測度が

$$m_\nu(dy) = 2y^{2\nu+1} dy \quad (2.14)$$

で与えられ，(2.12) に  $m_\nu(dy)/dy = 2y^{2\nu+1}$  をかけることによって， $BES_d$  に対して，時間  $t \geq 0$  の間に  $x > 0$  から  $y \geq 0$  へ推移する推移確率密度関数が

$$p(t, y|x) = \frac{1}{t} \frac{y^{\nu+1}}{x^\nu} \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2t}\right) I_\nu\left(\frac{xy}{t}\right) \quad (2.15)$$

と与えられる．

### 2.3 $BES_d$ の次元性

以下では，初期値を上付き添字で表し， $x > 0$  から出発した  $BES_d$  を  $X_t^x$  と書くことにする；

$$dX_t^x = \frac{d-1}{2} \frac{dt}{X_t^x} + dB_t, \quad t \geq 0, \quad X_0^x = x > 0 \quad (2.16)$$

である．

命題 2.1 任意の  $x > 0$  に対して

$$\frac{1}{x} X_{x^2 t}^x \stackrel{d}{=} X_t^1 \quad (2.17)$$

が成り立つ．これを，ベッセル過程のスケーリング性と言う．

証明．これは BM のスケーリング性 (2.2) が遺伝したものである． $Y_t = \frac{1}{x} X_{x^2 t}^x$  とおくと，

$$\begin{aligned} dY_t &= \frac{1}{x} \left( dB_{x^2 t} + \frac{d-1}{2} \frac{d(x^2 t)}{X_{x^2 t}^x} \right) \\ &= \frac{1}{x} dB_{x^2 t} + \frac{d-1}{2} \frac{x}{X_{x^2 t}^x} dt \\ &= d\tilde{B}_t + \frac{d-1}{2} \frac{dt}{Y_t}. \end{aligned}$$

ここで,  $\tilde{B}_t = B_{x^2 t}/x \stackrel{d}{=} B_t$  である. また, 初期値は  $Y_0 = X_0^x/x = x/x = 1$  である. ■

$x > 0$  から出発した  $BES_d$  が初めて原点に到達する時刻を  $T_x$  と記す;

$$T_x = \inf \left\{ t > 0 : X_t^x = 0 \right\}. \quad (2.18)$$

SDE (2.16) は  $t \leq T_x$  までは well-defined である. 次の定理を証明することにする.

**定理 2.2** (i)  $d \geq 2 \implies T_x = \infty, \forall x > 0$  が確率 1 で成り立つ.

(ii)  $d > 2 \implies \lim_{t \rightarrow \infty} X_t^x = \infty, \forall x > 0$  が確率 1 で成り立つ.

(iii)  $d = 2 \implies \inf_{t > 0} X_t^x = 0, \forall x > 0$  が確率 1 で成り立つ.

つまり,  $x > 0$  から出発した  $BES_2$  は原点にはぶつからないが, 原点に無限に近づく.

(iv)  $1 \leq d < 2 \implies T_x < \infty, \forall x > 0$  が確率 1 で成り立つ.

証明  $0 < x_1 < x < x_2 < \infty$  に対して

$$\sigma = \inf \left\{ t > 0 : X_t^x = x_1 \text{ or } X_t^x = x_2 \right\}$$

として,

$$\phi(x) = \phi(x; x_1, x_2) = \mathbb{P}(X_\sigma^x = x_2)$$

と定義する. この定義から明らかに

$$\phi(x_1) = 0, \quad \phi(x_2) = 1 \quad (2.19)$$

である.  $t \wedge \sigma \equiv \min\{t, \sigma\}$  として, 確率過程

$$M_t = \phi(X_{t \wedge \sigma}^x)$$

を考える. これは

$$M_t = \mathbb{E} \left[ \phi(X_\sigma^x) \middle| \mathcal{F}_t \right]$$

とも書ける. このとき

$$\mathbb{E}[M_t | \mathcal{F}_s] = M_s, \quad 0 \leq \forall s \leq t \quad (2.20)$$

が成り立つことは明らかである. つまり  $M_t$  はマルチンゲールである. ( $\phi(x)$  の 2 回微分可能性を仮定して) 伊藤の公式 (2.7) を適用すると,  $BES_d$  の SDE (2.16) より

$$\begin{aligned} M_t &= \phi(x) + \int_0^{t \wedge \sigma} \phi'(X_s^x) \left[ dB_s + \frac{d-1}{2} \frac{ds}{X_s^x} \right] + \int_0^{t \wedge \sigma} \frac{1}{2} \phi''(X_s^x) (dB_s)^2 \\ &= \phi(x) + \int_0^{t \wedge \sigma} \phi'(X_s^x) dB_s + \int_0^{t \wedge \sigma} \frac{1}{2} \left[ \phi''(X_s^x) + \frac{d-1}{X_s^x} \phi'(X_s^x) \right] ds \end{aligned}$$

となる. (以下この講義ノートでは,  $f'(x) = \frac{d}{dx} f(x)$  という微分に対する略記を用いる.)  $M_t$  は局所マルチンゲールなので, 有界変動部分 (ドリフト項) は零である. つまり

$$\phi''(x) + \frac{d-1}{x} \phi'(x) = 0, \quad x_1 < x < x_2 \quad (2.21)$$

という微分方程式が得られる．これは  $\left(\frac{d}{dx} + \frac{d-1}{x}\right)\phi'(x) = 0$  なので， $c$  を積分定数として

$$\phi'(x) = cx^{-(d-1)}$$

と積分される．境界条件 (2.19) の一つ  $\phi(x_1) = 0$  の下，もう一度積分すると

$$d \neq 2 \text{ のとき } \phi(x) = c \int_{x_1}^x y^{-(d-1)} dy = \frac{c}{2-d} (x^{2-d} - x_1^{2-d})$$

$$d \neq 2 \text{ のとき } \phi(x) = c \int_{x_1}^x \frac{dy}{y} = c(\log x - \log x_1)$$

となる．境界条件  $\phi(x_2) = 1$  も課すと，積分定数  $c$  が定まり，

$$\phi(x) = \phi(x; x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x^{2-d} - x_1^{2-d}}{x_2^{2-d} - x_1^{2-d}} & d \neq 2 \text{ のとき} \\ \frac{\log x - \log x_1}{\log x_2 - \log x_1} & d = 2 \text{ のとき} \end{cases} \quad (2.22)$$

と定められる．

(i)  $d > 2$  のとき， $2-d < 0$  なので，(2.22) の上の式より，任意の  $x_2 = L > x$  に対して

$$\begin{aligned} \phi(x; 0, L) &\equiv \lim_{x_1 \rightarrow 0} \phi(x; x_1, L) \\ &= \lim_{x_1 \rightarrow 0} \frac{x^{2-d} - x_1^{2-d}}{L^{2-d} - x_1^{2-d}} = 1. \end{aligned}$$

つまり， $x > 0$  から出発した  $\text{BES}_d$  は，確率 1 で，原点より先に  $L > 0$  に到達することになる．したがって， $T_x = \inf\{t > 0 : X_t^x = 0\} = \infty$  である．

$d = 2$  のときは，(2.22) の下の式を用いて，同様に

$$\phi(x; 0, L) = \lim_{x_1 \rightarrow 0} \frac{\log x - \log x_1}{\log L - \log x_1} = 1$$

となるので，やはり  $T_x = \infty$  である．

(ii)  $\alpha > 1$  をとって， $x_k = \alpha^k x$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$  とする． $d > 2$  では  $2-d \equiv \beta < 0$  であり，(2.22) より

$$\begin{aligned} \phi(x_k; x_{k-1}, x_{k+1}) &= \frac{x_k^\beta - x_{k-1}^\beta}{x_{k+1}^\beta - x_{k-1}^\beta} = \frac{\alpha^{k\beta} - \alpha^{(k-1)\beta}}{\alpha^{(k+1)\beta} - \alpha^{(k-1)\beta}} \\ &= \frac{\alpha^\beta - 1}{\alpha^{2\beta} - 1} = \frac{1}{\alpha^\beta + 1} > \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

である．1次元格子  $\mathbb{Z} \equiv \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$  上のサイト  $n > 0, n \in \mathbb{Z}$  から出発して，単位時間に右サイトにステップする確率が  $p = 1/(\alpha^\beta + 1)$ ，左サイトにステップする確率が  $1-p$  であるような非対称な 1次元ランダムウォークを考える．このような非対称な 1次元ランダムウォークは非再帰的である． $\text{BES}_d$  をこのような 1次元非対称ランダムウォークと比較することにより，確率 1 で  $X_t^x \rightarrow \infty, \forall x > 0$  であることが結論される．

(iii) (2.22) の  $d = 2$  の式で，特に  $x_1 = 1/n < x < x_2 = e^n$  とおくと， $n \rightarrow \infty$  で

$$\phi(x; 1/n, e^n) = \frac{\log x + \log n}{n + \log n} \rightarrow 0$$

である．よって，任意の  $n > 0$  に対して， $X_t^x$  が  $1/n$  に近づくことが分かる．  
 (iv)  $1 \leq d < 2$  のときは， $\lim_{x_1 \rightarrow 0} x_1^{2-d} = 0$  なので，(2.22) の上の式より， $L \rightarrow \infty$  で

$$\phi(x; 0, L) = \frac{x^{2-d}}{L^{2-d}} \rightarrow 0.$$

よって，確率 1 で  $T_x < \infty$  である．■

以下では， $1 \leq d < 2$  の場合を考えることにする． $x \in \mathbb{R}_+$  に対して，同一の BM,  $B_t$  を用いて

$$X_t^x = x + B_t + \frac{d-1}{2} \int_0^t \frac{ds}{X_s^x}, \quad t \leq T_x \quad (2.23)$$

で与えられる  $\text{BES}_d$  の族  $\{X_t^x\}_{x>0}$  を考えることにする．この定義より

$$x < y \implies X_t^x < X_t^y, \quad \forall t < T_x \implies T_x \leq T_y$$

であることは明らかである． $x < y$  だが， $T_x = T_y$  となることはあり得るであろうか．そこで， $x \leq y$  に対して

$$q(x, y) = \mathbb{P}(T_x = T_y)$$

とおくことにする．まず，スケール性 (命題 2.1) より，空間スケールが違っていても，時間スケールを適当に変えれば分布としては同一視できるので，比だけが重要であることが分かる．よって

$$q(x, y) = q(1, y/x)$$

である．また，任意の  $t > 0$  に対して  $\lim_{r \rightarrow \infty} \mathbb{P}(T_r < t) = 0$  であるから

$$\lim_{r \rightarrow \infty} q(1, r) = 0 \quad (2.24)$$

である．次の補題を用いる．

**補題 2.3**  $0 < x < y$  に対して，事象  $\{T_x = T_y\}$  と次の事象とは，確率 0 の部分を除いて等しい；

$$\sup_{t < T_x} \frac{X_t^y - X_t^x}{X_t^x} < \infty. \quad (2.25)$$

証明.

$$\begin{aligned} \text{事象 (2.25)} &\iff \frac{X_t^y - X_t^x}{X_t^x} \leq \exists c < \infty, \quad 0 < t < T_x \\ &\iff X_t^y - X_t^x \leq \exists c X_t^x, \quad 0 < t < T_x \\ &\iff X_t^y \leq (1 + \exists c) X_t^x, \quad 0 < t < T_x \end{aligned}$$

なので， $X_t^x = 0 \implies X_t^y = 0$ ，つまり (2.25)  $\implies T_x = T_y$ ．よって，二つの事象の同値性を示すには， $T_x = T_y$  だが (2.25) が成り立たない状況は，確率 0 であることを言えばよい．そのために

$$p_r = \mathbb{P} \left( T_x = T_y \quad \text{かつ} \quad \sup_{t < T_x} \frac{X_t^y - X_t^x}{X_t^x} \geq r \right)$$



という確率を考える． $\tau_r = \inf_{t < T_x} \{(X_t^y - X_t^x)/X_t^x = r\}$  なる時刻があったとすると，この時刻  $\tau_r$  では  $X_{\tau_r}^y/X_{\tau_r}^x = 1 + r$  となる．そこで，この時刻から再スタートしたプロセスを考えると， $BES_d$  の強マルコフ性から

$$p_r \leq q(1, 1 + r)$$

という評価が得られる．(2.24) より  $\lim_{r \rightarrow \infty} q(1, 1 + r) = 0$  なので，

$$p_\infty = \lim_{r \rightarrow \infty} p_r = \mathbb{P} \left( T_x = T_y \quad \text{かつ} \quad \sum_{t < T_x} \frac{X_t^y - X_t^x}{X_t^x} = \infty \right) = 0.$$

よって，主張が証明されたことになる．■

次の定理は， $x < y$  であっても， $T_x = T_y$  ということがあり得ることを主張するものである．

定理 2.4 (i)  $\frac{3}{2} < d < 2 \implies x < y$  に対して<sup>4</sup>， $\mathbb{P}(T_x = T_y) > 0$ .

(ii)  $1 \leq d \leq \frac{3}{2} \implies x < y$  に対して， $T_x < T_y$  が確率 1 で成り立つ．

証明.  $0 < x < y$  に対して，次の確率過程を考える

$$Z_t = \log \left( \frac{X_t^y - X_t^x}{X_t^x} \right), \quad t < T_x. \quad (2.26)$$

ただし，

$$dX_t^x = \frac{d-1}{2} \frac{dt}{X_t^x} + dB_t, \quad dX_t^y = \frac{d-1}{2} \frac{dt}{X_t^y} + dB_t$$

である．ここで，共通の BM,  $B_t$  を用いていることに注意せよ． $f(x, y) = \log\{(y-x)/x\}$  とおき， $f_x(x, y) = \partial f(x, y)/\partial x$  というような偏微分の略記を用いると，

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= -\frac{1}{y-x} - \frac{1}{x}, & f_y(x, y) &= \frac{1}{y-x} \\ f_{xx}(x, y) &= -\frac{1}{(y-x)^2} + \frac{1}{x^2}, & f_{yy}(x, y) &= -\frac{1}{(y-x)^2}, & f_{xy}(x, y) &= f_{yx}(x, y) = \frac{1}{(y-x)^2} \end{aligned}$$

であるから，伊藤の公式 (2.7) より

$$\begin{aligned} dZ_t &= f_x(X_t^x, X_t^y) \left[ dB_t + \frac{d-1}{2} \frac{dt}{X_t^x} \right] + f_y(X_t^x, X_t^y) \left[ dB_t + \frac{d-1}{2} \frac{dt}{X_t^y} \right] \\ &+ \frac{1}{2} \left[ f_{xx}(X_t^x, X_t^y) + 2f_{xy}(X_t^x, X_t^y) + f_{yy}(X_t^x, X_t^y) \right] dt \\ &= -\frac{1}{X_t^x} dB_t + \left[ \left( \frac{3}{2} - d \right) \frac{1}{(X_t^x)^2} + \frac{d-1}{2} \frac{X_t^y - X_t^x}{(X_t^x)^2 X_t^y} \right] dt \end{aligned} \quad (2.27)$$

が得られる．ここで，次の関係を満たすように，ランダムな時間変更  $t \rightarrow r$  を行う；

$$\int_0^{r(t)} \frac{ds}{(X_s^x)^2} = t. \quad (2.28)$$

<sup>4</sup> $\mathbb{P}(T_x = T_y)$  の顕な表式について付録 A.1 に示したので，参照のこと．

つまり,  $dr(t)/(X_{r(t)}^x)^2 = dt$  である. (2.27) を変更された後の時刻  $r(t)$  で考えると,

$$dZ_{r(t)} = -\frac{1}{X_{r(t)}^x} dB_{r(t)} + \left[ \left( \frac{3}{2} - d \right) + \frac{d-1}{2} \frac{X_{r(t)}^y - X_{r(t)}^x}{X_{r(t)}^y} \right] \frac{dr(t)}{(X_{r(t)}^x)^2}$$

となるが, ここで

$$\tilde{B}_t = -\int_0^{r(t)} \frac{dB_s}{X_s^x}$$

とおくと,

$$(d\tilde{B}_t)^2 = \frac{1}{(X_{r(t)}^x)^2} (dB_{r(t)})^2 = \frac{dr(t)}{(X_{r(t)}^x)^2} = dt$$

なので,  $\tilde{B}_t$  は BM である. そこで  $\tilde{Z}_t = Z_{r(t)}$  と書くことにすると

$$d\tilde{Z}_t = d\tilde{B}_t + \left[ \left( \frac{3}{2} - d \right) + \frac{d-1}{2} \frac{X_{r(t)}^y - X_{r(t)}^x}{X_{r(t)}^y} \right] dt \quad (2.29)$$

という SDE が得られる.

(i)  $\frac{3}{2} < d < 2$  のとき,  $d' \in (3/2, d)$  を選び,

$$\varepsilon = \frac{2(d-d')}{d-1}$$

とおく.  $y = (1 + \varepsilon/2)x$  の場合を考えることにする.

$$\sigma = \inf \left\{ t > 0 : X_{r(t)}^y - X_{r(t)}^x = \varepsilon X_{r(t)}^y \right\}$$

とする. すると  $0 \leq t < T_x \wedge \sigma$  では,  $(X_{r(t)}^y - X_{r(t)}^x)/X_{r(t)}^y \leq \varepsilon$  なので, (2.29) のドリフト項の係数は

$$\left( \frac{3}{2} - d \right) + \frac{d-1}{2} \frac{X_{r(t)}^y - X_{r(t)}^x}{X_{r(t)}^y} \leq \left( \frac{3}{2} - d \right) + \frac{d-1}{2} \times \frac{2(d-d')}{d-1} = \frac{3}{2} - d'$$

と上から抑えられる. そこで

$$d\tilde{Z}_t^* = d\tilde{B}_t + \left( \frac{3}{2} - d' \right) dt, \quad \tilde{Z}_0^* = \tilde{Z}_0 = \log \frac{\varepsilon}{2}$$

に従う確率過程  $\tilde{Z}_t^*$  を考えると,

$$\tilde{Z}_t \leq \tilde{Z}_t^*, \quad 0 \leq t < T_x \wedge \sigma$$

である. ところが  $d' > 3/2$  としたので,  $\tilde{Z}_t^*$  のドリフト項の係数は負である. よって  $\tilde{Z}_t^*$  は  $\log(\varepsilon/2)$  から出発したものの, 永久に  $\log \varepsilon$  の値に到達できないという確率が正であることになる. よって  $\tilde{Z}_t$  も  $\log \varepsilon$  に到達できない確率も正である. よって, 正の確率で

$$\log \left( \frac{X_t^y - X_t^x}{X_t^x} \right) < \log \varepsilon \iff \frac{X_t^y - X_t^x}{X_t^x} < \varepsilon$$

となり, 事象 (2.25) が成立することになる. よって補題 2.3 より,

$$\mathbb{P}(T_x = T_y) = q \left( x, \left( 1 + \frac{\varepsilon}{2} \right) x \right) = q \left( 1, 1 + \frac{\varepsilon}{2} \right) > 0$$

である .

(ii)  $1 \leq d \leq \frac{3}{2}$  のときは ,  $3/2 - d \geq 0$  であり , また

$$\frac{X_{r(t)}^y - X_{r(t)}^x}{X_{r(t)}^y} > 0, \quad 0 \leq t < T_x$$

なので , ドリフト項の係数は正である . よって

$$\sup_{t < T_x} \tilde{Z}_t = \infty \iff \sup_{t < T_x} e^{\tilde{Z}_t} = \sup_{t < T_x} \frac{X_t^y - X_t^x}{X_t^x} = \infty$$

なので , 補題 2.3 より  $\mathbb{P}(T_x = T_y) = 0$  である . ■

### 3 シュラム・レヴナー発展 (SLE $_{\kappa}$ )

#### 3.1 リーマンの写像定理について

$\hat{\mathbb{C}}$  をリーマン球  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$  とする . 領域  $D$  (開集合とする) に対して , その  $\hat{\mathbb{C}}$  における補集合  $\hat{\mathbb{C}} \setminus D$  が  $\hat{\mathbb{C}}$  の連結部分集合をなしているとき ,  $D$  は単連結領域 (simply connected domain) であると言う .  $\mathbb{C}$  上の原点を中心とする単位円を  $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  と記す .

**定理 3.1 (Riemann mapping theorem)**  $D$  が  $\mathbb{C}$  全体ではない単連結領域であるとする . この  $D$  内の 1 点  $\omega \in D$  を選ぶ . このとき ,  $D$  を単位円  $\mathbb{D}$  に写す共形変換で

$$f(\omega) = 0 \quad \text{かつ} \quad f'(\omega) > 0 \tag{3.1}$$

であるものが存在し , それは一意的に定まる .

証明は [1] を参照せよ .

複素上半平面を  $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \Im(z) > 0\}$  と書く . 上半平面  $\mathbb{H}$  の有界部分集合  $A$  において ,  $A = \mathbb{H} \cap \bar{A}$  であり , かつ  $\mathbb{H} \setminus A$  が単連結であるとき ,  $A$  を compact  $\mathbb{H}$ -hull と言う . compact  $\mathbb{H}$ -hull 全体の集合を  $\mathcal{Q}$  と書くことにする .  $A \in \mathcal{Q}$  自体は連結である必要はない .

$A \in \mathcal{Q}$  が与えられているものとする .  $\mathbb{H} \setminus A$  は  $\mathbb{C}$  全体ではない単連結領域なので , リーマンの写像定理 (定理 3.1) より

$$f_A^{(1)} : \mathbb{H} \setminus A \rightarrow \mathbb{D}$$

という共形変換が存在することが保証されている . また , Möbius 変換

$$f^{(2)}(z) = \frac{\bar{\alpha}z - \alpha\beta}{z - \beta}, \quad |\beta| = 1, \alpha \in \mathbb{H} \tag{3.2}$$

は

$$f^{(2)} : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{H}$$

の共形変換である ( $f^{(2)}(0) = \alpha$  である) . この 2 つを合成した  $f_A^{(3)} = f^{(2)} \circ f^{(1)}$  は

$$f_A^{(3)} : \mathbb{H} \setminus A \rightarrow \mathbb{H}$$

なる共形変換である .

$\mathbb{H} \setminus A$  の境界は,  $A$  の境界と実軸から成る.  $f_A^{(1)}: \mathbb{H} \setminus A \rightarrow \mathbb{D}$  によって, この境界は単位円周上  $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$  に写されることになる. また,  $f^{(2)}: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{H}$  によって, 単位円周は  $\mathbb{H}$  の境界, すなわち実軸 (および無限遠点  $\infty$ ) に写ることになる. このことから,  $f_A^{(3)}: \mathbb{H} \setminus A \rightarrow \mathbb{H}$  によって, 実軸上の点は実軸上の点に写されることになる. (また  $A$  の境界も実軸上に写される.)

また, 無限遠点  $\infty$  は, (3.2) で与えられる  $f_A^{(1)}$  により単位円周上のいずれかの点に写されるが,  $f^{(2)}$  では特に  $z = \beta$  という単位円周上の点が  $\infty$  に写される. よって  $f^{(2)}$  の径数  $\beta$  を調節することにより,

$$\lim_{z \rightarrow \infty} [f_A^{(3)}(z) - z] = 0$$

となるように  $f_A^{(3)}$  を選ぶことができる. これを流体力学的条件 (hydrodynamic condition) と呼ぶ.

以上では  $f_A^{(3)}$  は  $\mathbb{H} \setminus A$  上で定義された関数であるが, これは実軸上  $z \in \mathbb{R}$  では実関数であるので, シュバルツの鏡像原理によって下半平面に解析接続することができる.  $1/f_A^{(3)}(1/z)$  を考えると, これは原点  $0$  を原点  $0$  に写す解析関数であるから, 原点  $0$  の周りで次のようにテイラー展開できる.

$$\frac{1}{f_A^{(3)}(1/z)} = a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots, \quad a_j \in \mathbb{R}.$$

これより

$$f_A^{(3)}(z) = b_1 z + b_0 + b_{-1} z^{-1} + b_{-2} z^{-2} + \cdots, \quad b_j \in \mathbb{R}$$

という展開が得られる. ここで,  $z \in \mathbb{R}$  のときに  $f_A^{(3)}(z)$  も実数であることから, 係数  $a_j, b_j \in \mathbb{R}$  である.

次に,  $\mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$  の Möbius 変換で  $\infty$  を  $\infty$  に写すものを考えることにする. これは

$$f^{(4)}(z) = d_1 z + d_0, \quad d_1 > 0, d_0 \in \mathbb{R}$$

で与えられる. これと  $f_A^{(3)}$  との合成を考えると

$$\begin{aligned} [f^{(4)} \circ f_A^{(3)}](z) &= f^{(4)}(f_A^{(3)}(z)) \\ &= d_1 b_1 z + (d_1 b_0 + d_0) + d_1 b_{-1} z^{-1} + d_1 b_{-2} z^{-2} + \cdots \end{aligned}$$

となるが, 特に

$$d_1 b_1 = 1, d_1 b_0 + d_0 = 0 \quad \iff \quad d_1 = \frac{1}{b_1}, d_0 = -\frac{b_0}{b_1}$$

と係数  $d_0, d_1$  を選ぶことにする. こうして定められた共形変換を

$$g_A: \mathbb{H} \setminus A \rightarrow \mathbb{H} \tag{3.3}$$

と書くことにすると, これは流体力学的条件

$$\lim_{z \rightarrow \infty} [g_A(z) - z] = 0 \tag{3.4}$$

を満たし,

$$g_A(z) = z + c_{-1} z^{-1} + c_{-2} z^{-2} + \cdots, \quad c_j \in \mathbb{R} \tag{3.5}$$

と展開されることになる.

### 3.2 複素上半平面内の曲線と共形変換

実軸上の一点  $\gamma(0) \in \mathbb{R}$  を出発点として、時間  $t \in [0, \infty)$  とともに単調に伸びていく曲線

$$\gamma = \gamma[0, t], \quad t \in [0, \infty)$$

を考える．まずは単純曲線を考えることにし、また  $\gamma(0, \infty) \in \mathbb{H}$  とする．上の節で述べたように、リーマンの写像定理と Möbius 変換に関する知識より、各時刻  $t > 0$  において、

$$z + \frac{a_2(t)}{z} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|z|^2}\right), \quad a_2(t) \in \mathbb{R}, \quad z \rightarrow \infty \quad (3.6)$$

という漸近形をもつ

$$\mathbb{H} \setminus \gamma(0, t] \rightarrow \mathbb{H}$$

なる共形変換が唯一存在することを示すことができる．この共形変換を  $g_{\gamma(0, t]}(z)$  または  $g_t(z)$  と書くことにする． $g_0(z) = z$  とする．

**注 3.1.** この変換  $g_t$  によって、領域  $\mathbb{H} \setminus \gamma(0, t]$  の境界のうち、 $\gamma(0, t] \cup \mathbb{R}$  は  $\mathbb{R}$  に、無限遠点  $\infty$  は無限遠点  $\infty$  に写される．

以下、この 3.2 節では  $t \in (0, \infty)$  を固定して考えることにする．

$B_s^j, j = 1, 2$  を 2 つの独立な BM として、 $\mathbb{C}$  上の複素 BM を

$$B_s = B_s^1 + \sqrt{-1}B_s^2, \quad s \in [0, \infty) \quad (3.7)$$

で定義する．いま、 $\mathbb{H} \setminus \gamma(0, t]$  の内点  $z$  からスタートした複素 BM を考え、これがこの領域の境界である  $\gamma(0, t] \cup \mathbb{R}$  のいずれかの点に初めて到達する時刻を

$$\tau_t = \inf \left\{ s \geq 0 : B_s \in \gamma(0, t] \cup \mathbb{R} \right\} \quad (3.8)$$

と書くことにする． $z - g_t(z)$  は  $\mathbb{H} \setminus \gamma(0, t]$  で有界な正則関数であり、その実部と虚部はそれぞれ調和関数である．ここでは虚部

$$\phi_t(z) = \Im(z - g_t(z)), \quad z \in \mathbb{H} \setminus \gamma(0, t]$$

を考えることにすると、これは

$$\phi_t(z) = \mathbb{E}^z[\phi_t(B_{\tau_t})], \quad z \in \mathbb{H} \setminus \gamma(0, t]$$

と与えることができる．よって

$$\phi_t(z) = \mathbb{E}^z[\Im(B_{\tau_t})] - \mathbb{E}^z[\Im(g_t(B_{\tau_t}))] = \mathbb{E}^z[\Im(B_{\tau_t})]$$

となる．ここで、 $B_{\tau_t} \in \mathbb{H} \setminus \gamma(0, t]$  であるので注 3.1 より  $g_t(B_{\tau_t}) \in \mathbb{R}$  であることを用いた．したがって

$$\Im(g_t(z)) = \Im(z) - \mathbb{E}^z[\Im(B_{\tau_t})], \quad z \in \mathbb{H} \setminus \gamma(0, t] \quad (3.9)$$

という表式が得られる．いま

$$R_t = \sup \left\{ |\gamma(s) - \gamma(0)| : s \in (0, t] \right\} \quad (3.10)$$

とする．つまり  $\gamma(0, t]$  は  $\gamma(0)$  を中心とする半径  $R_t$  の半円  $B(\gamma(0), R_t) \cap \mathbb{H}$  の中に含まれることになる．この半円の外の  $\mathbb{H}$  の点  $z \in \mathbb{H} \setminus B(\gamma(0), R_t)$  に対して，この点からスタートした複素 BM を考えることにする．この複素 BM が  $B(\gamma(0), R_t) \cap \mathbb{H}$  の半円周上，または実軸に初めて到達する時刻を  $\sigma$  と書くことにする；

$$\sigma = \inf \left\{ s \geq 0 : \mathcal{B}_s \in B(\gamma(0), R_t) \cup \mathbb{R} \right\}.$$

このとき，到達点  $\mathcal{B}_\sigma$  の半円上の分布密度を  $p(z, \gamma(0) + R_t e^{\sqrt{-1}\theta}), \theta \in (0, \pi)$  と書くことにすると，複素 BM の強マルコフ性より

$$\mathbb{E}^z[\mathfrak{S}(\mathcal{B}_\tau)] = \int_0^\pi p(z, \gamma(0) + R_t e^{\sqrt{-1}\theta}) \mathbb{E}^{\gamma(0) + R_t e^{\sqrt{-1}\theta}}[\mathfrak{S}(\mathcal{B}_\tau)] R_t d\theta \quad (3.11)$$

が成り立つ．この半円上の密度は，上半平面から半円  $B(\gamma(0), R_t) \cap \mathbb{H}$  を除いた領域

$$D = \left\{ z \in \mathbb{H} : |z - \gamma(0)| > R_t \right\}$$

におけるポアソン核であり，

$$p(z, \gamma(0) + R_t e^{\sqrt{-1}\theta}) = -\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sin(n\theta) R_t^{n-1} \operatorname{Im} \left[ \frac{1}{(z - \gamma(0))^n} \right], \quad z \in D, \quad \theta \in (0, \pi) \quad (3.12)$$

与えられる (付録 A.2 を参照)．曲線  $\gamma[0, t]$  は，その出発点  $\gamma(0)$  を中心とする半径  $R_t$  の円に含まれる．したがって，この曲線を実軸に沿って  $-\gamma(0)$  だけ平行移動して原点からスタートするようにした後，全体を  $1/R_t$  に拡大または縮小して得られる曲線を  $\tilde{\gamma}[0, t]$  と書くことにすると，これは原点を中心とする単位円に含まれることになる．

$$\tilde{\tau}_t = \inf \left\{ s \geq 0 : \mathcal{B}_s \in \tilde{\gamma}(0, t] \cup \mathbb{R} \right\} \quad (3.13)$$

とすると，複素 BM のスケール性よりこの分布は  $\tau_t/R_t^2$  の分布に等しく，

$$\mathbb{E}^{\gamma(0) + R_t e^{\sqrt{-1}\theta}}[\mathfrak{S}(\mathcal{B}_{\tau_t})] = R_t \mathbb{E}^{\tilde{\gamma}(0) + e^{\sqrt{-1}\theta}}[\mathfrak{S}(\mathcal{B}_{\tilde{\tau}_t})], \quad \theta \in (0, \pi)$$

である．これらの結果を (3.9) に代入すると

$$\mathfrak{S}(g_t(z)) = \mathfrak{S} \left( z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}(t)}{(z - \gamma(0))^n} \right)$$

となる．ただし

$$a_n(t) = R_t^n \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin((n-1)\theta) \mathbb{E}^{e^{\sqrt{-1}\theta}}[\mathfrak{S}(\mathcal{B}_{\tilde{\tau}_t})] d\theta, \quad n = 2, 3, 4, \dots \quad (3.14)$$

である．

$g_t$  は (3.6) という漸近形をもつ共形変換 (正則関数) であるので，これより

$$g_t(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}(t)}{(z - \gamma(0))^n}, \quad z \in \mathbb{H} \setminus \gamma(0, t] \quad (3.15)$$

と定まることになる．

$0 \leq \theta \leq \pi$  のとき,  $n = 2, 3, \dots$  に対して  $|\sin(n\theta)| \leq c_n \sin \theta$  となる有限な値  $c_n$  をとることができる. よって

$$\begin{aligned} |a_n(t)| &\leq R_t^n \frac{2}{\pi} \int_0^\pi |\sin((n-1)\theta)| \mathbb{E}^{e^{\sqrt{-1}\theta}} [\Im(\mathcal{B}_{\tilde{\tau}_t})] d\theta \\ &\leq c_{n-1} R_t^n \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin \theta \mathbb{E}^{e^{\sqrt{-1}\theta}} [\Im(\mathcal{B}_{\tilde{\tau}_t})] d\theta \\ &\leq c_{n-1} R_t^{n-2} a_2(t), \quad n = 3, 4, 5, \dots \end{aligned} \quad (3.16)$$

という評価が得られる.

**注 3.2.** (3.14) で特に  $n = 2$  とすると

$$a_2(t) = R_t^2 \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin \theta \mathbb{E}^{e^{\sqrt{-1}\theta}} [\Im(\mathcal{B}_{\tilde{\tau}_t})] d\theta \quad (3.17)$$

という表式が得られることになるが, 上で与えた議論を逆にたどると

$$a_2(t) = \lim_{y \rightarrow \infty} y \mathbb{E}^{\sqrt{-1}y} [\Im(\mathcal{B}_{\tilde{\tau}_t})] \quad (3.18)$$

であることが分かる (詳しくは, 付録 A.3 を参照). この量は曲線  $\gamma(0, t]$  の半平面 capacity ( $\text{hcap}(\gamma(0, t])$  と書く) と呼ばれている.

**注 3.3.**  $H_t = \mathbb{H} \setminus \gamma(0, t]$  におけるポアソン核を  $p_{H_t}(z, w)$ ,  $z \in H_t$ ,  $w \in \partial H_t = \tilde{\gamma}(0, t] \cap \mathbb{R}$  と書くと,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{e^{\sqrt{-1}\theta}} [\Im(\mathcal{B}_{\tilde{\tau}_t})] &= \int_{\partial H_t} p_{H_t}(e^{\sqrt{-1}\theta}, w) \Im(w) dw \\ &= \int_{\tilde{\gamma}(0, t]} p_{H_t}(e^{\sqrt{-1}\theta}, w) \frac{\Im(w)}{\Im(e^{\sqrt{-1}\theta})} dw \times \Im(e^{\sqrt{-1}\theta}) \\ &= \sin \theta \int_{\tilde{\gamma}(0, t]} \hat{p}_{H_t}(e^{\sqrt{-1}\theta}, w) dw \end{aligned}$$

となる. ここで

$$\hat{p}_D(z, w) \equiv p_D(z, w) \frac{\Im(w)}{\Im(z)}, \quad z \in D, \quad w \in \partial D \quad (3.19)$$

としたが, これは次式で定義される  $\mathbb{H}$ -excursion  $\hat{B}_s$  のポアソン核になっている [10]:

$$\hat{B}_s = B_s + \sqrt{-1}X_s, \quad s \in [0, \infty). \quad (3.20)$$

ここで  $B_s$  は BM であり,  $X_s$  はこれと独立な  $\text{BES}_3$  (3次元ベッセル過程) である. したがって上の量は  $\sin \theta \mathbb{P}^{e^{\sqrt{-1}\theta}} (\hat{B}[0, \infty) \cap \tilde{\gamma}(0, t] \neq \emptyset)$  となるので, 係数  $a_n(t)$  に対しては

$$a_n(t) = R_t^n \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin((n-1)\theta) \sin \theta \mathbb{P}^{e^{\sqrt{-1}\theta}} (\hat{B}[0, \infty) \cap \tilde{\gamma}(0, t] \neq \emptyset) d\theta \quad (3.21)$$

という  $\mathbb{H}$ -excursion と曲線  $\tilde{\gamma}(0, t]$  との交差確率を用いた表式も得られる.

### 3.3 レヴナーの微分方程式

この 3.3 節では、時間を連続的に変化させて  $\mathbb{H}$  内の曲線  $\gamma$  とそれに伴う共形変換  $g_t(x)$  の時間発展を追うことにする。  $\varepsilon > 0$  として、時刻  $t + \varepsilon$  までの曲線  $\gamma(0, t + \varepsilon]$  を考える。これに対応する共形変換  $g_{t+\varepsilon}(z)$  は次のような合成で与えられる。

$$\begin{aligned} g_{t+\varepsilon}(z) &= g_{\gamma(0, t+\varepsilon]}(z) \\ &= \left[ g_{g_t(\gamma(t, t+\varepsilon])} \circ g_t \right](z) = g_{g_t(\gamma(t, t+\varepsilon])}(g_t(z)). \end{aligned} \quad (3.22)$$

この共形変換  $g_{t+\varepsilon}(z)$  によって、  $\mathbb{H} \setminus \gamma(0, t + \varepsilon]$  は  $\mathbb{H}$  に写される。しかし、  $\mathbb{H} \setminus \gamma(0, t + \varepsilon]$  を  $g_{t+\varepsilon}(z)$  ではなく  $g_t(z)$  で写すと、像は  $\mathbb{H}$  ではなく  $\mathbb{H} \setminus g_t(\gamma(t, t + \varepsilon])$  となる。これは  $\mathbb{H}$  から曲線  $g_t(\gamma(t, t + \varepsilon])$  を除いた領域である。この曲線の出発点にあたる実軸上の点を  $U_t$  と書くことにする。すなわち

$$U_t = \lim_{s \nearrow t} g_s(\gamma(t)) \quad (3.23)$$

とする（当然  $U_0 = \gamma(0)$  である。）すると、前節の結果 (3.15) より

$$\begin{aligned} g_{t+\varepsilon}(z) &= g_{g_t(\gamma(t, t+\varepsilon])}(g_t(z)) \\ &= g_t(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}((t, t + \varepsilon])}{(g_t(z) - U_t)^n} \end{aligned} \quad (3.24)$$

という形に書けることになる。ただしここで

$$R_t^\varepsilon = \sup \left\{ |g_t(\gamma(s)) - U_t| : s \in [t, t + \varepsilon] \right\}, \quad (3.25)$$

として、

$$|a_n((t, t + \varepsilon])| \leq c_{n-1}(R_t^\varepsilon)^{n-2} a_2((t, t + \varepsilon]), \quad n = 3, 4, 5, \dots \quad (3.26)$$

である。また、(3.24) の右辺の  $g_t(z)$  に (3.15) を代入して展開したものは、(3.15) で  $t \rightarrow t + \varepsilon$  としたものに等しいはずであり、その双方の  $1/z$  の係数を比べることにより

$$a_2((t, t + \varepsilon]) = a_2(t + \varepsilon) - a_2(t). \quad (3.27)$$

という半平面 capacity の加法性が導かれる（詳しくは、付録 A.3 を参照）。

以上より

$$\left| g_{t+\varepsilon}(z) - g_t(z) - \frac{a_2(t + \varepsilon) - a_2(t)}{g_t(z) - U_t} \right| \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{c_n(R_t^\varepsilon)^{n-1}}{|g_t(z) - U_t|^n} (a_2(t + \varepsilon) - a_2(t))$$

という不等式が得られることになる。この両辺を  $\varepsilon$  で割ると

$$\left| \frac{g_{t+\varepsilon}(z) - g_t(z)}{\varepsilon} - \frac{1}{g_t(z) - U_t} \frac{a_2(t + \varepsilon) - a_2(t)}{\varepsilon} \right| \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{c_n(R_t^\varepsilon)^{n-1}}{|g_t(z) - U_t|^n} \times \frac{a_2(t + \varepsilon) - a_2(t)}{\varepsilon}$$

となるが、ここで  $\varepsilon \rightarrow 0$  の極限をとることにする。半平面 capacity  $a_2(t) = \text{hcap}(\gamma(0, t])$  は一般に  $t$  について狭義単調増加関数であり連続であるが、さらに微分可能であり

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{a_2(t + \varepsilon) - a_2(t)}{\varepsilon} = \frac{da_2(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \text{hcap}(\gamma(0, t]) \quad (3.28)$$



が存在するものと仮定する．また定義より  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} R_t^\varepsilon = 0$  であるから，上の評価より

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{g_{t+\varepsilon}(z) - g_t(z)}{\varepsilon} = \frac{\partial g_t(z)}{\partial t}$$

が存在し，これは次の微分方程式を満たすことが結論される．

$$\frac{\partial g_t(z)}{\partial t} = \frac{1}{g_t(z) - U_t} \frac{da_2(t)}{dt}, \quad a_2(t) = \text{hcap}(\gamma(0, t]). \quad (3.29)$$

ただし，初期条件は  $g_0(z) = z$  である．これをレヴナーの微分方程式 (Loewner differential equation) と言う．

**注 3.4.** 上の (3.28) のところで， $a_2(t) = \text{hcap}(\gamma(0, t])$  が微分可能であることを仮定した．一般に  $a_2(t)$  は  $t$  について狭義単調増加関数であり，連続であることが示せる [10]．したがって，曲線  $\gamma$  を (時刻  $t$  の代わりに) 半平面 capacity そのもので径数付けすることが可能である．特に通常は

$$\bar{\gamma}(t) = \gamma(a_2^{-1}(2t))$$

とおくことにする．この定義より

$$a_2(t) = \text{hcap}(\bar{\gamma}((0, t])) = 2t \quad (3.30)$$

となるので，レヴナー方程式は

$$\frac{\partial g_t(z)}{\partial t} = \frac{2}{g_t(z) - U_t}, \quad g_0(z) = z \quad (3.31)$$

となる．(以下では，(3.30) である  $\bar{\gamma}$  を改めて  $\gamma$  と記すことにする．) この方程式から生成される  $g_t$  を特に Loewner chains と呼ぶ．また  $U_t$  をレヴナー方程式の駆動関数と呼ぶことにする．

レヴナー方程式に展開式 (3.15) を代入すると，展開係数  $a_n(t)$  に対して階層的な方程式系が得られる：

$$\frac{d}{dt} a_n(t) = 2\mathcal{P}_n(a_1(t), a_2(t), \dots), \quad n = 2, 3, 4, \dots \quad (3.32)$$

ただし

$$a_1(t) = -U_t \quad (3.33)$$

とした．また  $\mathcal{P}_n(x_1, x_2, \dots)$  は次式で与えられる多項式である (ただし  $\mathcal{P}_2 = 1$  とする)：

$$\mathcal{P}_n(x_1, x_2, \dots) = \sum_{\mathbf{m}: |\mathbf{m}|=n-2} (-1)^{\ell(\mathbf{m})} \prod_{j=1}^{\ell(\mathbf{m})} x_{m_j}. \quad (3.34)$$

ここで右辺は  $\mathbf{m} = (m_1, m_2, \dots)$ ,  $m_j \in \mathbb{N} \equiv \{1, 2, 3, \dots\}$  に対する和であり， $\ell(\mathbf{m}) \equiv \mathbf{m}$  の成分の数， $|\mathbf{m}| \equiv \sum_{j=1}^{\ell(\mathbf{m})} m_j$  である．これは，次の漸化式によっても与えられる [2].

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_1 &= 0, & \mathcal{P}_2 &= 1, \\ \mathcal{P}_n &= - \sum_{j=1}^{n-2} x_j \mathcal{P}_{n-j}, & n &\geq 2. \end{aligned} \quad (3.35)$$

具体的には

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}a_2(t) &= 2, \\
\frac{d}{dt}a_3(t) &= -2a_1(t), \\
\frac{d}{dt}a_4(t) &= 2\{(a_1(t))^2 - a_2(t)\}, \\
\frac{d}{dt}a_5(t) &= 2\{-(a_1(t))^3 + 2a_2(t)a_1(t) - a_3(t)\}, \\
&\dots
\end{aligned} \tag{3.36}$$

である． $g_0(z) = z$  なので  $a_n(0) = 0$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$  である．駆動関数  $a_1(t) = -U_t$  が与えられると，上の方程式系によりすべての展開係数  $a_n(t)$ ,  $n = 2, 3, \dots$  が決まり，共形変換  $g_t(z)$  が定まることになる．つまり，レヴナー方程式は無限個の階層的な微分方程式系と等価であることになる．

### 3.4 SLE $_{\kappa}$ と BES $_d$

Schramm [15] は，レヴナー方程式の駆動関数として

$$U_t = \sqrt{\kappa}B_t, \quad \kappa > 0, \quad B_0 = 0 \tag{3.37}$$

とした．ここで  $B_t$  は 1次元標準 BM である<sup>5</sup>：

$$\frac{\partial}{\partial t}g_t(z) = \frac{2}{g_t(z) - \sqrt{\kappa}B_t}, \quad g_0(z) = z. \tag{3.38}$$

この初期値問題の解として得られる (時刻  $t \geq 0$  で径数付けされる) 共形変換の族  $\{g_t\}_{t \geq 0}$  を提案者 Schramm の名前を冠して (chordal) シュラム・レヴナー発展 (Schramm-Loewner evolution) とよぶ [15] <sup>6</sup> 以下ではこれを，径数  $\kappa$  も付して，SLE $_{\kappa}$  と略記する．

3.2 節と 3.3 節では，時間  $t \in [0, \infty)$  とともに単調に伸びていく単純曲線  $\gamma = \{\gamma(t) : t \in [0, \infty)\}$  を与え，各時刻  $t \in [0, \infty)$  で  $\mathbb{H} \setminus \gamma(0, t] \rightarrow \mathbb{H}$  となる共形変換  $g_t(z)$  を求める問題を考えた． $g_t(z)$  はレヴナー方程式 (3.31) の解として与えられることが分かった．この方程式は

$$U_t = \lim_{s \nearrow t} g_s(\gamma(t)) \tag{3.39}$$

で駆動される形をしていた．これに対して，ここでは  $U_t$  を確率過程 (3.37) として与え，確率的なレヴナー方程式 (3.38) を解くことにより，ランダムに時間発展する共形変換  $g_t(z)$  を求める問題を考えるのである．この場合にも，(3.39) によって  $\gamma(t)$ ,  $0 \leq t < \infty$  が定められることになる．次が知られている．

**定理 3.2** SLE $_{\kappa}$  で定められる  $\gamma$  は，確率 1 で曲線である．

**注 3.5.** 上の主張は，「確率 1 で，SLE $_{\kappa}$  は曲線によって生成される」という言い方でも表現される．また  $\gamma$  は，SLE $_{\kappa}$  の道 (SLE $_{\kappa}$  path)，または SLE $_{\kappa}$  曲線 (SLE $_{\kappa}$  curve) と呼ばれる．これは，ある確率法則に従うランダムな曲線である．定理 3.2 の証明は実は難しいのでここでは述べない．文献 [10] を参照せよ．

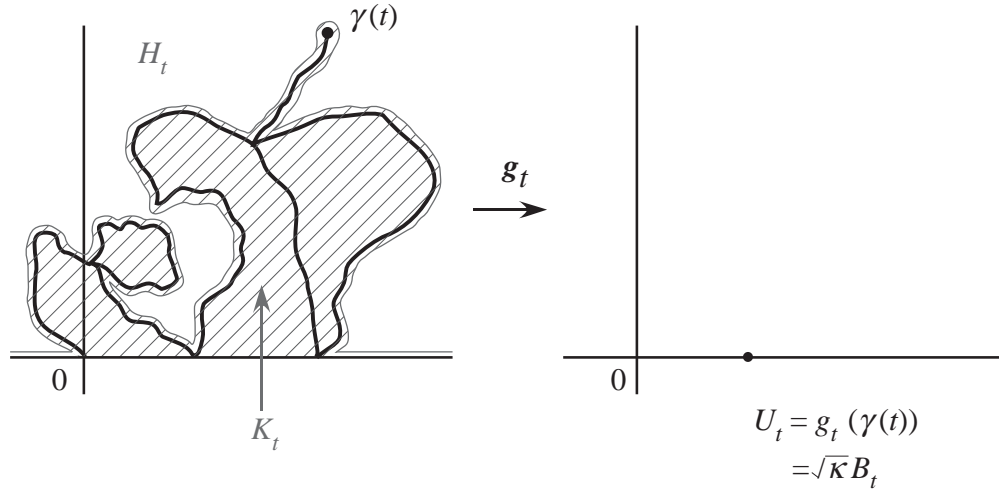


図 6: 上半面  $\mathbb{H}$  内の  $SLE_\kappa$  曲線  $\gamma(0, t]$  と hull  $K_t$  は, 共形変換  $g_t$  によって  $\mathbb{H}$  から消去される. 曲線の先端  $\gamma(t)$  は  $\mathbb{H}$  の境界である実軸上の 1 点  $U_t$  に写されるのであるが, この点は  $\sqrt{\kappa}B_t$  で与えられる.

$SLE_\kappa \gamma$  は一般には単純曲線ではない. 以下,

$$\begin{aligned} H_t &= \mathbb{H} \setminus \gamma[0, t] \text{ の非有界な連結領域} \\ K_t &= \mathbb{H} \setminus H_t \end{aligned} \quad (3.40)$$

とする.  $K_t$  は  $SLE_\kappa$  曲線  $\gamma[0, t]$  の hull と呼ばれる.  $g_t(z)$  は  $H_t \rightarrow \mathbb{H}$  の共形変換である (図 6 参照). つまり  $H_t$  は写像  $g_t$  の定義域である. 他方,  $K_t$  に対しては,  $g_t$  は定義されないことになる.  $SLE_\kappa$  曲線  $\gamma$  は時間  $t$  とともに単調に伸びていくものとすると, hull  $K_t$  も単調に増大していくことになる. よって  $g_t$  の定義域  $H_t$  は単調に減少していくことになる. 各  $z \in \mathbb{H}$  に対して

$$\begin{aligned} T_z &= \sup \left\{ t \geq 0 : \text{解 } g_t(z) \text{ が well-defined で } g_t(z) \in \mathbb{H} \right\} \\ &= \inf \left\{ t \geq 0 : z \in K_t \right\} \end{aligned} \quad (3.41)$$

が定義される. これを用いると

$$\begin{aligned} H_t &= \left\{ z \in \mathbb{H} : T_z > t \right\} \\ K_t &= \left\{ z \in \mathbb{H} : T_z \leq t \right\} \end{aligned} \quad (3.42)$$

と表せる<sup>7</sup>.

特に  $SLE_\kappa$  曲線  $\gamma$  の時刻  $t > 0$  での先端  $\gamma(t)$  は, その時刻での共形写像  $g_t$  で実軸上の点  $\sqrt{\kappa}B_t$  に写されることになる (図 6 参照):

$$g_t(\gamma(t)) = \sqrt{\kappa}B_t. \quad (3.43)$$

<sup>5</sup>BM のスケール性 (2.2) より  $U_t \stackrel{d}{=} B_{\kappa t}$  である. つまり, 径数  $\kappa$  は BM の一様な時間変更を表す.

<sup>6</sup>残念なことに, Oded Schramm は昨年 2008 年 9 月 1 日に登山中の事故で 46 歳の若さで亡くなりました.

<sup>7</sup> $g_t(z)$  の定義域  $H_t$  の境界を  $\partial H_t$  と書き, pioneer point を  $H_t^{\text{pion}} = \bigcup_{0 \leq s \leq t} \partial H_s$  で定義する.  $SLE_\kappa$  曲線  $\gamma$  は,

$\gamma(0) \in \mathbb{R}$  で  $H_t^{\text{pion}} = \mathbb{R} \cup \gamma(0, t]$  となるものである.

ただし、厳密に言うと、上述のように  $g_t$  の定義域は  $H_t$  であり、他方  $\gamma(t) \in K_t$  であって  $\gamma(t) \notin H_t$  なので、 $g_t(\gamma(t))$  は定義されていない。上の式は、定義域  $H_t$  と値域  $\mathbb{H}$  のいずれにおいても、それぞれの境界上の点への極限として

$$\lim_{z \rightarrow \gamma(t)} g_t(z) = \sqrt{\kappa} B_t \quad (3.44)$$

という意味で理解すべきである。

SLE $_{\kappa}$  曲線  $\gamma = \{\gamma(t) : 0 \leq t < \infty\}$  が与えられたとする。このとき、各時刻  $s \geq 0$  に対して、 $\gamma^s$  を

$$\gamma^s(t) = g_s(\gamma(t+s)) - \sqrt{\kappa} B_s, \quad t \geq 0$$

で与えられる曲線であるとする。このとき、

$$\gamma^s \stackrel{d}{=} \gamma \quad \forall s \geq 0 \quad (3.45)$$

が成り立つことになる。この意味で SLE $_{\kappa}$  はマルコフ性をもつことになる。

2.3 節の命題 2.1 で、BM のスケール性 (2.2) が BES $_d$  に遺伝することを見たが、同様にこれは SLE $_{\kappa}$  にも遺伝する。以下を SLE $_{\kappa}$  のスケール性と呼ぶことにする。

命題 3.3 任意の  $r > 0$  に対して

$$\frac{1}{r} g_{r^2 t}(rz) \stackrel{d}{=} g_t(z) \quad (3.46)$$

が成り立つ。すなわち、 $\tilde{\gamma}(t) \equiv \frac{1}{r} \gamma(r^2 t)$  とすると

$$\tilde{\gamma} \stackrel{d}{=} \gamma \quad (3.47)$$

である。

証明.  $\tilde{g}_t(z) = \frac{1}{r} g_{r^2 t}(rz)$  とおく。まず初期値は  $\tilde{g}_0(z) = \frac{1}{r} g_0(rz) = \frac{1}{r} \times rz = z$  なので、 $\tilde{g}_0(z) = g_0(z) = z$  であり、一致している。 $\tilde{B}_t = \frac{1}{r} B_{r^2 t}$  とすると、 $\tilde{g}_t(z)$  の従う方程式は

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \tilde{g}_t(z) &= \frac{1}{r} \times \frac{d}{dt} g_{r^2 t}(rz) \\ &= \frac{1}{r} \times \frac{2r^2}{g_{r^2 t}(rz) - \sqrt{\kappa} B_{r^2 t}} \\ &= \frac{2}{\frac{1}{r} g_{r^2 t}(rz) - \sqrt{\kappa} \frac{1}{r} B_{r^2 t}} \\ &= \frac{2}{\tilde{g}_t(z) - \sqrt{\kappa} \tilde{B}_t} \end{aligned}$$

である。BM のスケール性より  $\tilde{B}_t \stackrel{d}{=} B_t$  なので、 $\tilde{g}_t(z)$  も  $g_t(z)$  と同じ SLE $_{\kappa}$  であることになる。従って、分布は等しい。■

ここで

$$\hat{g}_t(z) = \frac{g_t(z) - \sqrt{\kappa} B_t}{\sqrt{\kappa}} \quad (3.48)$$

とすると,  $\hat{g}_t(z)$  は次の確率微分方程式を満たすことになる.

$$d\hat{g}_t(z) = \frac{2/\kappa}{\hat{g}_t(z)} dt + dW_t, \quad \hat{g}_0(z) = \frac{z}{\sqrt{\kappa}}, \quad W_t = -B_t. \quad (3.49)$$

$T_z$  の定義 (3.41) より,  $\text{SLE}_\kappa$  曲線  $\gamma$  は時刻  $t = T_z$  で初めて  $z \in \mathbb{H}$  に到達する. つまり  $\lim_{t \nearrow T_z} \gamma(t) = z$  であり, この先端  $\gamma(t)$  の像は (3.43) のように  $\sqrt{\kappa}B_{T_z}$  であるから, (3.48) より

$$\lim_{t \nearrow T_z} \hat{g}_t(z) = 0$$

となる. つまり,  $T_z$  は  $z/\sqrt{\kappa}$  から出発して SDE (3.49) に従って動く  $\overline{\mathbb{H}}$  上の点で, 初めて原点 0 に到達する時刻ということになる.

特に SDE (3.49) で  $z \rightarrow x \in \mathbb{R}$  としてみると, 注 3.1 で述べたように  $g_t(x) \in \mathbb{R}, \forall t \geq 0$  なので  $\hat{g}_t(x) \in \mathbb{R}, \forall t \geq 0$  である. したがって,  $\text{SLE}_\kappa$  を実軸上で考えたものは,  $\text{BES}_d$

$$dX_t^x = \frac{d-1}{2} \frac{1}{X_t^x} dt + dW_t, \quad X_0^x = x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad (3.50)$$

で

$$\kappa = \frac{4}{d-1} \iff d = \frac{4}{\kappa} + 1 \quad (3.51)$$

とおいたものに等しい. このときには, 明らかに  $T_x = \inf\{t \geq 0 : X_t^x = 0\}$  であり, 2.3 節では, この値の次元  $d$  依存性を詳しく議論したのであった. 各  $x$  に対して同じ BM,  $W_t$  をとることにする.  $x < y$  なら  $X_t^x < X_t^y, \forall t < T_x$  なので,  $T_x \leq T_y$  である. 2.3 節の定理 2.2 と 定理 2.4 では次を証明した.

- (1)  $d \geq 2$  のとき, 確率 1 で  $T_x = \infty, \forall x > 0$ .
- (2)  $1 \leq d < 2$  のとき, 確率 1 で  $T_x < \infty, \forall x > 0$ .
  - (2a)  $\frac{3}{2} < d < 2$  のとき,  $0 < x < y$  に対して,  $\mathbb{P}\{T_x = T_y\} > 0$ .
  - (2b)  $1 \leq d \leq \frac{3}{2}$  のとき,  $0 < x < y$  ならば確率 1 で  $T_x < T_y$ .

これに対応して,  $\text{SLE}_\kappa$  で生成される曲線  $\gamma$  には, 径数  $\kappa$  の値に応じて, 次のような 3 つの相があることが導かれる (図 7 参照).

**定理 3.4** (i)  $0 < \kappa \leq 4$  のとき,  $\gamma$  は単純曲線であり,  $\gamma(0, \infty) \subset \mathbb{H}$  である. また, このとき確率 1 で

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\gamma(t)| = \infty. \quad (3.52)$$

(ii)  $4 < \kappa < 8$  のとき,  $\gamma$  は自分自身や実軸と接することがあるが, 確率 1 で

$$\bigcup_{t > 0} \overline{K_t} = \overline{\mathbb{H}} \quad (3.53)$$

である. よって,  $|\gamma(t)| \rightarrow \infty$  である. しかし

$$\gamma[0, \infty) \cap \mathbb{H} \neq \mathbb{H} \quad (3.54)$$

である. つまり,  $\mathbb{H}$  全体を埋めつくすことはない.

(iii)  $\kappa \geq 8$  のとき,  $\gamma$  は  $\mathbb{H}$  のすべての点を埋めつくす;

$$\gamma[0, \infty) = \overline{\mathbb{H}}. \quad (3.55)$$

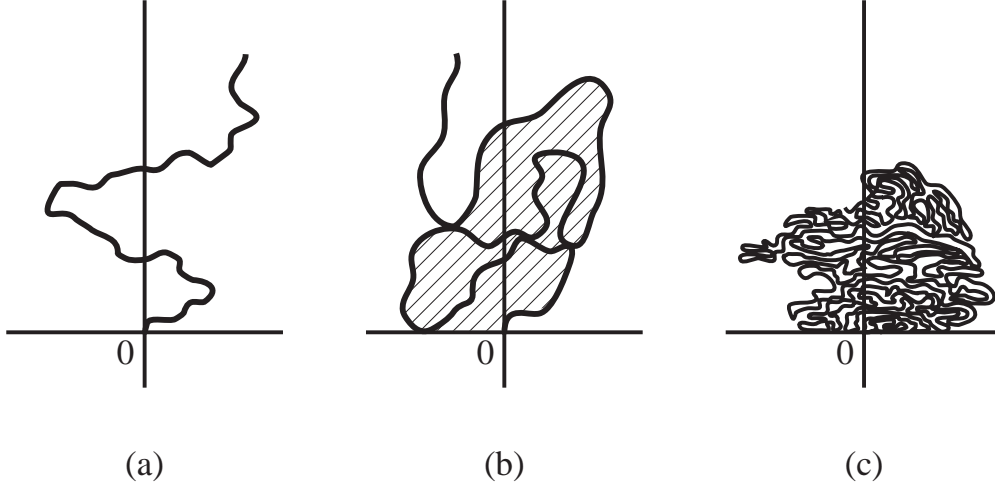


図 7: (a) 実軸に接することのない単純曲線.  $0 < \kappa \leq 4$  のときの SLE 曲線の様子. (b) 自分自身や実軸に接するが十字に交わることはない曲線. 曲線が伸びていくと, 曲線で囲まれた領域 (斜線部分) は上半平面  $\mathbb{H}$  を覆いつくしていき, 曲線自身で  $\mathbb{H}$  が埋めつくされることはない.  $4 < \kappa < 8$  のときの SLE 曲線の様子. (c) 上半平面  $\mathbb{H}$  を埋めつくしていく曲線.  $\kappa \geq 8$  のときの SLE 曲線の様子.

## 4 SLE $_{\kappa}$ と物理系との対応

### 4.1 Schramm のアイデア

第 1 章では, 平面格子上的の統計力学模型の連続極限に伴って得られることが期待される連続関数  $\gamma$  に対するいくつかの測度  $\bar{\mu}_{(D_0; O, P)}$  について議論した. それらは共通して, 共形共変/不変性と領域マルコフ性を持っていた.

$D, D'$  がともに  $\mathbb{C}$  上の単連結領域であり (ただし  $D, D' \neq \mathbb{C}$ ),  $z, w \in \partial D$ ,  $z', w' \in \partial D'$  とする. リーマンの写像定理より,

$$\text{共形変換 } f: D \rightarrow D', \quad f(z) = z', \quad f(w) = w'$$

となる 1 径数族が存在することが結論される. さらに  $|f'(w)| = 1$  という条件を課すと, 共形変換は一意的に定まる. 以上より, 共形不変な確率測度  $\mu_{(\mathbb{H}; 0, \infty)}$  が与えられれば, 任意の単連結領域  $D \subset \mathbb{C}, D \neq \mathbb{C}$ ,  $z, w \in \partial D$  に対する確率測度  $\mu_{(D; z, w)}$  が得られることになる. また,  $\mathbb{H} \setminus D$  が有界である単連結領域  $D \subset \mathbb{H}$  に対して  $w = f(w) = \infty$  とすると, 条件  $|f'(w)| = 1$  より  $w' \rightarrow \infty$  で  $f(w') \sim w'$  となる. このような状況では, 共形共変性は次式で表される:

$$f \circ \bar{\mu}_{(D; z, \infty)}(\cdot) = |f'(z)|^b \bar{\mu}_{(f(D); f(z), \infty)}(\cdot), \quad z \in \partial D. \quad (4.1)$$

Schramm のアイデアは, ある確率過程  $U_t$  を駆動関数とするレヴナー方程式を考え, これに伴う曲線  $\gamma$  の分布関数として,  $\mu_{(\mathbb{H}; 0, \infty)}$  を定めるといったものであった.  $\mu_{(\mathbb{H}; 0, \infty)}$  が共形不変性と領域マルコフ性を持つということから,  $\gamma(0, t]$  は独立定常増分を持つことが結論される. これに対応して, レヴナー方程式の駆動関数  $U_t$  も独立定常分布を持つことが要請される. すなわち

$$[A] \quad U_t \perp (U_{t+s} - U_t), \quad \forall s, t > 0$$

$$[B] \quad (U_{t+s} - U_t) \stackrel{d}{=} U_t, \quad \forall s, t > 0$$

とすべきであることになる．Schramm はさらに

$$[C] \quad U_t \text{ は連続な確率過程である}$$

という要請を置いた．これから一般に， $c_1, c_2$  を定数として

$$U_t = c_1 B_t + c_2 t$$

が結論される．その上で

$$[D] \quad \text{虚軸に対する左右対称性} \implies c_2 = 0 \quad (\text{ドリフトなし})$$

とすると，

$$U_t = c_1 B_t$$

と定まる．特に  $c_1 = \sqrt{\kappa}$  と径数付けした（また，半平面 capacity を  $a_2(t) = 2t$  と径数付けした）のが  $\text{SLE}_\kappa$

$$\frac{\partial}{\partial t} g_t(z) = \frac{2}{g_t(z) - \sqrt{\kappa} B_t}, \quad g_0(z) = z$$

である．以上の Schramm のアイデア [15] は，次の定理として証明されている．

**定理 4.1 (Lawler-Schramm-Werner [10])** 連続関数空間上の測度で共形共変性と領域 Markov 性を持つものはすべて，1 径数族である  $\text{SLE}_\kappa$  測度， $\kappa \in (0, \infty)$  で与えられる．

さらに次が証明されている．

**定理 4.2 (Beffara[3])**  $\kappa \leq 8$  のとき  $\text{SLE}_\kappa$  曲線  $\gamma(0, \infty)$  のフラクタル次元 (Hausdorff 次元) は次式で与えられる：

$$d(\kappa) = 1 + \frac{\kappa}{8}.$$

## 4.2 局所性と制限性

$\mathbb{H}$  内の原点を含む非有界な単連結領域の集合

$$\mathcal{D} = \left\{ D \subset \mathbb{H} : \text{単連結}, \quad \mathbb{H} \setminus D \text{ 有界}, \quad \text{dist}(0, \mathbb{H} \setminus D) > 0 \right\}$$

を考える． $D \in \mathcal{D}$  に対して， $D \rightarrow \mathbb{H}$  の共形変換で次の条件を満たすものを  $\Phi_D$  と書くことにする（一意的に定まる）：

$$\Phi_D(z) = z + o(1), \quad z \rightarrow \infty.$$

$\text{SLE}_\kappa$  曲線  $\gamma$  に対して

$$\tau_D = \inf \left\{ t : \text{dist}(\gamma(t), \mathbb{H} \setminus D) = 0 \right\}$$

とする． $t < \tau_D$  の間は， $\gamma$  は部分領域  $D$  内に制限されていることになる（図 8 参照）．この間の  $\text{SLE}$  曲線  $\gamma(0, \tau_D)$  の  $\Phi_D$  による像  $\Phi_D(\gamma(0, \tau_D))$  は  $\mathbb{H}$  内の曲線となる．

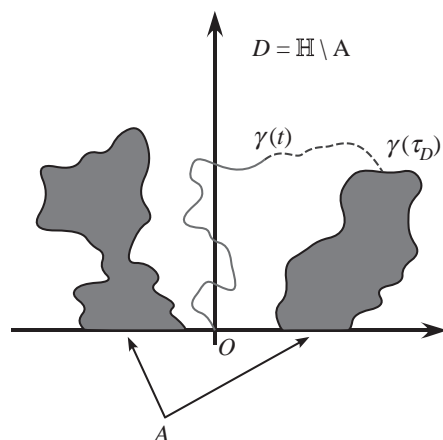


図 8:  $\mathbb{H}$  から有界な領域  $A$  を除いた単連結領域  $D = \mathbb{H} \setminus A$  を考える.  $t < \tau_D$  の間は, 曲線  $\gamma$  はこの部分領域  $D$  内に制限されていることになる.

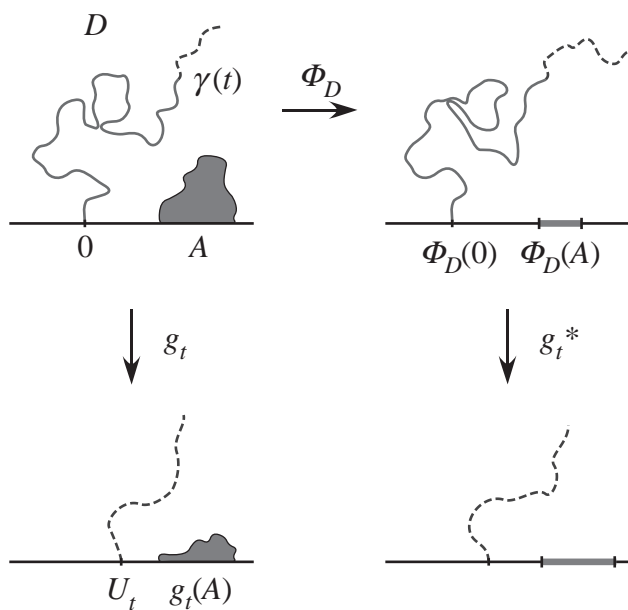


図 9: [左上  $\Rightarrow$  右上]  $\Phi_D$ :  $A$  を消去し,  $D = \mathbb{H} \setminus A$  を  $\mathbb{H}$  全体に写す共形変換. [左上  $\Rightarrow$  左下]  $g_t$ :  $SLE_\kappa$  曲線  $\gamma(0, t]$  を消去する共形変換. [右上  $\Rightarrow$  右下]  $g_t^*$ : 曲線  $\gamma^*(0, t] = \Phi_D(\gamma(0, t])$  を消去する共形変換. [左下  $\Rightarrow$  右下] これが  $\Phi_t \equiv \Phi_{g_t(D)}$  であるが, この可換図から, この変換は  $g_t^* \circ \Phi_D \circ g_t^{-1}$  に等しいことが分かる.



$\gamma$  の確率測度の共形不変性より，曲線

$$\gamma^*(0, t] = \Phi_D(\gamma(0, t]), \quad t < \tau_D$$

で生成される  $g_t^*(z)$  も Loewner 方程式 (3.38) に従うはずである (図 9 参照) . ただし，変換  $\Phi_D$  により曲線の径数付けに変更が生じる .  $\gamma^*(0, t]$  の半平面 capacity は

$$a_2^*(t) = \text{hcap}\left(\gamma^*(0, t]\right) = \text{hcap}\left(\Phi_D(\gamma(0, t])\right)$$

なので，付録 A.3 の補題 A.4 で  $\text{hcap}(rA) = r^2 \text{hcap}(A)$  を導くが，そのときと同様の考察を行えば，元の  $\text{SLE}_\kappa$  (3.38) の右辺の分子で  $2 \rightarrow 2(\Phi_t'(U_t))^2$  として

$$\frac{d}{dt}g_t^*(z) = \frac{2(\Phi_t'(U_t))^2}{g_t^*(z) - U_t^*} \quad (4.2)$$

とすればよいことが分かる . ただしここで， $U_t = \sqrt{\kappa}B_t$  に対して，

$$\begin{aligned} \Phi_t &\equiv \Phi_{g_t(D)} = g_t^* \circ \Phi_D \circ g_t^{-1} \\ U_t^* &\equiv g_t^*(\gamma^*(t)) = \Phi_t(U_t) \end{aligned}$$

である (図 9 参照) .  $U_t^*$  に対して伊藤の公式 (2.7) を用いると， $U_t = \sqrt{\kappa}B_t$  なので

$$dU_t^* = \left[ \dot{\Phi}_t(U_t) + \frac{\kappa}{2}\Phi_t''(U_t) \right] dt + \sqrt{\kappa}\Phi_t'(U_t)dB_t$$

を得る . 付録 A.4 の (A.50) より

$$\dot{\Phi}_t(U_t) \equiv \frac{d}{dt}\Phi_t(U_t) = -3\Phi_t''(U_t)$$

なので，この式は

$$dU_t^* = \left[ \frac{\kappa}{2} - 3 \right] \Phi_t''(U_t)dt + \sqrt{\kappa}\Phi_t'(U_t)dB_t \quad (4.3)$$

と書き直せる . ランダムな時間変更  $t \mapsto r(t)$  を

$$t = \int_0^{r(t)} \Phi_s'(U_s)^2 ds$$

に従って行い， $\tilde{U}_t^* \equiv U_{r(t)}^*$  とおくと，(4.3) は

$$d\tilde{U}_t^* = -b(\kappa) \frac{\Phi_{r(t)}''(U_{r(t)})}{\Phi_{r(t)}'(U_{r(t)})^2} \kappa dt + \sqrt{\kappa} d\tilde{B}_t \quad (4.4)$$

と変換される . ただし，

$$b = b(\kappa) = \frac{6 - \kappa}{2\kappa}. \quad (4.5)$$

であり，

$$\tilde{B}_t \equiv \int_0^{r(t)} \Phi_s'(U_s) dB_s$$

は 1 次元標準ブラウン運動である． $\tilde{g}_t^*(z) = g_{r(t)}^*(z)$  とすると，(4.2) は

$$\frac{d}{dt}\tilde{g}_t^*(z) = \frac{2}{\tilde{g}_t^*(z) - \tilde{U}_t^*}$$

と変換される．

$\kappa = 6$  のときに限り  $b(\kappa) = 0$  となり，(4.4) は  $d\tilde{U}_t^* = \sqrt{6}d\tilde{B}_t$  となる．このときは，任意の  $D \in \mathcal{D}$  に対して  $g_t(z)$  も  $\tilde{g}_t^*(z)$  もともに， $U_t \stackrel{d}{=} \sqrt{6}B_t$  で駆動される  $\text{SLE}_6$ ，つまり (3.38) で  $\kappa = 6$  とした式を満たす．言い換えると，部分領域  $D$  に制限された  $\gamma$  の共形変換である  $\gamma^*(0, t] = \Phi_D(\gamma(0, t])$ ， $t < \tau_D$  は，制限のない  $\text{SLE}_6$  の時間変更ということである．つまり，局所性が成り立つことになる．

**定理 4.3**  $\text{SLE}_\kappa$  測度  $\bar{\mu}_{(\mathbb{H}; 0, \infty)}^\kappa$  は  $\kappa = 6$  のときに限り局所性を持つ．

$\kappa \neq 6$  のときは (4.4) にはドリフト項があるので， $U_t$  はマルチンゲールではない．しかし，次のようにして別の局所マルチンゲール  $M_t$  を得ることが出来る． $b$  を未定定数として  $(\Phi_t'(U_t))^b$  という量を考える．伊藤の公式 (2.7) を用いると，付録 A.4 に示した計算の結果，次の SDE を導くことができる：

$$d(\Phi_t'(U_t))^b = b(\Phi_t'(U_t))^b \left[ \sqrt{\kappa} \frac{\Phi_t''(U_t)}{\Phi_t'(U_t)} dB_t + \left\{ \frac{(b-1)\kappa + 1}{2} \frac{(\Phi_t''(U_t))^2}{(\Phi_t'(U_t))^2} - \frac{8-3\kappa}{6} \frac{\Phi_t'''(U_t)}{\Phi_t'(U_t)} \right\} dt \right]. \quad (4.6)$$

ここで  $b$  を (4.5) で定義された  $b(\kappa)$  とする．すると (4.6) は

$$d(\Phi_t'(U_t))^{b(\kappa)} = b(\kappa)(\Phi_t'(U_t))^{b(\kappa)} \left[ \sqrt{\kappa} \frac{\Phi_t''(U_t)}{\Phi_t'(U_t)} dB_t - \frac{8-3\kappa}{6} \mathcal{S}\Phi_t(U_t) dt \right] \quad (4.7)$$

となる．ただしここで， $\mathcal{S}f$  は関数  $f$  のシュバルツ微分

$$\mathcal{S}f = \frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2} \frac{(f'')^2}{(f')^2} \quad (4.8)$$

を表す．

新たにパラメータ  $c$  を導入して

$$M_t = (\Phi_t'(U_t))^{b(\kappa)} \exp \left\{ -\frac{c}{6} \int_0^t \mathcal{S}\Phi_s(U_s) ds \right\}$$

とおくと，

$$\begin{aligned} dM_t &= d(\Phi_t'(U_t))^{b(\kappa)} \exp \left\{ -\frac{c}{6} \int_0^t \mathcal{S}\Phi_s(U_s) ds \right\} \\ &\quad - (\Phi_t'(U_t))^{b(\kappa)} \exp \left\{ -\frac{c}{6} \int_0^t \mathcal{S}\Phi_s(U_s) ds \right\} \frac{c}{6} \mathcal{S}\Phi_t(U_t) dt \end{aligned}$$

なので，(4.7) を代入すると

$$dM_t = b(\kappa) \frac{\Phi_t''(U_t)}{\Phi_t'(U_t)} M_t \sqrt{\kappa} dB_t - \frac{1}{6} \left\{ c + (8-3\kappa)b(\kappa) \right\} \mathcal{S}\Phi_t(U_t) M_t dt$$

となる．したがって，

$$\begin{aligned} c = c(\kappa) &= (3\kappa - 8)b(\kappa) \\ &= \frac{(3\kappa - 8)(6 - \kappa)}{2\kappa} \end{aligned} \quad (4.9)$$

と置くと (図 10 参照)，

$$dM_t = b(\kappa) \frac{\Phi_t''(U_t)}{\Phi_t'(U_t)} M_t \sqrt{\kappa} dB_t$$

となるので，

$$M_t = (\Phi_t'(U_t))^{b(\kappa)} \exp \left\{ -\frac{c(\kappa)}{6} \int_0^t S\Phi_s(U_s) ds \right\} \quad (4.10)$$

は局所マルチンゲールであることになる．

ここでは説明を略すが，一般に

$$S\Phi_t(U_t) \leq 0$$

である [10].  $\kappa \leq 8/3$  のときは  $c(\kappa) \leq 0$  なので，このときは  $M_t \leq 1$ . したがって  $M_t$  はマルチンゲールである．

(Girsanov の定理の応用として)  $SLE_\kappa$  曲線の確率測度を，(4.10) で与えられるマルチンゲールで重みを付けた確率測度に変換することを考える<sup>8</sup>．この確率測度の変換によって，制限された領域中の  $SLE_\kappa$  曲線の確率測度が得られる． $t \rightarrow \infty$  で  $\gamma(t) \rightarrow \infty$ ，かつ  $\gamma(0, \infty) \subset D$  であるような  $SLE_\kappa$  曲線  $\gamma$  に対しては， $t \rightarrow \infty$  で  $\Phi_t'(U_t) \rightarrow 1$  であることが示せる． $\kappa \leq 4$  では  $SLE_\kappa$  曲線は単純曲線であり  $\mathbb{H}$  内から外にでないこと (定理 3.4 (i)) を用いると，次の表式を導くことができる [11]:  $\kappa \leq 4, D \in \mathcal{D}$  に対して

$$\frac{d\bar{\mu}_{(D;0,\infty)}(\gamma)}{d\bar{\mu}_{(\mathbb{H};0,\infty)}} = M_\infty = \mathbf{1}\{\gamma(0, \infty) \subset D\} \exp \left\{ -\frac{c(\kappa)}{6} \int_0^\infty S\Phi_s(U_s) ds \right\}. \quad (4.11)$$

(4.9) から分かるように， $\kappa \leq 4$  では  $\kappa = 8/3$  のときに限り  $c(\kappa) = 0$  となる．このとき (4.11) は  $\mathbf{1}\{\gamma(0, \infty) \subset D\}$  となる．(4.11) 式と見比べると，次が結論される．

定理 4.4  $SLE_\kappa$  測度  $\bar{\mu}_{(\mathbb{H};0,\infty)}^\kappa$  は  $\kappa = \frac{8}{3}$  のときに限り制限性を持つ．

### 4.3 対応関係

$\mu_{(D_0;0,P)}^{\text{per}}$  の共形不変性と  $\bar{\mu}_{(D_0;0,P)}^{\text{SAW}}$  の共形共変性が証明されれば，前者は局所性を併せ持つので  $\mu_{(\mathbb{H};0,\infty)}^6$  の，後者は制限性を併せ持つので  $\bar{\mu}_{(\mathbb{H};0,\infty)}^{8/3}$  のそれぞれ共形変換  $\mathbb{H} \rightarrow D_0$  として決定される．前者に対しては Smirnov の証明がある [18]. これとは別に，

$$\bar{\mu}_{(D_0;0,P)}^{\text{LERW}} \stackrel{c}{=} \bar{\mu}_{(\mathbb{H};0,\infty)}^2, \quad \bar{\mu}_{(D_0;0,P)}^{\text{Ising}} \stackrel{c}{=} \bar{\mu}_{(\mathbb{H};0,\infty)}^3$$

が証明されている．前者は [15, 10]，後者は [19] を見よ．ただし， $\stackrel{c}{=}$  は共形変換によって変換できるという意味．定理 4.2 と (4.5) 式を用いると，以下が得られる．

$$\begin{aligned} d_{\text{LERW}} = d(2) &= \frac{5}{4}, & d_{\text{SAW}} = d(8/3) &= \frac{4}{3}, & d_{\text{Ising}} = d(3) &= \frac{11}{8}, & d_{\text{per}} = d(6) &= \frac{7}{4}, \\ b_{\text{LERW}} = b(2) &= 1, & b_{\text{SAW}} = b(8/3) &= \frac{5}{8}, & b_{\text{Ising}} = b(3) &= \frac{1}{2}, & b_{\text{per}} = b(6) &= 0. \end{aligned}$$

<sup>8</sup>測度を変換する重みである (4.10) を (4.1) 式の因子  $|f'(z)|^b$  と等置することにより，(4.5) 式で  $\kappa$  の関数として与えられた指数  $b(\kappa)$  が，第 1 章で議論した境界スケーリング指数  $b$  と同一視される．

注 4.1. 2次元格子上の統計物理模型の連続(スケーリング)極限と  $SLE_\kappa$  測度は次のように対応していることが“知られている [5]”(図 10 参照).

$\kappa = 2$	$\iff$	ループ除去ランダムウォーク (LERW)	
$\kappa = \frac{8}{3} = 2.\dot{6}$	$\iff$	自己回避ウォーク (SAW)	
$\kappa = 3$	$\iff$	臨界イジング界面曲線	
$\kappa = 4$	$\iff$	臨界 4 状態ポッツ模型 [Fortuin-Kasteleyn cluster]	
$\kappa = \frac{24}{5} = 4.8$	$\iff$	臨界 3 状態ポッツ模型 [Fortuin-Kasteleyn cluster]	
$\kappa = \frac{16}{3} = 5.\dot{3}$	$\iff$	臨界イジング模型 [Fortuin-Kasteleyn cluster]	
$\kappa = 6$	$\iff$	臨界浸透探索過程	
$\kappa = 8$	$\iff$	uniform spanning tree (UST)	(4.12)

( $q$  状態ポッツ模型の  $q = 2$  がイジング模型,  $q = 1$  がパーコレーション模型,  $q = 0$  が UST にそれぞれ対応する.  $\kappa$  との対応は  $q = 2 + 2 \cos(8\pi/\kappa), 4 \leq \kappa \leq 8$  と考えられている.)

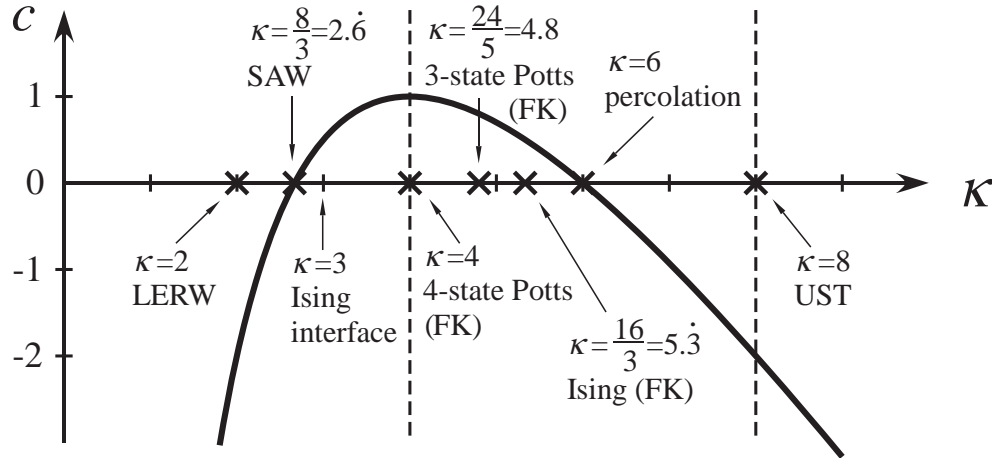


図 10:  $SLE_\kappa$  の径数  $\kappa$  と指数  $c$  との関係.  $c$  は共形場理論(ヴィラソロ代数)では中心電荷(中心元)の役割をする. 特別な  $\kappa$  の値( $c$  の値)でフラクタル物理や統計力学の重要な模型で現れる道の連続極限の分布が実現される.

注 4.2. (4.5) 式と (4.9) 式から,  $\kappa$  を消去して得られる関係式

$$c = \frac{2b(5-8b)}{1+2b} \quad (4.13)$$

には, 次のような意味合いがある. ヴィラソロ代数 [23]

$$[L_n, L_m] = (n-m)L_{n+m} + c \frac{n(n^2-1)}{12} \delta_{n+m,0}, \quad n, m \in \mathbb{Z}$$

に対して,  $L_n|b\rangle = 0, n \geq 1, L_0|b\rangle = b|b\rangle$  となる固有値と固有ベクトルの対  $(b, |b\rangle)$  を導入して, 最高ウェイト表現  $\mathcal{H}_b = \mathbb{C}[L_{-1}, L_{-2}, \dots]|b\rangle$  を考える.

$$\det \begin{pmatrix} \langle b|L_2L_{-2}|b\rangle & \langle b|L_2L_{-1}L_{-1}|b\rangle \\ \langle b|L_1L_{-1}L_{-2}|b\rangle & \langle b|L_1L_{-1}L_{-1}L_{-1}|b\rangle \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 4b+c/2 & 6b \\ 6b & 4b(1+2b) \end{pmatrix} = 0$$

となるとき，レベル 2 の退化表現が得られる (Kac 公式).  $b \neq 0$  とすると，この条件式は (4.13) に等しい [2, 4]. 付録 A.5 も参照せよ .

## A 付録

### A.1 マルチンゲールと超幾何方程式

$\frac{3}{2} < d < 2$  のときは， $x \geq 0$  に対して

$$\mathbb{P}(T_{1+x} = T_1) > 0$$

であることを証明したが，この確率の  $x$  依存性はガウスの超幾何関数

$$F(\alpha, \beta, \gamma; z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\alpha)_k (\beta)_k}{(\gamma)_k} \frac{z^k}{k!} \quad (\text{A.1})$$

を用いて，正確に表すことができる . ただしここで， $(c)_k = \Gamma(c+k)/\Gamma(c) = c(c+1)\cdots(c+(k-1))$  である .

命題 A.1  $\frac{3}{2} < d < 2$  のとき， $x \geq 0$  に対して

$$\mathbb{P}(T_{1+x} = T_1) = 1 - \frac{\Gamma(d-1)}{\Gamma(2(d-1))\Gamma(2-d)} \left(\frac{x}{1+x}\right)^{2d-3} F\left(2d-3, d-1, 2(d-1); \frac{x}{1+x}\right). \quad (\text{A.2})$$

証明. 確率過程

$$R_t = \frac{X_t^{1+x} - X_t^1}{X_t^1}, \quad x > 0 \quad (\text{A.3})$$

を考える .  $g(x, y) = (y-x)/x$  とおくと

$$\begin{aligned} g_x(x, y) &= -\frac{y}{x^2}, & g_y(x, y) &= \frac{1}{x} \\ g_{xx}(x, y) &= \frac{2y}{x^3}, & g_{yy}(x, y) &= 0, & g_{xy}(x, y) &= g_{yx}(x, y) = -\frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

なので，伊藤の公式 (2.7) より

$$dR_t = -\frac{R_t}{X_t^1} dB_t + \left[ \frac{3-d}{2} \frac{1}{R_t} - \frac{d-1}{2} \frac{1}{R_t(1+R_t)} \right] \left(\frac{R_t}{X_t^1}\right)^2 dt \quad (\text{A.4})$$

が得られる . ここで，次の時間変更  $t \rightarrow \bar{r}(t)$  を行う ;

$$\int_0^{\bar{r}(t)} \left(\frac{R_s}{X_s^1}\right)^2 ds = t. \quad (\text{A.5})$$

また

$$\bar{B}_t = -\int_0^{\bar{r}(t)} \frac{R_s}{X_s^1} dB_s \quad (\text{A.6})$$

とすると,  $\bar{B}_t$  は BM であり,  $\tilde{R}_t = R_{\tilde{\tau}(t)}$  とおくと

$$\begin{aligned} d\tilde{R}_t &= \left[ \frac{3-d}{2} \frac{1}{\tilde{R}_t} - \frac{d-1}{2} \frac{1}{\tilde{R}_t(\tilde{R}_t+1)} \right] dt + d\bar{B}_t \\ &= \left[ \frac{2-d}{\tilde{R}_t} + \frac{d-1}{2} \frac{1}{\tilde{R}_t+1} \right] dt + d\bar{B}_t \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

が得られる.

$$\psi(x) = \mathbb{P}(T_{1+x} = T_1) = q(1, 1+x) \quad (\text{A.8})$$

として,

$$\bar{M}_t = \psi(\tilde{R}_t) \quad (\text{A.9})$$

とおくと,  $\text{BES}_d$  のスケール性 (2.17) より,  $\bar{M}_t$  はマルチンゲールである;

$$\mathbb{E}[\bar{M}_t | \mathcal{F}_s] = \bar{M}_s, \quad 0 \leq s < t. \quad (\text{A.10})$$

他方, 伊藤の公式 (2.7) と (A.7) より

$$d\bar{M}_t = \psi'(\tilde{R}_t) d\bar{B}_t + \psi'(\tilde{R}_t) \left[ \frac{2-d}{\tilde{R}_t} + \frac{d-1}{2} \frac{1}{\tilde{R}_t+1} \right] dt + \frac{1}{2} \psi''(\tilde{R}_t) dt. \quad (\text{A.11})$$

ドリフト項 = 0 であるはずなので,  $\psi(x)$  に対して, 次の微分方程式が得られる;

$$\frac{1}{2} \psi''(x) + \left[ \frac{2-d}{x} + \frac{d-1}{2} \frac{1}{x+1} \right] \psi'(x) = 0. \quad (\text{A.12})$$

ここで

$$x = \frac{u}{1-u} \quad \Longleftrightarrow \quad u = \frac{x}{1+x}$$

という変数変換  $x \rightarrow u$  を行い,  $\tilde{\psi}(u) = \psi(x)$  とおくと, (A.12) 式は

$$u(1-u)\tilde{\psi}''(u) + \{2(2-d) - (3-d)u\}\tilde{\psi}'(u) = 0 \quad (\text{A.13})$$

となる. これは, 超幾何方程式

$$u(1-u)F'' + \{\gamma - (\alpha + \beta + 1)u\}F' - \alpha\beta F = 0 \quad (\text{A.14})$$

で特に

$$\alpha = 0, \quad \beta = 2-d, \quad \gamma = 2(2-d) \quad (\text{A.15})$$

とした場合に他ならない. (A.14) の  $u = 0$  における解の基本系として

$$F(\alpha, \beta, \gamma; u) \quad \text{と} \quad u^{1-\gamma} F(1-\gamma+\alpha, 1-\gamma+\beta, 2-\gamma; u)$$

をとる. (A.15) では,  $\alpha = 0$  なので前者は 1 であり, 後者は  $u^{2d-3} F(2d-3, d-1, 2(d-1); u)$  となる. よって,  $c_1, c_2$  を積分定数として

$$\tilde{\psi}(u) = c_1 + c_2 u^{2d-3} F(2d-3, d-1, 2(d-1); u)$$

となる．ここで

$$\begin{aligned}\tilde{\psi}(0) &= \psi(0) = \mathbb{P}(T_1 = T_1) = 1 \\ \tilde{\psi}(1) &= \psi(\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} \mathbb{P}(T_{1+x} = T_1) = 0\end{aligned}\tag{A.16}$$

なので，

$$\begin{aligned}c_1 &= 1 \\ c_2 &= -F(2d-3, d-1, 2(d-1); 1) = -\frac{\Gamma(d-1)}{\Gamma(2(d-1))\Gamma(2-d)}\end{aligned}\tag{A.17}$$

と定まる．■

## A.2 ポアソン核の計算について

領域  $D$  に対して，この内点からスタートさせた複素 BM  $cB_t$  に対して

$$\tau_D = \inf \{t \geq 0 : \mathcal{B}_t \notin D\}\tag{A.18}$$

とする．これは複素 BM が領域  $D$  の境界  $\partial D$  にはじめて到達した時刻である．次の命題が知られている．

命題 A.2  $D$  が正則な境界をもつ領域であり，その境界に対して有界で連続な関数  $F : \partial D \rightarrow \mathbb{R}$  が与えられているものとする．このとき， $D$  の中では調和的であり， $\partial D$  上では  $F$  に一致するような  $\bar{D}(= D \cup \partial D) \rightarrow \mathbb{R}$  の関数  $u$  が一意的に定まり，これは  $D$  内の各点  $z \in \mathbb{D}$  において

$$u(z) = \mathbb{E}^z[F(\mathcal{B}_{\tau_D})]\tag{A.19}$$

で与えられる．

以下では，領域  $D$  の境界  $\partial D$  がいくつかの条件を満たしているものとして話を進めることにする． $z \in D$  に対して， $\partial D$  に対する確率測度  $\text{hm}(z, D; \cdot)$  を

$$\text{hm}(z, D; V) = \mathbb{P}^z[\mathcal{B}_{\tau_D} \in V], \quad V \subset \partial D\tag{A.20}$$

で定義する．これは調和測度 (harmonic measure) と呼ばれる．これを用いると，(A.19) は

$$u(z) = \int_{\partial D} F(w) \text{hm}(z, D; dw)\tag{A.21}$$

と書き直せる．さらにこれが，境界  $\partial D$  に沿った線積分によって

$$u(z) = \int_{\partial D} F(w) H_D(z, w) |dw|\tag{A.22}$$

と書けるとき，積分核  $H_D(z, w)$  をポアソン核 (Poisson kernel) と言う．このポアソン核は次の性質を持つ．

- 各  $w \in \partial D$  に対して， $H_D(z, w)$  は  $z$  に関して  $D$  内で調和関数である．
- 境界の任意の点  $w_0 \in \partial D$  に対して， $z \in D$  を  $w_0 \in \partial D$  に近づけていくと， $H_D(z, w)$  はデルタ関数  $\delta(w - w_0)$  になる：

$$\lim_{z \rightarrow w_0} H_D(z, w) = \delta(w - w_0), \quad w_0, w \in \partial D.$$

(複素)BM は共形変換不変性を持つ . このことより , 調和測度に対して次のことが成り立つ .

命題 A.3  $f : D \rightarrow D'$  が共形変換であるとする . これは  $\bar{D} = D \cup \partial D$  で連続であり , 1 対 1 である .  $z \in D, V \subset \partial D$  であるとき ,

$$\text{hm}(f(z), D'; f(V)) = \text{hm}(z, D; V) \quad (\text{A.23})$$

が成り立つ .

このことより , ポアソン核の定義 (A.22) から直ちに , 次が導かれる .

$$H_{D'}(f(z), f(w)) = |f'(w)|^{-1} H_D(z, w), \quad z \in D, w \in \partial D. \quad (\text{A.24})$$

まず , 半無限帯領域 (half-infinite strip)

$$D = \{z = x + \sqrt{-1}y : x > 0, 0 < y < \pi\} \quad (\text{A.25})$$

を考える . この境界として  $\partial D = \{\sqrt{-1}q : q \in (0, \pi)\}$  を考えることにする . このときの  $H_D(z, \sqrt{-1}q), z \in D, q \in (0, \pi)$  を求めたい .

まず , 各  $q \in (0, \pi)$  に対して ,  $H_D(z, \sqrt{-1}q)$  は  $z$  に関して調和関数であるので , ラプラス方程式

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} H_D(x + \sqrt{-1}y, \sqrt{-1}q) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} H_D(x + \sqrt{-1}y, \sqrt{-1}q) = 0, \quad x + \sqrt{-1}y \in D$$

を解く必要がある . これは変数分離法 (separation of variables) で解くことができる . ( $q$  は固定して)

$$H_D(x + \sqrt{-1}y, \sqrt{-1}q) = X(x)Y(y)$$

と置くと ,  $c =$  定数として ,

$$\begin{aligned} X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) &= 0 \\ \iff \frac{X''(x)}{X(x)} &= -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = c \end{aligned}$$

つまり ,

$$X''(x) = cX(x), \quad (\text{A.26})$$

$$Y''(y) = -cY(y) \quad (\text{A.27})$$

という二つの常微分方程式に分離できる . (A.27) の一般解は

$$Y(y) = a \sin(\sqrt{c}y) + b \cos(\sqrt{c}y)$$

の形であるが ,  $y = 0, \pi$  では  $Y(y) = 0$  であることから ,

$$b = 0, \quad \sqrt{c} = n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

と定まる . つまり

$$Y(y) = a \sin(ny), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

である . したがって (A.26) は

$$X''(x) = n^2 X'(x)$$



となるが，この解のうち  $x \rightarrow \infty$  で発散しないものを選ぶ必要があるので，

$$X(x) = \text{const.} \times e^{-nx}$$

の形に定まる．以上より

$$H_D(x + \sqrt{-1}y, \sqrt{-1}q) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(q) e^{-nx} \sin(ny)$$

となる．ここで  $a_n(q)$  は  $q$  の関数であり，これは

$$\lim_{x \rightarrow 0} H_D(x + \sqrt{-1}y, \sqrt{-1}q) = \delta(y - q) \quad (\text{A.28})$$

という条件より

$$a_n(q) = \frac{2}{\pi} \sin(nq)$$

と定まる．実際こうすると

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} H_D(x + \sqrt{-1}y, \sqrt{-1}q) &= \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sin(nq) \sin(ny) \\ &= -\frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\sqrt{-1}n(q+y)} + \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\sqrt{-1}n(q-y)} \end{aligned}$$

となるが，デルタ関数に対する

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\sqrt{-1}nx}$$

というフーリエ級数表示と， $q, y > 0$  という条件より，(A.28) の成立が確かめられる．つまり

$$H_D(x + \sqrt{-1}y, \sqrt{-1}q) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx} \sin(ny) \sin(nq), \quad x + \sqrt{-1}y \in D, q \in (0, \pi) \quad (\text{A.29})$$

という結果が得られた．

ここで， $r \in R, R > 0$  として，次の変換を考えることにする．

$$z = x + \sqrt{-1}y \mapsto \zeta = \alpha + \sqrt{-1}\beta : \zeta = f(z) = r + Re^z. \quad (\text{A.30})$$

この変換は，半無限帯領域  $D$  を

$$\begin{aligned} D' &= \{\zeta = \alpha + \sqrt{-1}\beta : |\zeta - r| > R, \beta > 0\} \\ &= \mathbb{H} \setminus \mathcal{B}(r, R) \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

に写す共形変換である．境界は

$$\begin{aligned} \{x : x > 0\} &\mapsto \{\alpha : \alpha > r + R\} \\ \{x + \sqrt{-1}\pi : x > 0\} &\mapsto \{\alpha : \alpha < r - R\} \\ \{\sqrt{-1}q : q \in (0, \pi)\} &\mapsto \{r + Re^{\sqrt{-1}q} : q \in (0, \pi)\} \end{aligned}$$

と変換される．

変換 (A.30) より

$$e^{x+\sqrt{-1}y} = \frac{\zeta - r}{R}, \quad e^x = \frac{|\zeta - r|}{R}, \quad e^{\sqrt{-1}y} = \frac{\zeta - r}{|\zeta - r|}$$

なので,

$$e^{-x} e^{\sqrt{-1}y} = \frac{R}{\bar{\zeta} - r}$$

という関係式が得られる. この両辺を  $n$  乗すると

$$e^{-nx} e^{\sqrt{-1}ny} = \left( \frac{R}{\bar{\zeta} - r} \right)^n$$

となるが, この両辺の虚部をとると

$$\begin{aligned} e^{-nx} \sin(ny) &= \Im \left[ \left( \frac{R}{\bar{\zeta} - r} \right)^n \right] \\ &= -R^n \Im \left[ \frac{1}{(\zeta - r)^n} \right] \end{aligned}$$

が得られる. また,  $q \in (0, \pi)$  に対して,

$$f(\sqrt{-1}q) = r + Re^{\sqrt{-1}q}, \quad \sqrt{-1}q \in \partial D$$

なので,  $f'(\sqrt{-1}q) = Re^{\sqrt{-1}q}$  であり, したがって

$$|f'(\sqrt{-1}q)| = R$$

である. 以上を (A.24) に代入すると,

$$\begin{aligned} H_{D'}(\zeta, r + Re^{\sqrt{-1}q}) &= \frac{1}{R} \times \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ -R^n \Im \left[ \frac{1}{(\zeta - r)^n} \right] \right\} \sin(nq) \\ &= -\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sin(nq) R^{n-1} \Im \left[ \frac{1}{(\zeta - r)^n} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

という結果が得られる.

### A.3 半平面 capacity について

流体力学的条件 (3.4) より  $z - g_A(z)$  は有界な解析関数であるから, その実部と虚部はそれぞれ調和関数である. ここでは虚部

$$\phi_A(z) = \Im(z - g_A(z)) \quad (\text{A.33})$$

を考えることにする. これは  $\mathbb{H} \setminus A$  上の有界な調和関数である.

そこで, 上の A.2 節で述べた 命題 A.2 を適用することを考える. いま

$$\tau = \tau_{\mathbb{H} \setminus A} = \inf \left\{ t : \mathcal{B}_t \in \mathbb{R} \cup A \right\} \quad (\text{A.34})$$

とする．これは (複素)BM が実軸上  $\mathbb{R}$  あるいは compact  $\mathbb{H}$ -hull  $A$  のいずれかにはじめて到達する時刻である． $\phi_A(z)$  は調和関数なので

$$\phi_A(z) = \mathbb{E}^z[\phi_A(\mathcal{B}_\tau)] \quad (\text{A.35})$$

と書くことができることになる．(A.33) を代入すると

$$\phi_A(z) = \mathbb{E}^z[\Im(\mathcal{B}_\tau)] - \mathbb{E}^z[\Im(g_A(\mathcal{B}_\tau))] = \mathbb{E}^z[\Im(\mathcal{B}_\tau)]$$

となる．ただしここで， $\mathcal{B}_\tau$  は  $\mathbb{H} \setminus A$  の境界上の点であり，これは  $g_A$  で実軸上に写されるので，その虚部  $\Im(g_A(\mathcal{B}_\tau)) = 0$  であることを用いた．したがって

$$\Im(g_A(z)) = \Im(z) - \mathbb{E}^z[\Im(\mathcal{B}_\tau)] \quad (\text{A.36})$$

という表式が得られたことになる．

この等式で特に  $z = \sqrt{-1}y, y > 0$  とおくと， $\Im(\sqrt{-1}y) = y$  なので

$$\Im(g_A(\sqrt{-1}y)) = y - \mathbb{E}^{\sqrt{-1}y}[\Im(\mathcal{B}_\tau)]$$

となる．ここで (3.5) の展開を用いると

$$(\text{LHS}) = \Im\left(\sqrt{-1}y + \frac{c_{-1}}{\sqrt{-1}y} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{y^2}\right)\right) = y - \frac{c_{-1}}{y} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{y^2}\right)$$

なので

$$y - \frac{c_{-1}}{y} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{y^2}\right) = y - \mathbb{E}^{\sqrt{-1}y}[\Im(\mathcal{B}_\tau)].$$

したがって

$$c_{-1} = \lim_{y \rightarrow \infty} y \mathbb{E}^{\sqrt{-1}y}[\Im(\mathcal{B}_\tau)]$$

である．この量を  $A \in \mathcal{Q}$  に対する半平面 capacity (half-plane capacity) と呼び， $\text{hcap}(A)$  と表す；

$$\text{hcap}(A) \equiv \lim_{y \rightarrow \infty} y \mathbb{E}^{\sqrt{-1}y}[\Im(\mathcal{B}_{\tau_{\mathbb{H} \setminus A}})], \quad A \in \mathcal{Q}. \quad (\text{A.37})$$

この定義より， $A \in \mathcal{Q}$  に対して

$$g_A(z) = z + \frac{\text{hcap}(A)}{z} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|z|^2}\right), \quad z \rightarrow \infty \quad (\text{A.38})$$

となる．

半平面 capacity に関して，2 つの補題を証明する．以下では， $\mathbb{C}$  上の集合 (領域)  $S = \{z : z \in S\}$  に対して，これを  $y \in \mathbb{C}$  だけ平行移動したものを

$$S + y = \{z + y : z \in S\}$$

と書くことにする．また， $S$  を原点を中心にして  $r > 0$  倍して得られる集合 (領域) を  $rS$  と書くことにする．

補題 A.4  $r > 0, x \in \mathbb{R}$  とすると， $A \in \mathcal{Q}$  に対して次が成り立つ．

$$\text{hcap}(rA) = r^2 \text{hcap}(A), \quad (\text{A.39})$$

$$\text{hcap}(A + x) = \text{hcap}(A). \quad (\text{A.40})$$

証明. 共形変換  $g_A$  の定義より,

$$g_{rA}(z) = rg_A(z/r), \quad (\text{A.41})$$

$$g_{A+x}(z) = g_A(z-x) + x \quad (\text{A.42})$$

が成り立つことは明らかである．展開 (A.38) を用いると

$$(A.41) \text{ の左辺} = z + \frac{\text{hcap}(rA)}{z} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|z|^2}\right)$$

であり,

$$\begin{aligned} (A.41) \text{ の右辺} &= r \left\{ \frac{z}{r} + \frac{\text{hcap}(A)}{z/r} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|z/r|^2}\right) \right\} \\ &= z + \frac{r^2 \text{hcap}(A)}{z} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|z|^2}\right) \end{aligned}$$

なので, 両辺の  $1/z$  の係数を比較すると (A.39) が得られる．同様に

$$(A.42) \text{ の左辺} = z + \frac{\text{hcap}(A+z)}{z} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|z|^2}\right)$$

であり, また

$$\begin{aligned} (A.42) \text{ の右辺} &= (z-x) + \frac{\text{hcap}(A)}{z-x} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|z-x|^2}\right) + x \\ &= z + \frac{\text{hcap}(A)}{z} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|z|^2}\right) \end{aligned}$$

なので, (A.40) が得られる．■

いま  $A, B \in \mathcal{Q}$  であり

$$A \subset B$$

とする．共形変換  $g_A$  によって  $\mathbb{H} \setminus A \rightarrow \mathbb{H}$  となるが,  $A \subset B$  なので  $g_A(B \setminus A) \in \mathcal{Q}$  である．このとき

$$\mathbb{H} \setminus g_A(B \setminus A) \rightarrow \mathbb{H}$$

とする共形変換が  $g_{g_A(B \setminus A)}$  というわけである．以上より

$$g_B = g_{g_A(B \setminus A)} \circ g_A, \quad A \subset B \in \mathcal{Q} \quad (\text{A.43})$$

という関係が成り立つことになる．このとき, 次が成り立つ．

**補題 A.5**  $A, B \in \mathcal{Q}, A \subset B$  とする．このとき

$$\text{hcap}(B) = \text{hcap}(A) + \text{hcap}(g_A(B \setminus A)) \quad (\text{A.44})$$

が成り立つ．

証明. 展開 (A.38) より

$$\begin{aligned} g_A(z) &= z + \frac{\text{hcap}(A)}{z} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|z|^2}\right), \\ g_{g_A(B \setminus A)}(z) &= z + \frac{\text{hcap}(g_A(B \setminus A))}{z} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|z|^2}\right), \quad z \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}
& [g_{g_A(B \setminus A)} \circ g_A](z) = g_{g_A(B \setminus A)}(g_A(z)) \\
& = g_{g_A(B \setminus A)}\left(z + \frac{\text{hcap}(A)}{z} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|z|^2}\right)\right) \\
& = \left\{z + \frac{\text{hcap}(A)}{z} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|z|^2}\right)\right\} + \frac{\text{hcap}(g_A(B \setminus A))}{z + \frac{\text{hcap}(A)}{z} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|z|^2}\right)} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|z|^2}\right) \\
& = z + \frac{1}{z}(\text{hcap}(A) + \text{hcap}(g_A(B \setminus A))) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|z|^2}\right)
\end{aligned}$$

となるが, (A.44) よりこれが

$$g_B(z) = z + \frac{\text{hcap}(B)}{z} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|z|^2}\right),$$

と等しくなければならない. これより (A.44) が導かれる. ■

#### A.4 $\Phi_t(z)$ , $\Phi'_t(z)$ および $(\Phi'_t(U_t))^b$ の SDE の導出

元の  $\text{SLE}_\kappa g_t$  の逆変換を

$$f_t = g_t^{-1}$$

と書くことにすると, これも共形変換である. 定義より  $f_t(g_t(z)) = z$  である. この自明な式の両辺を  $t$  で微分すると ( $z$  と  $t$  は独立なので右辺は零になり)

$$\frac{d}{dt}f_t(g_t(z)) + f'_t(g_t(z))\frac{d}{dt}g_t(z) = 0$$

が得られる. ここで,  $\text{SLE}_\kappa$  の方程式

$$\frac{d}{dt}g_t(z) = \frac{2}{g_t(z) - U_t}$$

を代入すると,

$$\frac{d}{dt}f_t(g_t(z)) + f'_t(g_t(z))\frac{2}{g_t(z) - U_t} = 0$$

となるので,  $g_t(z)$  を改めて  $z$  と書くことにすると

$$\frac{d}{dt}f_t(z) = -f'_t(z)\frac{2}{z - U_t}, \quad f_0(z) = z \tag{A.45}$$

という,  $g_t$  の逆変換に対する方程式が導かれる.

さて, 定義

$$\Phi_t \equiv \Phi_{g_t(H)} \tag{A.46}$$

より, 次の等式が成り立つことが分かる (図 9 参照):

$$\Phi_t = g_t^* \circ \Phi_H \circ f_t, \quad h_0 = \Phi_H. \tag{A.47}$$

よって,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Phi_t(z) &= \frac{d}{dt}g_t^*(\Phi_H(f_t(z))) \\ &= \dot{g}_t^*(\Phi_H(f_t(z))) + (g_t^*)'(\Phi_H(f_t(z))) \times \Phi_H'(f_t(z))f_t'(z)\end{aligned}$$

となる.  $(g_t^*(z))$  に対して, 時間微分はドットをつけて表し;  $\dot{g}_t^*(z) = \frac{d}{dt}g_t^*(z)$ , 変数  $z$  に対する微分は  $(g_t^*)'(z) = \frac{d}{dz}g_t^*(z)$  とプライムをつけて表すことにする.) ここで (4.2) と (A.45) を代入すると

$$\frac{d}{dt}\Phi_t(z) = \frac{2(\Phi_H'(U_t))^2}{g_t^*(\Phi_H(f_t(z))) - U_t^*} + (g_t^*)'(\Phi_H(f_t(z))) \times \Phi_H'(f_t(z)) \left[ -f_t'(z) \frac{2}{z - U_t} \right]$$

を得る.  $\Phi_t$  の微分方程式も時間  $t$  について斉次なので,  $t=0$  として考察しても構わない.  $t=0$  とすると,  $f_0(z) = z, f_0'(z) = 1, g_0^*(z) = z, (g_0^*)'(z) = 1$  なので, 上式は

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}h_0(z) &= \frac{2(\Phi_H'(U_0))^2}{\Phi_H(z) - \Phi_H(U_0)} - \frac{2\Phi_H'(z)}{z - U_0} \\ &= \frac{2(h_0'(U_0))^2}{h_0(z) - h_0(U_0)} - \frac{2h_0'(z)}{z - U_0}\end{aligned}$$

となる. したがって一般の  $t \geq 0$  に対しては

$$\frac{d}{dt}\Phi_t(z) = \frac{2(\Phi_t'(U_t))^2}{\Phi_t(z) - \Phi_t(U_t)} - \frac{2\Phi_t'(z)}{z - U_t} \quad (\text{A.48})$$

が得られる. この方程式の両辺を  $z$  で微分すると,

$$\frac{d}{dz}\Phi_t'(z) = -\frac{2(\Phi_t'(U_t))^2\Phi_t'(z)}{(\Phi_t(z) - \Phi_t(U_t))^2} + \frac{2\Phi_t'(z)}{(z - U_t)^2} - \frac{2\Phi_t''(z)}{z - U_t} \quad (\text{A.49})$$

が得られる. (A.48) と (A.49) で  $z \rightarrow U_t$  の極限をとると

$$\frac{d}{dt}\Phi_t(U_t) = \lim_{z \rightarrow U_t} \frac{d}{dt}\Phi_t(z) = -3\Phi_t''(U_t) \quad (\text{A.50})$$

および

$$\frac{d}{dt}\Phi_t'(U_t) = \lim_{z \rightarrow U_t} \frac{d}{dt}\Phi_t'(z) = \frac{(\Phi_t''(U_t))^2}{2\Phi_t'(U_t)} - \frac{4}{3}\Phi_t''(U_t) \quad (\text{A.51})$$

が得られる.

任意の指数  $b$  に対して, 伊藤の公式 (2.7) より

$$\begin{aligned}d(\Phi_t'(U_t))^b &= b(\Phi_t'(U_t))^{b-1}\Phi_t''(U_t)dU_t \\ &\quad + \frac{1}{2}\left\{b(b-1)(\Phi_t'(U_t))^{b-2}(\Phi_t''(U_t))^2 + b(\Phi_t'(U_t))^{b-1}\Phi_t'''(U_t)\right\}(dU_t)^2 \\ &\quad + b(\Phi_t'(U_t))^{b-1}\frac{d}{dt}\Phi_t'(U_t)dt.\end{aligned}$$

右辺の最後の項に (A.51) を代入する． $dU_t = \sqrt{\kappa}dB_t, (dU_t)^2 = \kappa dt$  なので

$$\begin{aligned}
(\text{RHS}) &= b(\Phi'_t(U_t))^b \left[ \sqrt{\kappa} \frac{\Phi''_t(U_t)}{\Phi'_t(U_t)} dB_t \right. \\
&\quad \left. + \left\{ \frac{1}{2}(b-1)\kappa \frac{(\Phi''_t(U_t))^2}{(\Phi'_t(U_t))^2} + \frac{1}{2}\kappa \frac{\Phi'''_t(U_t)}{\Phi'_t(U_t)} + \frac{1}{\Phi'_t(U_t)} \left( \frac{(\Phi''_t(U_t))^2}{2\Phi'_t(U_t)} - \frac{4}{3}\Phi'''_t(U_t) \right) \right\} dt \right] \\
&= b(\Phi'_t(U_t))^b \left[ \sqrt{\kappa} \frac{\Phi''_t(U_t)}{\Phi'_t(U_t)} dB_t + \left\{ \frac{(b-1)\kappa + 1}{2} \frac{(\Phi''_t(U_t))^2}{(\Phi'_t(U_t))^2} + \left( \frac{\kappa}{2} - \frac{4}{3} \right) \frac{\Phi'''_t(U_t)}{\Phi'_t(U_t)} \right\} dt \right]
\end{aligned}$$

となるので，(4.6) が得られる．

## A.5 SLE マルチンゲール

再び  $g_t(z)$  の展開係数  $a_n(t), n = 1, 2, 3, \dots$  を考える．SLE $_{\kappa}$  では

$$a_1(t) = -U_t = -\sqrt{\kappa}B_t \quad (\text{A.52})$$

としたので， $a_n(t)$  は一般には確率過程となる ( $a_2(t) = 2t$  は決定論的)．上のように  $a_1(t)$  はマルチンゲールであるが，(3.36) は  $a_n(t), n \geq 2$  は有界変動過程であることを示している． $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots)$ ， $\mathbf{a}(t) = (a_1(t), a_2(t), \dots)$  と書くことにする． $Q(\mathbf{x})$  を多変数  $\{x_n\}_{n \geq 1}$  の実係数多項式としたとき，確率過程  $Q(\mathbf{a}(t))$  に対する確率微分方程式は，伊藤の公式 (2.7) より

$$dQ(\mathbf{a}(t)) = \left[ -\sqrt{\kappa}dB_t \frac{\partial}{\partial x_1} + dt \left( \frac{\kappa}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + 2 \sum_{n \geq 2} \mathcal{P}_n(\mathbf{x}(t)) \frac{\partial}{\partial x_n} \right) \right] Q(\mathbf{x}(t)) \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{a}(t)}$$

で与えられる．ここで  $(da_1(t))^2 = \kappa dt$  と (3.32) を用いた．したがって，微分演算子

$$\mathcal{A} = \frac{\kappa}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + 2 \sum_{n \geq 2} \mathcal{P}_n(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_n} \quad (\text{A.53})$$

を定義して， $\mathcal{A}M(\mathbf{x}) = 0$  なる多項式  $M(\mathbf{x})$  が得られると，局所マルチンゲール  $M(\mathbf{a}(t))$  が求められることになる．このような局所マルチンゲールは，多変数  $\{x_n\}_{n \geq 2}$  の階層性に従って

$$\begin{aligned}
&a_1(t) \\
&2(a_1(t))^2 - \kappa a_2(t) \\
&2(a_1(t))^3 - 3\kappa a_1(t)a_2(t) \quad \text{および} \quad a_3(t) + a_1(t)a_2(t) \\
&\dots
\end{aligned} \quad (\text{A.54})$$

というように階層的に定めていくことができる．これらは SLE マルチンゲールと呼ばれている [2]．

Bauer と Bernard によって，これらのマルチンゲールの成す代数構造と，ヴィラソロ代数の中心元  $c = (3\kappa - 8)(6 - \kappa)/2\kappa$  と共形次元 (最高ウェイト)  $b = (6 - \kappa)/2\kappa$  で指定される表現 (共形場理論) との関係が詳しく研究されている [2]．

謝辞: 本講演の機会を与えて下さいました小嶋泉氏，河東泰之氏，緒方芳子氏に感謝いたします．また，共同研究者の種村秀紀氏 (千葉大理) に感謝いたします．

## 参考文献

- [1] L. V. Ahlfors, *Complex Analysis*, 3rd ed., (McGraw-Hill, 1979).
- [2] M. Bauer and D. Bernard, SLE martingales and the Virasoro algebra, *Phys. Lett. B* **557** (2003) 309-316.
- [3] V. Beffara, The dimension of the SLE curves, *Ann. Probab.* **36** (2008) 1421-1452.
- [4] R. Friedrich and W. Werner, Conformal restriction, highest-weight representations and SLE, *Commun. Math. Phys.* **243** (2003) 105-122.
- [5] W. Kager and B. Nienhuis, A guide to stochastic Löwner evolution and its application, *J. Stat. Phys.* **115** (2004) 1149-1229.
- [6] I. カラザス, S. E. シュレーブ (渡邊壽夫訳):「ブラウン運動と確率積分」、シュプリングー フェアラーク 東京 (2001).
- [7] 香取眞理, 「臨界現象・フラクタル研究の新世紀— SLE の発見 —」, 日本物理学会誌, Vol.62, No.7 (2007) 527-531.
- [8] 香取眞理, 種村秀紀: ランダム行列と非衝突過程, 「数理物理への誘い 6」(小嶋泉編), 遊星社 (2006) .
- [9] 香取眞理, 種村秀紀: 非衝突過程, 行列値過程, 行列式過程, 数学, Vol. 61, No.3 (2009) 225-247.
- [10] G. F. Lawler, *Conformally Invariant Processes in the Plane*, (American Mathematical Society, 2005).
- [11] G. Lawler, Schramm-Loewner Evolution (SLE), arXiv: 0712.3256 [math.PR].
- [12] G. Lawler, O. Schramm, and W. Werner, Conformal restriction: the chordal case, *J. Amer. Math. Soc.* **16** (2003) 917-955.
- [13] G. Lawler, O. Schramm, and W. Werner, Conformal invariance of planar loop-erased random walks and uniform spanning trees, *Ann. Probab.* **32** (2004) 939-995.
- [14] 長井英生: 「確率微分方程式」, 共立出版 (1999).
- [15] O. Schramm, Scaling limits of loop-erased random walks and uniform spanning trees, *Israel J. Math.* **118** (2000) 221-228.
- [16] 白井朋之: フィールド賞業績紹介 ヴェルナー, 数学セミナー, No.545 (2007年2月), pp.46-51, 日本評論社.
- [17] 白井朋之: SLE – Schramm-Loewner Evolution, 数理科学, No.546 (2008年12月), pp.7-12, サイエンス社 .
- [18] S. Smirnov, Critical percolation in the plane: conformal invariance, Cardy's formula, scaling limit, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **333** (2001) 239-244.
- [19] S. Smirnov, Conformal invariance in random cluster models. I. Holomorphic fermions in the Ising model, arXiv:0708.0039



- [20] 鈴木淳史：「現代物理数学への招待, ランダムウォークからひろがる多彩な物理と数理」, サイエンス社, 2006.
- [21] 田崎晴明：三角格子上の臨界パーコレーションの共形不変性, 数理科学, No.546 (2008年12月), pp.13-19, サイエンス社.
- [22] W. Werner, Conformal restriction and related questions, *Probability Surveys* **2** (2005) 145-190.
- [23] 山田泰彦：「共形場理論入門」, 培風館 (2006).