

非衝突拡散過程*

香取眞理 (中央大学理工学部) †

9 April 2013 (version B1)

概要

互いに独立な複数の 1 次元拡散過程を, 粒子間に衝突が起こらないという条件の下で考えると, 粒子間に強い斥力相互作用をもつ多粒子拡散過程が得られる. これを非衝突拡散過程とよぶ. これは Hermite 行列に値をもつ拡散過程の固有値の運動 (Dyson 模型) として実現されることが知られている. 多時刻結合確率分布に対して定義される多時刻相関関数が一般に行列式で与えられる多粒子過程を行列式過程という. これは, 多時刻の積率母関数がある積分核の行列 (これを相関核とよぶことにする) の Fredholm 行列式で書けることに等しい. Karlin-McGregor の行列式と多重直交関数系の積分表示を用いると, 有限な非衝突拡散過程は一般の初期配置に対して行列式過程であることが導かれる. 特別な初期配置に対しては, 時空座標に関して適当なスケールング極限をとることによって, いくつかの非衝突無限粒子系を得ることができる. これは上述の相関核のスケールング極限を分類する問題として捉えることができる. 初期配置をランダム行列の固有値分布に従って分布させる状況も考えられる. この場合には相関核の性質より, ランダム行列の特性多項式の分布に関する情報が得られる.

本講義では 1 次元拡散過程として特に Brown 運動と Bessel 過程を考えることにより, 具体的に計算することによって上述の主張を例示するつもりである.¹

目次

1	非衝突拡散過程	3
1.1	Brown 運動と Bessel 過程	3
1.2	Karlin-McGregor の公式	4
1.3	非衝突 Brown 運動	6
1.4	非衝突 Bessel 過程	8
1.5	Schur 関数展開と Selberg 積分	9
1.6	多時刻結合確率密度	12

*講義ノート (応用数理特別講義 V, 東京大学大学院数理科学研究科集中講義, 2008 年 10 月 6-10 日)

†e-mail: katori@phys.chuo-u.ac.jp

¹本講義の内容の多くは種村秀紀氏 (千葉大理学部) との共同研究に基づくものである.

2	多重直交多項式と行列式過程	14
2.1	多重 Hermite 多項式	14
2.2	多時刻積率母関数の Fredholm 行列式表示	18
2.3	命題 2.6 の証明	20
3	スケーリング極限	25
3.1	Hermite 核と Laguerre 核	25
3.2	スケーリング極限	26
3.3	有効ハミルトニアンとスペクトル射影	28
4	ランダム行列の固有値配置と特性多項式	30
4.1	GUE 固有値初期配置と時間シフト	30
4.2	GUE ランダム行列の特性多項式	32
5	関連する話題	34
5.1	無限粒子非衝突過程について	34
5.2	非衝突な道の上限值問題	36

1 非衝突拡散過程

1.1 Brown 運動と Bessel 過程

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ を確率空間とする. $x_0 \in \mathbf{R}$ を出発点とする 1 次元 Brown 運動 $\{B(t, \omega)\}_{t \in [0, \infty)}$ は次の性質をもつ.

1. $B(0, \omega) = x_0$ が確率 1 で成り立つ.
2. 任意の $\omega \in \Omega$ に対して, ω を固定したとき $B(t, \omega)$ は t の関数として連続な実数値関数である.
(このとき道が連続であるという.)
3. 任意の時刻の列 $t_0 \equiv 0 < t_1 < \dots < t_M, M = 1, 2, \dots$, に対し, 増分 $\{B(t_{j+1}) - B(t_j)\}_{j=0, 1, \dots, M-1}$ は独立で, 各々の分布は平均 0, 分散 $t_{j+1} - t_j$ の正規分布に従う.

したがって

$$p(t, y|x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left\{-\frac{(y-x)^2}{2t}\right\}, \quad t > 0, \quad x, y \in \mathbf{R} \quad (1.1)$$

とおくと, Brown 運動が各時刻 t_j で区間 $[a_j, b_j]$ に滞在する確率は

$$\mathbf{P}\left(B(t_j) \in [a_j, b_j], j = 1, 2, \dots, M\right) = \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \int_{a_2}^{b_2} dx_2 \cdots \int_{a_M}^{b_M} dx_M \prod_{j=0}^{M-1} p(t_{j+1} - t_j, x_{j+1}|x_j)$$

で与えられる.

この積分核である $G(s, x; t, y) \equiv p(t-s, y|x)$ を, Brown 運動の推移確率密度関数という. 任意の時刻 $s \geq 0$ に対して, その時刻での Brown 運動の値 $B(s)$ が与えられると, それ以前の Brown 運動 $B(u), u < s$ とそれ以後の Brown 運動 $B(t), t > s$ とは条件付き独立であることが分かる. この性質を Markov 性という. 正の値をとる確率変数 τ が Markov 時刻 (あるいは停止時刻) であるとは, τ の値がある定数 u 以下であるかどうかは確率過程の時刻 u までの値だけで決まり, それ以降の時刻でとる値には影響されないことをいう. 例えば, ある領域を定めたとき, 確率過程が最初にその領域内に到達する時刻は Markov 時刻である. Brown 運動では, 上記の Markov 性の説明文において時刻 s とあるところを任意の Markov 時刻 τ に替えても構わない. その場合でも同様に, 条件付き独立性が成り立つのである. この性質を強 Markov 性という.

一般に, 道が連続である確率過程で, 強 Markov 性をもつものを拡散過程という. 特に, Brown 運動のように推移確率密度が時間の差 $t-s$ で定まる拡散過程は時間的に斉次であるという. 同様に, 推移確率密度が位置座標の差 $y-x$ だけに依存するときは空間的に斉次であるという.

d が自然数であるとき, d -次元 Brown 運動 $(B_1(t), B_2(t), \dots, B_d(t))$ の原点からの距離 $(B_1(t))^2 + B_2(t)^2 + \dots + B_d(t)^2)^{1/2}$ は拡散過程となり, これを d -次元 Bessel 過程という. Bessel 過程は d が正

の実数の場合に一般化されており, $2(\nu + 1)$ 次元 Bessel 過程 $X^{(\nu)}(t)$, $\nu \in (-1, \infty)$, の推移確率密度関数 $p^{(\nu)}(t, y|x)$ は

$$\begin{aligned} p^{(\nu)}(t, y|x) &= \frac{y^{\nu+1}}{x^\nu} \frac{1}{t} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2t}\right) I_\nu\left(\frac{xy}{t}\right), \quad t > 0, \quad x > 0, \quad y \geq 0 \\ p^{(\nu)}(t, y|0) &= \frac{y^{2\nu+1}}{2^\nu \Gamma(\nu + 1) t^{\nu+1}} \exp\left(-\frac{y^2}{2t}\right), \quad t > 0, \quad y \geq 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

で与えられる [39]. ここで, $\Gamma(z)$ はガンマ関数であり, $I_\nu(z)$ は変形 Bessel 関数である:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-u} u^{z-1} du \quad \Re u > 0, \quad (1.3)$$

$$I_\nu(z) = \sum_{n=0}^\infty \frac{(z/2)^{2n+\nu}}{\Gamma(n+1)\Gamma(\nu+n+1)}. \quad (1.4)$$

Bessel 過程は, その次元 $d = 2(\nu + 1)$ により性質が異なる. 原点に対して, 2次元以上 ($d \geq 2$, $\nu \geq 0$) では非再帰的であるが, 2次元未満 ($0 < d < 2$, $-1 < \nu < 0$) では再帰的である. また, 1次元以上 ($d \geq 1$, $\nu \geq -1/2$) であれば半マルチンゲールであるが, 1次元未満 ($0 < d < 1$, $-1 < \nu < -1/2$) のときは半マルチンゲールではない [39].

1.2 Karlin-McGregor の公式

2つの1次元拡散過程 X_1, X_2 において, $X_1(\tau) = X_2(\tau)$ であるとき, この2つの過程は時刻 τ で衝突したという. また, $x = X_1(\tau) = X_2(\tau)$ を衝突点とよぶことにする. これは, 時空平面において2本の道が衝突(交差)することを意味する. N 粒子拡散過程で, ある時間区間で衝突が起こらないものを非衝突拡散過程とよぶことにする.

非衝突拡散過程を解析するには, 推移確率密度関数に対する行列式を用いた表示が有効である. この行列式表示は, 確率論では Karlin-McGregor の公式 [11], 組み合わせ論では Lindström-Gessel-Viennot の公式 [33, 4, 44] とよばれる. またこの公式は, 量子力学で自由フェルミ粒子からなる多体系の波動関数を表す Slater 行列式の確率過程版とみなすこともできる [23].

定理 1.1 (Karlin-McGregor の公式 [11, 33, 4]) $G(s, x; t, y)$ を1次元拡散過程の推移確率密度関数とする. N 個の始点 x_j , $j = 1, 2, \dots, N$ と N 個の終点 y_j , $j = 1, 2, \dots, N$ がそれぞれ $x_1 < x_2 < \dots < x_N$ と $y_1 < y_2 < \dots < y_N$ を満たすとする. $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)$, $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_N)$ と記す. このとき, N 本の道が時間区間 $[s, t]$ で非衝突である確率密度は行列式 $\det_{1 \leq j, k \leq N} [G(s, x_j; t, y_k)]$ で与えられる.

証明 行列式の定義より

$$\det_{1 \leq j, k \leq N} [G(s, x_j; t, y_k)] = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} \text{sgn}(\sigma) \prod_{j=1}^N G(s, x_j; t, y_{\sigma(j)}). \quad (1.5)$$

ただしここで, \mathfrak{S}_N は $\{1, 2, \dots, N\}$ の置換全体の集合. 時空平面上の (s, x) から (t, y) へ至る道全体からなる集合を $\Omega(s, x; t, y)$ と書くことにする. $\pi_j \in \Omega(s, x_j; t, y_{\sigma(j)}), j = 1, 2, \dots, N$ とすると, (1.5) は, 置換 σ と N 本の道の組 $(\sigma, \pi_1, \dots, \pi_N)$ に対する母関数とみなせる. この組 $(\sigma, \pi_1, \dots, \pi_N)$ のうち, 少なくとも 1 回は道の衝突があるものを選ぶ. それに対して

$$\tau = \sup\{s < u < t : \pi_1, \dots, \pi_N \text{ のいずれかが時刻 } u \text{ で衝突}\}$$

とし, この衝突点を $v \in \mathbf{R}$ とする. また, 時刻 τ で衝突点した道を $\pi_{\ell_1}, \pi_{\ell_2}$ とする. (3 本以上の道が同時に衝突した場合は, そのうち添字の小さい 2 つを選ぶことにする, 図 1 を参照.)

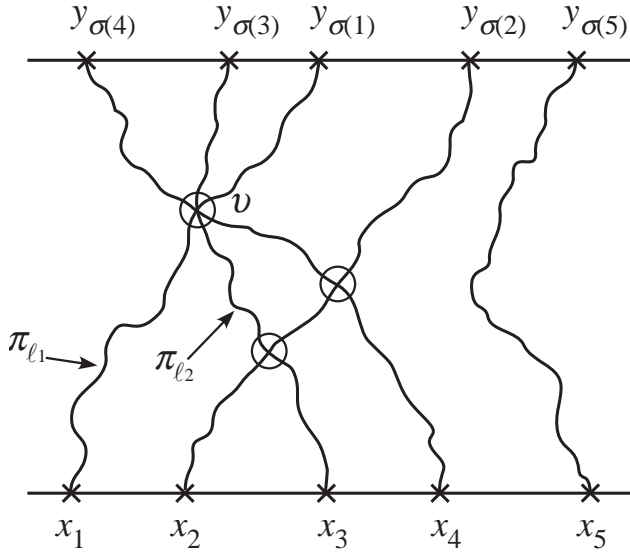


図 1: 衝突のある道の組 (π_1, \dots, π_N) の例. 衝突点 v を通過する 2 つの道 π_{ℓ_1} と π_{ℓ_2} を選ぶ.

そして

$$\pi_{\ell_1} = \pi_{\ell_1}(\rightarrow v)\pi_{\ell_1}(v \rightarrow)$$

$$\pi_{\ell_2} = \pi_{\ell_2}(\rightarrow v)\pi_{\ell_2}(v \rightarrow)$$

と書くことにする. 図 2 のように, 衝突点 v で道を入れ替えたものを

$$\pi'_{\ell_1} = \pi_{\ell_1}(\rightarrow v)\pi_{\ell_2}(v \rightarrow)$$

$$\pi'_{\ell_2} = \pi_{\ell_2}(\rightarrow v)\pi_{\ell_1}(v \rightarrow)$$

として, $j \neq \ell_1, \ell_2$ に対しては $\pi'_j = \pi_j$ とする. また, 置換 σ と互換 (ℓ_1, ℓ_2) との積置換を σ' と書く. すると

$$(\sigma, \pi_1, \dots, \pi_N) \iff (\sigma', \pi'_1, \dots, \pi'_N) \quad (1.6)$$

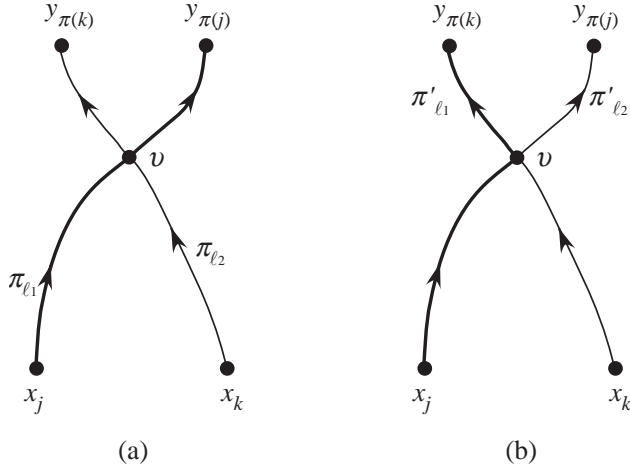


図 2: (a) 道 π_{l_1} と π_{l_2} . (b) 道 π'_{l_1} と π'_{l_2} .

は 1 対 1 に対応することが分かる . $\text{sgn}(\sigma') = -\text{sgn}(\sigma)$ なので , 組 $(\sigma, \pi_1, \dots, \pi_N)$ の母関数 (1.5) において , (1.6) の組の対は逆符号で足されるので相殺される . 以上の考察より , 母関数 (1.5) において衝突がある道からの寄与は全て相殺されることが示された . 他方 , 非衝突の場合は σ は恒等変換であり , $\text{sgn}(\sigma) = 1$ であるから , 結局 (1.5) は非衝突の道のみ和になる . ■

1.3 非衝突 Brown 運動

\mathbf{R}^N の部分集合 $\mathbf{W}_N^A = \{x \in \mathbf{R}^N : x_1 < x_2 < \dots < x_N\}$ を考える . これは表現論では A_{N-1} 型の Weyl 領域とよばれているものである . \mathbf{W}_N^A 内の吸収壁 Brown 運動の推移確率密度 , つまり時刻 0 で \mathbf{W}_N^A 内の点 x から出発した Brown 運動が \mathbf{W}_N^A から外に出ることなく時刻 t で \mathbf{W}_N^A 内の点 y へ到達する確率密度は , 定理 1.1 の Karlin-McGregor の公式より

$$f_N(t, \mathbf{y} | \mathbf{x}) = \det_{1 \leq j, k \leq N} [p(t, y_k | x_j)]$$

と表される . したがって , 時刻 0 で点 x から出発した Brown 運動が , 時刻 t までの間 \mathbf{W}_N^A から外に出ない確率は ,

$$\mathcal{N}_N(t, \mathbf{x}) = \int_{\mathbf{W}_N^A} f_N(t, \mathbf{y} | \mathbf{x}) d\mathbf{y} \quad (1.7)$$

で与えられることになる . ここで $d\mathbf{y} = \prod_{j=1}^N dy_j$ である .

有限な時間区間 $(0, T]$ での非衝突 Brown 運動を定義する . この過程 $Z(t) = (Z_1(t), Z_2(t), \dots, Z_N(t))$ の推移確率密度関数 $g_N^T(s, \mathbf{x}; t, \mathbf{y})$ は , 時刻 T まで衝突しないという条件の下で , 時刻 s で点 $x \in \mathbf{W}_N^A$

にいた N 個の Brown 運動が時刻 t で点 $\mathbf{y} \in \mathbf{W}_N^A$ に到達する確率密度であり,

$$g_N^T(s, \mathbf{x}; t, \mathbf{y}) = \frac{\mathcal{N}_N(T-t, \mathbf{y})}{\mathcal{N}_N(T-s, \mathbf{x})} f_N(t-s, \mathbf{y}|\mathbf{x}), \quad 0 \leq s < t \leq T, \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{W}_N^A \quad (1.8)$$

で与えられる.

次節で示すように, Schur 関数とよばれる多変数対称関数を用いて双線形展開することにより

$$\mathcal{N}_N(t, \mathbf{x}) \simeq \frac{C_2(N)}{C_1(N)} h_N\left(\frac{\mathbf{x}}{\sqrt{t}}\right), \quad \frac{|\mathbf{x}|}{\sqrt{t}} \rightarrow 0 \quad (1.9)$$

であることが導ける [18, 20, 23]. ここで $h_N(\mathbf{x})$ は差積

$$h_N(\mathbf{x}) = \det_{1 \leq j, k \leq N} (x_k^{j-1}) = \prod_{1 \leq j < k \leq N} (x_k - x_j) \quad (1.10)$$

であり, $C_1(N) = (2\pi)^{N/2} \prod_{j=1}^N \Gamma(j)$, $C_2(N) = 2^{N/2} \prod_{j=1}^N \Gamma(j/2)$ である. また, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ に
対して

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{\sum_{j=1}^N x_j^2}$$

とする.

これを用いると, 非衝突 Brown 運動 $Z(t)$ は, 非衝突条件を課す時間 $T \rightarrow \infty$ の極限で, 推移確率密度関数が

$$p_N(t, \mathbf{y}|\mathbf{x}) = \frac{h_N(\mathbf{y})}{h_N(\mathbf{x})} f_N(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad t > 0, \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{W}_N^A \quad (1.11)$$

で与えられる時間的に斉次な拡散過程 $X(t)$ に収束することが分かる.

$$\Delta h_N(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} h_N(\mathbf{x}) = 0$$

である. よって (1.11) は, $X(t)$ が \mathbf{W}_N^A 内の吸収壁 Brown 運動の優調和変換であることを意味する [5]. また, その形から $X(t)$ が Dyson 模型の方程式

$$X_j(t) = B_j(t) + \frac{\beta}{2} \sum_{\substack{1 \leq k \leq N \\ k \neq j}} \int_0^t \frac{1}{X_j(s) - X_k(s)} ds, \quad t \in (0, \infty), \quad 1 \leq j \leq N \quad (1.12)$$

を $\beta = 2$ の場合に満足することは明らかである.

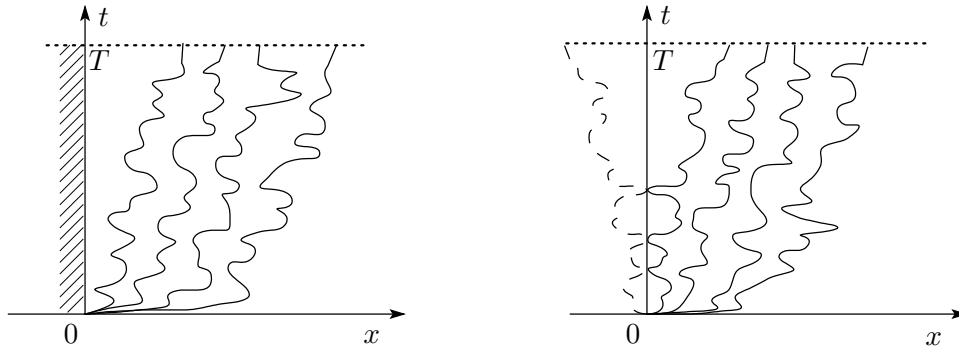


図 3: ν が非負の場合 (左図) と負の場合 (右図) の $Z^{(\nu)}(t)$

1.4 非衝突 Bessel 過程

\mathbf{R}^N の部分集合 $\mathbf{W}_N^C, \mathbf{W}_N^D$ を

$$\mathbf{W}_N^C = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^N : 0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_N\}, \quad \mathbf{W}_N^D = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^N : 0 \leq |x_1| < x_2 < \cdots < x_N\}$$

と定義する. これらはそれぞれ C_N 型, D_N 型の Weyl 領域とよばれているものである. Bessel 過程は原点に対して, パラメータ ν が非負のときは非再帰的であり, 負のときは再帰的である. この性質により, 非衝突 Bessel 過程の状態空間 \mathbf{W}_N は ν が非負であるとき \mathbf{W}_N^C であり, 負であるとき \mathbf{W}_N^D である. Bessel 過程を導入する際, 2 乗 Bessel 過程をまず定義し, その平方根を考えることにすると, 平方根の符号の多意性によって多価確率過程が得られる場合がある. 初期値が正である 2 乗 Bessel 過程は, ν が非負の場合には常に正の値であるので, 平方根も 1 価関数となり 1.1 節で定義した Bessel 過程と一致する. しかし, ν が負の場合には 2 乗 Bessel 過程は確率 1 で原点に到達し, その平方根として定義される過程は, その後 2 価確率過程となる. Bessel 過程, さらに以下で定義する非衝突 Bessel 過程における左端の粒子も, 同様な状況にあるのである. \mathbf{W}_N^D の定義式の中で $|x_1|$ と絶対値を付けたのは, このように 2 価確率過程を考える場合をも想定したためである (図 3 を参照). ただし, 推移確率密度などに対する以下の表式は, 表記を簡単にするため, 絶対値をとって得られる非負過程に対して与えるものとする.

時刻 0 で \mathbf{W}_N^C の点 \mathbf{x} から出発した Bessel 過程が \mathbf{W}_N^C から外に出ることなく時刻 t で \mathbf{W}_N^C の点 \mathbf{y} へ到達する確率密度は, Karlin-McGregor 公式より

$$f_N^{(\nu)}(t, \mathbf{y} | \mathbf{x}) = \det_{1 \leq j, k \leq N} [p^{(\nu)}(t, y_k | x_j)]$$

で与えられる. よって, 点 \mathbf{x} から出発した Bessel 過程が時刻 t まで \mathbf{W}_N^C から外に出ない確率は

$$\mathcal{N}_N^{(\nu)}(t, \mathbf{x}) = \int_{\mathbf{W}_N^C} d\mathbf{y} f_N^{(\nu)}(t, \mathbf{y} | \mathbf{x}) \quad (1.13)$$

で与えられる. 有限な時間区間 $(0, T]$ での非衝突 Bessel 過程 $\mathbf{Z}^{(\nu)}(t) = (Z_1^{(\nu)}(t), Z_2^{(\nu)}(t), \dots, Z_N^{(\nu)}(t))$ の推移確率密度関数は次で与えられる:

$$g_N^{T,(\nu)}(s, \mathbf{x}, t, \mathbf{y}) = \frac{\mathcal{N}_N^{(\nu)}(T-t, \mathbf{y})}{\mathcal{N}_N^{(\nu)}(T-s, \mathbf{x})} f_N^{(\nu)}(t-s, \mathbf{y}|\mathbf{x}), \quad 0 \leq s < t \leq T, \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{W}_N^C. \quad (1.14)$$

次節で述べる Schur 関数を用いて双線形展開する方法によって, $\mathcal{N}_N^{(\nu)}(t, \mathbf{x})$ の漸近評価は次のように得られる [20]:

$$\mathcal{N}_N^{(\nu)}(t, \mathbf{x}) \simeq \frac{C_2^{(\nu)}(N)}{C_1^{(\nu)}(N)} h_N^{(0)}\left(\frac{\mathbf{x}}{\sqrt{t}}\right), \quad \frac{|\mathbf{x}|}{\sqrt{t}} \rightarrow 0. \quad (1.15)$$

ここで, $C_1^{(\nu)}(N) = 2^{N(N+\nu-1)} \prod_{j=1}^N \Gamma(j)\Gamma(j+\nu)$, $C_2^{(\nu)}(N) = 2^{N(N+2\nu-1)/2} \pi^{-N/2} \prod_{j=1}^N \Gamma(j/2)\Gamma((j+2\nu+1)/2)$, また

$$h_N^{(\alpha)}(\mathbf{x}) = \prod_{1 \leq j < k \leq N} (x_k^2 - x_j^2) \prod_{\ell=1}^N x_\ell^\alpha$$

である. 以上の評価から, 非衝突条件を課す時間 T を無限大にすると, $\mathbf{Z}^{(\nu)}(t)$ は, 推移確率密度関数が

$$p_N^{(\nu)}(t, \mathbf{y}|\mathbf{x}) = \frac{h_N^{(0)}(\mathbf{y})}{h_N^{(0)}(\mathbf{x})} f_N^{(\nu)}(t, \mathbf{y}|\mathbf{x}), \quad t > 0, \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{W}_N^C \quad (1.16)$$

で与えられる時間的に斉次な拡散過程 $\mathbf{X}^{(\nu)}(t)$ に収束する. $\mathbf{X}^{(\nu)}(t)$ を (時間的に斉次な) 非衝突 $2(\nu+1)$ 次元 Bessel 過程とよぶ. $\nu \geq -1/2$ のときは次の方程式を満足する:

$$X_j^{(\nu)}(t) = B_j(t) + \int_0^t \frac{\nu+1/2}{X_j^{(\nu)}(s)} ds + \sum_{\substack{1 \leq k \leq N \\ k \neq j}} \int_0^t \frac{2X_j^{(\nu)}(s)}{X_j^{(\nu)}(s)^2 - X_k^{(\nu)}(s)^2} ds, \quad t \in (0, \infty), \quad 1 \leq j \leq N. \quad (1.17)$$

ただし, $\nu = -1/2$ のときは原点に反射壁をおくものとする.

1.5 Schur 関数展開と Selberg 積分

$\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_N \geq 0, \mu_j \in \mathbf{N}_0 \equiv \mathbf{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, \dots\}$ のとき, $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_N)$ を整数 $|\mu| \equiv \sum_{j=1}^N \mu_j$ の分割という. $\{\mu_j\}$ のうち零でないものの数を分割の長さといい $\ell(\mu)$ で表すことにする. すべての $1 \leq j \leq N$ で $\mu_j = 0$ のとき特に $(0, 0, \dots, 0) = \emptyset$ と記すことにする.

このような分割 μ に対して, N 変数 $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)$ の関数

$$s_\mu(\mathbf{x}) = \frac{\det_{1 \leq j, k \leq N} [x_j^{\mu_k + N - k}]}{\det_{1 \leq j, k \leq N} [x_j^{N - k}]} \quad (1.18)$$

を定義する．分母は Vandermonde の行列式であり，(1.10) 式の差積と次の関係にある：

$$\det_{1 \leq j, k \leq N} \left[x_j^{N-k} \right] = \prod_{1 \leq j < k \leq N} (x_j - x_k) = (-1)^{N(N-1)/2} h_N(\mathbf{x}). \quad (1.19)$$

$s_\mu(\mathbf{x})$ は x_1, \dots, x_N の $|\mu|$ 次の同次対称多項式であり，Schur 関数とよばれる． $\mu = \emptyset$ に対しては $s_\emptyset(\mathbf{x}) = 1$ である． $s_\mu(\mathbf{x})$ は N 変数の多項式環 $\mathbf{Z}[x_1, \dots, x_N]$ の基底をなす．次は行列式に対する多変数の Taylor 展開の公式である．

補題 1.2 定数 ρ があって， $\psi(x)$ が $x = 0$ の周りで

$$\psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+\rho}$$

と展開できるとする．このとき $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N), \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_N)$ に対して

$$\det_{1 \leq j, k \leq N} \left[\psi(x_j y_k) \right] = h_N(\mathbf{x}) h_N(\mathbf{y}) \prod_{j=1}^N (x_j y_j)^\rho \sum_{\mu: \ell(\mu) \leq N} s_\mu(\mathbf{x}) s_\mu(\mathbf{y}) \prod_{j=1}^N c_{\mu_j + N - j}. \quad (1.20)$$

よって， $|\mathbf{x}| \rightarrow 0$ あるいは $|\mathbf{y}| \rightarrow 0$ では

$$\det_{1 \leq j, k \leq N} \left[\psi(x_j y_k) \right] = h_N(\mathbf{x}) h_N(\mathbf{y}) \prod_{j=1}^N (x_j y_j)^\rho \prod_{j=1}^N c_{j-1} \times \left\{ 1 + \mathcal{O}(|\mathbf{x}|, |\mathbf{y}|) \right\} \quad (1.21)$$

である．

証明 行列の多重線形性より

$$\begin{aligned} \det_{1 \leq j, k \leq N} \left[\psi(x_j y_k) \right] &= \det_{1 \leq j, k \leq N} \left[(x_j y_k)^\rho \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x_j y_k)^n \right] \\ &= \prod_{j=1}^N (x_j y_j)^\rho \sum_{\mathbf{n}=(n_1, \dots, n_N) \in \mathbf{N}_0^N} \prod_{j=1}^N c_{n_j} \det_{1 \leq j, k \leq N} \left[(x_j y_k)^{n_j} \right]. \end{aligned}$$

となる． $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_N)$ の添え字に対して置換 $\sigma \in \mathfrak{S}_N$ を施したものを $\sigma(\mathbf{n}) = (n_{\sigma(1)}, \dots, n_{\sigma(N)})$ と書くことにする．一般に $f(\mathbf{n})$ が \mathbf{n} の対称関数であるとき (すなわち， $f(\sigma(\mathbf{n})) = f(\mathbf{n}) \quad \forall \sigma \in \mathfrak{S}_N$ であるとき)

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{n} \in \mathbf{N}_0^N} f(\mathbf{n}) \det_{1 \leq j, k \leq N} \left[(x_j y_k)^{n_j} \right] &= \frac{1}{N!} \sum_{\mathbf{n} \in \mathbf{N}_0^N} f(\mathbf{n}) \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} \det_{1 \leq j, k \leq N} \left[(x_j y_k)^{n_{\sigma(j)}} \right] \\ &= \sum_{0 \leq n_1 < \dots < n_N} f(\mathbf{n}) \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} \det_{1 \leq j, k \leq N} \left[(x_j y_k)^{n_{\sigma(j)}} \right] \end{aligned}$$

である．また

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} \det_{1 \leq j, k \leq N} \left[(x_j y_k)^{n_{\sigma(j)}} \right] = \det_{1 \leq j, k \leq N} \left[x_j^{n_k} \right] \det_{1 \leq \ell, m \leq N} \left[y_\ell^{n_m} \right]$$

である． $\prod_{j=1}^N c_{n_j}$ は \mathbf{n} の対称関数なので，以上より

$$\det_{1 \leq j, k \leq N} [\psi(x_j y_k)] = \prod_{j=1}^N (x_j y_j)^\rho \sum_{0 \leq n_1 < \dots < n_N} \prod_{j=1}^N c_{n_j} \det_{1 \leq j, k \leq N} [x_j^{n_k}] \det_{1 \leq \ell, m \leq N} [y_\ell^{n_m}].$$

ここで $\mu_j = n_j - N + j, 1 \leq j \leq N$ として，Schur 関数の定義式 (1.18) を用いると (1.20) が得られる． $s_\mu(\mathbf{x})$ は x_1, \dots, x_N の $|\mu|$ 次多項式であり， $s_\emptyset(\mathbf{x}) = 1$ なので， $|\mathbf{x}| \rightarrow 0$ または $|\mathbf{y}| \rightarrow 0$ での漸近評価として (1.21) が得られる．■

さて

$$\begin{aligned} f_N(t, \mathbf{y}|\mathbf{x}) &= \det_{1 \leq j, k \leq N} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-(x_j - y_k)^2 / (2t)} \right] \\ &= (2\pi t)^{-N/2} e^{-(|\mathbf{x}|^2 + |\mathbf{y}|^2) / (2t)} \det_{1 \leq j, k \leq N} [e^{x_j y_k / t}] \end{aligned}$$

である．そこで， $\psi(x) = e^{x/t} = \sum_{x=0}^{\infty} x^n / (n! t^n)$ として補題 1.2 の (1.21) を適用すると， $|\mathbf{x}|/\sqrt{t} \rightarrow 0$ または $|\mathbf{y}|/\sqrt{t} \rightarrow 0$ で

$$f_N(t, \mathbf{y}|\mathbf{x}) = \frac{t^{-N^2/2}}{C_1(N)} e^{-(|\mathbf{x}|^2 + |\mathbf{y}|^2) / (2t)} h_N(\mathbf{x}) h_N(\mathbf{y}) \times \left\{ 1 + \mathcal{O}\left(\frac{|\mathbf{x}|}{\sqrt{t}}, \frac{|\mathbf{y}|}{\sqrt{t}}\right) \right\} \quad (1.22)$$

という評価を得る．ここで，すでに述べたように $C_1(N) = (2\pi)^{N/2} \prod_{j=1}^N \Gamma(j)$ である．同様にして， $|\mathbf{x}|/\sqrt{t} \rightarrow 0$ または $|\mathbf{y}|/\sqrt{t} \rightarrow 0$ で

$$f_N^{(\nu)}(t, \mathbf{y}|\mathbf{x}) = \frac{t^{-N(N+\nu)}}{C_1^{(\nu)}(N)} e^{-(|\mathbf{x}|^2 + |\mathbf{y}|^2) / (2t)} h_N^{(0)}(\mathbf{x}) h_N^{(2\nu+1)}(\mathbf{y}) \times \left\{ 1 + \mathcal{O}\left(\frac{|\mathbf{x}|^2}{t}, \frac{|\mathbf{y}|^2}{t}\right) \right\} \quad (1.23)$$

を得る．ここで $C_1^{(\nu)}(N) = 2^{N(N+\nu-1)} \prod_{j=1}^N \Gamma(j) \Gamma(j+\nu)$ である．したがって，

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_N(t, \mathbf{x}) &= \int_{\mathbf{w}_N^A} f_N(t, \mathbf{y}|\mathbf{x}) d\mathbf{y} \\ &= \frac{1}{C_1(N)} h_N\left(\frac{\mathbf{x}}{\sqrt{t}}\right) C_2(N) \times \left\{ 1 + \mathcal{O}\left(\frac{|\mathbf{x}|}{\sqrt{t}}\right) \right\}, \quad \frac{|\mathbf{x}|}{\sqrt{t}} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_N^{(\nu)}(t, \mathbf{x}) &= \int_{\mathbf{w}_N^C} f_N^{(\nu)}(t, \mathbf{y}|\mathbf{x}) d\mathbf{y} \\ &= \frac{1}{C_1^{(\nu)}(N)} h_N^{(0)}\left(\frac{\mathbf{x}}{\sqrt{t}}\right) C_2^{(\nu)}(N) \times \left\{ 1 + \mathcal{O}\left(\frac{|\mathbf{x}|^2}{t}\right) \right\}, \quad \frac{|\mathbf{x}|^2}{t} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

となる．ここで

$$C_2(N) = \int_{\mathbf{w}_N^A} e^{-|\mathbf{x}|^2/2} h_N(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad C_2^{(\nu)}(N) = \int_{\mathbf{w}_N^C} e^{-|\mathbf{x}|^2/2} h_N^{(2\nu+1)}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (1.24)$$

である．これらは Selberg 積分の変形であり [41, 34, 35] , それぞれ

$$C_2(N) = 2^{N/2} \prod_{j=1}^N \Gamma(j/2), \quad C_2^{(\nu)}(N) = 2^{N(N+2\nu-1)/2} \pi^{-N/2} \prod_{j=1}^N \Gamma(j/2) \Gamma((j+2\nu+1)/2) \quad (1.25)$$

と計算される．以上で , (1.9) と (1.15) の導出ができた．

1.6 多時刻結合確率密度

時刻の列 $t_0 \equiv 0 < t_1 < \dots < t_M$, $M = 1, 2, \dots$, に対して , $t = t_0 = 0$ での初期配置を $\mathbf{x} = \mathbf{x}^{(0)}$ としたときの多時刻結合確率密度関数を考える．(1.11) 式と (1.16) 式より , 非衝突 Brown 運動と非衝突 Bessel 過程に対して , それぞれ

$$\begin{aligned} p_N^{\mathbf{x}^{(0)}}(t_1, \mathbf{x}^{(1)}; \dots; t_M, \mathbf{x}^{(M)}) &= h_N(\mathbf{x}^{(M)}) \prod_{m=0}^{M-1} f_N(t_{m+1} - t_m, \mathbf{x}^{(m+1)} | \mathbf{x}^{(m)}) \frac{1}{h_N(\mathbf{x}^{(0)})}, \\ p_N^{(\nu)\mathbf{x}^{(0)}}(t_1, \mathbf{x}^{(1)}; \dots; t_M, \mathbf{x}^{(M)}) &= h_N^{(0)}(\mathbf{x}^{(M)}) \prod_{m=0}^{M-1} f_N^{(\nu)}(t_{m+1} - t_m, \mathbf{x}^{(m+1)} | \mathbf{x}^{(m)}) \frac{1}{h_N^{(0)}(\mathbf{x}^{(0)})}, \end{aligned}$$

与えられることになる．この表式より , 確率分布は粒子の置換 $x_j^{(m)} \rightarrow x_{\sigma(j)}^{(m)}$, $0 \leq m \leq M$, $\sigma \in \mathfrak{S}_N$, $1 \leq j \leq N$ に対して不変であることが分かる．そこで以下では , 粒子を区別せず扱うことにしたい．

\mathbf{R} 上の非負 Radon 測度全体を \mathfrak{M} と記す．これは漢位相を持つポーランド空間であり , \mathfrak{M} の各元 ξ は $\xi(\cdot) = \sum_{j \in \Lambda} \delta_{x_j}(\cdot)$ と表せる．ここで Λ は添え字集合であり , \mathbf{R} 上の点列 $\mathbf{x} = (x_j)_{j \in \Lambda}$ は任意のコンパクト集合 $K \subset \mathbf{R}$ に対して $\#\{x_j : x_j \in K\} < \infty$ である． $\xi \in \mathfrak{M}$ は粒子に順番を付けなかったときの配置を表し , 順番を付けた配置 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots)$ とは区別して考えることにする．

多時刻結合確率密度関数に対する上の表式も , それぞれ初期配置を $\xi^{(0)}$, $\xi(\mathbf{R}) = N < \infty$ として ,

$$p_N^{\xi^{(0)}}(\xi(t_1), \xi(t_2), \dots, \xi(t_M)) = h_N(\mathbf{x}^{(M)}) \prod_{m=0}^{M-1} f_N(t_{m+1} - t_m, \mathbf{x}^{(m+1)} | \mathbf{x}^{(m)}) \frac{1}{h_N(\mathbf{x}^{(0)})} \quad (1.26)$$

$$p_N^{(\nu)\xi^{(0)}}(\xi(t_1), \xi(t_2), \dots, \xi(t_M)) = h_N^{(0)}(\mathbf{x}^{(M)}) \prod_{m=0}^{M-1} f_N^{(\nu)}(t_{m+1} - t_m, \mathbf{x}^{(m+1)} | \mathbf{x}^{(m)}) \frac{1}{h_N^{(0)}(\mathbf{x}^{(0)})} \quad (1.27)$$

と書き直しておくことにする．ただしここで , $\xi^{(0)}(\cdot) = \sum_{x \in \mathbf{x}^{(0)}} \delta_x(\cdot)$ であり , また $\xi(t_m, \cdot) = \sum_{x \in \mathbf{x}^{(m)}} \delta_x(\cdot)$, $1 \leq m \leq M$ と書いた．

粒子配置 $\xi(\cdot) = \sum_{j \in \Lambda} \delta_{x_j}(\cdot) \in \mathfrak{M}$ に対して , 次の操作を定義しておくことにする．

(制限) $A \subset \mathbf{R}$ に対して, $(\xi \cap A)(\cdot) = \sum_{j \in \Lambda, x_j \in A} \delta_{x_j}(\cdot)$.

(シフト) $u \in \mathbf{R}$ に対して, $\tau_u \xi(\cdot) = \sum_{j \in \Lambda} \delta_{x_j + u}(\cdot)$.

(縮小・拡大) $c > 0$ に対して, $c \circ \xi(\cdot) = \sum_{j \in \Lambda} \delta_{cx_j}(\cdot)$.

ξ の台を $\text{supp } \xi = \{x \in \mathbf{R} : \xi(x) > 0\}$ と書く. また, 次の記法を用いることにする:

$$\prod_{x \in \xi} f(x) \equiv \exp \left\{ \int_{\mathbf{R}} \xi(dx) \log f(x) \right\} = \prod_{x \in \text{supp } \xi} f(x)^{\xi(x)}.$$

各点に高々 1 個しか粒子のない配置全体の集合を

$$\mathfrak{M}_0 = \{ \xi \in \mathfrak{M} : \text{すべての } x \in \mathbf{R} \text{ において } \xi(x) \leq 1 \text{ である} \} \quad (1.28)$$

と書くことにする.

2 多重直交多項式と行列式過程

非衝突 Brown 運動の多時刻結合確率密度 (1.26) を考える：

$$p_N^{\xi^{(0)}}(t_1, \xi^{(1)}; \dots; t_M, \xi^{(M)}) = h_N(\mathbf{x}^{(M)}) \prod_{m=0}^{M-1} f_N(t_{m+1} - t_m, \mathbf{x}^{(m+1)} | \mathbf{x}^{(m)}) \frac{1}{h_N(\mathbf{x}^{(0)})}. \quad (2.1)$$

ただし, $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbf{W}_N^A$ とする. ここで

$$\begin{aligned} \frac{f_N(t, \mathbf{y} | \mathbf{x})}{h_N(\mathbf{x})} &= \frac{1}{\prod_{j=2}^N \prod_{m=1}^{j-1} (x_j - x_m)} \det_{1 \leq j, k \leq N} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-(y_k - x_j)^2 / (2t)} \right] \\ &= \det_{1 \leq j, k \leq N} \left[\frac{e^{-(y_k - x_j)^2 / (2t)}}{\sqrt{2\pi t}} \frac{1}{\prod_{m=1}^{j-1} (x_j - x_m)} \right] \\ &= \det_{1 \leq j, k \leq N} \left[\sum_{\ell=1}^j \frac{e^{-(y_k - x_\ell)^2 / (2t)}}{\sqrt{2\pi t}} \frac{1}{\prod_{1 \leq m \leq j, m \neq \ell} (x_\ell - x_m)} \right] \end{aligned}$$

である. 途中, 行列式の多重線形性を用いた. ところが

$$\begin{aligned} &\sum_{\ell=1}^j \frac{e^{-(y_k - x_\ell)^2 / (2t)}}{\sqrt{2\pi t}} \frac{1}{\prod_{1 \leq m \leq j, m \neq \ell} (x_\ell - x_m)} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_j} dz \frac{e^{-(y_k - z)^2 / (2t)}}{\sqrt{2\pi t}} \frac{1}{\prod_{m=1}^j (z - x_m)} \end{aligned} \quad (2.2)$$

ただし, Γ_j は \mathbb{C} 上の閉曲線であり, 実軸上の点 x_1, \dots, x_j を 1 度ずつ反時計回りに回るものとする. 重要なことは, (2.2) の右辺の複素積分は $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)$ に点の縮重 $x_j = x_k, j \neq k$ を許しても well-defined であるということである. つまり (2.1) 式は $\mathbf{x}^{(0)} \notin \mathbf{W}_N^A$ に拡張できる. 上の (2.2) の複素積分は第 1 種多重 Hermite 多項式とよばれる直交多項式と関係するものである [9]. この直交多項式を利用することにより, 一般の初期配置 $\xi^{(0)} \in \mathfrak{M}$ から出発する非衝突 Brown 運動を議論することができる.

2.1 多重 Hermite 多項式

有限個の粒子配置 $\xi \in \mathfrak{M}$ を一つ選ぶ. つまり $\xi(\mathbb{R}) < \infty$ とする.

第 2 種多重 Hermite 多項式 P_ξ は次の条件を満たす $\xi(\mathbb{R})$ 次のモニック多項式として定義される：

$$\int_{\mathbb{R}} dy P_\xi(y) y^j e^{-(y-x)^2/2} = 0, \quad x \in \text{supp } \xi, \quad j = 0, \dots, \xi(x) - 1. \quad (2.3)$$

第 1 種多重 Hermite 多項式は多項式の組

$$\left\{ A_\xi(\cdot, x) : x \in \text{supp } \xi, \quad A_\xi(y, x) \text{ は } y \text{ の } \xi(x) - 1 \text{ 次多項式} \right\} \quad (2.4)$$

であり，これらは

$$Q_\xi(y) = \sum_{x \in \text{supp } \xi} A_\xi(y, x) e^{-(y-x)^2/2} \quad (2.5)$$

としたとき，次の条件を満たすものとして一意に定義される：

$$\int_{\mathbf{R}} dy Q_\xi(y) y^j = \begin{cases} 0, & j = 0, \dots, \xi(\mathbf{R}) - 2 \\ 1, & j = \xi(\mathbf{R}) - 1. \end{cases} \quad (2.6)$$

次の積分表示が知られている [3] ([6, 7] も参照).

補題 2.1

$$\begin{aligned} P_\xi(y) &= \int_{\mathbf{R}} dw \frac{e^{-(w+iy)^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \prod_{x \in \xi} (iw - x), \\ Q_\xi(y) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma(\xi)} dz \frac{e^{-(z-y)^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\prod_{x \in \xi} (z - x)}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

ここで $\Gamma(\xi)$ は実軸上の $\text{supp } \xi$ の各点を 1 回ずつ反時計回りに回る \mathbf{C} 上の積分経路とする．

$\xi(\mathbf{R}) < \infty$ である $\xi \in \mathfrak{M}$ を一つ固定する． $\xi(\mathbf{R}) = N$ とする．この $\xi(\cdot) = \sum_{j=1}^N \delta_{x_j}(\cdot)$ に対して，次のように帰納的に粒子配置の列 $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_N = \xi$ を定める．

- (1) $\xi_0(\cdot) \equiv 0$ とする．
- (2) $\xi_j, 0 \leq j \leq N-1$ が与えられたとする．このとき

$$x' = \max\{x \in \mathbf{R} : \xi_j(x) > 0\}, \quad x'' = \min\{x \in \mathbf{R} : \xi_j(x) = 0, \xi(x) > 0\}$$

と置く．

- (2a) もしも $\xi_j(x') < \xi(x')$ なら $\xi_{j+1}(\cdot) = \xi_j(\cdot) + \delta_{x'}(\cdot)$ とする．
- (2b) もしも $\xi_j(x') = \xi(x')$ なら $\xi_{j+1}(\cdot) = \xi_j(\cdot) + \delta_{x''}(\cdot)$ とする．

以上の定義より，

$$\begin{aligned} \xi_j(\mathbf{R}) &= j, \quad 0 \leq j \leq N \\ \xi_j(x) &\leq \xi_{j+1}(x), \quad \forall x \in \mathbf{R}, \quad 0 \leq j \leq N-1 \end{aligned}$$

であることになる．次のように定義する：

$$H_j^{(-)}(y; \xi) = P_{\xi_j}(y), \quad H_j^{(+)}(y; \xi) = Q_{\xi_{j+1}}(y), \quad 0 \leq j \leq N-1. \quad (2.8)$$

多重 Hermite 多項式の定義にある条件式 (2.3), (2.6) と上の定義より，次の正規直交関係式が導かれる [3].

補題 2.2

$$\int_{\mathbf{R}} dy H_j^{(-)}(y; \xi) H_j^{(+)}(y; \xi) = \delta_{jk}, \quad 0 \leq j, k \leq N-1. \quad (2.9)$$

注 2.1. (通常の) Hermite 多項式を

$$\begin{aligned} H_j(x) &= j! \sum_{k=0}^{[j/2]} (-1)^k \frac{(2x)^{j-2k}}{k!(j-2k)!} \\ &= 2^{j/2} \int_{\mathbf{R}} dw \frac{e^{-w^2/2}}{\sqrt{2\pi}} (iw + \sqrt{2}x)^j \\ &= \frac{j!}{2\pi i} \oint_{\Gamma_0} dz \frac{e^{2zx-z^2}}{z^{j+1}}, \end{aligned} \quad (2.10)$$

で定義することにする．ここで Γ_0 は原点を 1 回反時計回りに回る \mathbf{C} 上の積分経路である．原点に N 重縮退した N 粒子配置を

$$0_N(\cdot) = N\delta_0(\cdot)$$

と書くことにする．すると，次が成り立つ：

$$\begin{aligned} H_j^{(-)}(y; 0_N) &= 2^{-j/2} H_j(y/\sqrt{2}), \\ H_j^{(+)}(y; 0_N) &= \frac{2^{-j/2}}{j! \sqrt{2\pi}} H_j(y/\sqrt{2}) e^{-y^2/2}, \quad 0 \leq j \leq N-1. \end{aligned} \quad (2.11)$$

$p(t-s, y|x)$ を Brown 運動の推移確率密度関数 (すなわち，平均 x ，分散 $t-s$ のガウス核 (熱核)) とすると，次が成り立つ．

補題 2.3 $\xi(\mathbf{R}) = N$ である $\xi \in \mathfrak{M}$ に対して定義された $\{H_j^{(\pm)}\}_{j=0}^{N-1}$ は， $0 \leq s \leq t, x, y \in \mathbf{R}$ として，次を満たす： $0 \leq j \leq N-1$,

$$\int_{\mathbf{R}} dy H_j^{(-)}\left(\frac{y}{\sqrt{t}}; \frac{1}{\sqrt{t}} \circ \xi\right) p(t-s, y|x) = \left(\frac{s}{t}\right)^{j/2} H_j^{(-)}\left(\frac{x}{\sqrt{s}}; \frac{1}{\sqrt{s}} \circ \xi\right), \quad (2.12)$$

$$\int_{\mathbf{R}} dx p(t-s, y|x) H_j^{(+)}\left(\frac{x}{\sqrt{s}}; \frac{1}{\sqrt{s}} \circ \xi\right) = \left(\frac{s}{t}\right)^{(j+1)/2} H_j^{(+)}\left(\frac{y}{\sqrt{t}}; \frac{1}{\sqrt{t}} \circ \xi\right). \quad (2.13)$$

証明 次の積分を考える．

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbf{R}} dy H_j^{(-)}\left(\frac{y}{\sqrt{t}}; \frac{1}{\sqrt{t}} \circ \xi\right) p(t-s, y|x) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} dw \prod_{x \in \xi_j} \left(iw - \frac{x}{\sqrt{t}}\right) \int_{\mathbf{R}} dy e^{-(y-x)^2/\{2(t-s)\} - (w+iy/\sqrt{t})^2/2} \\ &= \sqrt{\frac{t}{s}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} dw \prod_{x \in \xi_j} \left(iw - \frac{x}{\sqrt{t}}\right) e^{-t(w-ix/\sqrt{t})^2/(2s)}. \end{aligned}$$

積分変数を $w \rightarrow u = w\sqrt{t/s}$ と変換すると (2.12) が得られる．同様の計算により, (2.13) も得られる．■

$t > 0$ に対して次を導入する．

$$\begin{aligned}\phi_j^{(-)}(t, x; \xi) &\equiv t^{j/2} H_j^{(-)}\left(\frac{x}{\sqrt{t}}; \frac{1}{\sqrt{t}} \circ \xi\right), \\ \phi_j^{(+)}(t, x; \xi) &\equiv t^{-(j+1)/2} H_j^{(+)}\left(\frac{x}{\sqrt{t}}; \frac{1}{\sqrt{t}} \circ \xi\right),\end{aligned}\quad (2.14)$$

$0 \leq j \leq N-1, t > 0, x \in \mathbf{R}$. そして

$$\mu^{(\pm)}(t, \mathbf{x}; \xi) = \det_{1 \leq j, k \leq N} \left[\phi_{j-1}^{(\pm)}(t, x_k; \xi) \right] \quad (2.15)$$

とする．

補題 2.2, 2.3 は次のように書き直される．

命題 2.4 $0 \leq t_1 \leq t_2$ に対して

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_2 \phi_j^{(-)}(t_2, x_2; \xi) p(t_2 - t_1, x_2 | x_1) = \phi_j^{(-)}(t_1, x_1; \xi), \quad 0 \leq j \leq N-1 \quad (2.16)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_1 p(t_2 - t_1, x_2 | x_1) \phi_j^{(+)}(t_1, x_1; \xi) = \phi_j^{(+)}(t_2, x_2; \xi), \quad 0 \leq j \leq N-1, \quad (2.17)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 \phi_j^{(-)}(t_2, x_2; \xi) p(t_2 - t_1, x_2 | x_1) \phi_k^{(+)}(t_1, x_1; \xi) = \delta_{jk}, \quad 0 \leq j, k \leq N-1. \quad (2.18)$$

特に, $t \geq 0$ に対して

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \phi_j^{(-)}(t, x; \xi) \phi_k^{(+)}(t, x; \xi) = \delta_{jk}, \quad 0 \leq j, k \leq N-1. \quad (2.19)$$

また, 次も成り立つ．

補題 2.5 $\xi(\cdot) = \sum_{j=1}^N \delta_{x_j}(\cdot) \in \mathfrak{M}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^N$ に対して

$$h_N(\mathbf{y}) = \det_{1 \leq j, k \leq N} \left[y_k^{j-1} \right] = \mu^{(-)}(t, \mathbf{y}; \xi) \quad (2.20)$$

$$\frac{f_N(t, \mathbf{y} | \mathbf{x})}{h_N(\mathbf{x})} = \mu^{(+)}(t, \mathbf{y}; \xi). \quad (2.21)$$

証明 (2.20) は $H_{j-1}^{(-)}(y; \xi)$ が y の $j-1$ 次のモニック多項式であることと, $\phi^{(-)}$ の定義 (2.14) および $\mu^{(-)}$ の定義 (2.15) より導かれる．(2.21) は本 2 節の冒頭に示した計算より得られる．■

2.2 多時刻積率母関数の Fredholm 行列式表示

以上より, N 粒子非衝突 Brown 運動の多時刻結合確率密度関数 (2.1) は, 一般の有限な初期配置 $\xi \in \mathfrak{M}, \xi(\mathbf{R}) = N < \infty$ に対して, 次式で得られることが示された:

$$\begin{aligned} & \mathbf{p}_N^\xi(\xi(t_1), \xi(t_2), \dots, \xi(t_M)) \\ &= \mu^{(-)}(t_M, \mathbf{x}^{(M)}; \xi) \prod_{m=1}^{M-1} f_N(t_{m+1} - t_m, \mathbf{x}^{(m+1)} | \mathbf{x}^{(m)}) \mu^{(+)}(t_1, \mathbf{x}^{(1)}; \xi). \end{aligned} \quad (2.22)$$

ただしここで, $\xi(t_m, \cdot) = \sum_{x \in \mathfrak{X}^{(m)}} \delta_x(\cdot), 1 \leq m \leq M$ である.

この多時刻結合確率密度関数に従う過程を $\Xi(t, \cdot), t \geq 0$ と書くことにする. すると

$$\Xi(0, \cdot) = \xi(\cdot) \in \mathfrak{M}$$

$$\Xi(t, \mathbf{R}) = N, \quad t \geq 0$$

$$\Xi(t, \cdot) \in \mathfrak{M}_0, \quad t > 0$$

であり, $t > 0$ のときは

$$\Xi(t, \cdot) = \sum_{x \in \mathbf{X}(t)} \delta_x(\cdot), \quad \mathbf{X}(t) \in \mathbf{W}_N^A$$

と書けて, $\mathbf{X}(t) = (X_1(t), \dots, X_N(t))$ は ($\beta = 2$ の) Dyson 模型の方程式を満たす:

$$X_j(t) = B_j(t) + \sum_{\substack{1 \leq k \leq N \\ k \neq j}} \int_0^t \frac{1}{X_j(s) - X_k(s)} ds, \quad t \in (0, \infty), 1 \leq j \leq N$$

この過程に対する期待値を $\mathbf{E}^\xi[\cdot]$ で表すことにする.

$\mathbf{x}^{(m)} \in \mathbf{R}^N, 0 \leq m \leq M$ と $N' = 1, 2, \dots, N$ に対して, $\mathbf{x}_{N'}^{(m)} = (x_1^{(m)}, \dots, x_{N'}^{(m)})$ とする. これに対応して, $\xi(t_m, \cdot) = \sum_{x \in \mathfrak{X}^{(m)}} \delta_x(\cdot)$ に対して $\xi_{N'}(t_m, \cdot) = \sum_{x \in \mathfrak{X}_{N'}^{(m)}} \delta_x(\cdot)$ とする. N 以下の自然数の列 $\{N_m\}_{m=1}^M$ に対して (N_1, \dots, N_M) -多時刻相関関数を次式で定義する:

$$\begin{aligned} & \rho^\xi(\xi_{N_1}(t_1), \dots, \xi_{N_M}(t_M)) \\ &= \int_{\prod_{m=1}^M \mathbf{R}^{N-N_m}} \mathbf{p}_N^\xi(\xi(t_1), \dots, \xi(t_M)) \prod_{m=1}^M \frac{1}{(N - N_m)!} \prod_{j=N_m+1}^N dx_j^{(m)}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

$C_0(\mathbf{R})$ を台がコンパクトである実数関数全体とする. $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_M) \in C_0(\mathbf{R})^M, \boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_M) \in \mathbf{R}^M$ に対して, 時刻の列 $0 < t_1 < \dots < t_M$ における多時刻積率母関数は

$$\mathbf{E}^\xi \left[\exp \left\{ \sum_{m=1}^M \theta_m \sum_{j_m=1}^{N_m} f_m(X_{j_m}(t_m)) \right\} \right] \quad (2.24)$$

で与えられる．ここで

$$\chi_m(x) = e^{\theta_m f_m(x)} - 1, \quad 1 \leq m \leq M \quad (2.25)$$

として, $\chi = (\chi_1, \dots, \chi_M)$ とおくと, 上式は多時刻相関関数を用いて次のように展開できる．これを $\mathcal{G}^\xi(\chi)$ と書くことにする:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}^\xi(\chi) &= \sum_{N_1=0}^N \cdots \sum_{N_M=0}^N \prod_{m=1}^M \frac{1}{N_m!} \int_{\mathbf{R}^{N_1}} \prod_{j=1}^{N_1} dx_j^{(1)} \cdots \int_{\mathbf{R}^{N_M}} \prod_{j=1}^{N_M} dx_j^{(M)} \\ &\quad \times \prod_{m=1}^M \prod_{j=1}^{N_m} \chi_m(x_j^{(m)}) \rho^\xi(\xi_{N_1}(t_1), \dots, \xi_{N_M}(t_M)). \end{aligned} \quad (2.26)$$

つまり, これは多時刻相関関数の母関数になっている．

$(\{1, 2, \dots, M\} \times \mathbf{R}) \times (\{1, 2, \dots, M\} \times \mathbf{R})$ 上の積分核 $A^{m,n}(x, y)$, $m, n \in \{1, 2, \dots, M\}$, $x, y \in \mathbf{R}$ に対して, $\{1, 2, \dots, M\} \times \mathbf{R}$ 上の Fredholm 行列式を

$$\begin{aligned} \text{Det} \left[\delta_{mn} \delta(x - y) + A^{m,n}(x, y) \right] &= \sum_{N_1=0}^N \cdots \sum_{N_M=0}^N \prod_{m=1}^M \frac{1}{N_m!} \int_{\mathbf{R}^{N_1}} \prod_{j=1}^{N_1} dx_j^{(1)} \cdots \int_{\mathbf{R}^{N_M}} \prod_{j=1}^{N_M} dx_j^{(M)} \\ &\quad \times \det_{\substack{1 \leq j \leq N_m, 1 \leq k \leq N_n \\ 1 \leq m, n \leq M}} \left[A^{m,n}(x_j^{(m)}, x_k^{(n)}) \right]. \end{aligned} \quad (2.27)$$

で定義する．次節では次の命題を証明する．ただし, $\mathbf{1}(\omega)$ は条件 ω の指示関数であり, 条件 ω が満たされたとき $\mathbf{1}(\omega) = 1$, それ以外は $\mathbf{1}(\omega) = 0$ である．

命題 2.6 $\xi \in \mathfrak{M}, \xi(\mathbf{R}) = N$ に対して,

$$\begin{aligned} \mathbb{K}^\xi(s, x; t, y) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma(\xi)} dz p(s, x|z) \int_{\mathbf{R}} dw p(t, -iy|w) \frac{1}{iw - z} \prod_{x' \in \xi} \frac{iw - x'}{z - x'} \\ &\quad - \mathbf{1}(s > t) p(s - t, x|y), \end{aligned} \quad (2.28)$$

$s, t > 0, x, y \in \mathbf{R}$ とする．ただし, $\Gamma(\xi)$ は実軸上の $\text{supp } \xi$ の各点を一度ずつ反時計回りに回る \mathbf{C} 上の積分経路である．このとき

$$\mathcal{G}^\xi(\chi) = \text{Det} \left[\delta_{mn} \delta(x - y) + \mathbb{K}^\xi(t_m, x; t_n, y) \chi_n(y) \right] \quad (2.29)$$

である．

相関関数が行列式で表される粒子配置空間上の分布およびその分布に従う確率過程は行列式点過程 (determinantal point process) またはフェルミ粒子点過程 (Fermion point process) とよ

ばれ, 白井・高橋 [42] や Soshnikov [43] らによって詳しく調べられている．多時刻積率母関数が多時刻相関関数の母関数になっていること (2.26) と Fredholm 行列式の定義式 (2.27) より, この命題 2.6 から, 非衝突 Brown 運動の任意の多時刻相関関数が行列式で与えられることが導かれる．このような多粒子確率過程を行列式過程 (determinantal process) とよぶことにする [23]. 任意の時刻での同時刻分布が行列式点過程となっているので, これは行列式点過程をプロセスとして拡張したものと見なせる．次の定理が得られる．

定理 2.7 N 粒子非衝突 Brown 運動は行列式過程である．すなわち, 任意の多時刻相関関数は行列式

$$\rho^\xi(\xi_{N_1}(t_1), \dots, \xi_{N_M}(t_M)) = \det_{\substack{1 \leq j \leq N_m, 1 \leq k \leq N_n \\ 1 \leq m, n \leq M}} \left[\mathbb{K}^\xi(t_m, x_j^{(m)}; t_n, x_k^{(n)}) \right] \quad (2.30)$$

で与えられる．ここで \mathbb{K}^ξ は初期配置 $\xi \in \mathfrak{M}, \xi(\mathbf{R}) = N$ に応じて (2.28) 式で与えられる．

行列式過程の多時刻相関関数を定める積分核 \mathbb{K}^ξ を相関核とよぶことにする．相関核 (2.28) の右辺第 1 項の被積分関数を z の複素関数として見ると, 初期配置が $\xi \in \mathfrak{M}_0$ のときは, 極はすべて 1 位なので Cauchy の留数定理より容易に z に関する複素積分を実行できる．その結果, 次の表式が得られる．

$$\begin{aligned} \mathbb{K}^\xi(s, x; t, y) &= \int_{\mathbf{R}} \xi(dx') p(s, x|x') \int_{\mathbf{R}} dw p(t, -iy|w) \prod_{y' \in \xi - \delta_{x'}} \frac{iw - y'}{x' - y'} \\ &\quad - \mathbf{1}(s > t) p(s - t, x|y), \quad \xi \in \mathfrak{M}_0. \end{aligned} \quad (2.31)$$

2.3 命題 2.6 の証明

定義 (2.24), (2.25) に (2.22) を代入すると

$$\begin{aligned} \mathcal{G}^\xi(\chi) &= \mathbf{E}^\xi \left[\prod_{m=1}^M \prod_{j_m=1}^N \left\{ 1 + \chi_m(X_{j_m}(t_m)) \right\} \right] \\ &= \left(\frac{1}{N!} \right)^M \int_{\mathbf{R}^{NM}} \prod_{m=1}^M \prod_{j=1}^N dx_j^{(m)} \det_{1 \leq j, k \leq N} \left[\phi_{j-1}^{(-)}(t_M, x_k^{(M)}; \xi) (1 + \chi_M(x_k^{(M)})) \right] \\ &\quad \times \prod_{m=1}^{M-1} \det_{1 \leq j, k \leq N} \left[p(t_{m+1} - t_m, x_k^{(m+1)} | x_j^{(m)}) (1 + \chi_m(x_k^{(m)})) \right] \det_{1 \leq j, k \leq N} \left[\phi_{j-1}^{(+)}(t_1, x_k^{(1)}; \xi) \right]. \end{aligned}$$

2 乗可積分な関数 $g_j, \tilde{g}_j, 1 \leq j \leq N$ に対して, 次の Heine の公式が証明できる．

$$\frac{1}{N!} \int_{\mathbf{R}^N} \det_{1 \leq j, k \leq N} \left[g_j(x_k) \right] \det_{1 \leq j, k \leq N} \left[\tilde{g}_j(x_k) \right] \prod_{j=1}^N dx_j = \det_{1 \leq j, k \leq N} \left[\int_{\mathbf{R}} g_j(x) \tilde{g}_k(x) dx \right]. \quad (2.32)$$

これを繰り返し用いることによって,

$$\mathcal{G}^\xi(\boldsymbol{\chi}) = \det_{1 \leq j, k \leq N} [F_{jk}^\xi(\boldsymbol{\chi})], \quad (2.33)$$

$$\begin{aligned} F_{jk}^\xi(\boldsymbol{\chi}) &= \int_{\mathbf{R}^M} \prod_{m=1}^M dx^{(m)} \left\{ \phi_{j-1}^{(-)}(t_M, x^{(M)}; \xi) (1 + \chi_M(x^{(M)})) \right\} \\ &\quad \times \prod_{m=1}^{M-1} \left\{ p(t_{m+1} - t_m, x^{(m+1)} | x^{(m)}) (1 + \chi_m(x^{(m)})) \right\} \phi_{k-1}^{(+)}(t_1, x^{(1)}; \xi). \end{aligned}$$

が得られる. χ_m について展開して命題 2.4 を用いると

$$\begin{aligned} F_{jk}^\xi(\boldsymbol{\chi}) &= \delta_{jk} + \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{m_1=1}^M \cdots \sum_{m_q=1}^M \int_{\mathbf{R}^q} \prod_{n=1}^q dx^{(m_n)} \\ &\quad \times \phi_{j-1}^{(-)}(t_{m_1}, x^{(m_1)}; \xi) \chi_{m_1}(x^{(m_1)}) \hat{p}(t_{m_1} - t_{m_2}, x^{(m_1)} | x^{(m_2)}) \chi_{m_2}(x^{(m_2)}) \\ &\quad \times \hat{p}(t_{m_2} - t_{m_3}, x^{(m_2)} | x^{(m_3)}) \times \cdots \times \chi_{m_q}(x^{(m_q)}) \phi_{k-1}^{(+)}(t_{m_q}, x^{(m_q)}; \xi) \end{aligned}$$

となる. ただし,

$$\hat{p}(t - s, x | y) = \begin{cases} p(t - s, x | y) & t > s \text{ のとき} \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases} \quad (2.34)$$

とした. ここで

$$\hat{\chi}^{m,n}(x, y) = \hat{p}(t_m - t_n, x | y) \chi_n(y), \quad m, n \in \{1, \dots, M\}, x, y \in \mathbf{R} \quad (2.35)$$

と定義して, これを (m, n) -成分にもつ積分核の行列 $\hat{\chi}$ を考える. この q 乗 $(\hat{\chi})^q, q = 2, 3, \dots$ の (m, n) -成分を

$$\begin{aligned} & [(\hat{\chi})^q]^{m,n}(x, y) \\ &= \sum_{m_1=1}^M \int_{\mathbf{R}} dx^{(m_1)} \cdots \sum_{m_{q-1}=1}^M \int_{\mathbf{R}} dx^{(m_{q-1})} \hat{\chi}^{m, m_1}(x, x^{(m_1)}) \times \cdots \times \hat{\chi}^{m_{q-1}, n}(x^{(m_{q-1})}, y). \end{aligned}$$

と定義する. すると,

$$\begin{aligned} F_{jk}^\xi(\boldsymbol{\chi}) &= \delta_{jk} \\ &+ \sum_{m=1}^M \int_{\mathbf{R}} dx \sum_{n=1}^M \int_{\mathbf{R}} dy \phi_{j-1}^{(-)}(t_m, x; \xi) \chi_m(x) \left\{ \delta_{mn} \delta(x - y) + \sum_{q=1}^{\infty} [(\hat{\chi})^q]^{m,n}(x, y) \right\} \phi_{k-1}^{(+)}(t_n, y; \xi) \end{aligned}$$

となる. ここで, $\hat{1}^{m,n}(x, y) = \delta_{mn} \delta(x - y)$ と書くことにすると

$$\sum_{\ell=1}^M \int_{\mathbf{R}} dy [\hat{1} - \hat{\chi}]^{m,\ell}(x, y) \left\{ \delta_{\ell n} \delta(y - z) + \sum_{q=1}^{\infty} [(\hat{\chi})^q]^{\ell,n}(y, z) \right\} = \hat{1}^{m,n}(x, z), \quad (2.36)$$

であるから，

$$\delta_{mn}\delta(x-y) + \sum_{q=1}^{\infty} [(\hat{\chi})^q]^{m,n}(x,y) = \left[\frac{\hat{1}}{\hat{1} - \hat{\chi}} \right]^{m,n}(x,y)$$

と書けることに注意する．そこで

$$\begin{aligned} \widehat{B}_j^{(m)}(x) &= \sum_{n=1}^M \int_{\mathbf{R}} dy \phi_{j-1}^{(-)}(t_n, y; \xi) \chi_n(y) \left[\frac{\hat{1}}{\hat{1} - \hat{\chi}} \right]^{n,m}(y,x), \\ \widehat{C}_k^{(m)}(x) &= \phi_{k-1}^{(+)}(t_m, x; \xi) \end{aligned} \quad (2.37)$$

とおくと，

$$F_{jk}^{\xi}(\chi) = \delta_{jk} + \sum_{m=1}^M \int_{\mathbf{R}} dx \widehat{B}_j^{(m)}(x) \widehat{C}_k^{(m)}(x) \quad (2.38)$$

という表式が得られる．

ところがここで，

$$\begin{aligned} & \det_{1 \leq j, k \leq N} \left[\delta_{jk} + \sum_{m=1}^M \int_{\mathbf{R}} dx \widehat{B}_j^{(m)}(x) \widehat{C}_k^{(m)}(x) \right] \\ &= \det_{\substack{1 \leq j^{(m)}, j^{(n)} \leq N \\ 1 \leq m, n \leq M}} \left[\delta_{mn} \delta_{j^{(m)} j^{(n)}} + \int_{\mathbf{R}} dx \widehat{B}_{j^{(m)}}^{(m)}(x) \widehat{C}_{j^{(n)}}^{(m)}(x) \right] \\ &= \sum_{N_1=0}^N \cdots \sum_{N_M=0}^N \prod_{m=1}^M \frac{1}{N_m!} \int_{\mathbf{R}^{N_1}} \prod_{j=1}^{N_1} dx_j^{(1)} \cdots \int_{\mathbf{R}^{N_M}} \prod_{j=1}^{N_M} dx_j^{(M)} \\ & \quad \times \det_{\substack{1 \leq j \leq N_m, 1 \leq k \leq N_n \\ 1 \leq m, n \leq M}} \left[\sum_{p=1}^N \widehat{C}_p^{(m)}(x_j^{(m)}) \widehat{B}_p^{(n)}(x_k^{(n)}) \right]. \end{aligned} \quad (2.39)$$

であることが示せる．この最後の表式は Fredholm 行列式

$$\text{Det} \left[\hat{1}^{m,n}(x,y) + \sum_{p=1}^N \widehat{C}_p^{(m)}(x) \widehat{B}_p^{(n)}(y) \right]$$

である．したがって，

$$\widehat{S}_N^{m,n}(x,y;\xi) = \sum_{p=1}^N \phi_{p-1}^{(+)}(t_m, x; \xi) \phi_{p-1}^{(-)}(t_n, y; \xi) \quad (2.40)$$

とおくと，

$$\mathcal{G}^{\xi}(\chi) = \text{Det} \left[\hat{1}^{m,n}(x,z) + \sum_{\ell=0}^M \int_{\mathbf{R}} dy \widehat{S}_N^{m,\ell}(x,y;\xi) \chi_{\ell}(y) \left[\frac{\hat{1}}{\hat{1} - \hat{\chi}} \right]^{\ell,n}(y,z) \right]$$

であることが導かれたことになる．

さきの (2.36) より

$$\hat{\mathbf{1}}^{m,n}(x, z) = \sum_{\ell=1}^M \int_{\mathbf{R}} dy \left\{ \hat{\mathbf{1}}^{m,\ell}(x, y) - \hat{p}(t_m - t_n, x|y) \chi_{\ell}(y) \right\} \left[\frac{\hat{\mathbf{1}}}{\hat{\mathbf{1}} - \hat{\chi}} \right]^{\ell,n}(y, z)$$

なので, これを上式に代入すると

$$\begin{aligned} \mathcal{G}^{\xi}(\chi) &= \text{Det} \left[\sum_{\ell=1}^M \int_{\mathbf{R}} dy \left[\hat{\mathbf{1}}^{m,\ell}(x, y) + \left\{ \hat{S}^{m,\ell}(x, y; \xi) - \hat{p}(t_m - t_{\ell}; \xi) \right\} \chi_{\ell}(y) \right] \right. \\ &\quad \left. \times \left[\frac{\hat{\mathbf{1}}}{\hat{\mathbf{1}} - \hat{\chi}} \right]^{\ell,n}(y, z) \right] \\ &= \text{Det} \left[\hat{\mathbf{1}}^{m,n}(x, y) + \left\{ \hat{S}^{m,n}(x, y; \xi) - \hat{p}(t_m - t_n; \xi) \right\} \chi_n(y) \right] \\ &\quad \times \text{Det} \left[\left[\frac{\hat{\mathbf{1}}}{\hat{\mathbf{1}} - \hat{\chi}} \right]^{m,n}(x, y) \right] \end{aligned}$$

となる. ここで

$$\text{Det} \left[\left[\frac{\hat{\mathbf{1}}}{\hat{\mathbf{1}} - \hat{\chi}} \right]^{m,n}(x, y) \right] = \left\{ \text{Det} \left[[\hat{\mathbf{1}} - \hat{\chi}]^{m,n}(x, y) \right] \right\}^{-1}$$

であるが, $[\hat{\mathbf{1}} - \hat{\chi}]^{m,n}(x, y)$ は $m < n$ なら零, $m = n$ のときは $\delta(x - y)$ なので. $\text{Det} \left[[\hat{\mathbf{1}} - \hat{\chi}]^{m,n}(x, y) \right] = 1$ である. 以上より,

$$\mathcal{G}^{\xi}(\chi) = \text{Det} \left[\delta_{mn} \delta(x - y) + \left\{ \hat{S}^{m,n}(x, y; \xi) - \mathbf{1}(m > n) p(t_m - t_n, x|y) \right\} \chi_n(y) \right]$$

が得られた.

さて, $\phi^{(\pm)}(t, x; \xi)$ の定義を思い出すと, (2.40) は

$$\begin{aligned} \hat{S}^{m,n}(x, y; \xi) &= \sum_{j=0}^{N-1} \phi_j^{(+)}(t_m, x; \xi) \phi_j^{(-)}(t_n, y; \xi) \\ &= \frac{1}{\sqrt{t_m}} \sum_{j=0}^{N-1} \left(\frac{t_n}{t_m} \right)^{j/2} H_j^{(+)} \left(\frac{x}{\sqrt{t_m}}; \frac{1}{\sqrt{t_m}} \circ \xi \right) H_j^{(-)} \left(\frac{y}{\sqrt{t_n}}; \frac{1}{\sqrt{t_n}} \circ \xi \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{t_m}} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma(t_m^{-1/2} \circ \xi_N)} dz \frac{e^{-(z-x/\sqrt{t_m})^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} dw \frac{e^{-(w+iy/\sqrt{t_n})^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \\ &\quad \times \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{t_n}{t_m} \right)^{k/2} \frac{\prod_{\ell=1}^k (iw - x_{\ell}/\sqrt{t_n})}{\prod_{\ell=1}^{k+1} (z - x_{\ell}/\sqrt{t_m})} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma(t_m^{-1/2} \circ \xi_N)} dz \frac{e^{-(z-x/\sqrt{t_m})^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} dw \frac{e^{-(w+iy/\sqrt{t_n})^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \\ &\quad \times \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\prod_{\ell=1}^k (i\sqrt{t_n} w - x_{\ell})}{\prod_{\ell=1}^{k+1} (\sqrt{t_m} z - x_{\ell})} \end{aligned}$$

である． $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$ に対して，等式

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\prod_{\ell=1}^k (z_2 - x_\ell)}{\prod_{\ell=1}^{k+1} (z_1 - x_\ell)} \\
&= \frac{1}{z_1 - x_1} + \frac{z_2 - x_1}{(z_1 - x_1)(z_1 - x_2)} + \cdots + \frac{(z_2 - x_1)(z_2 - x_2) \cdots (z_2 - x_{N-1})}{(z_1 - x_1)(z_1 - x_2) \cdots (z_1 - x_{N-1})(z_1 - x_N)} \\
&= \left(\prod_{\ell=1}^N \frac{z_2 - x_\ell}{z_1 - x_\ell} - 1 \right) \frac{1}{z_2 - z_1}. \tag{2.41}
\end{aligned}$$

を証明することができる．これを用いると

$$\begin{aligned}
\widehat{S}_N^{m,n}(x, y; \xi) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma(t_m^{-1/2} \circ \xi)} dz \frac{e^{-(z-x/\sqrt{t_m})^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} dw \frac{e^{-(w+iy/\sqrt{t_n})^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \\
&\quad \times \left(\prod_{\ell=1}^N \frac{i\sqrt{t_n}w - x_\ell}{\sqrt{t_m}z - x_\ell} - 1 \right) \frac{1}{i\sqrt{t_n}w - \sqrt{t_m}s}
\end{aligned}$$

であるが，

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma(t_m^{-1/2} \circ \xi)} dz \frac{e^{-(z-x/\sqrt{t_m})^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} dw \frac{e^{-(w+iy/\sqrt{t_n})^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{i\sqrt{t_n}w - \sqrt{t_m}z} \\
&= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma(t_m^{-1/2} \circ \xi)} dz \frac{e^{-(z-x/\sqrt{t_m})^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} dw \frac{e^{-(w+iy/\sqrt{t_n})^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{i\sqrt{t_n}w} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sqrt{\frac{t_m}{t_n}} \frac{z}{iw} \right)^j = 0
\end{aligned}$$

である．積分変数を適当に変換すれば， $\widehat{S}^{m,n}(x, y; \xi)$ が (2.28) の最初の項に等しいことが示せる．■

3 スケーリング極限

3.1 Hermite 核と Laguerre 核

原点に N 重縮退した N 粒子配置を $0_N(\cdot) = N\delta_0(\cdot)$ と書くことにした．注 2.1 で述べたように $H^{(\pm)}(y; 0_N)$ は通常の Hermite 多項式を用いて表せる．このことから， 0_N を初期配置とする非衝突 Brown 運動の相関核は次式で与えられることが分かる：

$$\begin{aligned} & \widehat{S}^{m,n}(x, y; 0_N) - \mathbf{1}(m > n)p(t_m - t_n, x|y) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2t_m}} e^{-x^2/(4t_m) + y^2/(4t_n)} \sum_{j=0}^{N-1} \left(\frac{t_n}{t_m}\right)^{j/2} \varphi_j\left(\frac{x}{\sqrt{2t_m}}\right) \varphi_j\left(\frac{y}{\sqrt{2t_n}}\right) - \mathbf{1}(m > n)p(t_m - t_n, x|y). \end{aligned}$$

ただし， $\varphi_j(x)$ は正規直交 Hermite 関数であり，Hermite 多項式 $H_j(x)$ を用いて

$$\varphi_j(x) = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}2^j j!}} e^{-x^2/2} H_j(x) \quad (3.1)$$

で与えられる．ここで，熱核に対する Mehler の公式

$$p(t_m - t_n, x|y) = \frac{1}{\sqrt{2t_m}} e^{-x^2/(4t_m) + y^2/(4t_n)} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{t_n}{t_m}\right)^{j/2} \varphi_j\left(\frac{x}{\sqrt{2t_m}}\right) \varphi_j\left(\frac{y}{\sqrt{2t_n}}\right), \quad t_n < t_m \quad (3.2)$$

を用いる．また，相関核に

$$\mathbb{K}^\xi(s, x; t, y) \rightarrow \frac{f(y, t)}{f(x, s)} \mathbb{K}^\xi(s, x; t, y)$$

という変換をしても，行列式で与えられる相関関数は不変であることに注意する．以上から， 0_N から出発したときの非衝突 Brown 運動の相関核は次のようにとれることがわかる：

$$\mathbb{K}^0(s, x; t, y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2s}} \sum_{j=0}^{N-1} \left(\frac{t}{s}\right)^{j/2} \varphi_j\left(\frac{x}{\sqrt{2s}}\right) \varphi_j\left(\frac{y}{\sqrt{2t}}\right) & s \leq t \text{ のとき} \\ -\frac{1}{\sqrt{2s}} \sum_{j=N}^{\infty} \left(\frac{t}{s}\right)^{j/2} \varphi_j\left(\frac{x}{\sqrt{2s}}\right) \varphi_j\left(\frac{y}{\sqrt{2t}}\right) & s > t \text{ のとき.} \end{cases} \quad (3.3)$$

これを Hermite 核とよぶ．

1.4 節で導入した非衝突 Bessel 過程 $\mathbf{X}^{(\nu)}(t) = (X_1^{(\nu)}(t), \dots, X_N^{(\nu)}(t))$ に対して， $\widehat{\mathbf{X}}^{(\nu)}(t) = (X_1^{(\nu)}(t)^2, \dots, X_N^{(\nu)}(t)^2)$ を非衝突 2 乗 Bessel 過程という．本講義では詳しく述べられないが，これも一般の初期配置に対して行列式過程であることが示せる．特に 0_N を初期配置としたときの相関核は

$$\mathbb{K}^{(\nu)0}(s, x; t, y) = \begin{cases} \frac{1}{2s} \sum_{j=0}^{N-1} \left(\frac{t}{s}\right)^j \varphi_j^\nu\left(\frac{x}{2s}\right) \varphi_j^\nu\left(\frac{y}{2t}\right) & s \leq t \text{ のとき} \\ -\frac{1}{2s} \sum_{j=N}^{\infty} \left(\frac{t}{s}\right)^j \varphi_j^\nu\left(\frac{x}{2s}\right) \varphi_j^\nu\left(\frac{y}{2t}\right) & s > t \text{ のとき} \end{cases} \quad (3.4)$$

で与えられる．ここで $\varphi_j^\nu(x)$ は Laguerre 多項式が

$$\begin{aligned} L_n^\nu(x) &= \frac{e^x x^{-\nu}}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^{n+\nu}) \\ &= \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{n+\nu}{n-r} \frac{x^r}{r!}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

で与えられたとき，次式で定義される正規直交 Laguerre 関数である：

$$\varphi_n^\nu(x) = \sqrt{\frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+\nu+1)}} x^{\nu/2} e^{-x/2} L_n^\nu(x). \quad (3.6)$$

(3.4) を Laguerre 核とよぶことにする．

3.2 スケーリング極限

本講義では背景を詳しく述べる事が出来ないが，無限粒子系およびランダム行列 [35, 37] の漸近評価の研究において，相関核のスケーリング極限が詳しく調べられている [17, 22, 23].

Hermite 核のバルク・スケーリング極限

相関関数を観測する位置 x は (原点付近に) 固定し，時刻 t を粒子数 N とともに無限大にする：

$$x = \text{一定}, \quad t \sim N \rightarrow \infty.$$

これをバルク・スケーリング極限という．この極限で Hermite 核は次の相関核に収束することが示せる．これは sine 核とよばれる．(ここでは，粒子密度 $\rho = 1/\pi$ と規格化した．)

$$\mathcal{K}^{\sin}(s, x; t, y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \int_0^1 du e^{(t-s)u^2/2} \cos\{u(x-y)\} & s < t \text{ のとき} \\ \frac{\sin(x-y)}{\pi(x-y)} & s = t \text{ のとき} \\ -\frac{1}{\pi} \int_1^\infty du e^{(t-s)u^2/2} \cos\{u(x-y)\} & s > t \text{ のとき.} \end{cases} \quad (3.7)$$

この sine 核で定められる行列式過程は，時間的にも空間的にも斉次な無限粒子系である．

Hermite 核のソフトエッジ・スケーリング極限

粒子数 $N \rightarrow \infty$ に伴って，相関関数の観測位置 x と時刻 t を次のオーダーで大きくする：

$$x \sim N^{2/3} \rightarrow \infty, \quad t \sim N^{1/3} \rightarrow \infty.$$

これをソフトエッジ・スケーリング極限という．この極限で Hermite 核は次の相関核に収束する．

$$\mathcal{K}^{\text{Ai}}(s, x; t, y) = \begin{cases} \int_{-\infty}^0 d\lambda e^{(t-s)\lambda} \text{Ai}(x-\lambda) \text{Ai}(y-\lambda) & s \leq t \text{ のとき} \\ -\int_0^{\infty} d\lambda e^{(t-s)\lambda} \text{Ai}(x-\lambda) \text{Ai}(y-\lambda) & s > t \text{ のとき} . \end{cases} \quad (3.8)$$

ここで Ai は Airy 関数

$$\text{Ai}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{i(xk+k^3/3)} \quad (3.9)$$

である． \mathcal{K}^{Ai} は Airy 核とよばれる．この Airy 核で定められる行列式過程は，時間的には斉次であるが，空間的には非斉次な無限粒子系である．

Laguerre 核のハードエッジ・スケーリング極限

相関関数を観測する位置 x は正の値に固定し，時刻 t を粒子数 N とともに無限大にする：

$$x = \text{一定} > 0, \quad t \sim N \rightarrow \infty.$$

Laguerre 核に対しては，これをハードエッジ・スケーリング極限という．この極限で Laguerre 核は次に収束する．

$$\mathcal{K}^{(\nu)}(s, x; t, y) = \begin{cases} \int_0^1 d\lambda J_{\nu}(2\sqrt{\lambda x}) J_{\nu}(2\sqrt{\lambda y}) e^{2(t-s)\lambda} & s < t \text{ のとき} \\ \frac{J_{\nu}(2\sqrt{x}) \sqrt{y} J'_{\nu}(2\sqrt{y}) - J_{\nu}(2\sqrt{y}) \sqrt{x} J'_{\nu}(2\sqrt{x})}{x-y} & s = t \text{ のとき} \\ -\int_1^{\infty} d\lambda J_{\nu}(2\sqrt{\lambda x}) J_{\nu}(2\sqrt{\lambda y}) e^{2(t-s)\lambda} & s > t \text{ のとき} . \end{cases} \quad (3.10)$$

ただし， J_{ν} は ν -次の Bessel 関数

$$J_{\nu}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z/2)^{2n+\nu}}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+\nu+1)} \quad (3.11)$$

であり， $\mathcal{K}^{(\nu)}$ は ν -次の Bessel 核とよばれる．この Bessel 核で定められる行列式過程は，時間的には斉次であるが，空間的には非斉次な無限粒子系である．

上の 3 つの無限粒子系は可逆過程であり，その平衡分布は行列式点過程である．長田 [38] は，平衡分布が行列式点過程である拡散過程をディリクレ形式による手法により構成した．長田の確率過程と上述の無限粒子行列式過程との一致は明らかではない．

3.3 有効ハミルトニアンとスペクトル射影

上述の Hermite 核, Laguerre 核, およびそれらのスケーリング極限で得られる相関核は, 次のような構造を共有している:

$$\mathbf{K}(s, x; t, y) = \begin{cases} \langle x | e^{(t-s)\hat{\mathcal{H}}} \mathcal{P} | y \rangle & s \leq t \text{ のとき} \\ -\langle x | e^{(t-s)\hat{\mathcal{H}}} (1 - \mathcal{P}) | y \rangle & s > t \text{ のとき.} \end{cases} \quad (3.12)$$

ただし, $\hat{\mathcal{H}}$ はハミルトニアンであり, その固有値, 固有ベクトルを $\hat{\mathcal{H}}|\lambda\rangle = \lambda|\lambda\rangle$ と表す. また, ハミルトニアンの座標表示を $\langle x | \hat{\mathcal{H}} | y \rangle = \delta(x - y)\mathcal{H}$ とする. \mathcal{P} はスペクトル空間での射影演算を表す. 具体的には以下のものである.

(i) Hermite 核:
$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\varphi &= -\frac{1}{4} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{4} \\ \hat{\mathcal{H}}_\varphi |n\rangle &= \frac{n}{2} |n\rangle, \quad n \in \mathbf{N}_0 \\ \mathcal{P}_\varphi &= \sum_{0 \leq j \leq N-1} |j\rangle \langle j| \end{aligned}$$

(ii) Laguerre 核:
$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\varphi^\nu} &= -\frac{\partial}{\partial x} x \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{4} \left(\sqrt{x} - \frac{\nu}{\sqrt{x}} \right)^2 - \frac{1}{2}, \quad \nu > -1 \\ \hat{\mathcal{H}}_{\varphi^\nu} |n\rangle &= n |n\rangle, \quad n \in \mathbf{N}_0 \\ \mathcal{P}_{\varphi^\nu} &= \sum_{0 \leq j \leq N-1} |j\rangle \langle j| \end{aligned}$$

(iii) sine 核:
$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\sin} &= -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ \hat{\mathcal{H}}_{\sin} |\lambda, \mathbf{p}\rangle &= \lambda |\lambda, \mathbf{p}\rangle, \quad \lambda \geq 0, \quad \mathbf{p} = \pm \text{ (パリティ)} \\ \mathcal{P}_{\sin} &= \sum_{\mathbf{p}=\pm} \int_0^1 d\lambda |\lambda, \mathbf{p}\rangle \langle \lambda, \mathbf{p}| \end{aligned}$$

(iv) Airy 核:
$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\text{Ai}} &= -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + x \\ \hat{\mathcal{H}}_{\text{Ai}} |\lambda\rangle &= \lambda |\lambda\rangle, \quad \lambda \in \mathbf{R} \\ \mathcal{P}_{\text{Ai}} &= \int_{-\infty}^0 d\lambda |\lambda\rangle \langle \lambda| \end{aligned}$$

(v) Bessel 核:
$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\text{J}} &= -\frac{\partial}{\partial x} x \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\nu^2}{4x}, \quad \nu > -1 \\ \hat{\mathcal{H}}_{\text{J}} |\lambda\rangle &= \lambda |\lambda\rangle, \quad \lambda \geq 0 \\ \mathcal{P}_{\text{J}} &= \int_0^1 d\lambda |\lambda\rangle \langle \lambda|. \end{aligned} \quad (3.13)$$

一般に

$$\mathcal{H} = -a(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} - b(x) \frac{\partial}{\partial x} - c(x)$$

の形のハミルトニアンを考える. ただし, $a(x), b(x), c(x)$ は十分滑らかな関数であり $a(x) \neq 0$ とする. これに対して, 次のような変換をする.

(a) 次式によって変数 z を定義し, $x \rightarrow z$ の変数変換をする :

$$z(x) = \int_0^x a(y)^{-1/2} dy.$$

これによって,

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &\rightarrow \tilde{\mathcal{H}} = -\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \tilde{b}(z) \frac{\partial}{\partial z} - c(z), \\ \tilde{b}(z(x)) &= a(x)z''(x) + b(x)z'(x) = a(x)^{-1/2} \left\{ -\frac{a'(x)}{2} + b(x) \right\} \end{aligned}$$

と変換される .

(b) 次に

$$r(z) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int^z \tilde{b}(u) du \right\}$$

として, 相似変換

$$\tilde{\mathcal{H}} \rightarrow \bar{\mathcal{H}} = r^{-1} \tilde{\mathcal{H}} r$$

を行う .

これを Liouville 変換という . これによりハミルトニアンは一般に

$$\bar{\mathcal{H}} = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + q(x) \tag{3.14}$$

という形に変換される . これを Sturm-Liouville 演算子という .

上述の (i)-(v) の 5 つの相関核は, この変換によってそれぞれ次の $q(x)$ をもつ Sturm-Liouville 演算子に変換される [23] :

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & \frac{1}{16}(x^2 - 4) & \text{(ii)} \quad & \frac{1}{16}x^2 + \left(\nu^2 - \frac{1}{4} \right) \frac{1}{x^2} - \frac{1}{2}(\nu + 1) \\ \text{(iii)} \quad & 0 & \text{(iv)} \quad & x & \text{(v)} \quad & \left(\nu^2 - \frac{1}{4} \right) \frac{1}{x^2}. \end{aligned} \tag{3.15}$$

4 ランダム行列の固有値配置と特性多項式

4.1 GUE 固有値初期配置と時間シフト

N 粒子非衝突 Brown 運動の多時刻結合確率密度関数 (2.22) で特に $\xi = 0_N$ とすると

$$\begin{aligned} & \mathfrak{p}_N^{0_N}(\xi(t_1), \xi(t_2), \dots, \xi(t_M)) \\ &= \mu^{(-)}(t_M, \mathbf{x}^{(M)}; 0_N) \prod_{m=1}^{M-1} f_N(t_{m+1} - t_m, \mathbf{x}^{(m+1)} | \mathbf{x}^{(m)}) \mu^{(+)}(t_1, \mathbf{x}^{(1)}; 0_N). \end{aligned} \quad (4.1)$$

であるが, $\mu^{(+)}$ の定義式 (2.14), (2.15) と注 2.1 より,

$$\begin{aligned} \mu^{(+)}(t_1, \mathbf{x}^{(1)}; 0_N) &= \det_{1 \leq j, k \leq N} \left[t_1^{-j/2} H_{j-1}^{(+)} \left(\frac{x_k^{(1)}}{\sqrt{t_1}}; 0_N \right) \right] \\ &= \det_{1 \leq j, k \leq N} \left[t_1^{-j/2} \frac{2^{-(j-1)/2}}{(j-1)! \sqrt{2\pi}} H_{j-1} \left(\frac{x_k^{(1)}}{\sqrt{t_1}} \right) e^{-(x_k^{(1)})^2 / (2t_1)} \right] \\ &= \frac{t_1^{-N^2/2}}{C_1(N)} e^{-|\mathbf{x}^{(1)}|^2 / (2t_1)} h_N(\mathbf{x}^{(1)}) \end{aligned}$$

であることが分かる. ここで $C_1(N)$ は 1.3 節で与えたのと同じく $C_1(N) = (2\pi)^{N^2/2} \prod_{j=1}^N \Gamma(j)$ である.

他方, 補題 2.5 より

$$\begin{aligned} \mu^{(-)}(t_M, \mathbf{x}^{(M)}; 0_N) &= h_N(\mathbf{x}^{(M)}) \quad (\text{実は } t_M \text{ と } \xi \text{ には依らない.}) \\ f_N(t_2 - t_1, \mathbf{x}^{(2)} | \mathbf{x}^{(1)}) &= \mu^{(+)}(t_2 - t_1, \mathbf{x}^{(2)}; \xi^{(1)}) h_N(\mathbf{x}^{(1)}), \quad \xi^{(1)}(\cdot) = \sum_{j=1}^N \delta_{x_j^{(1)}}(\cdot) \end{aligned}$$

なので, (4.1) 式は

$$\begin{aligned} & \mathfrak{p}_N^{0_N}(\xi(t_1), \xi(t_2), \dots, \xi(t_M)) \\ &= h_N(\mathbf{x}^{(M)}) \prod_{m=2}^{M-1} f_N(t_{m+1} - t_m, \mathbf{x}^{(m+1)} | \mathbf{x}^{(m)}) \mu^{(+)}(t_2 - t_1, \mathbf{x}^{(2)}; \xi^{(1)}) \\ & \quad \times \frac{t_1^{-N^2/2}}{C_1(N)} e^{-|\mathbf{x}^{(1)}|^2 / (2t_1)} \left(h_N(\mathbf{x}^{(1)}) \right)^2 \\ &= \mu^{(-)}(t_M - t_1, \mathbf{x}^{(M)}; \xi^{(1)}) \prod_{m=2}^{M-1} f_N((t_{m+1} - t_1) - (t_m - t_1), \mathbf{x}^{(m+1)} | \mathbf{x}^{(m)}) \mu^{(+)}(t_2 - t_1, \mathbf{x}^{(2)}; \xi^{(1)}) \\ & \quad \times \frac{t_1^{-N^2/2}}{C_1(N)} e^{-|\mathbf{x}^{(1)}|^2 / (2t_1)} \left(h_N(\mathbf{x}^{(1)}) \right)^2 \\ &= \mathfrak{p}^{\xi^{(1)}}(\xi(t_2 - t_1), \dots, \xi(t_M - t_1)) \frac{t_1^{-N^2/2}}{C_1(N)} e^{-|\mathbf{x}^{(1)}|^2 / (2t_1)} \left(h_N(\mathbf{x}^{(1)}) \right)^2 \end{aligned} \quad (4.2)$$

と書き直せる. ここで, 最右辺の $\mathfrak{p}^{\xi^{(1)}}(\dots)$ は $(M-1)$ -時刻の確率密度関数である.

ガウス型ユニタリ集団

$N \times N$ の Hermite 行列全体の集合を $\mathcal{H}(N)$ と書くことにする． $\mathcal{H}(N)$ -値確率変数の統計集団として， $\mathcal{H}(N)$ の体積要素 $\mathcal{V}(dH)$ に対する確率密度関数が

$$\mu^{\text{GUE}}(H, \sigma^2) = \frac{\sigma^{-N^2}}{c(N)} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \text{Tr} H^2\right), \quad H \in \mathcal{H}(N) \quad (4.3)$$

与えられるものを考える．ここで $\sigma > 0, c(N) = 2^{N/2} \pi^{N^2/2}$ ，また Tr は行列のトレースをとることを表す． $N \times N$ のユニタリ行列全体の集団を $U(N)$ と置くと，任意の $U \in U(N)$ に対して，確率 $\mu^{\text{GUE}}(H, \sigma^2) \mathcal{V}(dH)$ はユニタリ変換 $H \rightarrow U^* H U$ の下で不変である．ランダム行列理論 [35, 37] では，この不変性を持つことから，上述の $\mathcal{H}(N)$ -値確率変数の統計集団を (分散 σ^2 の) ガウス型ユニタリ集団 (Gaussian unitary ensemble) とよぶ．以下 GUE と略す．この GUE の固有値分布の密度関数は $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathbf{W}_N^A$ に対して

$$\nu_N^{\text{GUE}}(\mathbf{x}, \sigma^2) = \frac{\sigma^{-N^2}}{C_1(N)} e^{-|\mathbf{x}|^2/(2\sigma^2)} \left(h_N(\mathbf{x})\right)^2 \quad (4.4)$$

であることが知られている [35, 37].

したがって (4.2) は次の等式を意味する：

$$\mathbf{p}^{0N}(\xi(t_1), \xi(t_2), \dots, \xi(t_M)) = \nu_N^{\text{GUE}}(\mathbf{x}^{(1)}, t_1) \mathbf{p}^{\xi^{(1)}}(\xi(t_2 - t_1), \dots, \xi(t_M - t_1)).$$

ただし， $\xi^{(1)}(\cdot) = \sum_{j=1}^N \delta_{x_j^{(1)}}(\cdot)$ である．あるいはこれは， $t_1 = \sigma^2$ として， $t_m - t_1 = t_m - \sigma^2, 2 \leq m \leq M$ を改めて t_{m-1} とおき，また $\xi^{(1)}$ を改めて ξ と書くことにすると

$$\nu_N^{\text{GUE}}(\mathbf{x}, \sigma^2) \mathbf{p}_N^\xi(\xi(t_1), \dots, \xi(t_{M-1})) = \mathbf{p}_N^{0N}(\xi(\sigma^2), \xi(\sigma^2 + t_1), \dots, \xi(\sigma^2 + t_{M-1})) \quad (4.5)$$

となる．初期配置 $\xi \in \mathfrak{M}_0, \xi(\mathbf{R}) = N$ に対する GUE の固有値分布 (4.4) での平均を $\mathbf{E}^{\text{GUE}(N, \sigma^2)}[\cdot]$ と書くことにする．上の考察より，次が示されたことになる．

命題 4.1 (i) 任意の $M \geq 1$ ，時刻の列 $0 < t_1 < \dots < t_M$ に対して

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}^{\text{GUE}(N, \sigma^2)} \left[\text{Det} \left[\delta_{mn} \delta(x - y) + \mathbb{K}^\xi(t_m, x; t_n, y) \chi_n(y) \right] \right] \\ & = \text{Det} \left[\delta_{mn} \delta(x - y) + \mathbb{K}^0(\sigma^2 + t_m, x; \sigma^2 + t_n, y) \chi_n(y) \right]. \end{aligned}$$

(ii) 任意の $M \geq 1$ ，時刻の列 $0 < t_1 < \dots < t_M$ ，また N 以下の正の整数の列 $\{N_m\}_{m=1}^M$ に対して

$$\mathbf{E}^{\text{GUE}(N, \sigma^2)} \left[\rho^\xi(\xi_{N_1}(t_1), \dots, \xi_{N_M}(t_M)) \right] = \rho^0(\xi_{N_1}(\sigma^2 + t_1), \dots, \xi_{N_M}(\sigma^2 + t_M)).$$

ただし， \mathbb{K}^0 は (3.3) で与えられた Hermite 核であり， ρ^0 はその行列式で与えられる相関関数を表すものとする．

つまり、次が成り立つことになる。

定理 4.2 分散 σ^2 の GUE 固有値分布を初期配置とする N 粒子非衝突 Brown 運動は、行列式過程である。その相関核を $\mathbb{K}^{\text{GUE}(\sigma^2)}$ と書くと、それは Hermite 核 \mathbb{K}^0 の時間変更 (σ^2 のシフト) で与えられる：

$$\mathbb{K}^{\text{GUE}(\sigma^2)}(s, \cdot; t, \cdot) = \mathbb{K}^0(\sigma^2 + s, \cdot; \sigma^2 + t, \cdot), \quad s, t > 0.$$

4.2 GUE ランダム行列の特性多項式

命題 4.1 は行列式の間関係式を与える。特に同時刻相関関数に対して、次の形の等式を与える：任意の $1 \leq N' \leq N, t > 0, \sigma > 0$ に対して

$$\mathbf{E}^{\text{GUE}(N, \sigma^2)} \left[\det_{1 \leq j, k \leq N'} \left[\mathbb{K}^\xi(t, x_j; t, x_k) \right] \right] = \det_{1 \leq j, k \leq N'} \left[\mathbb{K}^0(\sigma^2 + t, x_j; \sigma^2 + t, x_k) \right]. \quad (4.6)$$

Hermite 多項式の性質を用いると次の等式を証明することができる：

$$\begin{aligned} & \det_{1 \leq j, k \leq N'} \left[\mathbb{K}^0(\sigma^2 + t, x_j; \sigma^2 + t, x_k) \right] \\ &= \prod_{j=1}^{N'} \int_{\mathbf{R}} dv_j p(t, x_j | v_j) \prod_{k=1}^{N'} \int_{\mathbf{R}} dw_k p(t, -ix_k | w_k) \det_{1 \leq j, k \leq N'} \left[\mathbb{K}^0(\sigma^2, v_j; \sigma^2, iw_k) \right]. \end{aligned} \quad (4.7)$$

GUE 特性多項式

$H \in \mathcal{H}(N)$ の特性多項式 $\det(xI - H)$ を考える。ここで I は $N \times N$ の単位行列である。これは x の N 次多項式であるが、 $m \geq 1$ として m 変数積

$$\prod_{n=1}^m \det(x_n I - H) \quad (4.8)$$

を考えると、これは $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)$ の対称多項式である。ここで H が GUE-分布しているとする、この m 変数対称多項式も分布する。(当然、 $m = 1$ の場合の特性多項式の零点の分布は固有値の分布 (4.4) である。) 特性多項式の積 (4.8) の GUE 平均を

$$\begin{aligned} M_{\text{GUE}}(m, \mathbf{x}; N, \sigma^2) &\equiv \int_{H \in \mathcal{H}(N)} \mathcal{V}(dH) \mu^{\text{GUE}}(H, \sigma^2) \prod_{n=1}^m \det(x_n I - H) \\ &= \mathbf{E}^{\text{GUE}(N, \sigma^2)} \left[\prod_{n=1}^m \prod_{\ell=1}^N (x_n - \lambda_\ell) \right] \end{aligned} \quad (4.9)$$

と書くことにする。ただし、 $\{\lambda_\ell\}_{\ell=1}^N$ は Hermite 行列 H の固有値であり、(4.9) の最右辺の式は分散 σ^2 の GUE 固有値分布 (4.4) において平均をとることを意味している。

GUE では確率 1 で $\xi \in \mathfrak{M}_0$ なので, \mathbb{K}^ξ に対する表式 (2.31) を用いることができる. これより次が導かれる:

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}^{\text{GUE}(N, \sigma^2)} \left[\det_{1 \leq j, k \leq N'} \left[\mathbb{K}^\xi(t, x_j; t, x_k) \right] \right] \\ &= \prod_{j=1}^{N'} \int_{\mathbf{R}} dv_j p(t, x_j | v_j) \prod_{k=1}^{N'} \int_{\mathbf{R}} dw_k p(t, -ix_k | w_k) \frac{(-1)^{[N'/2] + N'(N'-1)/2}}{\prod_{n=1}^{N'} (N-n)! \sigma^{N'(2N-N'-1)}} \prod_{\ell=1}^{N'} p(\sigma^2, v_\ell | 0) \\ & \quad \times h_{N'}(\mathbf{v}) h_{N'}(i\mathbf{w}) M_{\text{GUE}}(2N', (\mathbf{v}, i\mathbf{w}); N - N', \sigma^2). \end{aligned} \quad (4.10)$$

等式 (4.6) と (4.7), (4.10) より, 多重ガウス変換の一意性から, 特性多項式の積の GUE 平均に対して次が得られる.

命題 4.3 $n, N \in \mathbf{N}, \sigma > 0, \mathbf{x} \in \mathbf{R}^{2n}$ に対して

$$\begin{aligned} M_{\text{GUE}}(2n, \mathbf{x}; N, \sigma^2) &= \frac{(-1)^{[n/2] + n(n-1)/2} \prod_{\ell=1}^n (N+n-\ell)! \sigma^{n(2N+n-1)}}{\prod_{\ell=1}^n p(\sigma^2, x_j) h_n(x_1, \dots, x_n) h_n(x_{n+1}, \dots, x_{2n})} \\ & \quad \times \det_{1 \leq j, k \leq n} \left[\mathbb{K}_{N+n}^0(\sigma^2, x_j; \sigma^2, x_{n+k}) \right]. \end{aligned} \quad (4.11)$$

注 4.1. (4.9) 式の形の特性多項式の積の GUE 平均は Mehta と Normand [35, 36] によっても調べられている. 彼らの表式は次のようである:

$$M_{\text{GUE}}(m, \mathbf{x}; N, \sigma^2) = \left(\frac{\sigma^2}{2} \right)^{m\{m+(2N-1)\}/4} \frac{1}{h_m(\mathbf{x})} \det_{1 \leq j, k \leq m} \left[H_{N+j-1} \left(\frac{x_k}{\sqrt{2}\sigma} \right) \right]. \quad (4.12)$$

我々の表式 (4.11) はこれとは異なっている. しかし, 正規直交 Hermite 関数に対する Christoffel-Darboux の公式と, 石川らによって最近与えられた Cauchy の行列式の一般化の公式 [8] を用いると, 両者が一致することが示せる.

注 4.2. 非衝突 Brown 運動の初期配置をガウス型直交集団 (GOE) の固有値分布で分布させることを考えることもできる. 我々は [17] において時間的に非斉次な非衝突 Brown 運動を調べた. これに適当な時間変更 (時間反転) およびスケール変換を施すと, 上述の GOE 固有値分布を初期配置とする時間的斉次非衝突 Brown 運動と分布の意味で等しくすることができる. 時間的非斉次非衝突 Brown 運動はパフィアン過程である [17, 22, 24]. したがって, 非衝突 Brown 運動は, 初期配置 ξ を一つ固定して扱ったときには行列式過程であっても, その初期配置を GOE 固有値分布で分布させるとパフィアン過程になることが結論される.

5 関連する話題

5.1 無限粒子非衝突過程について

初期配置が $\xi \in \mathfrak{M}_0$ で粒子数が有限 $\xi(\mathbf{R}) = N < \infty$ である場合，相関核は

$$\begin{aligned} \mathbb{K}^\xi(s, x; t, y) &= \int_{\mathbf{R}} \xi(dx') p(s, x|x') \int_{\mathbf{R}} dw p(t, -iy|w) \prod_{y' \in \xi - \delta_{x'}} \frac{y' - iw}{y' - x'} \\ &\quad - \mathbf{1}(s > t) p(s - t, x|y) \end{aligned} \quad (5.1)$$

与えられることを 2.2 節と 2.3 節で導いた．それでは，粒子数 $\xi(\mathbf{R}) = N = \infty$ の場合はどうであろうか．

$\xi \in \mathfrak{M}_0, a \in \mathbf{R}, z \in \mathbf{C}, L > 0$ に対して

$$\begin{aligned} \Phi(\xi, a, z, L) &= \prod_{x \in \xi([-L+a, L+a] \setminus \{a\})} \frac{x - z}{x - a} \\ &= \prod_{x \in \xi([-L+a, L+a] \setminus \{a\})} \left(1 - \frac{z - a}{x - a} \right) \end{aligned} \quad (5.2)$$

として

$$\Phi(\xi, a, z) = \lim_{L \rightarrow \infty} \Phi(\xi, a, z, L) \quad (5.3)$$

と書くことにする．

$$M(\xi, L) = \int_{[-L, L] \setminus \{0\}} \frac{\xi(dx)}{x}, \quad M(\xi) = \lim_{L \rightarrow \infty} M(\xi, L) \quad (5.4)$$

とすると， $\Phi(\xi, a, z) \in (0, \infty)$ であるための必要十分条件は $M(\tau_{-a}\xi) < \infty$ であることが示せる． $\Phi(\xi, a, z)$ は z の整関数であり，その零点の集合は $\text{supp } \xi \setminus \{a\}$ で与えられる [32]．上述の問題は，相関核の極限

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \mathbb{K}^{\xi \cap [-L, L]}(s, x; t, y)$$

が有限である条件を定める問題である．この極限が有限であるならば，それは次式のように整関数のガウス変換で与えられる：

$$\begin{aligned} \mathbb{K}^\xi(s, x; t, y) &= \int_{\mathbf{R}} \xi(dx') p(s, x|x') \int_{\mathbf{R}} dw p(t, -iy|w) \Phi(\xi, x', iw) \\ &\quad - \mathbf{1}(s > t) p(s - t, x|y). \end{aligned} \quad (5.5)$$

この相関核の性質により，無限粒子行列式過程を特徴付けることができるはずである．

具体例として，初期配置が \mathbf{Z} の場合を考えてみることにする．すなわち

$$\xi^{\mathbf{Z}}(\cdot) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} \delta_k(\cdot) \quad (5.6)$$

の場合である．このときは

$$\begin{aligned}
\Phi(\xi^{\mathbf{Z}}, k, iw) &= \prod_{\ell \in \mathbf{Z}, \ell \neq k} \frac{\ell - iw}{\ell - k} = \prod_{\ell = -\infty, \ell \neq k}^{\infty} \left(1 - \frac{iw - k}{\ell - k} \right) \\
&= \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{iw - k}{n} \right) \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{iw - k}{n} \right) \\
&= \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ 1 - \frac{(iw - k)^2}{n^2} \right\} = \frac{\sin\{\pi(iw - k)\}}{\pi(iw - k)}
\end{aligned} \tag{5.7}$$

である．これを (5.5) に代入して計算すると，次が得られる．

$$\begin{aligned}
\mathbb{K}^{\mathbf{Z}}(s, x; t, y) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i(xk + i\pi sk^2)} \int_0^1 du e^{\pi^2 u^2(t-s)/2} \cos \left[\pi u \left\{ (y-x) - 2\pi isk \right\} \right] \\
&\quad - \mathbf{1}_{\{s > t\}} p(s-t, x|y).
\end{aligned} \tag{5.8}$$

ここで，熱核の積分表示

$$p(t, x|y) = \int_0^{\infty} du e^{-\pi^2 u^2 t/2} \cos \left\{ \pi u (y-x) \right\} \tag{5.9}$$

を用いると，次が得られる．

補題 5.1

$$\mathbb{K}^{\mathbf{Z}}(s, x; t, y) = \begin{cases} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i(xk + i\pi sk^2)} \int_0^1 du e^{\pi^2 u^2(t-s)/2} \cos \left[\pi u \left\{ (y-x) - 2\pi isk \right\} \right] & s < t \text{ のとき} \\ \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i(xk + i\pi tk^2)} \frac{\sin \left[\pi \left\{ (y-x) - 2\pi itk \right\} \right]}{\pi \left\{ (y-x) - 2\pi itk \right\}} & s = t \text{ のとき} \\ \sum_{k=-\infty, k \neq 0}^{\infty} e^{2\pi i(xk + i\pi sk^2)} \int_0^1 du e^{-\pi^2 u^2(s-t)/2} \cos \left[\pi u \left\{ (y-x) - 2\pi isk \right\} \right] \\ \quad - \int_1^{\infty} du e^{-\pi^2 u^2(s-t)/2} \cos \left\{ \pi u (y-x) \right\} & s > t \text{ のとき.} \end{cases} \tag{5.10}$$

興味深いことは，次が示せることである．

命題 5.2

$$\lim_{s \rightarrow \infty, |t-s| < \infty} \mathbb{K}^{\mathbf{Z}}(s, x; t, y) = \mathcal{K}^{\sin}(s, x; t, y). \tag{5.11}$$

ただし，右辺は (3.7) で与えた sine 核である．ただし，粒子密度 $\rho = 1$ である．

このことは，3.2 節でバルク・スケーリング極限で得られた無限粒子系は， \mathbf{Z} から出発した無限行列式過程の定常分布であるということを意味する．

無限粒子の行列式過程を考える上では，配置空間 \mathfrak{M}_0 の中で粒子数 $N \rightarrow \infty$ とするだけでなく，粒子の縮重も許した \mathfrak{M} で初期配置を一般的に考える必要がある．このような無限粒子行列式過程の構成条件とその性質は興味深い研究課題である．

5.2 非衝突な道の上限值問題

$X^{(1/2)}(t)$ を 3 次元 Bessel 過程とする．いま

$$X^{(1/2)}(0) = x > 0, \quad X^{(1/2)}(1) = y > 0 \quad (5.12)$$

として

$$\tilde{H}_1 = \sup_{0 \leq t \leq 1} X^{(1/2)}(t) \quad (5.13)$$

とすると， \tilde{H}_1 の累積分布関数は次式で与えられる．

$$\mathbf{P}(\tilde{H}_1 \leq h) = \frac{p_{\text{abs}}^h(1, y|x)}{p_{\text{abs}}(1, y|x)}, \quad x, y > 0. \quad (5.14)$$

ただし， $p_{\text{abs}}(t, y|x)$ は原点に吸収壁のある区間 $(0, \infty)$ での吸収壁 Brown 運動の推移確率密度であり，Brown 運動の反射原理より

$$\begin{aligned} p_{\text{abs}}(t, y|x) &= p(t, y|x) - p(t, y|-x) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \left(e^{-(y-x)^2/2t} - e^{-(y+x)^2/2t} \right), \quad x, y > 0, t \geq 0. \end{aligned} \quad (5.15)$$

で与えられる．また， $p_{\text{abs}}^h(t, y|x)$ は原点と $h > 0$ に吸収壁のある区間 $(0, h)$ での吸収壁 Brown 運動の推移確率密度であり，Brown 運動の反射原理を繰り返し用いることにより

$$\begin{aligned} p_{\text{abs}}^h(t, y|x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ p(t, y|x + 2hn) - p(t, y|-x + 2hn) \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\exp \left\{ -\frac{1}{2t} (y - (x + 2hn))^2 \right\} - \exp \left\{ -\frac{1}{2t} (y - (-x + 2hn))^2 \right\} \right], \\ &\quad x, y \in (0, h), \quad t \geq 0 \end{aligned} \quad (5.16)$$

で与えられる．この $p_{\text{abs}}^h(t, y|x)$ に対しては，フーリエ級数展開を用いて熱方程式

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, y) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} u(t, y)$$

を

$$u(t, 0) = u(t, h) = 0 \quad \forall t \geq 0, \quad u(0, y) = \delta(x - y)$$

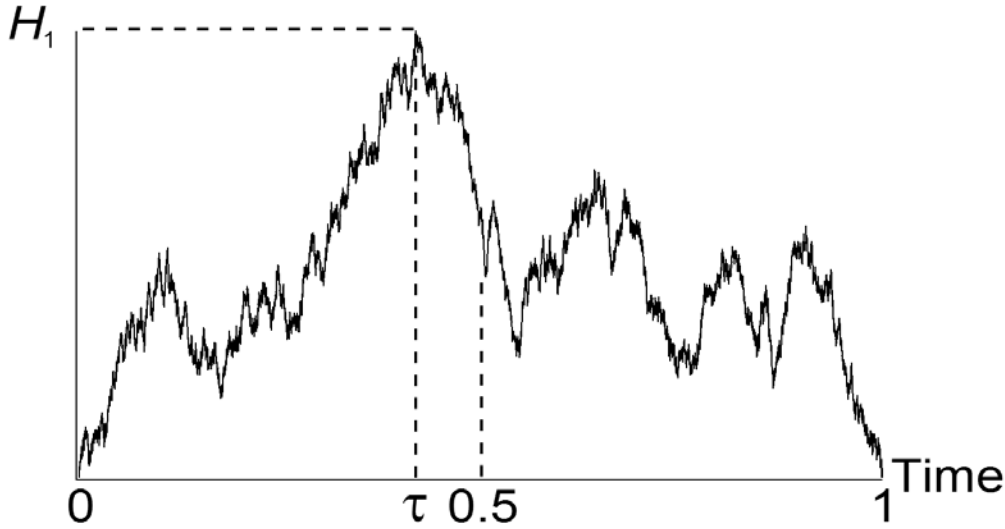


図 4: 期間 1 の 3 次元 Bessel 橋の道の一例 . 時刻 $\tau \in (0, 1)$ で最大値 H_1 をとっている .

という条件の下で解くことによって

$$p_{\text{abs}}^h(t, y|x) = \frac{2}{h} \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{n^2\pi^2}{2h^2}t\right) \sin\left(\frac{n\pi}{h}y\right) \sin\left(\frac{n\pi}{h}x\right), \quad x, y \in (0, h), \quad t \geq 0 \quad (5.17)$$

という表式を得ることもできる .

(5.12) の $X^{(1/2)}(t)$ で , 特に $x \rightarrow 0, y \rightarrow 0$ としたものを期間 1 の 3 次元 Bessel 橋とよぶ . これを $r(t), t \in [0, 1]$ と書くことにする . この Bessel 橋の上限値を

$$H_1 = \sup_{0 < t < 1} r(t) \quad (5.18)$$

とする (図 4 を参照) . この分布関数は (5.14) で $x \rightarrow 0, y \rightarrow 0$ の極限をとることによって求められる :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(H_1 \leq h) &= \lim_{x \rightarrow 0, y \rightarrow 0} \frac{p_{\text{abs}}^h(1, y|x)}{p_{\text{abs}}(1, y|x)} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-2h^2n^2} (1 - 4h^2n^2). \end{aligned} \quad (5.19)$$

これより上限値 H_1 の確率密度関数は

$$\begin{aligned} p_1(h) &\equiv \frac{d}{dh} \mathbf{P}(H_1 \leq h) \\ &= 8 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2h^2n^2} (4h^3n^4 - 3hn^2) \end{aligned} \quad (5.20)$$

となる . そして , H_1 の s -次モーメントは

$$\mathbf{E}[H_1^s] = \int_0^{\infty} dh h^s p_1(h)$$

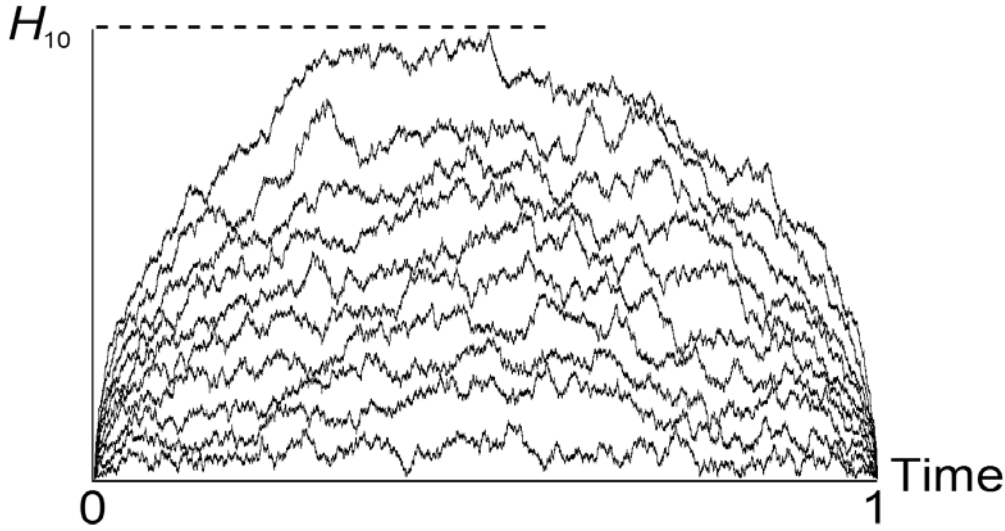


図 5: $N = 10$ のときの期間 1 の非衝突 Bessel 橋の道の 1 例 . 最大値を H_{10} とする .

によって計算されるが , これは次のように与えられる :

$$\mathbf{E}[H_1^s] = 2 \left(\frac{\pi}{2} \right)^{s/2} \xi(s), \quad s \in \mathbf{C}. \quad (5.21)$$

ここで Γ をガンマ関数 (1.4) とし , また ζ を Riemann のゼータ関数

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad \Re s > 1 \quad (5.22)$$

として ,

$$\xi(s) = \frac{1}{2} s(s-1) \pi^{-s/2} \Gamma(s/2) \zeta(s) \quad (5.23)$$

である [2, 16].

N 本の期間 1 の非衝突 3 次元 Bessel 橋を $\mathbf{r}(t) = (r_1(t), \dots, r_N(t)), t \in [0, 1]$ とする . ただし , $\mathbf{r}(t) \in \mathbf{W}_N^{\mathbf{C}}, t \in (0, 1)$ つまり $0 < r_1(t) < \dots < r_N(t), t \in (0, 1)$ と粒子に順番をつけることにする . このとき , 時間区間 $(0, 1)$ での $\mathbf{r}(t)$ の上限値

$$H_N = \sup_{0 < t < 1} r_N(t) \quad (5.24)$$

の分布を調べたい (図 5 参照). $\mathbf{W}_N^h = \{\mathbf{x} \in (0, h)^N : x_1 < x_2 < \dots < x_N\}$ として ,

$$\begin{aligned} q_N(t, \mathbf{y} | \mathbf{x}) &= \det_{1 \leq j, k \leq N} [p_{\text{abs}}(t, y_j | x_k)], \quad t > 0, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{W}_N^{\mathbf{C}}, \\ q_N^h(t, \mathbf{y} | \mathbf{x}) &= \det_{1 \leq j, k \leq N} [p_{\text{abs}}^h(t, y_j | x_k)], \quad t > 0, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{W}_N^h \end{aligned} \quad (5.25)$$

とおくと,

$$\mathbf{P}(H_N \leq h) = \lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow 0, |\mathbf{y}| \rightarrow 0} \frac{q_N^h(1, \mathbf{y} | \mathbf{x})}{q_N(1, \mathbf{y} | \mathbf{x})}. \quad (5.26)$$

である.

1.5 節で説明した Schur 関数展開を用いると, $|\mathbf{x}| \rightarrow 0, |\mathbf{y}| \rightarrow 0$ で

$$\begin{aligned} q_N(1, \mathbf{y} | \mathbf{x}) &= \left(\frac{2}{\pi}\right)^{N/2} \prod_{j=1}^N \frac{1}{(2j-1)!} h_N^{(1)}(\mathbf{x}) h_N^{(1)}(\mathbf{y}) \times \left\{1 + \mathcal{O}(|\mathbf{x}|, |\mathbf{y}|)\right\}, \\ q_N^h(1, \mathbf{y} | \mathbf{x}) &= \left(\frac{2}{h}\right)^N \left(\frac{\pi}{h}\right)^{2N^2} \left\{ \prod_{j=1}^N \frac{1}{(2j-1)!} \right\}^2 h_N^{(1)}(\mathbf{x}) h_N^{(1)}(\mathbf{y}) \\ &\quad \times \sum_{1 \leq n_1 < n_2 < \dots < n_N} \exp\left\{-\frac{\pi^2}{2h^2} |\mathbf{n}|^2\right\} \left\{h_N^{(1)}(\mathbf{n})\right\}^2 \times \left\{1 + \mathcal{O}(|\mathbf{x}|, |\mathbf{y}|)\right\} \end{aligned} \quad (5.27)$$

という漸近評価が得られる. これから次が得られる [31].

補題 5.3 $N \geq 1, h > 0$ に対して

$$\mathbf{P}(H_N \leq h) = c_N h^{-N(2N+1)} \sum_{1 \leq n_1 < n_2 < \dots < n_N} \left\{h_N^{(1)}(\mathbf{n})\right\}^2 \exp\left\{-\frac{\pi^2}{2h^2} |\mathbf{n}|^2\right\}, \quad (5.28)$$

ただしここで $c_N = 2^{N/2} \pi^{N(4N+1)/2} / \prod_{j=1}^N (2j-1)!$ である.

この表式に現れる和は, Selberg 積分の変形の 1 つの離散版と見なせる. 実際 $\lim_{h \rightarrow \infty} \mathbf{P}(H_N \leq h) = 1$ という自明な式は次と等価である:

$$\begin{aligned} &\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{N!} \sum_{n_1 = -\infty}^{\infty} \dots \sum_{n_N = -\infty}^{\infty} \prod_{1 \leq j < k \leq N} \left\{(\delta n_j)^2 - (\delta n_k)^2\right\}^2 \prod_{\ell=1}^N \left\{(\delta n_\ell)^2 e^{-(\delta n_\ell)^2/2} \delta\right\} \\ &= \frac{1}{N!} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{1 \leq j < k \leq N} (x_j^2 - x_k^2)^2 \prod_{\ell=1}^N \left\{x_\ell^2 e^{-x_\ell^2/2} dx_\ell\right\} \\ &= \int_{\mathbf{W}_N^A} e^{-|\mathbf{x}|^2/2} \left(h_N^{(1)}(\mathbf{x})\right)^2 d\mathbf{x} \\ &= (2\pi)^{N/2} \prod_{j=1}^N (2j-1)!. \end{aligned} \quad (5.29)$$

行列式の多重線形性より, (5.28) 式は次のような 2 方向 Wronski 行列式の形にも書き直せる [31]:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(H_N \leq h) &= c_N h^{-N(2N+1)} \det_{1 \leq j, k \leq N} \left[\sum_{n=1}^{\infty} n^{2(j+k-1)} e^{-\pi^2 n^2 / (2h^2)} \right] \\ &= \frac{(-1)^N 2^{-N/2} \pi^{N(2N+1)/2}}{\prod_{j=1}^N (2j-1)!} h^{-N(2N+1)} \tau_N \left(\frac{\pi}{2h^2}\right). \end{aligned} \quad (5.30)$$

ただしここで,

$$\tau_N(u) = \det_{1 \leq j, k \leq N} \left[\frac{\partial^{j+k-1}}{\partial u^{j+k-1}} \theta(u) \right], \quad \theta(u) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 u}. \quad (5.31)$$

である.

Jacobi の楕円テータ関数の一つ

$$\begin{aligned} \vartheta_3(x, y) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} z^{2n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i x n + \pi i y n^2}, \quad \text{Im } y > 0 \end{aligned} \quad (5.32)$$

を考える. ここで $z = e^{x\pi i}$ and $q = e^{y\pi i}$ とした. この楕円テータ関数は次の関数方程式を満たすことが知られている:

$$\vartheta_3(x, y) = \vartheta_3(x/y, -1/y) e^{-\pi i x^2/y} \sqrt{\frac{i}{y}}. \quad (5.33)$$

このことと, 通常の Hermite 関数 (2.10) の母関数の表式

$$e^{2ux-u^2} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{u^n}{n!},$$

から, 次のような等式が得られる [31].

補題 5.4 $\alpha = 0, 1, 2, \dots$ に対して

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} n^\alpha e^{-\pi n^2/\eta^2 + 2\pi i \xi n/\eta^2} = \frac{i^\alpha \eta^{\alpha+1}}{2^\alpha \pi^{\alpha/2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_\alpha(\sqrt{\pi} n \eta + \sqrt{\pi} \xi/\eta) e^{-(\sqrt{\pi} n \eta + \sqrt{\pi} \xi/\eta)^2}. \quad (5.34)$$

この等式を用いると, 補題 5.3 は次の形の行列式表示に変換される.

命題 5.5 $N \geq 1, h > 0$ に対して,

$$\mathbf{P}(H_N \leq h) = \frac{(-1)^N}{2^{N^2} \prod_{j=1}^N (2j-1)!} \det_{1 \leq j, k \leq N} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} H_{2(j+k-1)}(\sqrt{2} n h) e^{-2n^2 h^2} \right] \quad (5.35)$$

である.

上の分布関数から

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left[H_N^s \right] &= \int_0^\infty h^s \left(\frac{d}{dh} \mathbf{P}(H_N^{(N)} < h) \right) dh \\ &= s \int_0^\infty h^{s-1} \left\{ 1 - \mathbf{P}(H_N^{(N)} < h) \right\} dh \end{aligned} \quad (5.36)$$

によって，上限値の $s > 0$ 次のモーメントを計算することができる．

(5.35) において $N = 1$ および $N = 2$ とすると，

$$\mathbf{P}(H_1 \leq h) = -\frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_2(\sqrt{2}nh) e^{-2h^2 n^2}$$

$$\mathbf{P}(H_2 \leq h) = \frac{1}{2^4 \times 3!} \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} e^{-2h^2(n_1^2+n_2^2)} \det \begin{bmatrix} H_2(\sqrt{2}n_1h) & H_4(\sqrt{2}n_1h) \\ H_4(\sqrt{2}n_2h) & H_6(\sqrt{2}n_2h) \end{bmatrix}$$

となるが，(2.10) の定義より $H_2(x) = 4x^2 - 2$, $H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12$, $H_6(x) = 64x^6 - 480x^4 + 720x^2 - 120$ なので，これらは

$$\mathbf{P}(H_1 \leq h) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-2h^2 n^2} (1 - 4h^2 n^2) \quad (5.37)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(H_2 \leq h) = \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} e^{-2h^2(n_1^2+n_2^2)} & \left\{ 1 - 16h^2 n_1^2 + 24h^4 n_1^4 + 24h^4 n_1^2 n_2^2 - \frac{32}{3} h^6 n_1^6 \right. \\ & \left. - 32h^6 n_1^4 n_2^2 + \frac{128}{3} h^8 n_1^6 n_2^2 - \frac{128}{3} h^8 n_1^4 n_2^4 \right\} \end{aligned} \quad (5.38)$$

となる．(5.37) は (5.19) と一致する．また，(5.38) から計算される 2 本の非衝突 Bessel 橋の上限値のモーメントは Dirichlet の 2 重和で表すことができる [16].

参考文献

- [1] S. Andraus, M. Katori, and S. Miyashita, Interacting particles on the line and Dunkl intertwining operator of type A: application to the freezing regime, *J. Phys. A: Math. Theor.* **45** (2012), 395201/1-26.
- [2] P. Biane, J. Pitman and M. Yor, Probability laws related to the Jacobi theta and Riemann zeta functions, and Brownian excursions, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **38** (2001), 435–465.
- [3] P. M. Bleher and A. B. Kuijlaars, Integral representations for multiple Hermite and multiple Laguerre polynomials, *Ann. Inst. Fourier*, **55** (2005), 2001–2014.
- [4] I. Gessel and G. Viennot, Binomial determinants, paths, and hook length formulae, *Adv. in Math.*, **58** (1985), 300–321.
- [5] D. J. Grabiner, Brownian motion in a Weyl chamber, non-colliding particles, and random matrices, *Ann. Inst. Henri Poincaré, Probab. Stat.*, **35** (1999), 177–204.
- [6] T. Imamura and T. Sasamoto, Polynuclear growth model with external source and random matrix model with deterministic source, *Phys. Rev., E* **71** (2005), 041606/1–12.
- [7] T. Imamura and T. Sasamoto, Correlation function of the Schur process with a fixed final partition, *J. Math. Phys.*, **49** (2008), 053302/1–20.
- [8] M. Ishikawa, S. Okada, H. Tagawa and J. Zeng, Generalizations of Cauchy’s determinant and Schur’s Pfaffian, *Adv. in Appl. Math.*, **36** (2006), 251–287.
- [9] M. E. H. Ismail, *Classical and Quantum Orthogonal Polynomials in One Variable*, Cambridge University Press, Cambridge, 2005.
- [10] M. Izumi and M. Katori, Extreme value distributions of noncolliding diffusion processes, *RIMS Kôkyûroku Bessatsu*, **B27** (2011), 45-65
- [11] S. Karlin and J. McGregor, Coincidence probabilities, *Pacific J. Math.*, **9** (1959), 1141–1164.
- [12] M. Katori, Characteristic polynomials of random matrices and noncolliding diffusion processes, [math.PR/1102.4655](https://arxiv.org/abs/math.PR/1102.4655)
- [13] M. Katori, Bessel process, Schramm-Loewner evolution, and Dyson model - Complex analysis applied to stochastic processes and statistical mechanics -, [math.PR/1103.4728](https://arxiv.org/abs/math.PR/1103.4728), The proceedings of the 9th Oka symposium, held at Nara Women’s University, 4-5 December 2010.

- [14] M. Katori, Determinantal process starting from an orthogonal symmetry is a Pfaffian process, *J. Stat. Phys.*, **146** (2012), 249-263.
- [15] M. Katori, Reciprocal time relation of noncolliding Brownian motion with drift, *J. Stat. Phys.* **148** (2012), 38-52.
- [16] M. Katori, M. Izumi and N. Kobayashi, Two Bessel bridges conditioned never to collide, double Dirichlet series, and Jacobi theta function, *J. Stat. Phys.*, **131** (2008) 1067.
- [17] M. Katori, T. Nagao, and H. Tanemura, Infinite systems of non-colliding Brownian particles, *Adv. Stud. in Pure Math.* **39** “*Stochastic Analysis on Large Scale Interacting Systems*”, Mathematical Society of Japan, Tokyo, 2004, pp.283–306.
- [18] M. Katori and H. Tanemura, Functional central limit theorems for vicious walkers, *Stoch. Stoch. Rep.*, **75** (2003), 369–390.
- [19] M. Katori and H. Tanemura, Noncolliding Brownian motions and Harish-Chandra formula, *Elect. Comm. in Probab.*, **8** (2003), 112–121.
- [20] M. Katori and H. Tanemura, Symmetry of matrix-valued stochastic processes and noncolliding diffusion particle systems, *J. Math. Phys.*, **45** (2004), 3058–3085.
- [21] 香取眞理, 種村秀紀, ランダム行列と非衝突過程, 「数理物理への誘い 6」, 小嶋泉編, 遊星社, 2006, pp.148–175.
- [22] M. Katori and H. Tanemura, Infinite systems of non-colliding generalized meanders and Riemann-Liouville differintegrals, *Probab. Th. Rel. Fields*, **138** (2007), 113–156.
- [23] M. Katori and H. Tanemura, Noncolliding Brownian motion and determinantal processes, *J. Stat. Phys.*, **129** (2007), 1233-1277.
- [24] 香取眞理, 種村秀紀, 非衝突過程・行列値過程・行列式過程, 「数学」, **61**, No.3 (2009), 225-247.
- [25] M. Katori and H. Tanemura, Zeros of Airy function and relaxation process, *J. Stat. Phys.*, **136** (2009), 1177-1204.
- [26] M. Katori and H. Tanemura, Non-equilibrium dynamics of Dyson’s model with an infinite number of particles, *Commun. Math. Phys.*, **293** (2010), 469-497.
- [27] M. Katori and H. Tanemura, Noncolliding squared Bessel processes, *J. Stat. Phys.*, **142** (2011), 592-615.

- [28] M. Katori and H. Tanemura, Markov property of determinantal processes with extended sine, Airy, and Bessel kernels, *Markov Processes Relat. Fields*, **17** (2011), 541-580.
- [29] M. Katori and H. Tanemura, Noncolliding processes, matrix-valued processes and determinantal processes, *Sugaku Expositions (AMS)*, **24** (2011), 263-289.
- [30] M. Katori and H. Tanemura, Complex Brownian motion representation of the Dyson model, *Electron. Commun. Probab.*, **18** (2013), no.4, 1-16.
- [31] N. Kobayashi, M. Izumi and M. Katori, Maximum distributions of noncolliding Bessel bridges, *Phys. Rev. E* **78** (2008), 051102/1-15.
- [32] B. Ya. Levin, *Lectures on Entire Functions*, American Mathematical Society, Providence, 1996.
- [33] B. Lindström, On the vector representations of induced matroids, *Bull. London Math. Soc.*, **5** (1973), 85–90.
- [34] I. G. Macdonald, Some conjectures for root systems, *SIAM J. Math. Anal.*, **13** (1982), 988–1007.
- [35] M. L. Mehta, *Random Matrices*, 3rd ed., Elsevier, Amsterdam, 2004.
- [36] M. L. Mehta and J. M. Normand, Moments of the characteristic polynomial in the three ensembles of random matrices, *J. Phys.*, A **34** (2001), 4627-4639.
- [37] 永尾太郎, ランダム行列の基礎, 東京大学出版会, 2005.
- [38] H. Osada, Non-collision and collision properties of Dyson’s model in infinite dimension and other stochastic dynamics whose equilibrium states are determinantal random point fields, *Adv. Stud. in Pure Math.*, **39** “Stochastic Analysis on Large Scale Interacting Systems”, Mathematical Society of Japan, Tokyo, 2004, pp.325–343.
- [39] D. Revuz and M. Yor, *Continuous Martingales and Brownian Motion*, 3rd ed., Springer, New York, 1998.
- [40] M. Sato and M. Katori, Determinantal Correlations of Brownian Paths in the Plane with Nonintersection Condition on their Loop-Erased Parts, *Phys. Rev.*, E **83** (2011), 041127/1-12.
- [41] A. Selberg, Bemerkninger om et multiplet integral, *Norsk Matematisk Tidsskrift*, **26** (1944), 71–78.

- [42] T. Shirai and Y. Takahashi, Random point fields associated with certain Fredholm determinants I: fermion, Poisson and boson point process, *J. Funct. Anal.*, **205** (2003), 414–436.
- [43] A. Soshnikov, Determinantal random point fields, *Russian Math. Surveys*, **55** (2000), 923–975.
- [44] J. R. Stembridge, Nonintersecting paths, pfaffians, and the plane partitions, *Adv. in Math.*, **83** (1990), 96–131.
- [45] Y. Takahashi and M. Katori, Noncolliding Brownian motion with drift and time-dependent Stieltjes-Wigert determinantal point process, *J. Math. Phys.*, **53** (2012), 103305/1-23.