

複雑系の物理学

中央大学理工学研究科物理学専攻
香取研究室
和泉南、小林奈央樹、香取眞理

私たちの身近な生活と物理
社会現象 自然現象

非線形 非平衡

複雑!

統計物理学

べき分布
対数正規分布

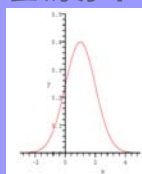
対数正規分布

正規分布 (ガウス分布)

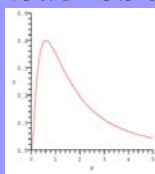
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] \quad -\infty < x < \infty$$

対数正規分布 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} \exp\left[-\frac{(\log x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right] \quad x \geq 0$

正規分布



対数正規分布



中心極限定理

確率変数 x_1, x_2, x_3, \dots について、 $X = x_1 + x_2 + \dots + x_N$ とおくと、

$$\frac{(x_1 - \langle x \rangle) + (x_2 - \langle x \rangle) + \dots}{\sqrt{N}} = \frac{X - N\langle x \rangle}{\sqrt{N}}$$

は、 $n \rightarrow \infty$ の極限で平均0、分散 σ^2 の正規分布に従う

☆ 対数正規分布の場合 $Y = x_1 \times x_2 \times x_3 \dots$

とおくと、 $\log Y = \log x_1 + \log x_2 + \dots + \log x_N$

これが上のXに対応して、対数正規分布に従う。
→ 正規分布は加法的、対数正規分布は乗法的!

数理的アブローチ

幾何ブラウン運動の変位は対数正規分布に従う

確率微分方程式 stochastic differential equation (SDE)

$$dX_t = \sigma \cdot X_t \cdot dB_t + \mu \cdot X_t \cdot dt$$

幾何ブラウン運動のSDE

フラウン運動 ドリフト項

自分自身の履歴に影響される

差分の式

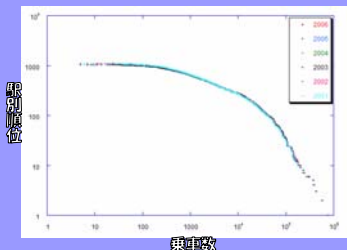
$$X_i - X_{i-1} = \sigma \cdot X_{i-1} [B_i - B_{i-1}] + \mu \cdot X_{i-1} h$$

分散hの正規乱数

$$X_i = X_{i-1} + \sigma \cdot X_{i-1} \sqrt{h} R + \mu \cdot X_{i-1} h$$

シミュレーション

対数正規分布であらわされる現象の例



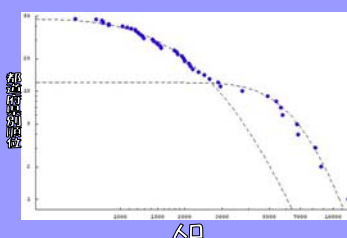
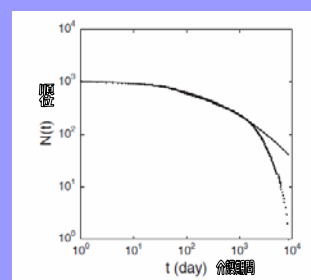
JR東日本の各駅の乗客者数

1日の乗客者数が多い駅順に1から番号を振って乗客者数を横軸に、その順位を縦軸にとって log-log プロットしたものを。

老人患者の介護期間分布

老人患者の介護期間が長い順に1から番号を振って介護期間を横軸に、その順位を縦軸にとって log-log プロットしたものを。実線は対数正規分布でフィッティングした線で対数正規分布でよくあらわされていることがわかる。

O. Moriyama, H. Itoh, S. Matsushita, and M. Matsushita, Long-tailed duration distributions for disability in aged people, J. Phys. Soc. Jpn. 72 (2003) 2409-2412



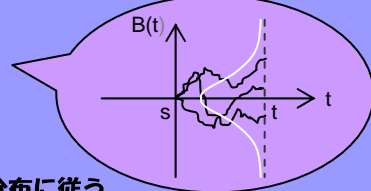
日本の都道府県別人口分布

都道府県別に人口の多い順に1から番号をふって、人口を横軸にその順位を縦軸にとって log-log プロットしたものを。(2003年のデータ) 2つの対数正規分布がみられる。

N. Kobayashi, Y. Sasaki, O. Moriyama, S. Matsushita and M. Matsushita, Empirical Studies of Random Multiplicative Stochastic Processes: Revisit to Lognormals Nonlinear Phenomena in Complex System, Vol. 9, No. 3 (2006) pp. 276-282

対数正規分布はどのようなプロセスで発生するのか?

0から出発したフラウン運動の時刻sから時刻tまでの変位 $(B(t) - B(s))$ は平均0、分散 $(t-s)$ の正規分布 (右図の青い実線) に従う



これと同じように対数正規分布に従う、フラウン運動のようなものはないのか? → 幾何フラウン運動

