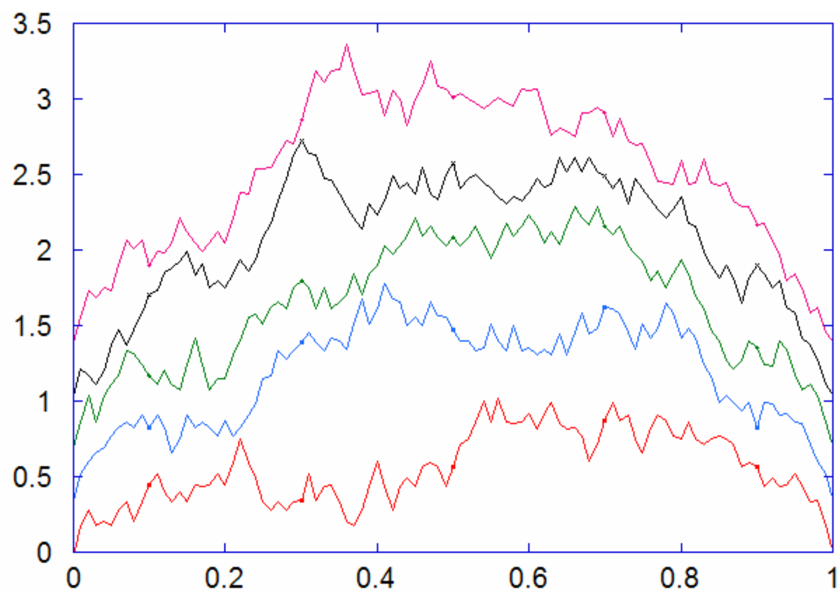
非衝突ベッセル過程と多重ディリクレ級数

中央大学物理
和泉南　小林奈央樹　香取眞理

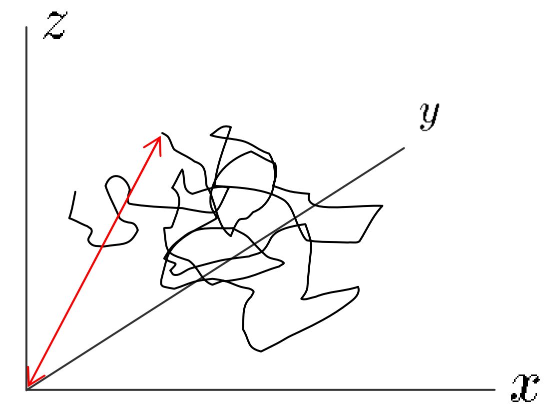


3 次元ベッセル過程　BES_3

3 次元ベッセル過程 X_t は 3 次元ブラウン運動の動径成分 (原点からの距離) として定義される

$$\boxed{\begin{aligned} X(t) &\equiv |\mathbf{B}(t)| \\ &= \sqrt{B_1(t)^2 + B_2(t)^2 + B_3(t)^2} \end{aligned}}$$

独立な 1 次元ブラウン運動



X(t) は $\mathbf{R}_+ = \{x \in \mathbf{R} : x > 0\}$ 上の拡散過程で
次の確率微分方程式を満たす (伊藤の公式)

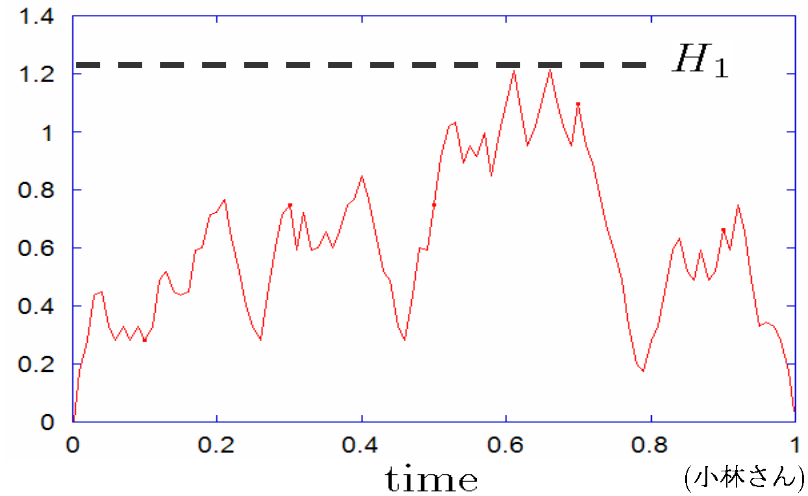
$$dX(t) = dB(t) + \frac{1}{X(t)}dt, \quad t \geq 0, \quad X(0) = x,$$

3 次元ベッセル橋 $\widetilde{X}(t), t \in [0,1]$

$X(t)$ に

$$x = X(0) \to 0 \quad \text{and} \quad X(1) = 0$$

という条件を付けたもの



$\widetilde{X}(t)$ の最大値

$$H_1 \equiv \max_{0<t<1} \widetilde{X}(t)$$

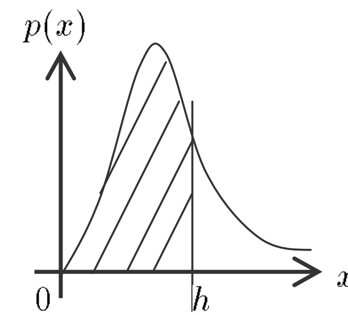
H_1 の確率密度 p(h)

$$p(h) = \frac{d}{dh}\mathrm{Prob}(H_1 \le h)$$

累積分布

$Prob(H_1 \le h)$

$= \int_0^h p(x)\,dx$



H_1 の s 次モーメント $\mathbf{E}[H_1^s]$

$$\mathbf{E}[H_1^s] = 2\left(\frac{\pi}{2}\right)^{s/2} \xi(s), \quad s \in \mathbf{C}$$

モーメントとは？

$\mathbf{E}[x^s] = \int_0^\infty dx\, x^s\, p(x)$

H_1 の s 次モーメント $\mathbf{E}[H_1^s]$

$$\boxed{\mathbf{E}[H_1^s] = 2\left(\tfrac{\pi}{2}\right)^{s/2} \xi(s), \quad s \in \mathbf{C}}$$

証明

ここで

$$\xi(s) = \tfrac{1}{2} s(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s)$$

ゼータ関数 $\zeta(s)$

$$\zeta(s) = \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

ガンマ関数 $\Gamma(x)$

$$\Gamma(x) = \textstyle\int_0^{\infty} du\, u^{x-1} e^{-u}, \quad \mathrm{Re}\, x > 0$$

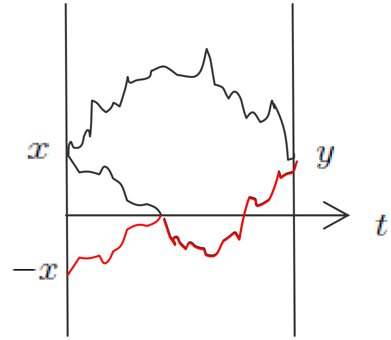
一次元ブラウン運動の推移確率密度は次式で与えられる

$$p(t,y|x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\exp\left\{-\frac{(y-x)^2}{2t}\right\},\quad x,y\in\mathbf{R},\ t\geq 0$$

原点に吸収壁がある場合 (反射原理より)

$$\begin{aligned}p_1(t,y|x) &= p(t,y|x)-p(t,y|-x)\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\left(e^{-(y-x)^2/2t}-e^{-(y+x)^2/2t}\right)\end{aligned}$$

$$x,y\in\mathbf{R}_+,\ t\geq 0$$



さらに, 原点と $x=h>0$ に吸収壁がある場合

$$\begin{aligned}p_2^h(t,y|x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\Big\{p(t,y|x+2hn)-p(t,y|-x+2hn)\Big\}\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\exp\left\{-\frac{1}{2t}(y-(x+2hn))^2\right\}-\exp\left\{-\frac{1}{2t}(y-(-x+2hn))^2\right\}\right]\end{aligned}$$

$$x,y\in(0,h),t\geq 0$$

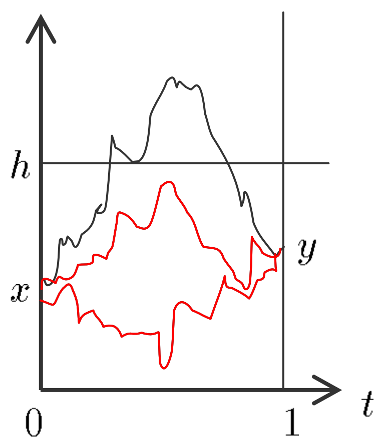
BES$_3$ と「負の値はとらない」という条件を課したブラウン運動は推移確率密度関数が等しい。そのため次式が成り立つ

$$\mathrm{Prob}(H_1 \le h) = \lim_{x\to 0, y\to 0} \frac{p_2^h(1, y|x)}{p_1(1, y|x)}$$

BES$_3$ の最大値が h 以下になる確率

$t=0$ から $t=1$ の間に x から出発して原点と壁 h にぶつからずに y に到着

$t=0$ から $t=1$ の間に x から出発して原点にぶつからずに y に到着



$x \to 0, y \to 0$ とすれば
最大値が h 以下の BES$_3$ の確率になる

計算

$t \to 1, x \to a, y \to a$ として、

$$p_1(1,a|a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} 2a^2 + \mathcal{O}(a^4)$$
$$p_2^h(1,a|a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} 2a^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-2h^2n^2}(1-4h^2n^2) + \mathcal{O}(a^4)$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Prob}(H_1 \le h) &= \lim_{a\to 0} \frac{p_2^h(1,a|a)}{p_1(1,a|a)} \\ &= 1 + 2\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-2h^2n^2}(1-4h^2n^2) \end{aligned}$$

H_1 の確率密度 p(h)

$$\boxed{\begin{aligned} p(h) &= \frac{d}{dh}\mathrm{Prob}(H_1 \le h) \\ &= 8\sum_{n=1}^{\infty} e^{-2h^2n^2}(4h^3n^4 - 3hn^2) \end{aligned}}$$

H_1 の x 次モーメント

$$\mathbf{E}[H_1^s] = \int_0^\infty dh\, h^s \boxed{p(h)}$$

$$\int_0^\infty dh\, h^{s+a} e^{-2h^2n^2}$$
$$= 2^{-(s+a+3)/2} n^{-(s+a+1)} \Gamma((s+a+1)/2)$$
$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

これらの公式を使うと

$$
\boxed{\begin{aligned} E[H_1^s] &= 2^{-s/2} s(s-1)\Gamma\left(\frac{\pi}{2}\right)\zeta(s) \\ &= 2\left(\frac{\pi}{2}\right)^{s/2}\xi(s) \end{aligned}}
$$

$$
\xi(s) = \tfrac{1}{2}s(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s)
$$

H_1 の s 次モーメント $\mathbf{E}[H_1^s]$ が求められた

さらにヤコビのテータ関数を用いて $\vartheta(u)$ を次のように定義する

$$
\vartheta(u) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 u}, \quad u > 0
$$

ヤコビのテータ関数

$$
\vartheta_0(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i(xn + \frac{y}{2}n^2)}, \quad \mathrm{Im}\, y > 0
$$

すると $\xi(s)$ は

$$
\xi(s) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}s(s-1)\int_1^{\infty} du\,(u^{s/2-1} + u^{(1-s)/2-1})(\vartheta(u) - 1)
$$

となり、次の関係を満たすことがわかる

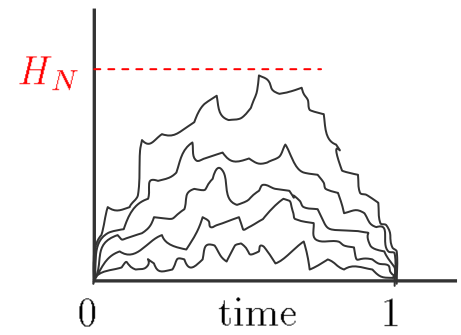
$$
\boxed{\xi(1-s) = \xi(s)}, \quad s \in \mathbf{C}
$$

関数方程式　functional equation

非衝突ベッセル過程 (N 粒子)

$N=2,3,\cdots$ という N 粒子の非衝突ベッセル過程

$$0<\widetilde{X}_1(t)<\widetilde{X}_2(t)<\cdots<\widetilde{X}_N(t), \quad 0<t<1$$



H_N は右端のベッセル橋の最大値で定義される

$$H_N=\max_{0\le t\le 1}\widetilde{X}_N(t)$$

N 粒子の非衝突ベッセル橋の最大値 H_N が h 以下になる確率は

$$\mathrm{Prob}(H_N\le h)=\lim_{x_j\to 0, y_j\to 0, 1\le j\le N}\boxed{F^h(y_1,y_2,\cdots,y_N|x_1,x_2,\cdots,x_N)}$$

$$\boxed{F^h(y_1,y_2,\cdots,y_N|x_1,x_2,\cdots,x_N)}=\frac{\det_{1\le j,k\le N}[p_2^h(1,y_j|x_k)]}{\det_{1\le j,k\le N}[p_1(1,y_j|x_k)]}$$

$t=0$ から $t=1$ の間に N 個の粒子が $\boldsymbol{x}$ から出発して互いに非衝突で原点と壁 h にぶつからずに $\boldsymbol{y}$ に到達

$t=0$ から $t=1$ の間に N 個の粒子が $\boldsymbol{x}$ から出発して互いに非衝突で原点にぶつからずに $\boldsymbol{y}$ に到達

Karlin-McGregor の公式
推移確率を成分とした行列式をとると、
非衝突な推移確率になる

非衝突ベッセル橋における H_N の s 次モーメント

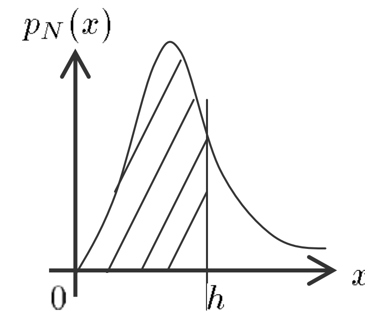
H_N の確率密度 $p_N(h)$ は次式のようになる

$$p_N(h) = \frac{d}{dh}\mathrm{Prob}(H_N \leq h)$$

累積分布

$Prob(H_N \leq h)$

$= \int_0^h p_N(x)\,dx$

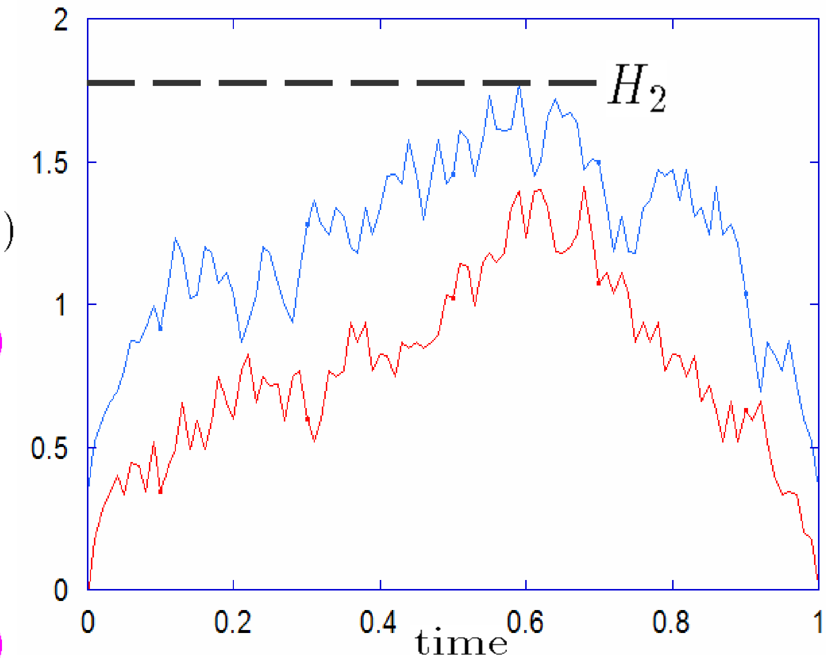


H_N の s 次モーメント

$$E[H_N^s] = \int_0^\infty dh\, h^s p_N(h)$$

$N = 2$ の場合について求めていく

$N = 2$ の場合



$$\mathrm{Prob}(H_2 \le h) = \lim_{x_j \to 0, y_j \to 0, 1 \le j \le 2} F^h(y_1, y_2 | x_1, x_2)$$

$$F^h(y_1, y_2 | x_1, x_2) = \frac{\overbrace{\boxed{\det_{1\le j,k\le 2}[p_2^h(1, y_j | x_k)]}}^{r_{\mathrm{n}}(x_1, x_2 | x_1, x_2)}}{\underbrace{\boxed{\det_{1\le j,k\le 2}[p_1(1, y_j | x_k)]}}_{r_{\mathrm{d}}(x_1, x_2 | x_1, x_2)}}$$

$$\begin{aligned}
r_{\mathrm{d}}(x_1, x_2 | x_1, x_2) &= \frac{1}{3\pi} x_1^2 x_2^2 (x_1 - x_2)^2 (x_1 + x_2)^2 + O(x_1^{10}, x_2^{10}) \\
r_{\mathrm{n}}(x_1, x_2 | x_1, x_2) &= \frac{1}{9\pi} x_1^2 x_2^2 (x_1 - x_2)^2 (x_1 + x_2)^2 \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} e^{-2h^2(n_1^2+n_2^2)} Q_h(n_1, n_2) + O(x_1^9, x_2^9)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_h(n_1, n_2) &= 3 - 48h^2 n_1^2 + 72h^4 n_1^4 + 72h^4 n_1^2 n_2^2 - 32h^6 n_1^6 - 96h^6 n_1^4 n_2^2 \\
&\quad + 128h^8 n_1^6 n_2^2 - 128h^8 n_1^4 n_2^4
\end{aligned}$$

$$p_2(h) = \frac{d}{dh} \mathrm{Prob}(H_2 \le h)$$

$$E[H_2^s] = \int_0^\infty dh\, h^s p_2(h)$$

H_2 の s 次モーメント 結果

$$\boxed{\mathbf{E}[H_2^s] \;=\; \frac{2^{-s/2}}{24} s\Big[(s-1)(s^2-2s+12)\widetilde{Z}_{s/2}(0) - 4(s+4)(s+6)\widetilde{Z}_{s/2}(1) + 64\widetilde{Z}_{s/2}(2)\Big]}$$

$$\widetilde{Z}_a(b) = \Gamma(a+2b)Z(2b, 2b; a+2b)$$

$$Z(\alpha, \beta; \gamma) \equiv \sum_{(n_1,n_2)\in\mathbf{Z}^2\setminus\{(0,0)\}} \frac{n_1^\alpha n_2^\beta}{(n_1^2+n_2^2)^\gamma}$$ double Dirichlet series

$$\boxed{\begin{aligned}\mathbf{E}[H_2^s] \;=\; \left(\frac{\pi}{2}\right)^{s/2} \Bigg[&\frac{1}{24}(1-s)(s^2-2s+12)(2-sK_0(s)) \\ &-4s\Big(\vartheta(1)\vartheta'(1) + 2s\vartheta'(1)^2\Big) + s\xi_2(s)\Bigg], \quad s \in \mathbf{C}\end{aligned}}$$

$$K_0(s) = \int_1^\infty du\, u^{s/2-1}\{\vartheta(u)^2 - 1\}$$

$$\begin{aligned}\xi_2(s) \;=\; &-\frac{1}{6}\Bigg\{(s+4)(s+6)\int_1^\infty du\, u^{s/2+1}\vartheta'(u)^2 \\ &\qquad +((2-s)+4)((2-s)+6)\int_1^\infty du\, u^{(2-s)/2+1}\vartheta'(u)^2\Bigg\} \\ &+\frac{8}{3}\int_1^\infty du\,(u^{s/2+3} + u^{(2-s)/2+3})\vartheta''(u)^2 + \frac{1}{12}s(s-2)\vartheta(1)^2\end{aligned}$$

$\boxed{\xi_2(2-s) = \xi_2(s),}$ $\quad s \in \mathbf{C}$ 関数方程式 functional equation

H_1^s と H_2^s の s 次モーメントの数値計算結果

表 1: Numerical values of moments

s	0	1	2	3	4	5
$\mathbf{E}[H_1^s]$	1.0	1.253314	1.644934	2.259832	3.246969	4.873485
$\mathbf{E}[H_2^s]$	1.0	1.822625	3.395156	6.463823	12.576665	25.005999

不完全ガンマ関数

$$\begin{aligned}\Gamma(z,p) &= \int_p^\infty du\, u^{z-1}e^{-u} \\ &= \Gamma(z) - \int_0^p du\, u^{z-1}e^{-u}\end{aligned}$$

今後の課題

N 粒子の場合の非衝突ベッセル橋について

- ランダム行列の固有値の離散版
- $N \times N$ の行列式

など $\cdots$

$N=2$ の場合

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}(H_2 \le h) &= \frac{1}{3!} \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} e^{-2h^2(n_1^2+n_2^2)} \det \begin{bmatrix} f_1(h^2 n_1^2) & f_2(h^2 n_1^2) \\ f_2(h^2 n_2^2) & f_3(h^2 n_2^2) \end{bmatrix} \\
&= \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} e^{-2h^2(n_1^2+n_2^2)} \underbrace{\Big\{ 1 - 16h^2 n_1^2 + 24h^4 n_1^4 + 24h^4 n_1^2 n_2^2 - \frac{32}{3} h^6 n_1^6 - 32h^6 n_1^4 n_2^2 + \frac{128}{3} h^8 n_1^6 n_2^2 - \frac{128}{3} h^8 n_1^4 n_2^4 \Big\}}_{\frac{1}{3} Q_h(n_1, n_2)}.
\end{aligned}
$$

参考文献

[1] Katori-Izumi-Kobayashi, arXiv math.PR/0711.1710

[2] P. Biane, J. Pitman, and M. Yor, Probability laws related to the Jacobi theta and Riemann zeta functions, and Brownian excursions, *Bull. Amer. Math. Soc.* **38** (2001) 435-465.

[3] N. Bonichon and M. Mosbah, Watermelon uniform random generation with applications, *Theoretical Computer Science* **307** (2003) 241-256.

[4] M. Fulmek, Asymptotics of the average height of 2-watermelons with a wall, *Elec. J. Combinatorics*, **14** (2007) #R64 /1-20.

[5] S. Karlin and J. McGregor, Coincidence probabilities *Pacific J. Math.* **9** (1959) 1141-1164.

[6] M. Yor, *Some Aspects of Brownian Motion, Part II: Some Recent Martingale Problems*, Birkhäuser, 1997.