量子二項係数

大谷　諭　　武田　聡　　伊藤　塊

量子ウォークで粒子がnステップで
位置kに存在する確率Pは

$$P = \{\Xi_n(k)\varphi\}^{*} \cdot \Xi_n(k)\varphi$$

$*$:エルミート共役

$\Xi_n(k)$:パスの合計

$$\Xi_n(k) = \begin{pmatrix} a_n(k) & b_n(k) \\ c_n(k) & d_n(k) \end{pmatrix}$$

φ :初期キュービット

この $\Xi_n(k)$ はいわゆるPQRS法ですでに以下のように求められている。

$$\Xi_n(l,m) = a^l \bar{a}^m \Delta^m \sum_{\gamma=1}^{l\wedge m} \binom{l-1}{\gamma-1}\binom{m-1}{\gamma-1}\left[\frac{l-\gamma}{a\gamma}P + \frac{m-\gamma}{\Delta\bar{a}\gamma}Q - \frac{1}{\Delta b}R + \frac{1}{b}S\right]$$

$U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$としたとき

$$P = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad S = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{pmatrix}$$

量子ウォークの数理（今野紀雄　著）

今回は$\Xi_n(k)$を漸化式によって求めてみたい。

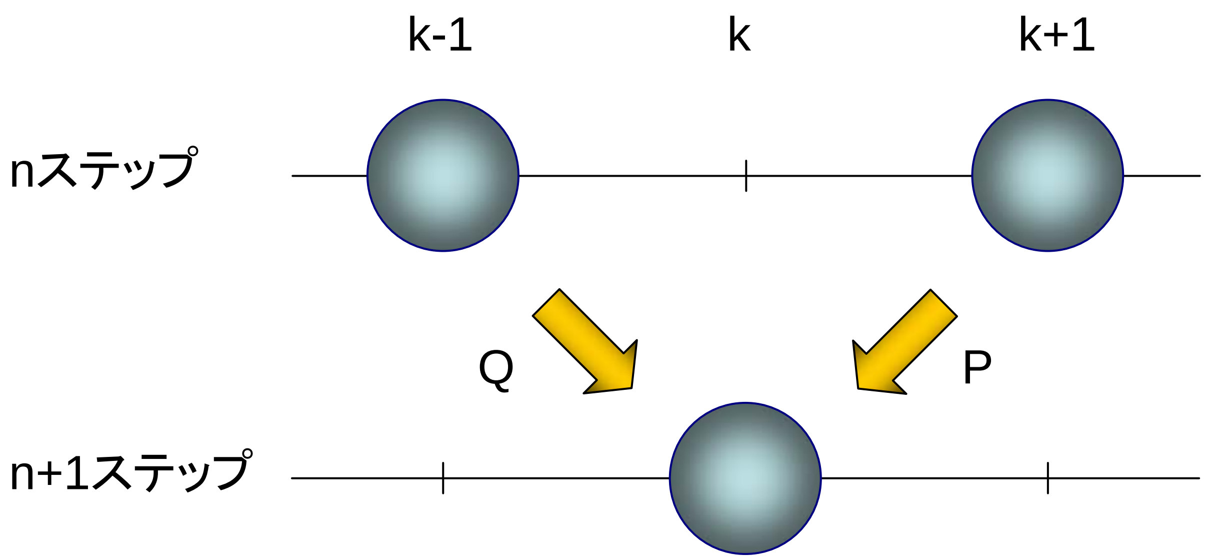
まずはUをアダマール行列の場合で考えてみたい。

$$U=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

このとき

$$P=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\qquad Q=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

１次元で最近接点に移動する離散時間の古典的なランダムウォークに対応する「量子ウォーク」を考える。



これを行列で表示すると

$$\Xi_{n+1}(k) = P\Xi_n(k+1) + Q\Xi_n(k-1)$$

漸化式

$$a_{n+1}(k)=\frac{1}{\sqrt{2}}\{a_n(k+1)+c_n(k+1)\}\bullet\bullet\bullet①$$

$$b_{n+1}(k)=\frac{1}{\sqrt{2}}\{b_n(k+1)+d_n(k+1)\}\bullet\bullet\bullet②$$

$$c_{n+1}(k)=\frac{1}{\sqrt{2}}\{a_n(k-1)-c_n(k-1)\}\bullet\bullet\bullet③$$

$$d_{n+1}(k)=\frac{1}{\sqrt{2}}\{b_n(k-1)-d_n(k-1)\}\bullet\bullet\bullet④$$

①と③より

$$\sqrt{2}a_{n+2}(k)-\{a_{n+1}(k+1)-a_{n+1}(k-1)\}-\sqrt{2}a_n(k)=0$$

母関数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_n(k) x^n y^k = G_a(x,y)$$の形に変形すると

$$G_a(x,y) = -\frac{(\sqrt{2}+2xy)x}{2x^2y+\sqrt{2}x-\sqrt{2}xy^2-2y}$$

同様に

$$G_b(x,y) = -\frac{x}{2x^2y+\sqrt{2}x-\sqrt{2}xy^2-2y}$$

$$G_c(x,y) = -\frac{xy^2}{2x^2y+\sqrt{2}x-\sqrt{2}xy^2-2y}$$

$$G_d(x,y) = -\frac{(\sqrt{2}x-y)xy}{2x^2y+\sqrt{2}x-\sqrt{2}xy^2-2y}$$

$$a_n(k) = c_n(k) + T(n_c + 1, k_c + 1)$$

$$b_n(k) = \frac{1}{\sqrt{2}} T(n_b, k_b) \qquad \left(n_b = \frac{1}{2}(n-1), k_b = \frac{1}{2}(k+1) \right)$$

$$c_n(k) = \frac{1}{\sqrt{2}} T(n_c, k_c) \qquad \left(n_c = \frac{1}{2}(n-1), k_c = \frac{1}{2}(k-1) \right)$$

$$d_n(k) = -b_n(k) + T(n_b + 1, k_b + 1)$$

$$T(n,k) = \sum_{b=|k|}^{n} (-1)^{b+k} 2^{-b} \frac{(n+b)!}{(n-b)!(b+k)!(b-k)!}$$

今野の式 $\Xi_n(k)$ に具体的に数字を代入して比較してみる。
$b_n(k)$ について計算すると

$$b_n^K(l,m) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{l+m} (-1)^m \sum_{\gamma=1}^{l\wedge m} (-1)^\gamma (l-2\gamma) \frac{(l-1)!}{(\gamma-1)!(l-\gamma)!} \frac{(m-1)!}{(m-\gamma)!\gamma!}$$

ただし l は左に行った回数、m は右に行った回数としている。
今回我々が求めた $b_n(k)$ は

$$b_n^I(k) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{b=|k_b|}^{n_b} (-1)^{b+k_b} 2^{-b} \frac{(n_b+b)!}{(n_b-b)!(b-k_b)!(b+k_b)!}$$

例えば $n = 2$ で $k = 0$ のとき（$l = 1, m = 1$のとき）

$$b_2^K(1,1) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{1+1}(-1)^1\sum_{\gamma=1}^{1}(-1)^\gamma(1-2\gamma)\frac{(1-1)!}{(\gamma-1)!(l-\gamma)!}\frac{(1-1)!}{(1-\gamma)!\gamma!} = -\frac{1}{2}$$

$$b_2^I(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{b=\left|\frac{1}{2}\right|}^{\frac{1}{2}}(-1)^{b+\frac{1}{2}}2^{-b}\frac{\left(\frac{1}{2}-b\right)!}{\left(\frac{1}{2}-b\right)!\left(b+\frac{1}{2}\right)!\left(b-\frac{1}{2}\right)!} = -\frac{1}{2}$$

例えば $n = 3$ で $k = -1$ のとき（ $l = 2, m = 1$ のとき）

$$b_3^K(2,1) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2+1}(-1)^1\sum_{\gamma=1}^{1}(-1)^\gamma(2-2\gamma)\frac{(2-1)!}{(\gamma-1)!(2-\gamma)!}\frac{(1-1)!}{(1-\gamma)!\gamma!} = 0$$

$$b_3^I(-1) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{b=|0|}^{1}(-1)^{b+0}2^{-b}\frac{(1+b)!}{(1-b)!(b-0)!(b+0)!} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1-1) = 0$$

今度は一般の

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

の場合について考えてみる。
アダマール行列の場合と同様に

$$\Xi_{n+1}(k) = P\Xi_n(k+1) + Q\Xi_n(k-1)$$

より以下の漸化式が求められる。

漸化式

$$a_{n+1}(k) = a \cdot a_n(k+1) + b \cdot c_n(k+1) \bullet\bullet\bullet ①$$

$$b_{n+1}(k) = a \cdot b_n(k+1) + b \cdot d_n(k+1) \bullet\bullet\bullet ②$$

$$c_{n+1}(k) = c \cdot a_n(k-1) + d \cdot c_n(k-1) \bullet\bullet\bullet ③$$

$$d_{n+1}(k) = c \cdot b_n(k-1) + d \cdot d_n(k-1) \bullet\bullet\bullet ④$$

①と③より

$$a_{n+2}(k) - a \cdot a_{n+1}(k+1) - d \cdot a_{n+1}(k-1) + (ad - bc) \cdot a_n(k) = 0$$

母関数

$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_n(k) x^n y^k = G_a(x, y)$の形に変形すると

$$G_a(x, y) = -\frac{-(ad-bc)x^2y + ax}{(ad-bc)x^2y - (a+dy^2)x + y}$$

同様に

$$G_b(x, y) = -\frac{bx}{(ad-bc)x^2y - (a+dy^2)x + y}$$

$$G_c(x, y) = -\frac{cxy^2}{(ad-bc)x^2y - (a+dy^2)x + y}$$

$$G_d(x, y) = -\frac{-(ad-bc)x^2y + dxy^2}{(ad-bc)x^2y - (a+dy^2)x + y}$$

これからの展望

- TのＴの中のΣをもっと簡潔に書けないか？
- Uが一般の場合のΞはどう表せるか？