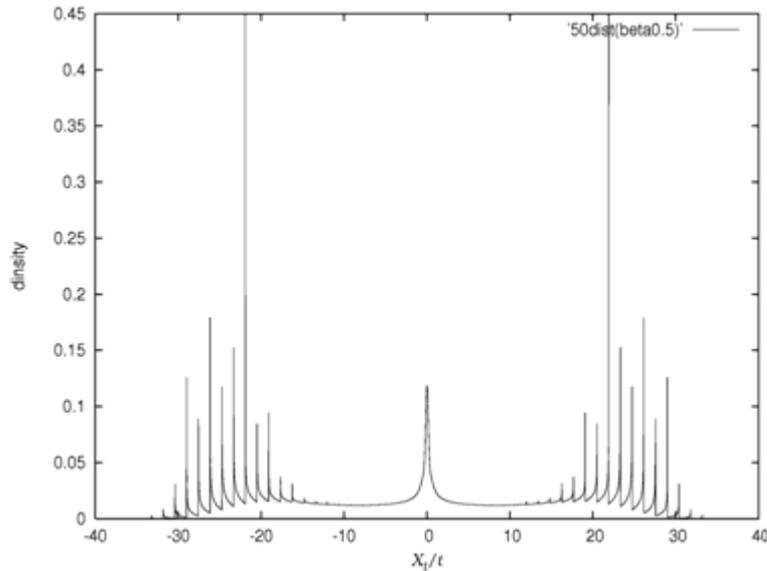


# 1次元量子ウォークの多状態極限



中央大学理工学研究科  
佐藤充規

## 1. 重み多項式Mの行列表示

1-1. 行列成分の一般形

1-2. 行列間漸化式

## 2. 数値計算と状態数極限の予想

2-1. シミュレーションと数値計算の比較

2-2. 多状態での性質

2-3. 重み多項式,  $j \gg m$  での漸近挙動

# 1. 重み多項式の行列表示

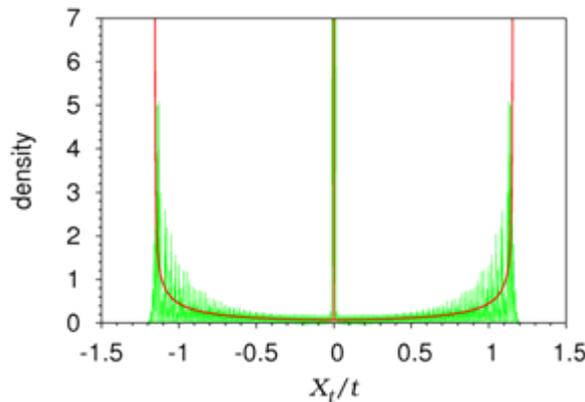
## 1-1. 行列表示の一般形について

(2j+1) 模型量子ウォークの極限分布は次式で与えられる

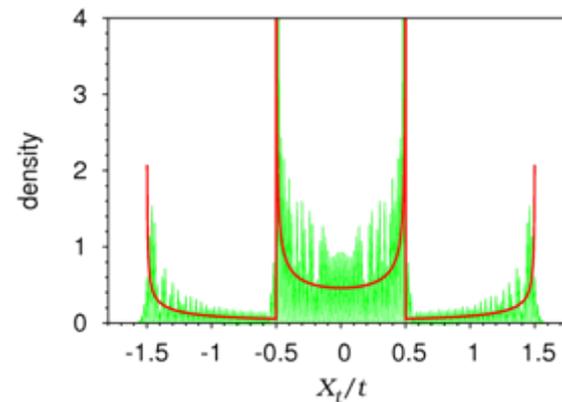
$$\nu^{(j)}(y) = \sum_{m:0 < m \leq j} \frac{1}{2m} \mu\left(\frac{y}{2m}; \cos \frac{\beta}{2}\right) \mathcal{M}^{(j,m)}\left(\frac{y}{2m}\right) + \mathbf{1}_{\{(2j+1) \text{ is odd}\}} \Delta^{(j)} \delta(y)$$

$$j = 1/2, 1, 3/2, \dots$$

**j= 1**     $(\alpha, \beta, \gamma) = (0, \arccos(-1/3), \pi)$   
 ${}^t\phi_0 = (1 + i, 1 - i, 1 + i)/\sqrt{6}$



**j= 3/2**     $(\alpha, \beta, \gamma) = (0, 2\pi/3, \pi)$   
 ${}^t\phi_0 = (1 + 3i, 0, 0, -3 + i)/2\sqrt{5}$



Takahiro Miyazaki, Makoto Katori, Norio Konno, Wigner formula of rotation matrices and quantum walks, Phys.Rev.A76(2007)012332

$j = 1/2$  の場合

$$\mathcal{M}^{(1/2,1/2)}(x) = 1 - [|q_{1/2}|^2 - |q_{-1/2}|^2 + 2\tau \operatorname{Re}\{q_{1/2}\bar{q}_{-1/2}e^{-i\gamma}\}]x$$



行列で書く

$$\mathcal{M}^{(1/2,1/2)}(x) = \phi_0^\dagger \mathbb{M}^{(1/2,1/2)}(x) \phi_0$$

$$\phi_0 = {}^t(q_{1/2}, q_{-1/2})$$

$$\mathbb{M}^{(1/2,1/2)}(x) = \begin{pmatrix} (1-x) & \tau x e^{i\gamma} \\ \tau x e^{-i\gamma} & (1+x) \end{pmatrix}$$

一般に多項式を表現する行列  $\mathbb{M}^{(j,m)}(x)$  はエルミート行列

重み多項式は初期 qudit と行列表示により次式で与えられる

$$\mathcal{M}^{(j,m)}(x) = \phi_0^\dagger \mathbb{M}^{(j,m)}(x) \phi_0$$

初期 qudit と行列の  $(m_1, m_2)$  成分

$$\phi_0 = {}^t(q_j, q_{j-1}, \dots, q_{-j+1}, q_{-j})$$

$$\begin{aligned} [\mathbb{M}^{(j,m)}(x)]_{m_1, m_2} &= \left(\frac{1}{2}\right)^{(2j-1)} \sum_{\ell_1} \sum_{\ell_2} \Gamma(j, m_1, m, \ell_1) \Gamma(j, m_2, m, \ell_2) \\ &\times \sum_{k_1=0}^A \sum_{k_2=0}^B {}_A C_{k_1} {}_B C_{k_2} (-1)^{k_1} x^{k_1+k_2} \\ &\times f_\tau^{(m_2-m_1)}(x) e^{-1(m_2-m_1)\gamma} \end{aligned}$$

但し、 $(m_1, m_2)$  は条件を満たす成分とする

$$(m_2 \geq m_1) \setminus \{(m_2 \geq m_1) \cap (m_2 + m_1 < 0)\}$$

$$\mathbb{M}^{(j,m)}(x) = \left( \begin{array}{c} \text{Diagram: A triangle with a red left side and black right side, crossed by a diagonal line, all enclosed in large parentheses.} \end{array} \right)$$

また  $f_\tau^{(a)}(x)$ ,  $A$ ,  $B$  は

$$f_\tau^{(a)}(x) = \sum_{k_0=0}^{\lfloor \frac{a}{2} \rfloor} \sum_{k_1=0}^{k_0} \sum_{k_2=0}^{k_1} [{}_a C_{2k_0 k_0} C_{k_1 k_1} C_{k_2} (-1)^{k_0+k_1} \tau^{a-2(k_0-k_2)} x^{a-2(k_0-k_1)}]$$

$$A = 2j - m + m_1 - \ell_1 - \ell_2$$

$$B = m - m_2 + \ell_1 + \ell_2$$

$f_\tau$  の具体例についていくつかあげると

$$f_\tau^{(1)}(x) = \tau x \quad f_\tau^{(2)}(x) = (2\tau^2 + 1)x^2 - 1 \quad f_\tau^{(3)}(x) = (4\tau^3 + 3\tau)x^3 - 3\tau x$$

$$f_\tau^{(4)}(x) = (8\tau^4 + 8\tau^2 + 1)x^4 - (8\tau^2 + 2)x^2 + 1$$

## 1-2. 行列間漸化式

初項を

$$\mathbb{M}^{(1/2,1/2)}(x) = \begin{pmatrix} (1-x) & \tau x e^{i\gamma} \\ \tau x e^{-i\gamma} & (1+x) \end{pmatrix}$$

$c_0$  を  $c_0 = \sqrt{\frac{2^j C_{j-m_1} 2^j C_{j-m_2}}{2^{j-1} C_{j-m_1} 2^{j-1} C_{j-m_2}}}$  とすれば行列の間に次の関係式が成り立つ

$$\begin{aligned} [\mathbb{M}^{(j,j)}(x)]_{m_1, m_2} &= \frac{c_0}{2} \left\{ [\mathbb{M}^{(j-\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2})}(x)]_{m_1-\frac{1}{2}, m_2-\frac{1}{2}} (1-x) \mathbf{1}_{\{m_2 \neq -j\}} \right\} \\ &\quad + \left(\frac{1}{2}\right)^{2j-1} f_\tau^{(2j)}(x) e^{-i(2j)\gamma} \mathbf{1}_{\{m_2 = -j\}} \end{aligned} \quad (1)$$

$$[\mathbb{M}^{(j, j-1)}(x)]_{m_1, m_2} = \frac{1}{2j} \frac{4(jx + m_1)(jx + m_2)}{(1-x)(1+x)} [\mathbb{M}^{(j,j)}(x)]_{m_1, m_2} \quad (2)$$

ここで (1) 式,(2) 式の  $(m_1, m_2)$  も条件を満たすとする  
他の行列成分は (3) 式とエルミートから求められる

$$[\mathbb{M}^{(j,m)}(x)]_{-m_2, -m_1} = (-1)^{(m_1+m_2+2m)} [\mathbb{M}^{(j,m)}(-x)]_{m_1, m_2} \quad (3)$$

$$\left([\mathbb{M}^{(j,m)}(x)]_{m_2, m_1}\right)^* = [\mathbb{M}^{(j,m)}(x)]_{m_1, m_2}$$

$$[\mathbb{M}^{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}(x)]$$

$$(1) \text{ 式 } \downarrow$$

$$[\mathbb{M}^{(1,1)}(x)]$$

$$(1) \text{ 式 } \downarrow$$

$$[\mathbb{M}^{(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})}(x)] \xrightarrow{(2) \text{ 式}} [\mathbb{M}^{(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})}(x)]$$

$$(1) \text{ 式 } \downarrow$$

$$[\mathbb{M}^{(2,2)}(x)] \xrightarrow{(2) \text{ 式}} [\mathbb{M}^{(2,1)}(x)]$$

$$(1) \text{ 式 } \downarrow$$

$$[\mathbb{M}^{(\frac{5}{2}, \frac{5}{2})}(x)] \xrightarrow{(2) \text{ 式}} [\mathbb{M}^{(\frac{5}{2}, \frac{3}{2})}(x)] \xrightarrow{?} [\mathbb{M}^{(\frac{5}{2}, \frac{1}{2})}(x)]$$

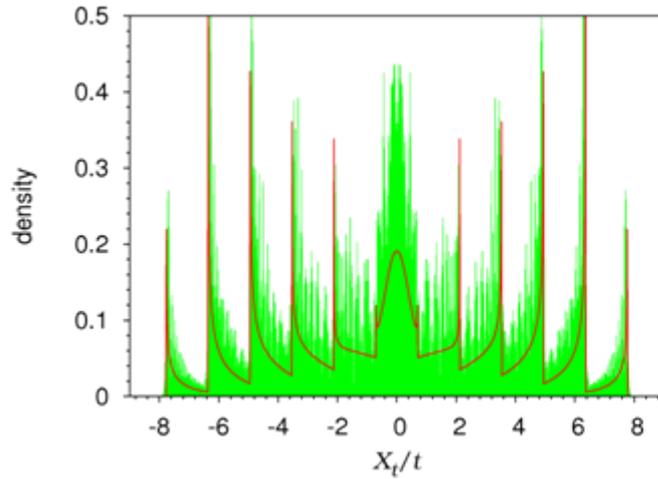
$$(1) \text{ 式 } \downarrow$$

$$[\mathbb{M}^{(3,3)}(x)] \xrightarrow{(2) \text{ 式}} [\mathbb{M}^{(3,2)}(x)] \xrightarrow{?} [\mathbb{M}^{(3,1)}(x)]$$

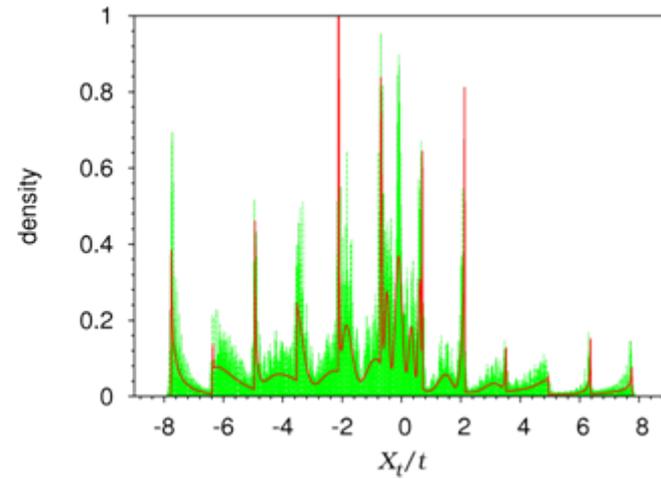
$$\vdots$$

$$\xrightarrow{?} [\mathbb{M}^{(\frac{7}{2}, \frac{3}{2})}(x)] \xrightarrow{?} [\mathbb{M}^{(\frac{7}{2}, \frac{1}{2})}(x)]$$

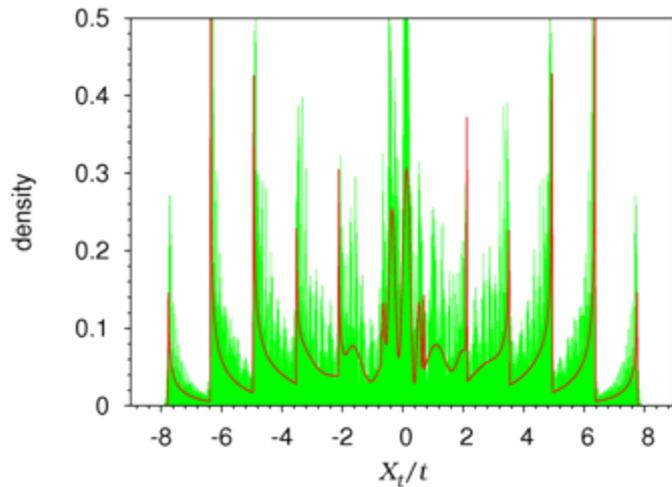
## 2-1. シミュレーションとの比較



$$\phi = {}^t(1+i, 0, \dots, 0, 1-i)/2$$

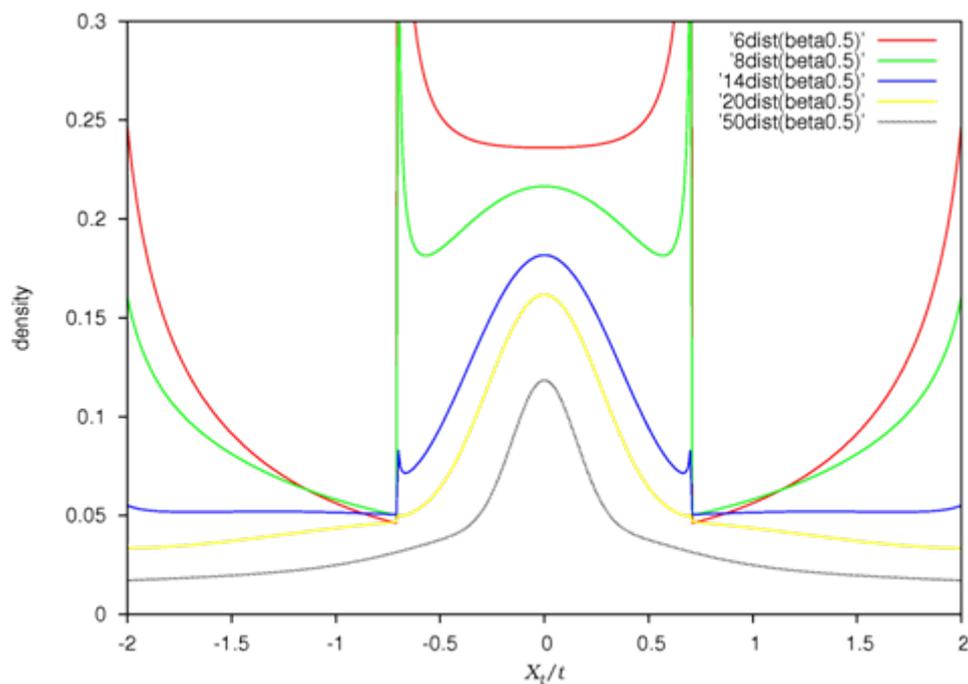


$$\phi = {}^t(1+i, 0, 1+i, 1, i, i, 1+i, i, i, 1+i, i, 1+i)/4$$



$$\phi = {}^t(1+i, 0, \dots, 0, -1-i)/2$$

半整数の  $j$  について対称な分布を考えるため  $q = \frac{1}{2}(1 + i)$  として初期状態を  $\phi_0 = {}^t(q, 0, \dots, 0, \bar{q})$  とする. また  $(\alpha, \beta, \gamma) = (0, \pi/2, \pi)$  に固定して状態数を増やしていくと原点付近の凹凸の変化していく様子がみられる



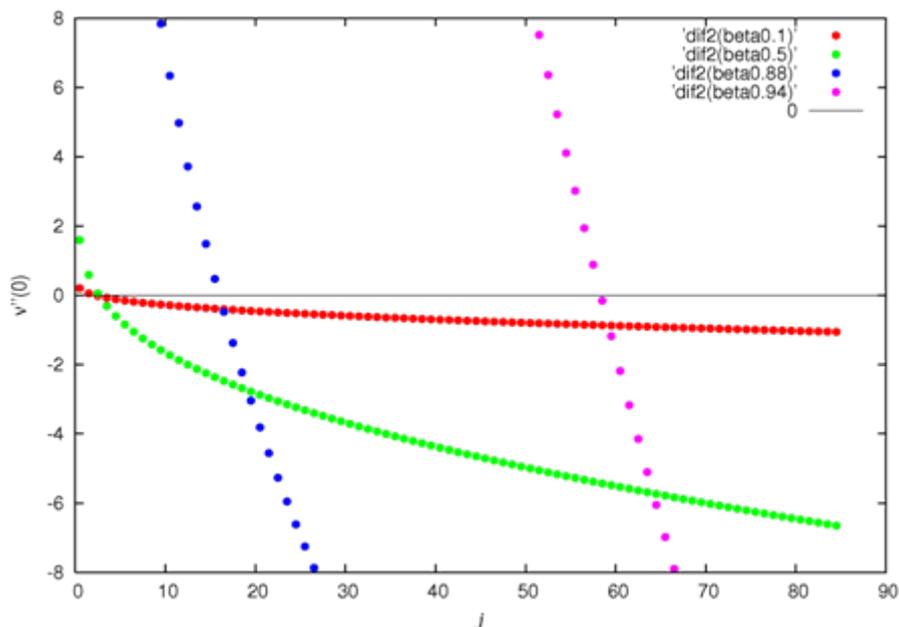
## 2-2. 多状態極限の予想 (対称な場合のみ)

### Remark1 原点での山

そこで分布関数  $\nu^{(j)}$  の 2 次導関数を計算し、原点での値を考える

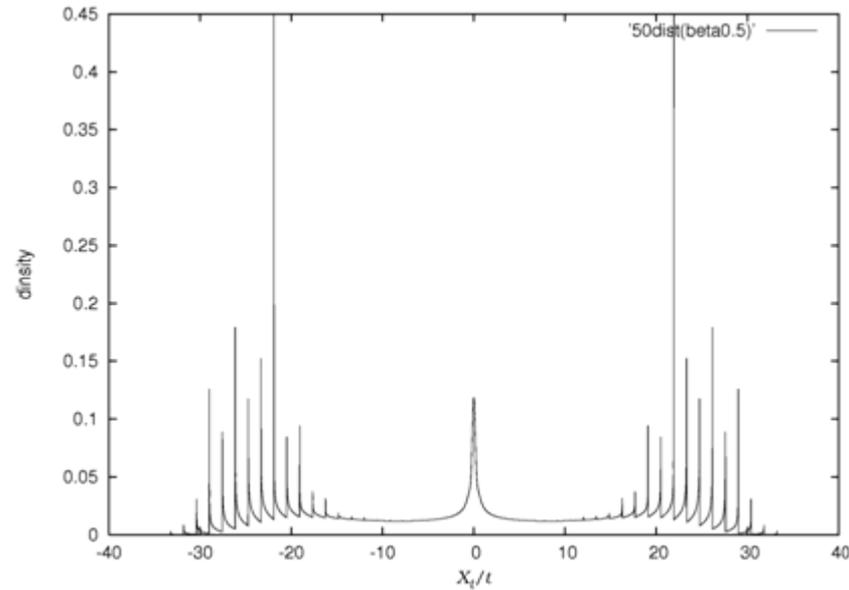
$$\left. \frac{d^2 \nu^{(j)}}{dy^2} \right|_{y=0} = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \frac{\beta}{2}}}{\pi |\cos \frac{\beta}{2}|} \sum_{0 < m \leq j} \left( \frac{1}{2m} \right)^3 \left[ \left\{ 2 + \frac{1}{\cos^2 \frac{\beta}{2}} + 2(2m^2 - j) \right\} \left( \frac{1}{2} \right)^{(2j-1)} \frac{(2j)!}{(j+m)!(j-m)!} \right]$$

この式を図示すると下の様になる。横軸は  $j$ , 縦軸は  $\nu^{(j)}$  の値で各々  $\beta$  に対応している。



## Remark2 分布のなめらかさ

状態数が増えるにつれ、跳びを持つはずである場所がなめらかになっていく様子がみられる。

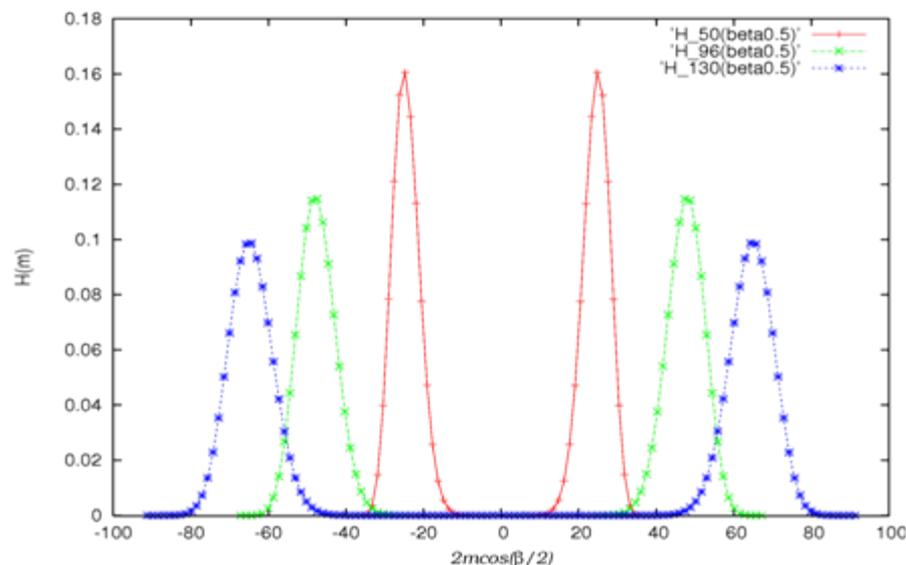


跳びをもつ位置は  $y = 2m \cos \frac{\beta}{2}$ . 上図では 50 状態の例で、 $y = \sqrt{2}m$

ここで次の関数を考える.

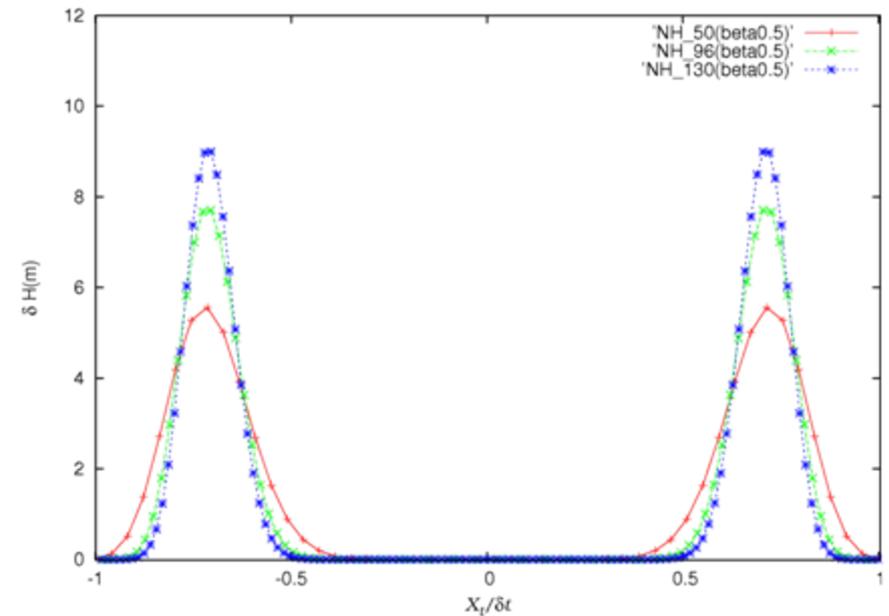
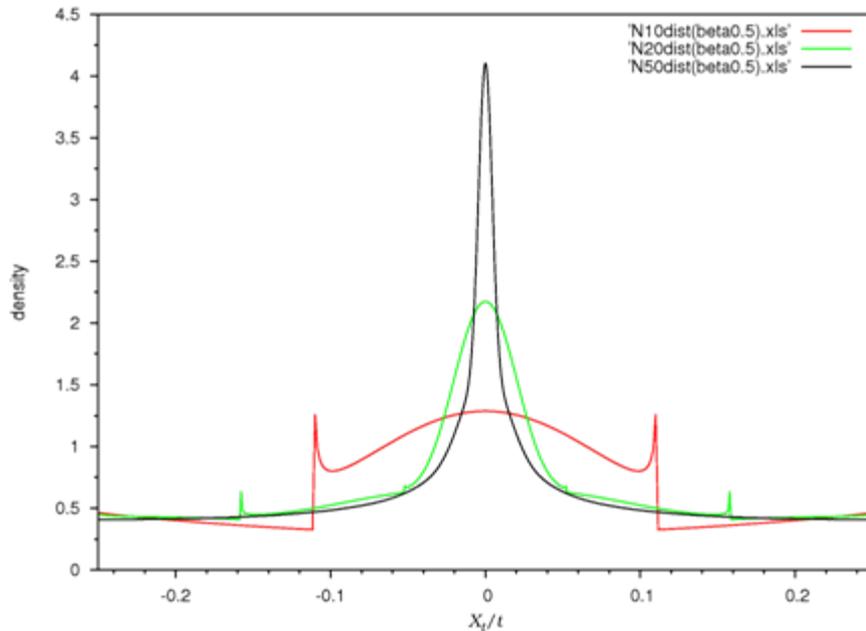
$$\begin{aligned}
 H_{\beta}^{(j)}(m) &= M^{(j,m)}\left(\cos\frac{\beta}{2}\right) \\
 &= (2j)!\left(\frac{1}{2}\right)^{2j} \sum_{k_1=0}^{j+m} \sum_{k_2=0}^{j-m} \frac{(-1)^{k_1} \left\{ \left(\cos\frac{\beta}{2}\right)^{k_1+k_2} + \left(-\cos\frac{\beta}{2}\right)^{k_1+k_2} \right\}}{k_1!(j+m-k_1)!k_2!(j-m-k_2)!}
 \end{aligned}$$

これは分布がピークを持つ位置での重み多項式の値を見るのもです. もし関数が至る所でゼロならばその時の極限分布はなめらかに見え、かつ  $y = 0$  で局在する可能性も考えられる. 下図では  $\beta = \pi/2$  での  $H_{\beta}^{(j)}(m)$  の様子を描いた.  $j$  の増大と共に高さが減り左右にシフトしていく様子が見られる.



# Remark3 規格化した分布

分布関数を規格化する、これにより  $y$  の範囲は  $-1\sim 1$  におさまり  $j$  の増加と共に原点での山の高さが増加していく。



## 2-3. 多項式 $M^{(j,m)}$ , $j \gg m$ での漸近挙動

対称な分布の場合の多項式  $M^{(j,m)}(x)$  は次式になる.

$$\begin{aligned}
 M^{(j,m)}(x) &= \left(\frac{1}{2}\right)^{2j} \frac{(2j)!}{(j-m)!(j+m)!} \\
 &\times \sum_{k_1=0}^{j+m} \sum_{k_2=0}^{j-m} \frac{(j-m)!(j+m)!}{k_1!(j+m-k_1)!k_2!(j-m-k_2)!} \{(-1)^{k_1} + (-1)^{k_2}\} x^{k_1+k_2}
 \end{aligned}$$

$j \gg m$  の場合を考えると, スターリングの公式  $n! \simeq \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$  をつかって

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{1}{2}\right)^{2j} \frac{(2j)!}{(j-m)!(j+m)!} &\simeq \left(\frac{1}{2}\right)^{2j} \frac{\sqrt{4\pi j} (2j)^{2j} e^{-2j}}{\sqrt{2\pi(j-m)} (j-m)^{j-m} e^{-(j-m)} \sqrt{2\pi(j+m)} (j+m)^{j+m} e^{-(j+m)}} \\
 &\simeq \frac{1}{\sqrt{\pi j}}
 \end{aligned}$$

和の部分は

$$\begin{aligned} & \sum_{k_1=0}^{j+m} \sum_{k_2=0}^{j-m} \frac{(j-m)!(j+m)!}{k_1!(j+m-k_1)!k_2!(j-m-k_2)!} \{(-1)^{k_1} + (-1)^{k_2}\} x^{k_1+k_2} \\ = & 2 + 2(2m^2 - j)x^2 + 2 \left\{ \frac{3j^2 - 3j(1 + 3m^2) + 4m^4 + 8m^2}{6} \right\} x^4 \\ + & 2 \left\{ \frac{-15j^3 + 45(1 + 2m^2)j^2 - 30(1 + 7m^2 + 2m^4)j + 92m^2 + 80m^4 + 8m^6}{90} \right\} x^6 + O(x^8) \end{aligned}$$

$j \gg m$  なので  $x = \frac{\tilde{x}}{\sqrt{j}}$  とすれば上式右辺は次の様になる。

$$2 \left\{ 1 - \tilde{x}^2 + \frac{1}{2}\tilde{x}^4 - \frac{1}{6}\tilde{x}^6 + O(\tilde{x}^8) \right\}$$

これはガウス関数を6次のオーダーで近似したものになっている。従って、 $j \gg m$  での  $M^{(j,m)}(x)$  は  $x = \frac{\tilde{x}}{\sqrt{j}}$  とすることにより  $2[\frac{j-m}{2}]$  次まで展開したガウス関数とそれ以上の高次の項の和になる。ここで記号  $[a]$  は  $a$  以下の最大整数をとるガウス記号とする。

$$\begin{aligned} M^{(j,m)}(x) &= M^{(j,m)}\left(\frac{\tilde{x}}{\sqrt{j}}\right) \\ &\simeq \frac{2}{\sqrt{\pi j}} \sum_{n=0}^{[\frac{j-m}{2}]} \frac{(-1)^n}{n!} \tilde{x}^{2n} + O(\tilde{x}^{\{2[\frac{j-m}{2}]+2\}}) \end{aligned}$$

# まとめ

$j \rightarrow \infty$  の極限をとったとき解析的にまとめることができるか

多状態極限の予想は初期 qudit を固定し最も単純な対称分布について行った. 他の初期 qudit での性質は今後の課題として残っている。