
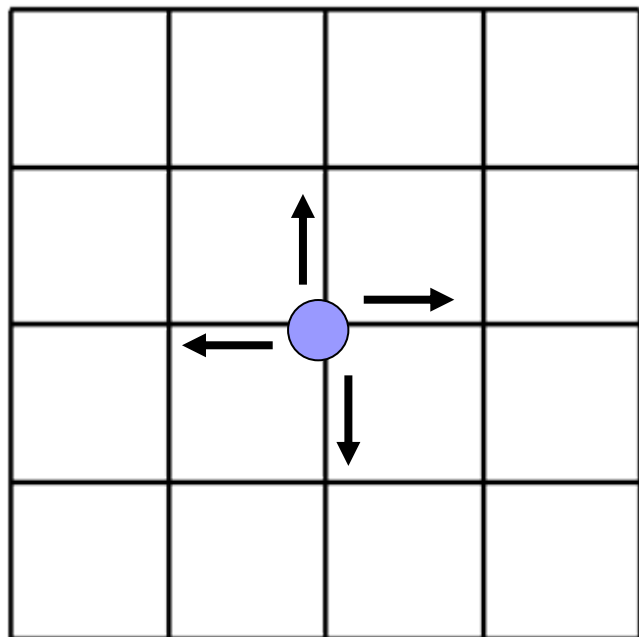


2次元量子ウォーク模型

中央大学理工学研究科
修士2年 渡部 恭平

- 
- 1 2次元量子ウォーク模型
 - 2 グローヴァー行列を含む模型における解析
 - 2.1 極限分布の導出
 - 2.2 重み多項式と極限分布の初期 qubit 依存性
 - 2.3 計算機シミュレーションとの比較
 - 3 今後の課題

1. 2次元量子ウォーク模型



量子ウォーカーの初期状態

$${}^t\phi_0 = (\alpha, \beta, \gamma, \delta)$$

$$\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbf{C}, |\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 + |\delta|^2 = 1$$

時間発展行列 $V(k_x, k_y)$

$$V(k_x, k_y) = S(k_x, k_y)A$$

X, Y の結合モーメント

$$\langle X^\alpha Y^\beta \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk_x}{2\pi} \frac{dk_y}{2\pi} \hat{\Psi}_t^\dagger(k_x, k_y) \left(-i \frac{\partial}{\partial k_y}\right)^\beta \left(-i \frac{\partial}{\partial k_x}\right)^\alpha \hat{\Psi}_t(k_x, k_y)$$

2. グローヴァー行列を含むモデルによる解析

2.1 極限分布の導出

$$\text{量子コイン } A \longrightarrow A = \begin{pmatrix} -p & q & \sqrt{pq} & \sqrt{pq} \\ q & -p & \sqrt{pq} & \sqrt{pq} \\ \sqrt{pq} & \sqrt{pq} & -q & p \\ \sqrt{pq} & \sqrt{pq} & p & -q \end{pmatrix}$$

P.R.A(2004),Norio Inui,Yoshinao Konishi,and Norio Konno

但し, p, q は $0 < p, q < 1$ を満たす実数であり、 $q=1-p$ の関係を持つものとする. この行列は $p = q = \frac{1}{2}$ のとき, グローヴァー行列を含むモデルとなっている. すると時間発展行列は次のような形で表せる.

時間発展行列 $V(k_x, k_y)$

$$\longrightarrow V(k_x, k_y) = \begin{pmatrix} -pe^{ik_x} & qe^{ik_x} & \sqrt{pq}e^{ik_x} & \sqrt{pq}e^{ik_x} \\ qe^{-ik_x} & -pe^{-ik_x} & \sqrt{pq}e^{-ik_x} & \sqrt{pq}e^{-ik_x} \\ \sqrt{pq}e^{ik_y} & \sqrt{pq}e^{ik_y} & -qe^{ik_y} & pe^{ik_y} \\ \sqrt{pq}e^{-ik_y} & \sqrt{pq}e^{-ik_y} & pe^{-ik_y} & -qe^{-ik_y} \end{pmatrix}$$

時間発展行列 $V(k_x, k_y)$ の固有値・固有ベクトル

固有値 $\lambda_1 = e^{i0} = 1$

$$\lambda_2 = e^{i\pi} = -1$$

$$\lambda_3 = e^{iP(k_x, k_y)} = -(p \cos k_x + q \cos k_y) + i\sqrt{1 - (p \cos k_x + q \cos k_y)^2}$$

$$\lambda_4 = e^{-iP(k_x, k_y)} = -(p \cos k_x + q \cos k_y) - i\sqrt{1 - (p \cos k_x + q \cos k_y)^2}$$

但し,

$$\cos P(k_x, k_y) = -(p \cos k_x + q \cos k_y)$$

$$\sin P(k_x, k_y) = \sqrt{1 - (p \cos k_x + q \cos k_y)^2}$$

固有ベクトル

$$\mathbf{v}_j = \begin{pmatrix} v_{1,j} \\ v_{2,j} \\ v_{3,j} \\ v_{4,j} \end{pmatrix} = N_j \begin{pmatrix} q(e^{ik_y} \lambda_j + 1)(e^{ik_x} \lambda_j + 1)(e^{-ik_y} \lambda_j + 1) \\ q(e^{ik_y} \lambda_j + 1)(e^{-ik_x} \lambda_j + 1)(e^{-ik_y} \lambda_j + 1) \\ \sqrt{pq}(e^{ik_y} \lambda_j + 1)(e^{-ik_x} \lambda_j + 1)(e^{ik_x} \lambda_j + 1) \\ \sqrt{pq}(e^{-ik_x} \lambda_j + 1)(e^{ik_x} \lambda_j + 1)(e^{-ik_y} \lambda_j + 1) \end{pmatrix} \quad j = 1, 2, 3, 4$$

以上より, 時間発展行列 $V(k_x, k_y)$ は

$$V(k_x, k_y) = R(k_x, k_y) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix} R^\dagger(k_x, k_y)$$

と対角化することが出来る. 但し $R = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ である.

したがって t ステップ後の量子ウォーカーの波動関数は

$$\begin{aligned} \hat{\Psi}_t(k_x, k_y) &= V^t(k_x, k_y) \phi_0 \\ &= R(k_x, k_y) \begin{pmatrix} \lambda_1^t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4^t \end{pmatrix} R^\dagger(k_x, k_y) \phi_0 \end{aligned}$$

すると X, Y の結合モーメント

$$\langle X^\alpha Y^\beta \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk_x}{2\pi} \frac{dk_y}{2\pi} \left[\left\{ (-1)^{\alpha+\beta} |C_3(k_x, k_y)|^2 + |C_4(k_x, k_y)|^2 \right\} \right. \\ \left. \times \left(\frac{\partial P(k_x, k_y)}{\partial k_y} \right)^\beta \left(\frac{\partial P(k_x, k_y)}{\partial k_x} \right)^\alpha t^{\alpha+\beta} + O(t^{\alpha+\beta-1}) \right]$$

を得る. 長時間極限で $\langle \frac{X^\alpha Y^\beta}{t^{\alpha+\beta}} \rangle (\alpha, \beta = 1, 2, 3, \dots)$ は収束して

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left\langle \frac{X^\alpha Y^\beta}{t^{\alpha+\beta}} \right\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk_x}{2\pi} \frac{dk_y}{2\pi} \left\{ (-1)^{\alpha+\beta} |C_3(k_x, k_y)|^2 + |C_4(k_x, k_y)|^2 \right\} \\ \times \left(\frac{\partial P(k_x, k_y)}{\partial k_y} \right)^\beta \left(\frac{\partial P(k_x, k_y)}{\partial k_x} \right)^\alpha \dots (*)$$

という積分の形で書き表せることが分かる.

微分の公式 $d/dx \arccos x = \mp 1/\sqrt{1-x^2}$ を使うと

$$\frac{\partial P(k_x, k_y)}{\partial k_x} = -\frac{p \sin k_x}{\sqrt{1 - (p \cos k_x + q \cos k_y)^2}}$$
$$\frac{\partial P(k_x, k_y)}{\partial k_y} = -\frac{q \sin k_y}{\sqrt{1 - (p \cos k_x + q \cos k_y)^2}}$$

と求まる.

ここで以下のような変換を行うことで $k_x, k_y \mapsto x, y$ へと変数変換することを考える.

$$x = \frac{p \sin k_x}{\sqrt{1 - (p \cos k_x + q \cos k_y)^2}}$$
$$y = \frac{q \sin k_y}{\sqrt{1 - (p \cos k_x + q \cos k_y)^2}}$$

その際に

$$\sin k_x = \frac{2x\sqrt{pq - qx^2 - py^2}}{p\sqrt{(x+y+1)(x-y+1)(x+y-1)(x-y-1)}}$$

$$\sin k_y = \frac{2y\sqrt{pq - qx^2 - py^2}}{q\sqrt{(x+y+1)(x-y+1)(x+y-1)(x-y-1)}}$$

$$\cos k_x = \frac{(1+q)x^2 + py^2 - p}{p\sqrt{(x+y+1)(x-y+1)(x+y-1)(x-y-1)}}$$

$$\cos k_y = -\frac{qx^2 + (1+p)y^2 - q}{q\sqrt{(x+y+1)(x-y+1)(x+y-1)(x-y-1)}}$$

と定めると, $k_x, k_y \mapsto x, y$ へ変数変換するときのヤコビアンは

$$\mathbf{J} = \frac{4}{|(x+y+1)(x-y+1)(x+y-1)(x-y-1)|}$$

と計算できて (*) 式は

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left\langle \frac{X^\alpha Y^\beta}{t^{\alpha+\beta}} \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx dy x^\alpha y^\beta \mu(x, y) \left\{ |C_3(x, y)|^2 + (-1)^{\alpha+\beta} |C_4(x, y)|^2 \right\}$$

但し,

$$\mu(x, y) = \frac{2}{\pi^2 |(x + y + 1)(x - y + 1)(x + y - 1)(x - y - 1)|} \mathbf{1}_{\left\{ \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} \leq 1 \right\}}$$

であり $\mathbf{1}_{\{\omega\}}$ は条件 ω の指示関数で, ω を満足していれば $\mathbf{1}_{\{\omega\}} = 1$, それ以外では $\mathbf{1}_{\{\omega\}} = 0$ である.

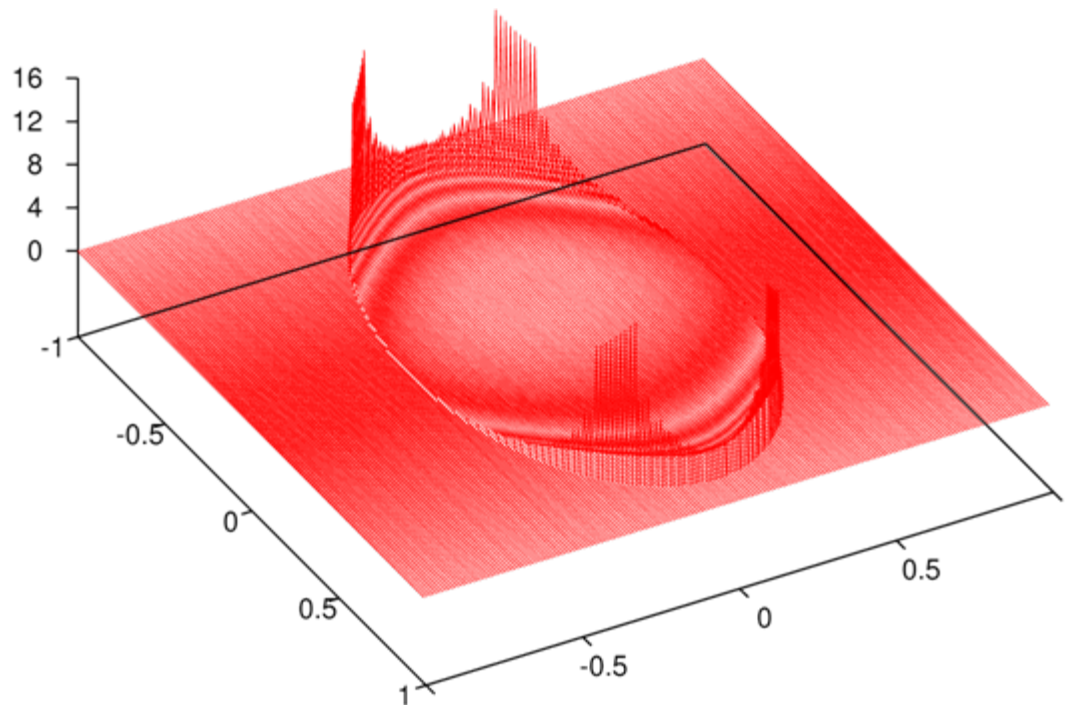


図. $p = \frac{1}{4}$ における分布関数

$$\mu(x, y) = \frac{2}{\pi^2 |(x + y + 1)(x + y - 1)(x - y + 1)(x - y - 1)|} \mathbf{1}_{\left\{4x^2 + \frac{4y^2}{3} \leq 1\right\}}$$

$n, m = 1, 2, 3, \dots$ とすると積分 (*) は次のように書き表せる.

例. $\alpha = 2n, \beta = 2m$ のとき

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left\langle \frac{X^{2n} Y^{2m}}{t^{2(n+m)}} \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx dy x^{2n} y^{2m} \mu(x, y) \left\{ |C_3(x, y)|^2 + (-1)^{2(n+m)} |C_4(x, y)|^2 \right\}$$

$x^{2n} \rightarrow x$ の偶関数

$y^{2m} \rightarrow y$ の偶関数

$\mu(x, y) \rightarrow x, y$ どちらについても偶関数



$|C_3(x, y)|^2 + (-1)^{2(n+m)} |C_4(x, y)|^2$ の x, y についての偶関数項のみ残る $= \mathcal{M}_{++}(x, y)$

すると

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left\langle \frac{X^{2n} Y^{2m}}{t^{2(n+m)}} \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx dy x^{2n} y^{2m} \mu(x, y) \mathcal{M}_{++}(x, y)$$

その他の場合も同様に考えられ

(A) $\alpha = 2n - 1, \beta = 2m$ のとき

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left\langle \frac{X^{2n-1} Y^{2m}}{t^{2(n+m)-1}} \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx dy x^{2n-1} y^{2m} \mu(x, y) \mathcal{M}_{-+}(x, y)$$

(B) $\alpha = 2n, \beta = 2m - 1$ のとき

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left\langle \frac{X^{2n} Y^{2m-1}}{t^{2(n+m)-1}} \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx dy x^{2n} y^{2m-1} \mu(x, y) \mathcal{M}_{+-}(x, y)$$

(C) $\alpha = 2n - 1, \beta = 2m - 1$ のとき

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left\langle \frac{X^{2n-1} Y^{2m-1}}{t^{2(n+m)-1}} \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx dy x^{2n-1} y^{2m-1} \mu(x, y) \mathcal{M}_{--}(x, y)$$

以上より積分 (**) は

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left\langle \frac{X^\alpha Y^\beta}{t^{\alpha+\beta}} \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx dy x^\alpha y^\beta \mu(x, y) \mathcal{M}(x, y)$$

但し,

$$\mathcal{M}(x, y) = \mathcal{M}_{++}(x, y) + \mathcal{M}_{-+}(x, y) + \mathcal{M}_{+-}(x, y) + \mathcal{M}_{--}(x, y)$$

この模型の場合, 積分は一般に 1 より小さい. その理由は固有値 $\lambda = -1, 1$ の寄与が含まれていないことによる. この差

$$\Delta = 1 - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx dy x^{\alpha} y^{\beta} \mu(x, y) \mathcal{M}(x, y)$$

は分布の中で原点におけるデルタ関数の重みを与える.

まとめ

長時間極限で $\langle \frac{X^\alpha Y^\beta}{t^{\alpha+\beta}} \rangle$ ($\alpha, \beta = 1, 2, 3, \dots$) は収束して

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left\langle \frac{X^\alpha Y^\beta}{t^{\alpha+\beta}} \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx dy x^\alpha y^\beta \nu(x, y)$$

で与えられ, 極限分布は

$$\nu(x, y) = \mu(x, y) \mathcal{M}(x, y) + \Delta \delta(x) \delta(y)$$

一次元の今野分布に対応するような
分布関数

適切にスケール変換
された重み

重み Δ の
デルタ関数

2.2 重み多項式 \mathcal{M} と極限分布の初期 qubit 依存性

$$\mathcal{M}(x, y) = \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2 x + \mathcal{M}_3 y + \mathcal{M}_4 x^2 + \mathcal{M}_5 y^2 + \mathcal{M}_6 xy$$

但し,

$$\mathcal{M}_1 = \frac{1}{2} (|q_1|^2 + |q_2|^2 + |q_3|^2 + |q_4|^2) + \operatorname{Re}(q_1 \bar{q}_2 + q_3 \bar{q}_4)$$

$$\mathcal{M}_2 = - (|q_1|^2 - |q_2|^2) + \frac{q}{\sqrt{pq}} \operatorname{Re}(q_1 \bar{q}_3 + q_1 \bar{q}_4 - q_2 \bar{q}_3 - q_2 \bar{q}_4)$$

$$\mathcal{M}_3 = - (|q_3|^2 - |q_4|^2) + \frac{p}{\sqrt{pq}} \operatorname{Re}(q_1 \bar{q}_3 - q_1 \bar{q}_4 + q_2 \bar{q}_3 - q_2 \bar{q}_4)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_4 = & \frac{1}{2} (|q_1|^2 + |q_2|^2 - |q_3|^2 - |q_4|^2) - \frac{1+q}{p} \operatorname{Re}(q_1 \bar{q}_2) - \operatorname{Re}(q_3 \bar{q}_4) \\ & - \frac{q}{\sqrt{pq}} \operatorname{Re}(q_1 \bar{q}_3 + q_1 \bar{q}_4 + q_2 \bar{q}_3 + q_2 \bar{q}_4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_5 = & - \frac{1}{2} (|q_1|^2 + |q_2|^2 - |q_3|^2 - |q_4|^2) - \operatorname{Re}(q_1 \bar{q}_2) - \frac{1+p}{q} \operatorname{Re}(q_3 \bar{q}_4) \\ & - \frac{p}{\sqrt{pq}} \operatorname{Re}(q_1 \bar{q}_3 + q_1 \bar{q}_4 + q_2 \bar{q}_3 + q_2 \bar{q}_4) \end{aligned}$$

$$\mathcal{M}_6 = - \frac{1}{\sqrt{pq}} \operatorname{Re}(q_1 \bar{q}_3 - q_1 \bar{q}_4 - q_2 \bar{q}_3 + q_2 \bar{q}_4)$$

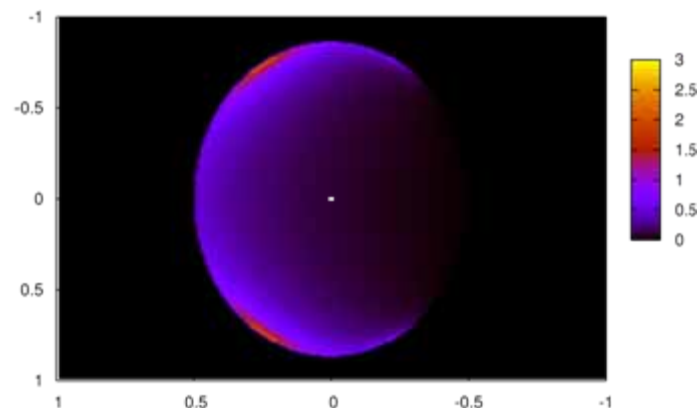
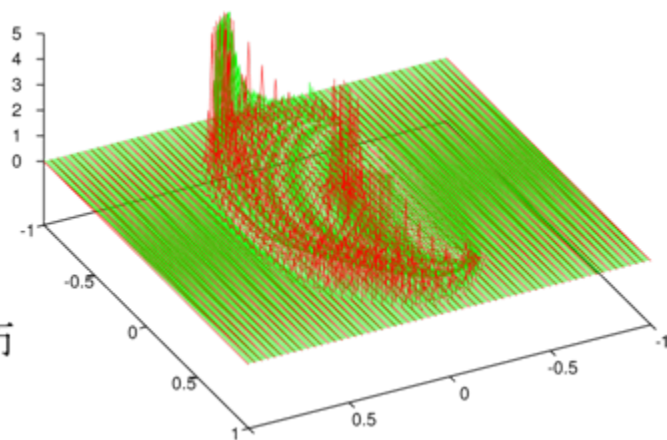
重み多項式 \mathcal{M} により以下のことが分かる.

- (1) $\mathcal{M}_3, \mathcal{M}_6 = 0 \rightarrow x$ 軸に対称な分布
- (2) $\mathcal{M}_2, \mathcal{M}_6 = 0 \rightarrow y$ 軸に対称な分布
- (3) $\mathcal{M}_2, \mathcal{M}_3, \mathcal{M}_6 = 0 \rightarrow x$ 軸にも y 軸にも対称な分布
- (4) $\mathcal{M}_2, \mathcal{M}_3 = 0 \rightarrow z$ 軸に対して 2 回回転対称な分布

2.3 計算機シミュレーションとの比較 ($p=\frac{1}{4}$ の場合)

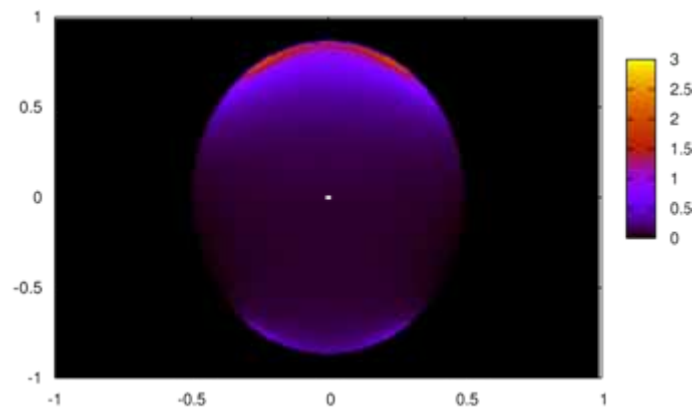
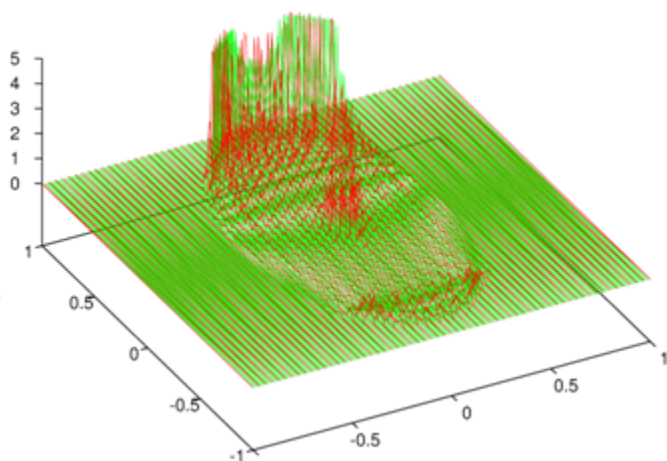
(a) x 軸に対称な分布

$${}^t\phi_0 = \frac{1}{2}(1, -1, 1, 1)$$



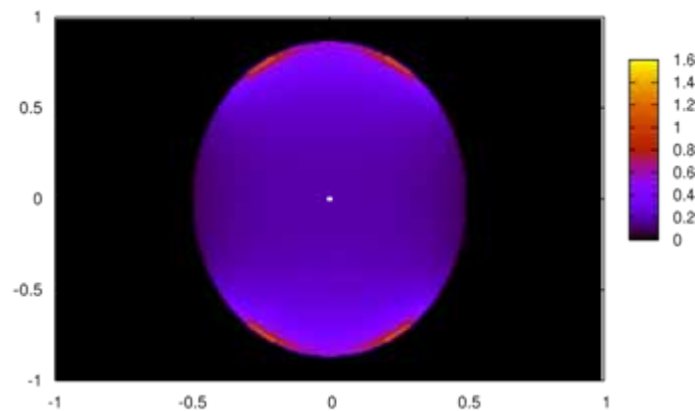
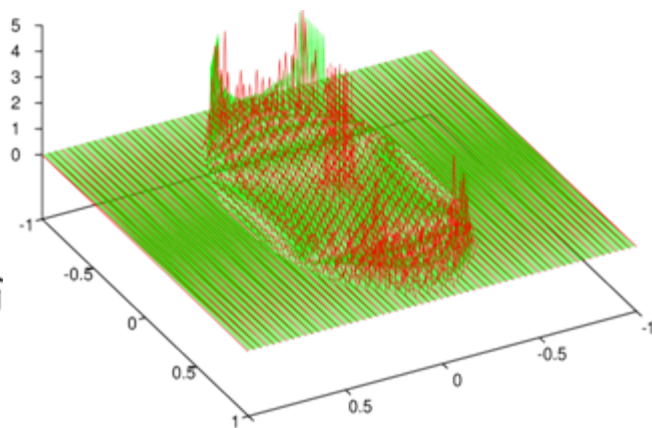
(b) y 軸に対称な分布

$${}^t\phi_0 = \frac{1}{2}(1, 1, 1, -1)$$



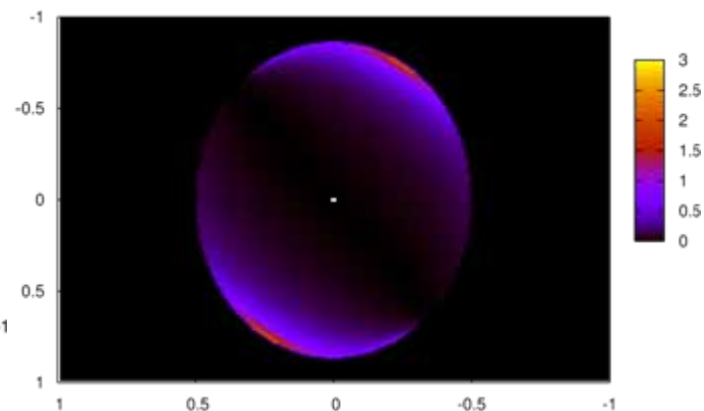
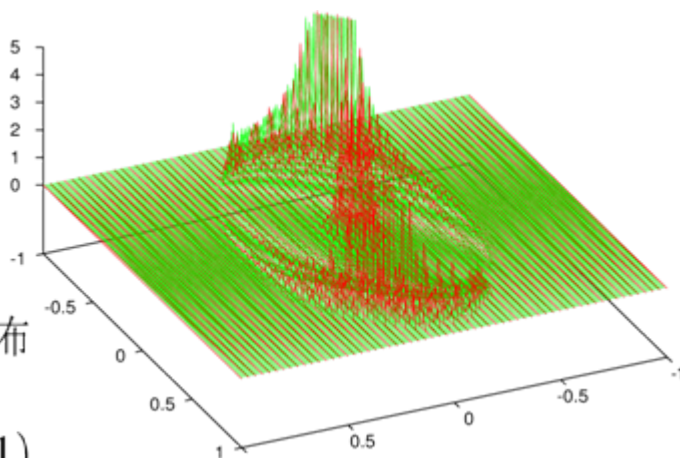
(c) x 軸にも y 軸にも対称な分布

$${}^t\phi_0 = \frac{1}{2}(1, 1, 0, 0)$$



(d) z 軸に 2 回回転対称な分布

$${}^t\phi_0 = \frac{1}{2}(1, -1, -1, 1)$$



4. 今後の課題

1. 積分範囲の証明
2. デルタ関数の重み Δ の計算
3. 3次元以上への拡張

→ とくにグローヴァー行列を用いた模型

M 状態のグローヴァー行列は、 M 次のユニタリ行列 $U^{(G,M)} = [u^{G,M}(i,j) : 1 \leq i, j \leq M]$ で定まる.

但し、 $u^{G,M}(i,j)$ は行列 $U^{(G,M)}$ の (i,j) 成分であり、具体的には以下で定義される.

$$u^{(G,M)}(i,i) = \frac{2}{M} - 1$$

$$u^{(G,M)}(i,j) = \frac{2}{M} (i \neq j)$$

3次元量子ウォーク模型

量子コイン $A \longrightarrow A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

時間発展行列 $V(k_x, k_y)$

$\longrightarrow A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2e^{-ik_x} & e^{-ik_x} & e^{-ik_x} & e^{-ik_x} & e^{-ik_x} & e^{-ik_x} \\ e^{-ik_y} & -2e^{-ik_y} & e^{-ik_y} & e^{-ik_y} & e^{-ik_y} & e^{-ik_y} \\ e^{-ik_z} & e^{-ik_z} & -2e^{-ik_z} & e^{-ik_z} & e^{-ik_z} & e^{-ik_z} \\ e^{ik_x} & e^{ik_x} & e^{ik_x} & -2e^{ik_x} & e^{ik_x} & e^{ik_x} \\ e^{ik_y} & e^{ik_y} & e^{ik_y} & e^{ik_y} & -2e^{ik_y} & e^{ik_y} \\ e^{ik_z} & e^{ik_z} & e^{ik_z} & e^{ik_z} & e^{ik_z} & -2e^{ik_z} \end{pmatrix}$