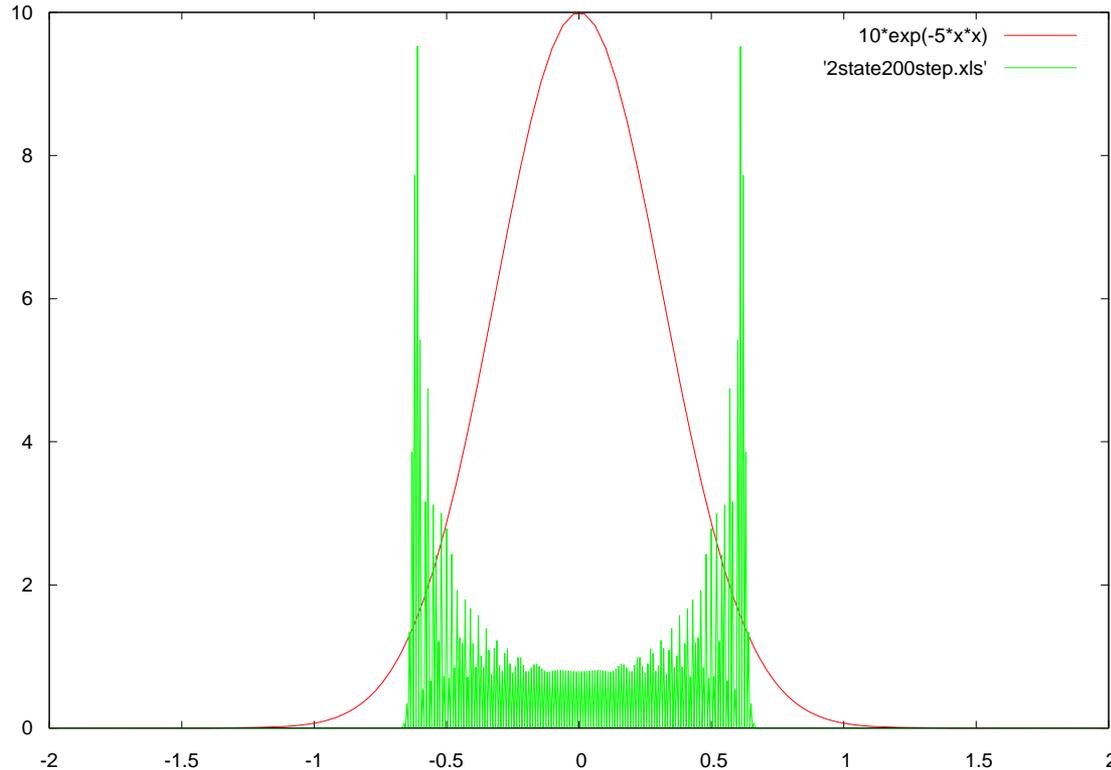


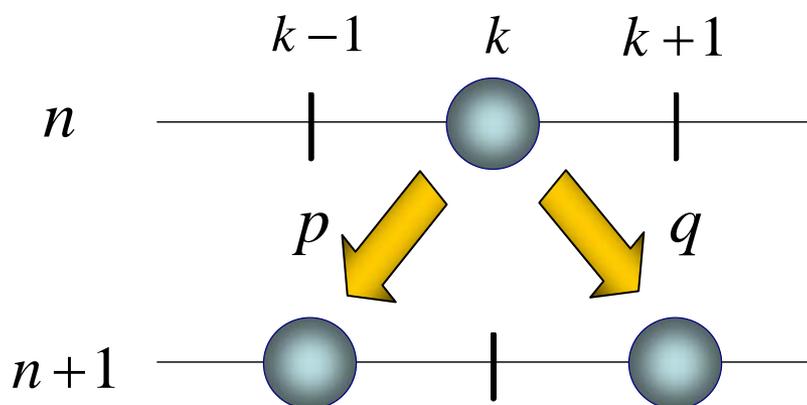
量子二項係數



大谷 諭
伊藤 塊
武田 聡

古典ランダムウォーク

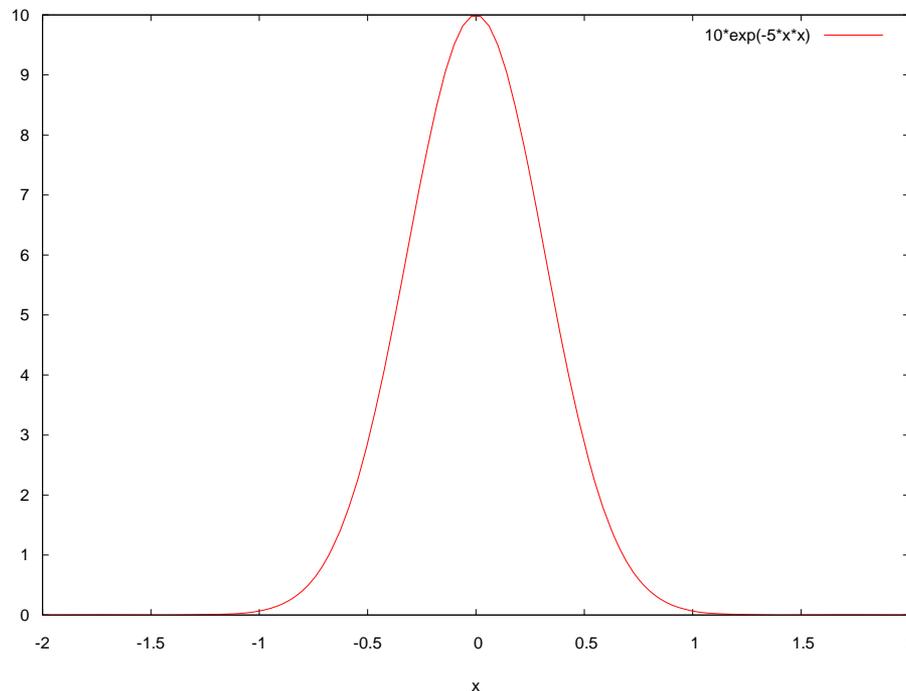
ランダムウォーク



左右どちらかに1歩動く
各確率 p, q は、
以下の条件を満たす実数

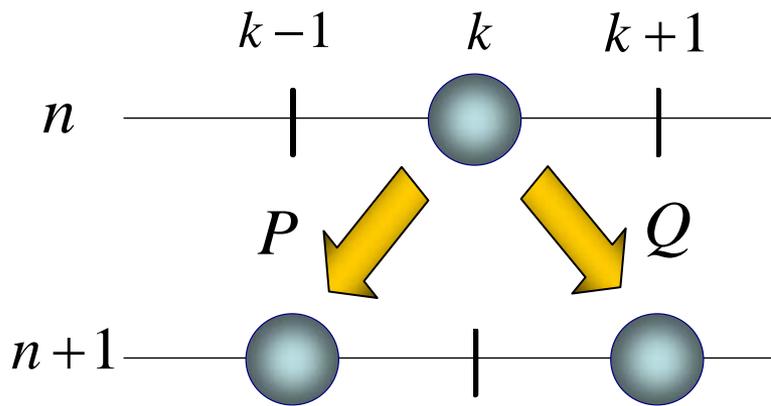
$$p + q = 1$$

古典においては、粒子はそこに存在するかどうかと、左右に動く確率との2点から、その運動が決定される



量子(ランダム)ウォーク

量子ウォーク



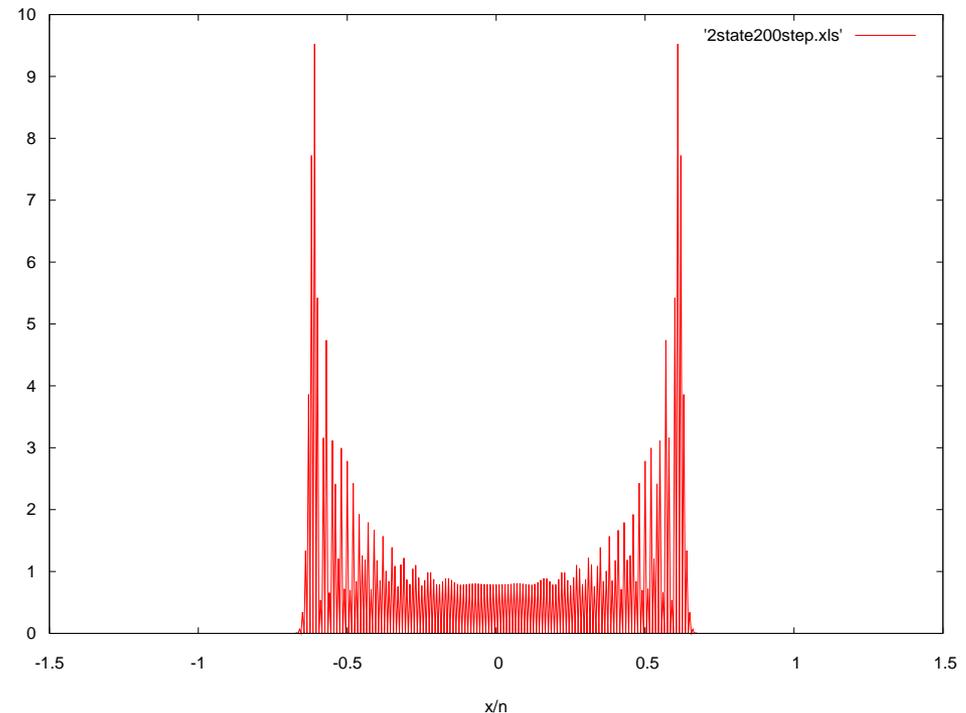
左右どちらかに1歩動く
各確率 P, Q は、
以下の条件を満たす行列

$$U = P + Q$$

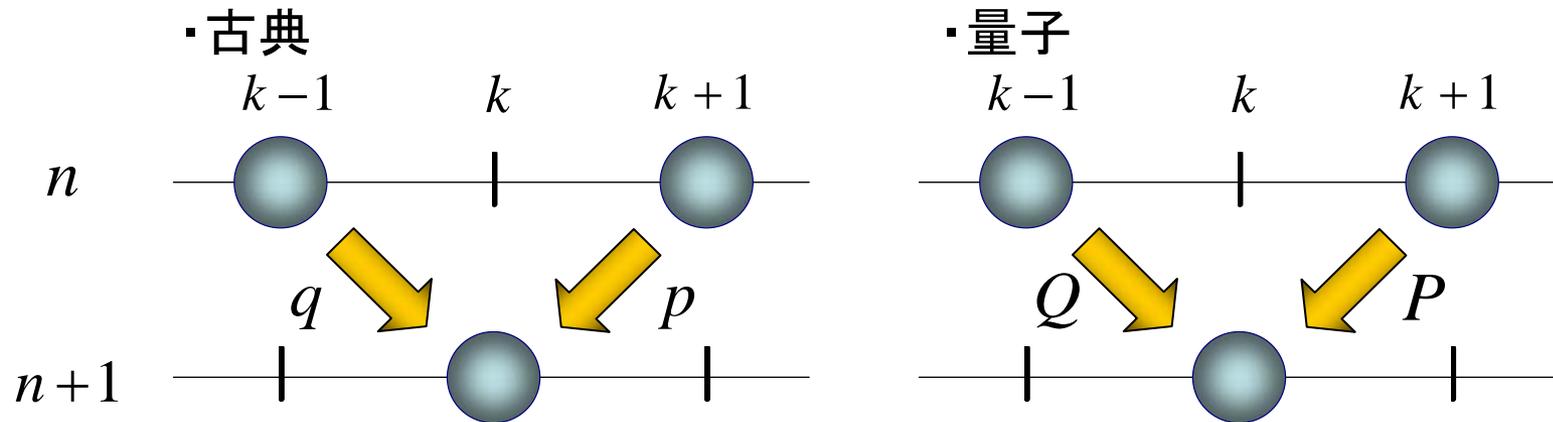
$$U \cdot U^\dagger = E_2 \quad (\text{ただし、} E_2 \text{は} 2 \times 2 \text{の単位行列})$$

また、このとき、 $U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ という行列であり、

各成分 a, b, c, d は複素数である



$n+1$ 歩目に k に到達する経路



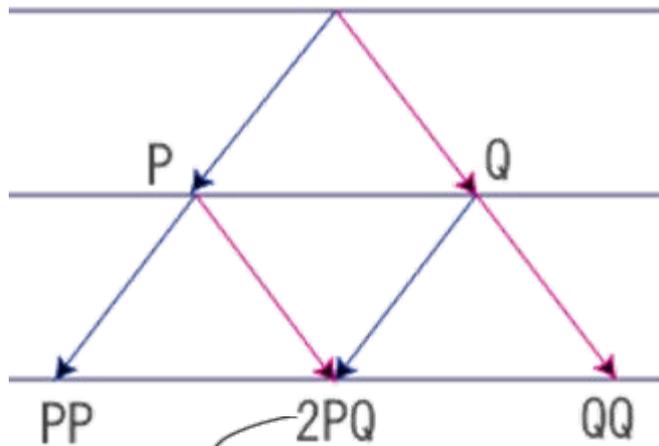
各遷移確率を、それぞれ大文字と小文字でおいている違いはあるが、

n 歩目までの経路に、さらにもう1歩分遷移確率をかける事で
 $n+1$ 歩目までの経路を計算できる点は変わらない

$\Xi_n(k)$ を n ステップで k に至る経路の合計として
 $n+1$ 歩目までの経路は次式で表せる

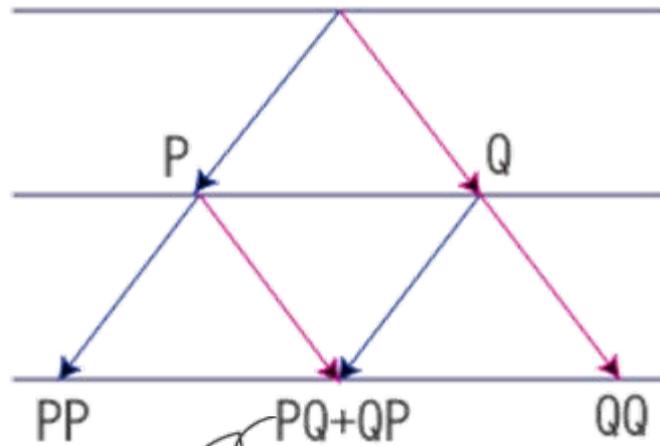
$$\Xi_{n+1}(k) = P\Xi_n(k+1) + Q\Xi_n(k-1)$$

古典論



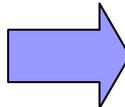
PQに来る経路は2通り
なので2PQとなる

量子論



量子論ではPQとQPを
区別するのでPQ+QPとなる

量子ウォークでは一歩前からの
寄与を計算する際のP, Q
がともに行列なため



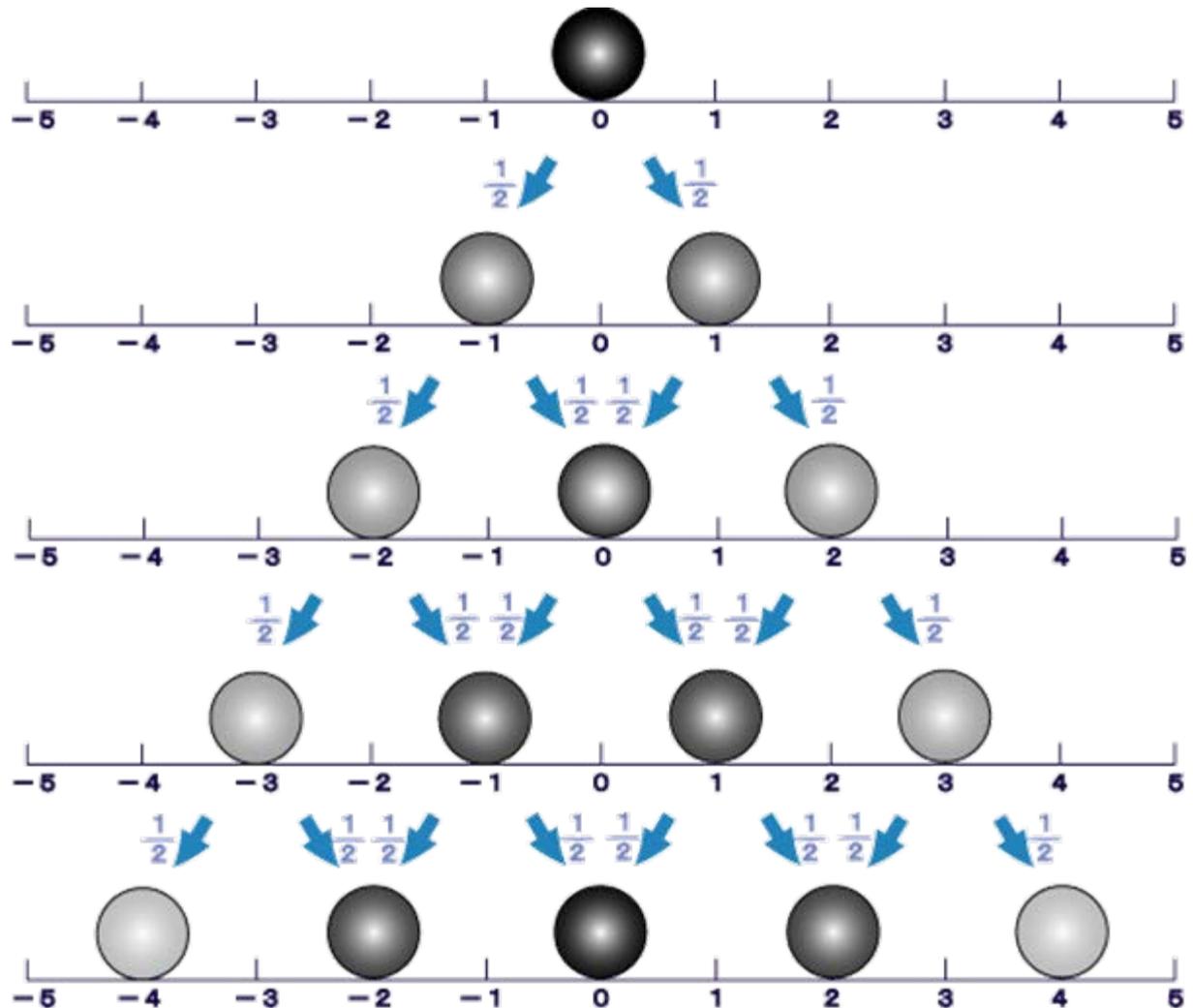
ランダムウォークと量子
ウォークの振る舞いが
変わってくる

古典と量子の比較

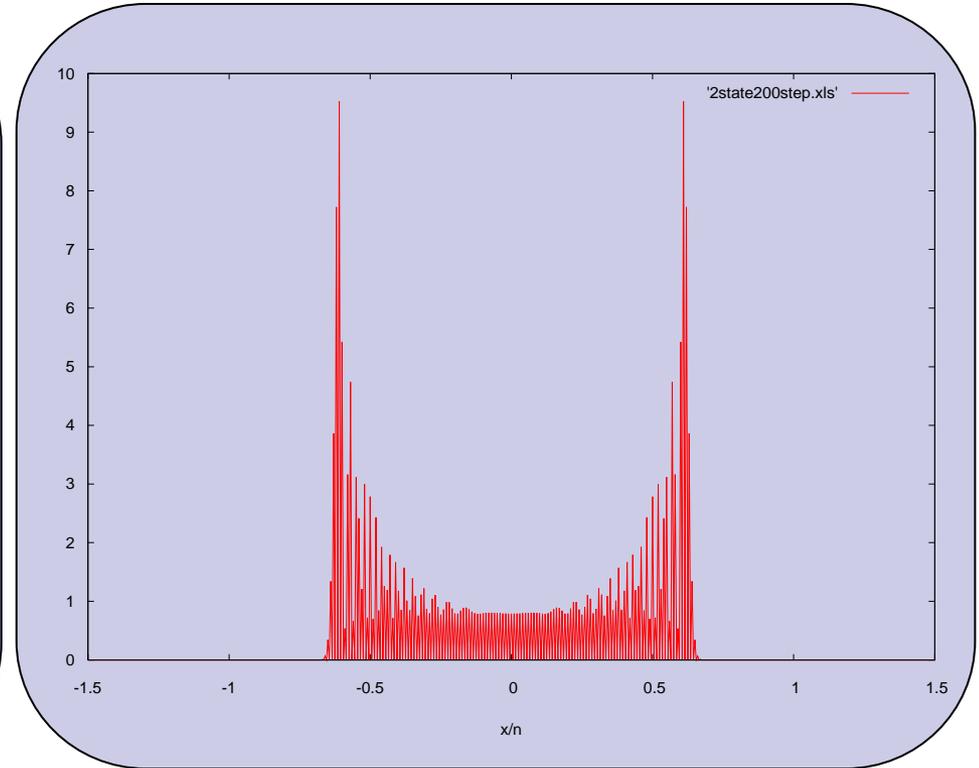
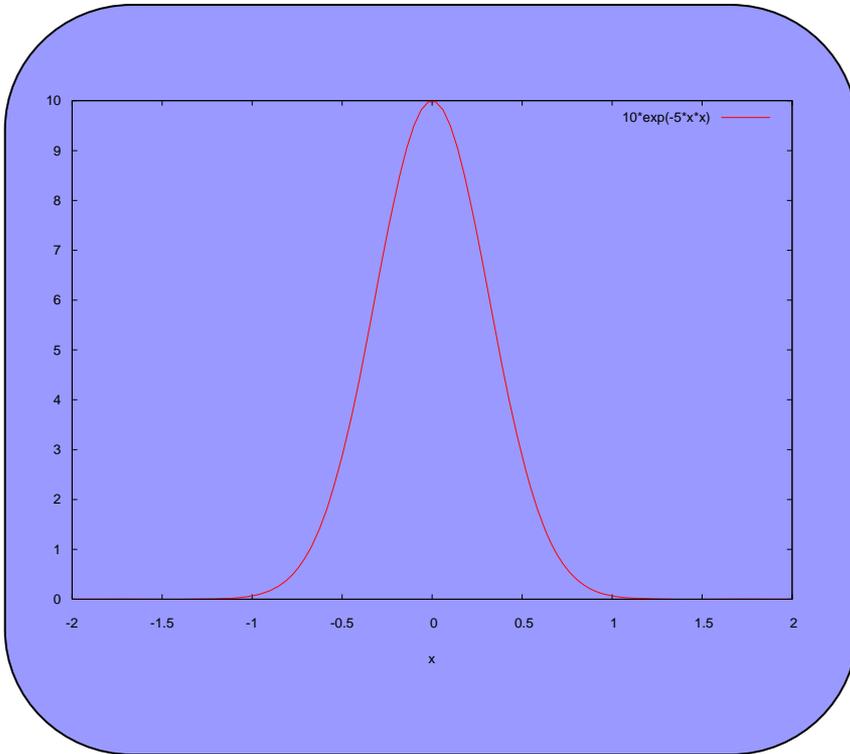
P, Qの重みが同じ
場合を考える

ランダムウォークは
中央に偏り、各点への
到達確率はガウス分布
の形に分布する

量子ウォークの場合
両端への偏りが
現れる



古典・量子の各グラフの比較



この2つは、古典・量子それぞれの場合についてのグラフである。
厳密には縦軸が、左図は到達確率、右図は到達回数であるが、これらがまったく違う性質を見せることは、ここから見て取れるだろう

経路[path]の導出

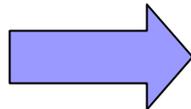
量子ウォークにおいて、粒子が、
 n ステップの時点で位置 k に存在する確率 P は、
以下の式で表せる

$$P = \left\{ \Xi_n(k) \varphi \right\}^\dagger \cdot \Xi_n(k) \varphi \quad \Xi_n(k) = \begin{pmatrix} a_n(k) & b_n(k) \\ c_n(k) & d_n(k) \end{pmatrix}$$

X^\dagger : X のエルミート共役

φ : 初期キュービット

行列においても結合法則は成立するので、経路部分 $\Xi_n(k)$ を
先に導出し最後に初期キュービットにかけても
計算上は成立する



経路の和の一般項を求める

この $\Xi_n(k)$ はいわゆるPQRS法ですでに以下のように求められている。

$$\Xi_n(l, m) = a^l \bar{a}^m \Delta^m \sum_{\gamma=1}^{l \wedge m} \binom{l-1}{\gamma-1} \binom{m-1}{\gamma-1} \left[\frac{l-\gamma}{a\gamma} P + \frac{m-\gamma}{\Delta a\gamma} Q - \frac{1}{\Delta b} R + \frac{1}{b} S \right]$$

$$\Delta = (ad - bc)$$

但し、

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ としたとき}$$

$$P = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad S = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{pmatrix}$$

参考文献 : 量子ウォークの数理 (今野紀雄 著)

$$\Xi_{n+1}(k) = P\Xi_n(k+1) + Q\Xi_n(k-1)$$

今回は $\Xi_n(k)$ を漸化式によって求めてみる

まずは U がアダマール行列の場合で考えてよう

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

このとき

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Xi_n(k) = \begin{pmatrix} a_n(k) & b_n(k) \\ c_n(k) & d_n(k) \end{pmatrix}$$

これらを上のに代入することで漸化式が得られる

漸化式

$$a_{n+1}(k) = \frac{1}{\sqrt{2}} \{a_n(k+1) + c_n(k+1)\} \dots \textcircled{1}$$

$$b_{n+1}(k) = \frac{1}{\sqrt{2}} \{b_n(k+1) + d_n(k+1)\} \dots \textcircled{2}$$

$$c_{n+1}(k) = \frac{1}{\sqrt{2}} \{a_n(k-1) - c_n(k-1)\} \dots \textcircled{3}$$

$$d_{n+1}(k) = \frac{1}{\sqrt{2}} \{b_n(k-1) - d_n(k-1)\} \dots \textcircled{4}$$

①と③より

$$\sqrt{2}a_{n+2}(k) - \{a_{n+1}(k+1) - a_{n+1}(k-1)\} - \sqrt{2}a_n(k) = 0$$

b・c・dについても同様の式が導ける

母関数

$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_n(k) x^n y^k = G_a(x, y)$ を用いて変形すると

$$G_a(x, y) = -\frac{(\sqrt{2} + 2xy)x}{\sqrt{2}x^2 y + x - xy^2 - \sqrt{2}y}$$

同様にして、

$$G_b(x, y) = -\frac{x}{\sqrt{2}x^2 y + x - xy^2 - \sqrt{2}y}$$

$$G_c(x, y) = -\frac{xy^2}{\sqrt{2}x^2 y + x - xy^2 - \sqrt{2}y}$$

$$G_d(x, y) = -\frac{(\sqrt{2}x - y)xy}{\sqrt{2}x^2 y + x - xy^2 - \sqrt{2}y}$$

$$a_n(k) = \frac{1}{\sqrt{2}} T\left(\frac{1}{2}(n-1), \frac{1}{2}(k-1)\right) + T\left(\frac{1}{2}(n+1), \frac{1}{2}(k+1)\right)$$

$$b_n(k) = \frac{1}{\sqrt{2}} T\left(\frac{1}{2}(n-1), \frac{1}{2}(k+1)\right)$$

$$c_n(k) = \frac{1}{\sqrt{2}} T\left(\frac{1}{2}(n-1), \frac{1}{2}(k-1)\right)$$

$$d_n(k) = -\frac{1}{\sqrt{2}} T\left(\frac{1}{2}(n-1), \frac{1}{2}(k+1)\right) + T\left(\frac{1}{2}(n+1), \frac{1}{2}(k+3)\right)$$

$$T(n, k) = \sum_{\beta=|k|}^n (-1)^{\beta+k} 2^{-\beta} \frac{(n+\beta)!}{(n-\beta)! (\beta+k)! (\beta-k)!}$$

今野の式 $\Xi_n(k)$ に具体的に数字を代入して比較してみる。
 $b_n(k)$ について計算すると

$$b_n^K(l, m) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{l+m} (-1)^m \sum_{\gamma=1}^{l \wedge m} (-1)^\gamma (l - 2\gamma) \frac{(l-1)!}{(\gamma-1)!(l-\gamma)!} \frac{(m-1)!}{(m-\gamma)!\gamma!}$$

ただし l は左に行った回数、 m は右に行った回数
としている。今回我々が求めた $b_n(k)$ は

$$b_n^I(k) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{\beta=|k_b|}^{n_b} (-1)^{\beta+k_b} 2^{-\beta} \frac{(n_b + \beta)!}{(n_b - \beta)!(\beta - k_b)!(\beta + k_b)!}$$

ここで、 $l + m = n$, $m - l = k$ である。

例: $n = 2$ で $k = 0$ のとき ($l = 1, m = 1$ のとき)

$$b_2^K(1,1) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{1+1} (-1)^1 \sum_{\gamma=1}^1 (-1)^\gamma (1-2\gamma) \frac{(1-1)!}{(\gamma-1)!(1-\gamma)!} \frac{(1-1)!}{(1-\gamma)!\gamma!} = \underline{-\frac{1}{2}}$$

$$b_2^I(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{\beta=\lfloor \frac{1}{2} \rfloor}^{\frac{1}{2}} (-1)^{\beta+\frac{1}{2}} 2^{-\beta} \frac{\left(\frac{1}{2}-\beta\right)!}{\left(\frac{1}{2}-\beta\right)! \left(\beta+\frac{1}{2}\right)! \left(\beta-\frac{1}{2}\right)!} = \underline{-\frac{1}{2}}$$

例: $n = 3$ で $k = -1$ のとき ($l = 2, m = 1$ のとき)

$$b_3^K(2,1) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2+1} (-1)^1 \sum_{\gamma=1}^1 (-1)^\gamma (2-2\gamma) \frac{(2-1)!}{(\gamma-1)!(2-\gamma)!} \frac{(1-1)!}{(1-\gamma)!\gamma!} = \underline{0}$$

$$b_3^I(-1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{\beta=|0|}^1 (-1)^{\beta+0} 2^{-\beta} \frac{(1+\beta)!}{(1-\beta)! (\beta-0)! (\beta+0)!} = \frac{1}{\sqrt{2}} (1-1) = \underline{0}$$

例: $n = 7, k = 5$ ($l = 1, m = 6$) のとき

$$b_7^K(1,6) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{1+6} (-1)^6 \sum_{\gamma=1}^1 (-1)^\gamma (1-2\gamma) \frac{(1-1)!}{(\gamma-1)!(1-\gamma)!} \frac{(6-1)!}{(6-\gamma)!\gamma!} = \frac{1}{8\sqrt{2}}$$

$$b_7^I(5) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{\beta=|3|}^3 (-1)^{\beta+3} 2^{-\beta} \frac{(3+\beta)!}{(3-\beta)! (\beta-3)! (\beta+3)!} = \frac{1}{8\sqrt{2}}$$

例: $n = 10, k = -6$ ($l = 8, m = 2$) のとき

$$b_{10}^K(8,2) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{8+2} (-1)^2 \sum_{\gamma=1}^2 (-1)^\gamma (8-2\gamma) \frac{(8-1)!}{(\gamma-1)!(8-\gamma)!} \frac{(2-1)!}{(2-\gamma)!\gamma!} = \frac{8}{32}$$

$$b_{10}^I(-6) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{\beta=|\frac{-5}{2}|}^{\frac{9}{2}} (-1)^{\beta-\frac{5}{2}} 2^{-\beta} \frac{\left(\frac{9}{2}+\beta\right)!}{\left(\frac{9}{2}-\beta\right)! \left(\beta+\frac{5}{2}\right)! \left(\beta-\frac{5}{2}\right)!} = \frac{8}{32}$$

一見して分かるとおり、この2本は表記上異なる式であり、単純に一致しそうにはない

具体的な数値を代入すれば、各値は
 $n = 10$ 程度の範囲では、一致する

- ・・・表記の異なる、同じものを表す式
- ・・・変形すると同じ形になる式

今回は一般に拡張し

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

の場合について考えてみる。
アダマール行列の場合と同様に

$$\Xi_{n+1}(k) = P\Xi_n(k+1) + Q\Xi_n(k-1)$$

より、次の漸化式が求められる。

漸化式

$$a_{n+1}(k) = a \cdot a_n(k+1) + b \cdot c_n(k+1) \dots \textcircled{1}$$

$$b_{n+1}(k) = a \cdot b_n(k+1) + b \cdot d_n(k+1) \dots \textcircled{2}$$

$$c_{n+1}(k) = c \cdot a_n(k-1) + d \cdot c_n(k-1) \dots \textcircled{3}$$

$$d_{n+1}(k) = c \cdot b_n(k-1) + d \cdot d_n(k-1) \dots \textcircled{4}$$

①と③より

$$a_{n+2}(k) - a \cdot a_{n+1}(k+1) - d \cdot a_{n+1}(k-1) + (ad - bc) \cdot a_n(k) = 0$$

これも、 b, c, d についても同様の式が得られる

母関数

$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_n(k) x^n y^k = G_a(x, y)$ の形に変形すると

$$G_a(x, y) = \frac{-(ad - bc)x^2 y + ax}{(ad - bc)x^2 y - (a + dy^2)x + y}$$

同様に

$$G_b(x, y) = \frac{bx}{(ad - bc)x^2 y - (a + dy^2)x + y}$$

$$G_c(x, y) = \frac{cxy^2}{(ad - bc)x^2 y - (a + dy^2)x + y}$$

$$G_d(x, y) = \frac{-(ad - bc)x^2 y + dxy^2}{(ad - bc)x^2 y - (a + dy^2)x + y}$$

各項の一般項

$a_n(k) \sim d_n(k)$ 各項の一般項は次のようになる

$$a_n(k) = a \cdot T\left(\frac{1}{2}(n-1), \frac{1}{2}(k+1)\right) - \Delta \cdot T\left(\frac{1}{2}(n-2), \frac{1}{2}k\right)$$

$$b_n(k) = b \cdot T\left(\frac{1}{2}(n-1), \frac{1}{2}(k+1)\right)$$

$$c_n(k) = c \cdot T\left(\frac{1}{2}(n-1), \frac{1}{2}(k-1)\right)$$

$$d_n(k) = d \cdot T\left(\frac{1}{2}(n-1), \frac{1}{2}(k-1)\right) - \Delta \cdot T\left(\frac{1}{2}(n-2), \frac{1}{2}k\right)$$

$$T(n, k) = \sum_{\beta=|k|}^n \binom{n+\beta}{2\beta} \binom{2\beta}{\beta+k} a^{\beta-k} d^{\beta+k} (-\Delta)^{n-\beta}$$

アダマールウォークの値を代入してみる

$T(n, k)$ の比較

- ・アダマールウォークでの $T(n, k)$

$$T(n, k) = \sum_{\beta=|k|}^n (-1)^{\beta+k} 2^{-\beta} \frac{(n + \beta)!}{(n - \beta)! (\beta + k)! (\beta - k)!}$$

- ・一般の $T(n, k)$ にアダマールの値を適用

$$\begin{aligned} T(n, k) &= \sum_{\beta=|k|}^n \binom{n + \beta}{2\beta} \binom{2\beta}{\beta + k} a^{\beta-k} d^{\beta+k} (-\Delta)^{n-\beta} \\ &= \sum_{\beta=|k|}^n \binom{n + \beta}{2\beta} \binom{2\beta}{\beta + k} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\beta-k} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\beta+k} \left(-\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)^{n-\beta} \\ &= \sum_{\beta=|k|}^n \frac{(n + \beta)!}{(n - \beta)! (2\beta)!} \cdot \frac{(2\beta)!}{(\beta - k)! (\beta + k)!} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2\beta} \cdot (-1)^{\beta+k} \cdot 1^{n-\beta} \end{aligned}$$

最後の式を整理すれば、上のアダマールのものと一致することはみてとれるだろう

発展・応用

一応の区切りとして、各成分の一般項の導出までをおこなった
ここからの、発展・拡張や、応用についてここで触れておく

- ・量子ウォークの、経路の一般項が導出できたので、ランダムウォークとの対比として、壁ありの場合などへの発展が考えられる
- ・上のさらに発展としてviciousウォークまでの拡張ができれば、ベッセルブリッジとの関連も考えられるかもしれない
- ・粒子数(今回1)や、状態数(同じく2)、次元数(1)などを増やしていく、基礎部分と考えれば、単純な利用はできなくとも、一要素としての利用は期待できる

アダマール行列における $a_n(k)$ の値

n \ k	aの値																				
	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1										$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0										
2									$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$		0									
3								$\frac{1}{2\sqrt{2}}$	$\frac{2}{2\sqrt{2}}$	$\frac{-1}{2\sqrt{2}}$		0									
4							$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$		$\frac{-1}{4}$		$\frac{1}{4}$		0							
5						$\frac{1}{4\sqrt{2}}$	$\frac{4}{4\sqrt{2}}$		0	0		$\frac{-1}{4\sqrt{2}}$		0							
6					$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{8}$		$\frac{2}{8}$		$\frac{-2}{8}$		$\frac{1}{8}$		$\frac{1}{8}$		0					
7				$\frac{1}{8\sqrt{2}}$	$\frac{6}{8\sqrt{2}}$	$\frac{5}{8\sqrt{2}}$		$\frac{-4}{8\sqrt{2}}$		$\frac{3}{8\sqrt{2}}$		$\frac{-2}{8\sqrt{2}}$		$\frac{-1}{8\sqrt{2}}$		0					
8			$\frac{1}{16}$		$\frac{7}{16}$		$\frac{9}{16}$		$\frac{-5}{16}$		$\frac{3}{16}$		$\frac{-3}{16}$		$\frac{3}{16}$		$\frac{1}{16}$		0		
9		$\frac{1}{16\sqrt{2}}$		$\frac{8}{16\sqrt{2}}$		$\frac{14}{16\sqrt{2}}$		$\frac{-4}{16\sqrt{2}}$		0		0		$\frac{2}{16\sqrt{2}}$		$\frac{-4}{16\sqrt{2}}$		$\frac{-1}{16\sqrt{2}}$		0	
10	$\frac{1}{32}$		$\frac{9}{32}$		$\frac{20}{32}$		0		$\frac{-6}{32}$		$\frac{6}{32}$		$\frac{-4}{32}$		0		$\frac{5}{32}$		$\frac{1}{32}$		0

アダマール行列における $b_n(k)$ の値

n \ k	bの値																				
	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1										$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0										
2									$\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{2}$		0								
3								$\frac{1}{2\sqrt{2}}$		0		$\frac{1}{2\sqrt{2}}$		0							
4							$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{4}$		$-\frac{1}{4}$		$-\frac{1}{4}$		0						
5						$\frac{1}{4\sqrt{2}}$		$\frac{2}{4\sqrt{2}}$		$-\frac{2}{4\sqrt{2}}$		$\frac{2}{4\sqrt{2}}$		$\frac{1}{4\sqrt{2}}$		0					
6					$\frac{1}{8}$		$\frac{3}{8}$		$-\frac{2}{8}$		$\frac{2}{8}$		$-\frac{3}{8}$		$-\frac{1}{8}$		0				
7				$\frac{1}{8\sqrt{2}}$		$\frac{4}{8\sqrt{2}}$		$-\frac{1}{8\sqrt{2}}$		0		$-\frac{1}{8\sqrt{2}}$		$\frac{4}{8\sqrt{2}}$		$\frac{1}{8\sqrt{2}}$		0			
8			$\frac{1}{16}$		$\frac{5}{16}$		$\frac{1}{16}$		$-\frac{3}{16}$		$\frac{3}{16}$		$-\frac{1}{16}$		$-\frac{5}{16}$		$-\frac{1}{16}$		0		
9		$\frac{1}{16\sqrt{2}}$		$\frac{6}{16\sqrt{2}}$		$\frac{4}{16\sqrt{2}}$		$-\frac{6}{16\sqrt{2}}$		$\frac{6}{16\sqrt{2}}$		$-\frac{6}{16\sqrt{2}}$		$\frac{4}{16\sqrt{2}}$		$\frac{6}{16\sqrt{2}}$		$\frac{1}{16\sqrt{2}}$		0	
10	$\frac{1}{32}$		$\frac{7}{32}$		$\frac{8}{32}$		$-\frac{8}{32}$		$\frac{6}{32}$		$-\frac{6}{32}$		$\frac{8}{32}$		$-\frac{8}{32}$		$-\frac{7}{32}$		$-\frac{1}{32}$		0

アダマール行列における $c_n(k)$ の値

n \ k	c の 値																				
	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1										0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$										
2									0	$\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{2}$									
3								0	$\frac{1}{2\sqrt{2}}$		0		$\frac{1}{2\sqrt{2}}$								
4							0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{4}$		$-\frac{1}{4}$		$-\frac{1}{4}$						
5						0	$\frac{1}{4\sqrt{2}}$	$\frac{2}{4\sqrt{2}}$	$\frac{2}{4\sqrt{2}}$		$-\frac{2}{4\sqrt{2}}$		$\frac{2}{4\sqrt{2}}$		$\frac{1}{4\sqrt{2}}$						
6					0	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$		$-\frac{2}{8}$		$\frac{2}{8}$		$-\frac{3}{8}$		$-\frac{1}{8}$					
7				0	$\frac{1}{8\sqrt{2}}$	$\frac{4}{8\sqrt{2}}$	$\frac{4}{8\sqrt{2}}$		$-\frac{1}{8\sqrt{2}}$		0		$-\frac{1}{8\sqrt{2}}$		$\frac{4}{8\sqrt{2}}$		$\frac{1}{8\sqrt{2}}$				
8			0	$\frac{1}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{5}{16}$		$\frac{1}{16}$		$-\frac{3}{16}$		$\frac{3}{16}$		$-\frac{1}{16}$		$-\frac{5}{16}$		$-\frac{1}{16}$			
9		0	$\frac{1}{16\sqrt{2}}$	$\frac{6}{16\sqrt{2}}$	$\frac{6}{16\sqrt{2}}$		$\frac{4}{16\sqrt{2}}$		$-\frac{6}{16\sqrt{2}}$		$\frac{6}{16\sqrt{2}}$		$-\frac{6}{16\sqrt{2}}$		$\frac{4}{16\sqrt{2}}$		$\frac{6}{16\sqrt{2}}$		$\frac{1}{16\sqrt{2}}$		
10	0	$\frac{1}{32}$	$\frac{7}{32}$	$\frac{8}{32}$		$\frac{8}{32}$		$-\frac{8}{32}$		$\frac{6}{32}$		$-\frac{6}{32}$		$\frac{8}{32}$		$-\frac{8}{32}$		$-\frac{7}{32}$		$-\frac{1}{32}$	

アダマール行列における $d_n(k)$ の値

n \ k	dの値																				
	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1										0		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$									
2									0		$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$								
3								0		$\frac{1}{2\sqrt{2}}$		$-\frac{2}{2\sqrt{2}}$		$-\frac{1}{2\sqrt{2}}$							
4							0		$\frac{1}{4}$		$-\frac{1}{4}$		$\frac{3}{4}$		$\frac{1}{4}$						
5						0		$\frac{1}{4\sqrt{2}}$		0		0		$-\frac{4}{4\sqrt{2}}$		$-\frac{1}{4\sqrt{2}}$					
6					0		$\frac{1}{8}$		$\frac{3}{8}$		$-\frac{2}{8}$		$\frac{2}{8}$		$-\frac{3}{8}$		$-\frac{1}{8}$				
7				0		$\frac{1}{8\sqrt{2}}$		$\frac{2}{8\sqrt{2}}$		$-\frac{3}{8\sqrt{2}}$		$\frac{4}{8\sqrt{2}}$		$-\frac{5}{8\sqrt{2}}$		$-\frac{6}{8\sqrt{2}}$		$-\frac{1}{8\sqrt{2}}$			
8			0		$\frac{1}{16}$		$\frac{3}{16}$		$-\frac{3}{16}$		$\frac{3}{16}$		$-\frac{5}{16}$		$\frac{9}{16}$		$\frac{7}{16}$		$\frac{1}{16}$		
9		0		$\frac{1}{16\sqrt{2}}$		$\frac{4}{16\sqrt{2}}$		$-\frac{2}{16\sqrt{2}}$		0		0		$\frac{4}{16\sqrt{2}}$		$-\frac{14}{16\sqrt{2}}$		$-\frac{8}{16\sqrt{2}}$		$-\frac{1}{16\sqrt{2}}$	
10	0		$\frac{1}{32}$		$\frac{5}{32}$		0		$-\frac{4}{32}$		$\frac{6}{32}$		$-\frac{6}{32}$		0		$\frac{20}{32}$		$\frac{9}{32}$		$\frac{1}{32}$