vicious walkersと半標準ヤング盤シューア関数への対応

２００８年１月１６日

佐藤　史仁
山﨑　純一

1.　vicious walkersと半標準ヤング盤

1-1. vicious walkersとは

1-2. 半標準ヤング盤とは

1-3. vicious walkersと半標準ヤング盤の対応

2. シューア関数

2-1.シューア関数の定義式

2-2.モノミアル対称関数を用いたシューア関数の表示

2-3.反対称関数を用いたシューア関数の導入

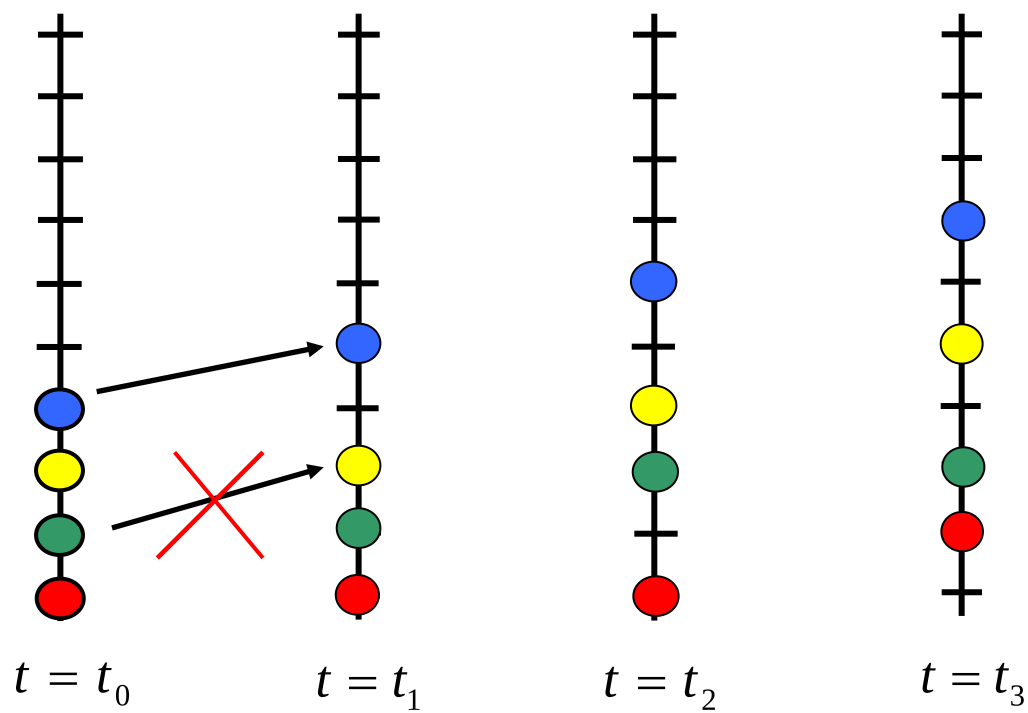
2-4.完全対称式と基本対称式によるシューア関数の表示

2-5.半標準ヤング盤によるシューア関数の表示

1-1 vicious walkersとは

vicious walkersとは同じサイトを2つのウォーカーが占有することないランダムウォーカーのこと

今回は1次元で1列に並んでスタートし、単位時間あたりに上に一歩進むか、またはそこに留まったままだとするvicious walkersを考える



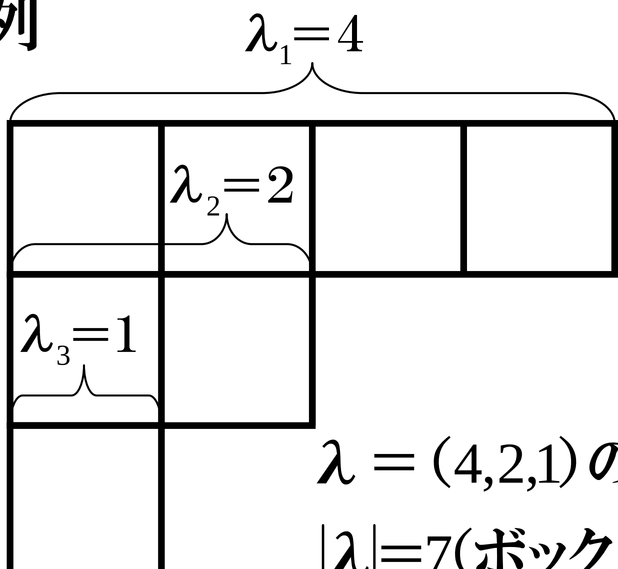
1-2.半標準ヤング盤とは

$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq 0$ なる整数のセット$(\lambda_1, \lambda_2, \cdots)$を分割というまた$\sum_i \lambda_i$を $|\lambda|$ と書く

このとき分割$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots)$に対応して1行目に水平に$\lambda_1$個の箱を2行目に水平に$\lambda_2$個の箱などを順次左端を会わせて並べたものをヤング図形といい、ヤング図形の形がλであるという

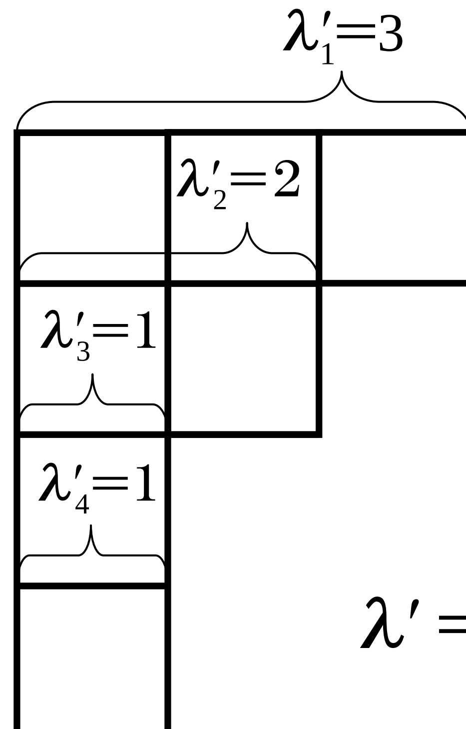
また図形を対角線に関して反転したものを、もとの図形の共役といい、λ'で表す

例



$\lambda = (4,2,1)$のヤング図形

$|\lambda|=7$(ボックスの数)



$\lambda' = (3,2,1,1)$

ヤング図形に対して以下の規則に従って正整数を挿入したものを半標準ヤング盤という

1. 水平方向に隣り合うペアは右側の数字(j)が左側の数字(i)以上である　$i \le j$
2. 垂直方向に隣り合うペアは下側の数字(j)が上側の数字(i)より大きい　$i < j$

例

$\le$

1	2	2	3
2	3		
3			

$\wedge$

半標準ヤング盤Tに対し、1がμ_1個、2がμ_2個、・・・と入っているとき、$\mu = (\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_l)$をTの重みという

同じ形λで、重みμをもつ半標準ヤング盤がいくつか存在する場合もある。そこで

$K_{\lambda,\mu} =$ 共通のλ, μを持つ半標準ヤング盤の総数

と書き、コストカ数と呼ぶ

1-3. vicious walkersと半標準ヤング盤の対応

一番上のランダムウォーカーが時刻$t = t_1$で初めて移動したとする

そのときこれに対応して1と書いた箱を用意する

次に移動した時刻が$t = t_2$としたら、これに対応して2と書いた箱を

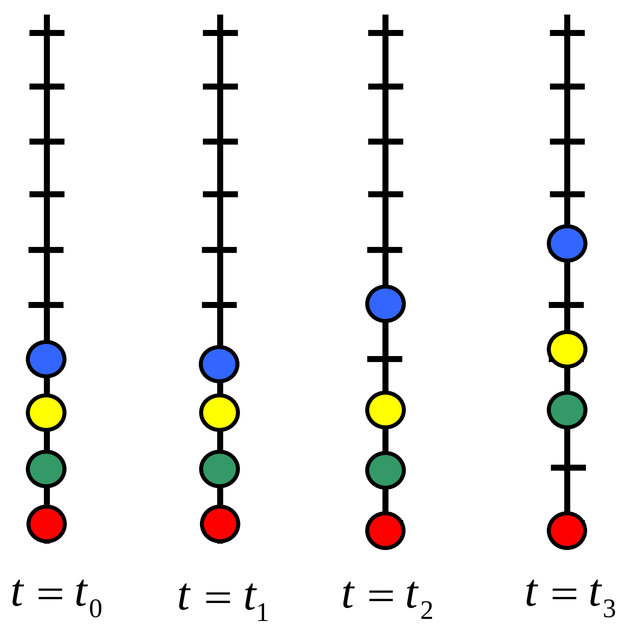
先ほどの箱の下につける

同様に動いた時刻を書いた箱を下につけていく

二番目のランダムウォーカーについては一番目のランダムウォーカー

に対応させた箱の右側の列に、動いた時刻を書いた箱を用意していく

三番目、四番目、・・・・も同様の操作をしていく



1	2	2	3
2	3		
3			

一番上のランダムウォーカーが進んだサイトの数は λ'_1に対応する
二番目のランダムウォーカーが進んだサイトの数は λ'_2に対応する
三番目、四番目についても同様

つまり、今考えているようなvicious walkersの最終位置はヤング図形の形に対応する
さらに、それぞれのランダムウォーカーがどの時刻で動いたかという情報を含んだのが半標準ヤング盤である。

よって n vicious walker のNステップ後の可能な配置の数は、最終位置によりその形が決まる盤の総数に等しい

半標準ヤング盤の数え上げには、その形に対応して定義されるシューア関数が役に立つ
ここからはシューア関数について説明していく

2−1. シューア関数の定義式

シューア関数を表す式は以下のようなものがある

- $s_{\lambda}\left(\mathbf{x}\right)=\sum_{\mu} K_{\lambda,\mu} m_{\mu}\left(\mathbf{x}\right)$

  $K_{\lambda,\mu}$:コストカ数

  $m_{\mu}\left(\mathrm{x}\right)$:モノミアル対称関数

- $s_{\lambda}\left(\mathbf{x}\right)=\dfrac{a_{\lambda+\delta}\left(\mathbf{x}\right)}{a_{\delta}\left(\mathbf{x}\right)}$

  $a_{\lambda}\left(\mathrm{x}\right)$:n変数反対称関数

- $s_{\lambda}\left(\mathbf{x}\right)=\det\left(h_{\lambda_i - i + j}\left(\mathbf{x}\right)\right)_{1\le i,j\le \lambda'_1}$

  $= \det\left(e_{\lambda'_i - i + j}\left(\mathbf{x}\right)\right)_{1\le i,j\le \lambda_1}$

  h_r :完全対称式

  e_r :基本対称式

  $r<0$ なら　$h_r = e_r = 0$

- $s_{\lambda}\left(\mathbf{x}\right)=\sum_{\text{半標準盤}} \mathbf{x}^{\boldsymbol{\alpha}}$　　$\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots)$

2-2.モノミアル対称関数を用いたシューア関数の表示

- $s_\lambda(\mathbf{x}) = \sum_\mu K_{\lambda,\mu} m_\mu(\mathbf{x})$ について

  ◦モノミアル対称関数

  分割λに対して、或る置換を 行ったもの像を αと書く

  異なる像 αについてx^αの和をとったものをモノミアル対称関数といい

  $$m_\lambda(\mathrm{x}) = \sum_{異なる\alpha} \mathrm{x}^\alpha$$

  と書く

  例1　$\lambda = (2,1,0)$で三変数のとき

  $$m_\lambda = x_1^2 x_2 + x_1^2 x_3 + x_2^2 x_1 + x_2^2 x_3 + x_3^2 x_1 + x_3^2 x_2$$

  例2　$\lambda = (1,1,1)$で三変数のとき

  $$m_\lambda = x_1 x_2 x_3$$

次に、具体的に s_λ を計算してみよう

$\lambda=(2,1,0)$ で三変数の場合

$$s_\lambda(\mathrm{x})=K_{(2,1)(1,1,1)}m_{(1,1,1)}(\mathrm{x})+K_{(2,1)(2,1,0)}m_{(2,1,0)}(\mathrm{x})$$

$$=2x_1x_2x_3+x_1^2x_2+x_1^2x_3+x_2^2x_1+x_2^2x_3+x_3^2x_1+x_3^2x_2$$

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 3&\multicolumn{1}{|c}{}\\\cline{1-1}\end{array}\quad\begin{array}{|c|c|}\hline 1&3\\\hline 2&\multicolumn{1}{|c}{}\\\cline{1-1}\end{array}\quad\begin{array}{|c|c|}\hline 1&1\\\hline 2&\multicolumn{1}{|c}{}\\\cline{1-1}\end{array}\quad\begin{array}{|c|c|}\hline 1&1\\\hline 3&\multicolumn{1}{|c}{}\\\cline{1-1}\end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 2&\multicolumn{1}{|c}{}\\\cline{1-1}\end{array}\quad\begin{array}{|c|c|}\hline 2&2\\\hline 3&\multicolumn{1}{|c}{}\\\cline{1-1}\end{array}\quad\begin{array}{|c|c|}\hline 1&3\\\hline 3&\multicolumn{1}{|c}{}\\\cline{1-1}\end{array}\quad\begin{array}{|c|c|}\hline 2&3\\\hline 3&\multicolumn{1}{|c}{}\\\cline{1-1}\end{array}$$

上記のように半標準ヤング盤と対応付ける事が出来る！

2-3. 反対称関数を用いたシューア関数の導入

- $s_\lambda(\mathrm{x}) = \dfrac{a_{\lambda+\delta}(\mathrm{x})}{a_\delta(\mathrm{x})}$ について

$a_\lambda(\mathrm{x})$を以下のように定義する

$$a_\lambda(\mathrm{x}) = \begin{vmatrix} x_1^{\lambda_1} & x_1^{\lambda_2} & \cdots & x_1^{\lambda_n} \\ x_2^{\lambda_1} & x_2^{\lambda_2} & \cdots & x_2^{\lambda_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n^{\lambda_1} & x_n^{\lambda_2} & \cdots & x_n^{\lambda_n} \end{vmatrix}$$

行の入れ替え、つまり変数の入れ替えを行うと符号が変わる　n変数の反対称関数

$$a_\delta(\mathrm{x}) = \begin{vmatrix} x_1^{n-1} & x_1^{n-2} & \cdots & 1 \\ x_2^{n-1} & x_2^{n-2} & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n^{n-1} & x_n^{n-2} & \cdots & 1 \end{vmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_i - x_j)$$

$a_\delta(\mathrm{x})$はヴァンデルモンドの行列式

$\delta = (n-1, n-2, \cdots, 0)$

これは差積で表すことができる

$a_\delta(\mathbf{x}) = \prod_{1\le i<j\le n}(x_i - x_j)$の証明

$$a_\delta(\mathbf{x}) = \begin{vmatrix} x_1^{n-1} & x_1^{n-2} & \cdots & 1 \\ x_2^{n-1} & x_2^{n-2} & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n^{n-1} & x_n^{n-2} & \cdots & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & x_1^{n-2} & \cdots & x_1 & 1 \\ x_2^{n-2}(x_2 - x_1) & x_2^{n-2} & \cdots & x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_n^{n-2}(x_n - x_1) & x_n^{n-2} & \cdots & x_n & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & x_1 & 1 \\ x_2^{n-2}(x_2 - x_1) & x_2^{n-3}(x_2 - x_1) & \cdots & x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_n^{n-2}(x_n - x_1) & x_n^{n-3}(x_n - x_1) & \cdots & x_n & 1 \end{vmatrix}$$

第2列に$-x_1$を掛けたものを第1列に加える

第3列に$-x_1$を掛けたものを第2列に加える

以下順次繰り返す

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ x_2^{n-2}(x_2 - x_1) & x_2^{n-3}(x_2 - x_1) & \cdots & x_2 - x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_n^{n-2}(x_n - x_1) & x_n^{n-3}(x_n - x_1) & \cdots & x_n - x_1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$
= \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ x_2^{n-2}(x_2 - x_1) & x_2^{n-3}(x_2 - x_1) & \cdots & x_2 - x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_n^{n-2}(x_n - x_1) & x_n^{n-3}(x_n - x_1) & \cdots & x_n - x_1 & 1 \end{vmatrix}
$$

第1行で余因子展開する

それぞれの行から共通因子を括りだす

$$
= (-1)^{1+n} \overbrace{(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\cdots(x_n - x_1)}^{\text{n-1項}} \begin{vmatrix} x_2^{n-2} & x_2^{n-3} & \cdots & 1 \\ x_3^{n-2} & x_3^{n-3} & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n^{n-2} & x_n^{n-3} & \cdots & 1 \end{vmatrix}
$$

余因子の符号

$\vdots$

以下同様の操作を繰り返す

$$
= (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)\cdots\cdots(x_{n-2} - x_n) \begin{vmatrix} x_{n-1} & 1 \\ x_n & 1 \end{vmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
= (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(x_1 - x_n) \\
(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(x_2 - x_n) \\
&\ddots \qquad \vdots \\
&\quad \ddots \qquad \vdots \\
&(x_{n-2} - x_{n-1})(x_{n-2} - x_n) \\
&(x_{n-1} - x_n)
\end{aligned}
$$

$$
= \prod_{1 \le i < j \le n} (x_i - x_j) \quad \square
$$

• $s_\lambda(\mathbf{x}) = \dfrac{a_{\lambda+\delta}(\mathbf{x})}{a_\delta(\mathbf{x})}$の具体的な計算がどうなるかみてみる

$\lambda = (2,1,0)$で三変数の場合

$\delta = (2,1,0) \qquad \lambda + \delta = (4,2,0)$

$$a_{\lambda+\delta}(\mathbf{x}) = \begin{vmatrix} x_1^4 & x_1^2 & 1 \\ x_2^4 & x_2^2 & 1 \\ x_3^4 & x_3^2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & x_1^2 & 1 \\ x_2^2(x_2^2 - x_1^2) & x_2^2 & 1 \\ x_3^2(x_3^2 - x_1^2) & x_3^2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x_2^2(x_2^2 - x_1^2) & x_2^2 - x_1^2 & 1 \\ x_3^2(x_3^2 - x_1^2) & x_3^2 - x_1^2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (x_2^2 - x_1^2)(x_3^2 - x_1^2) \begin{vmatrix} x_2^2 & 1 \\ x_3^2 & 1 \end{vmatrix} = (x_2^2 - x_1^2)(x_3^2 - x_1^2)(x_2^2 - x_3^2)$$

$$a_\delta(\mathbf{x}) = \begin{vmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \end{vmatrix} = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)$$

これらより

$$s_\lambda(\mathbf{x}) = \frac{a_{\lambda+\delta}(\mathbf{x})}{a_\delta(\mathbf{x})} = \frac{a_{(4,2,0)}(\mathbf{x})}{a_{(2,1,0)}(\mathbf{x})} = \frac{(x_2^2 - x_1^2)(x_3^2 - x_1^2)(x_2^2 - x_3^2)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)}$$

$$= (x_1 + x_2)(x_1 + x_3)(x_2 + x_3)$$

$$= x_1^2 x_2 + x_1^2 x_3 + x_2^2 x_1 + x_2^2 x_3 + x_3^2 x_1 + x_3^2 x_2 + 2 x_1 x_2 x_3$$

2-4.完全対称式と基本対称式によるシューア関数の表示

- $$s_\lambda(\mathbf{x}) = \det\left(h_{\lambda_i - i + j}(\mathbf{x})\right)_{1\le i,\, j \le \lambda'_1}$$
$$= \det\left(e_{\lambda'_i - i + j}(\mathbf{x})\right)_{1\le i,\, j \le \lambda_1}$$ について

$r < 0$なら　$h_r = e_r = 0$

上の等式は、ヤコビ・トルーディの公式という

(1)基本対称式e_r

全て異なる変数からなる項の次数がどれも同じである多項式

$$e_r(\mathbf{x}) = \sum_{1\le i_1 < i_2 \cdots < i_r \le n} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_r}$$

例　$r = 2$　$n = 3$　のとき

$$e_r(\mathbf{x}) = x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1$$

$e_0(\mathbf{x}) = 1$として生成母関数を

$$E(\mathbf{x}, t) = \sum_{r=0}^{n} e_r t^r = \prod_{i=1}^{n} (1 + x_i t)$$

と定義する

証明）

$$\prod_{i=1}^{n}(1+x_i t)=(1+x_1 t)(1+x_2 t)\cdots(1+x_n t)$$

$$=1+(x_1+x_2+\cdots+x_n)t+(x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_{n-1}x_n)t^2+\cdots+x_1x_2\cdots x_n t^n$$

$$=e_0t^0+e_1t+e_2t^2+\cdots+e_nt^n$$

$$=\sum_{r=0}^{n}e_rt^r$$

(2)完全対称式

どの変数の積からできていてもいいがどの項も次数が同じである多項式

$$h_r(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha}{}' \mathbf{x}^{\alpha}$$

ただし　$0 \le \alpha_j \le r$　$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j = r$　となる条件で和をとる

例　$r = 2$　$n = 3$　のとき

$$h_{r=} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1$$

$h_0(\mathbf{x}) = 1$として生成母関数を

$$H(\mathbf{x}, t)a = \sum_{r=0}^{\infty} h_r t^r = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{(1 - x_i t)}$$

と定義する

証明）

$$\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{(1-x_i t)}=\prod_{i=1}^{n}\sum_{\alpha_i=0}^{\infty}x_i^{\alpha_i}t^{\alpha_i}=\left(\sum_{\alpha_1=0}^{\infty}x_1^{\alpha_1}t^{\alpha_1}\right)\left(\sum_{\alpha_2=0}^{\infty}x_2^{\alpha_2}t^{\alpha_2}\right)\cdots\left(\sum_{\alpha_n=0}^{\infty}x_n^{\alpha_n}t^{\alpha_n}\right)$$

$$=\sum_{\alpha_1}^{\infty}\sum_{\alpha_2}^{\infty}\cdots\sum_{\alpha_n}^{\infty}\left(x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n}\right)t^{\sum_{j=1}^{n}\alpha_j}$$

$$=\sum_{\alpha_1}^{\infty}\sum_{\alpha_2}^{\infty}\cdots\sum_{\alpha_n}^{\infty}\left(x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n}\right)\sum_{r=0}^{\infty}t^{r}\delta_{(\sum_{j=1}^{n}\alpha_i)r}$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}t^{r}\sum_{\alpha}{}'\mathrm{x}^{\alpha}$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}h_r t^{r}$$

同様に、具体的にs_λを求めてみる

$\lambda=(2,1,0)$で三変数の場合　　$\lambda'=(2,1,0)$

(i)

$$s_\lambda(\mathrm{x})=\begin{vmatrix} h_2 & h_3 \\ h_0 & h_1 \end{vmatrix}=h_2h_1-h_3h_0$$

$$=(x_1+x_2+x_3)(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)$$

$$-(x_1^3+x_2^3+x_3^3+x_1^2x_2+x_1^2x_3+x_2^2x_1+x_2^2x_3+x_3^2x_1+x_3^2x_2+x_1x_2x_3)$$

$$=2x_1x_2x_3+x_1^2x_2+x_1^2x_3+x_2^2x_1+x_2^2x_3+x_3^2x_1+x_3^2x_2$$

(ii)

$$s_\lambda(\mathrm{x})=\begin{vmatrix} e_2 & e_3 \\ e_0 & e_1 \end{vmatrix}=e_2e_1-e_3e_0$$

$$=(x_1+x_2+x_3)(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)-x_1x_2x_3$$

$$=2x_1x_2x_3+x_1^2x_2+x_1^2x_3+x_2^2x_1+x_2^2x_3+x_3^2x_1+x_3^2x_2$$

• $s_\lambda(\mathrm{x}) = \det\left(h_{\lambda_i - i + j}(\mathrm{x})\right)_{1\le i, j \le \lambda'_1}$ の証明

$s_\lambda(\mathrm{x}) = \dfrac{a_{\lambda+\delta}(\mathrm{x})}{a_\delta(\mathrm{x})}$ を定義だとして　$a_\delta(\mathrm{x}) s_\lambda(\mathrm{x}) = a_{\lambda+\delta}(\mathrm{x})$　と書き直す

あるkに対して$e_r^{(k)}(\mathrm{x})$を　　$e_r^{(k)}(\mathrm{x}) = e_r(\mathrm{x})|_{x_k \to 0}$　と定義する

対応する母関数を　$E^k(\mathrm{x}, t) = \sum_{r=0}^{n} e_r^{(k)} t^r$とすれば

$$E(\mathrm{x}, t) = \prod_{i=1}^{n}(1 + x_i t) = (1 + x_1 t)(1 + x_2 t)\cdots(1 + x_k t)\cdots(1 + x_n t) = E^k(\mathrm{x}, t)(1 + x_k t)$$

であるから

$$H(\mathrm{x}, t)E^k(\mathrm{x}, -t) = \prod_{i=1}^{\mathrm{n}} \frac{1}{(1 - x_i t)} \frac{E(\mathrm{x}, -t)}{(1 - x_k t)}$$

$$= \left\{\frac{1}{(1 - x_1 t)} \frac{1}{(1 - x_2 t)} \cdots \frac{1}{(1 - x_n t)}\right\}\{(1 - x_1 t)(1 - x_2 t)\cdots(1 - x_n t)\}\frac{1}{(1 - x_k t)}$$

$$= \frac{1}{(1 - x_k t)} = \sum_{\alpha=0}^{\infty} x_k^\alpha t^\alpha$$

$$H(\mathbf{x},t)E^k(\mathbf{x},-t)=\sum_{r=0}^{\infty}h_r t^r \sum_{r=0}^{n} e_r^{(k)}(-t)^r$$

$$=\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{n}(-1)^r e_r^{(k)} h_s t^{r+s}$$

$\alpha=r+s$ とおいて
和のとり方を変えた

$$=\sum_{\alpha=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{\alpha}(-1)^r e_r^{(k)} h_{\alpha-r} t^{\alpha}$$

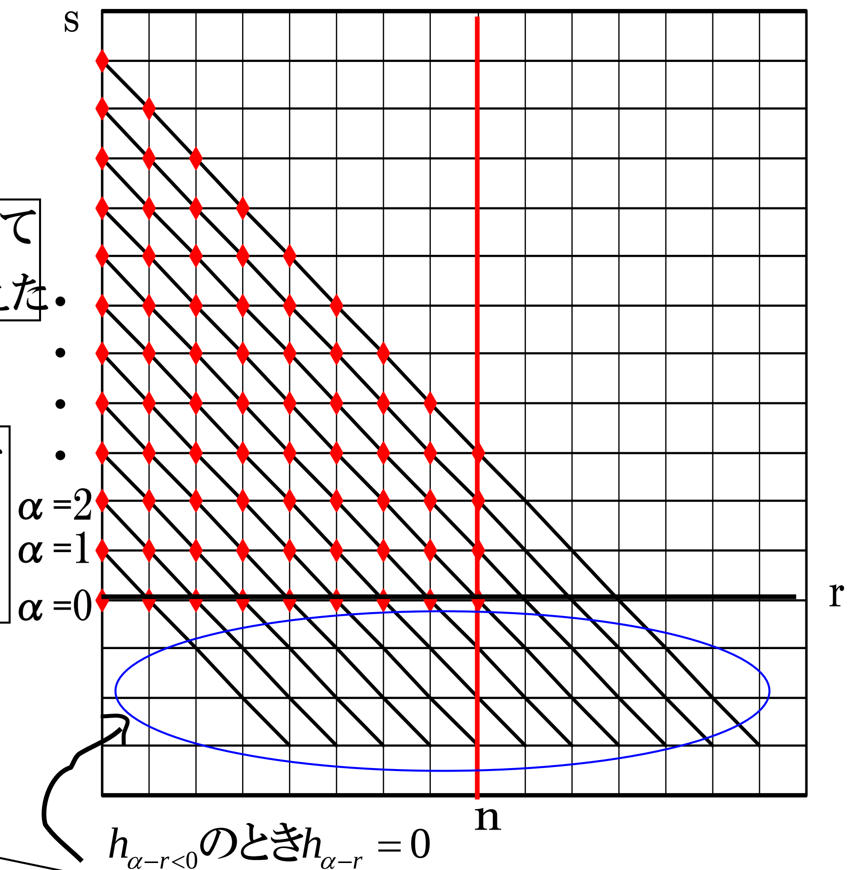
$h_{\alpha-r<0}=0$ なので
r の和をnまで
とるように変えた

$$=\sum_{\alpha=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{n}(-1)^r e_r^{(k)} h_{\alpha-r} t^{\alpha}$$

$$=\sum_{\alpha=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{n}(-1)^{n-r} e_{n-r}^{(k)} h_{\alpha-n+r} t^{\alpha}$$

$$=\sum_{\alpha=0}^{\infty}\left\{\sum_{r=1}^{n}(-1)^{n-r} e_{n-r}^{(k)} h_{\alpha-n+r}\right\} t^{\alpha}$$

$e_n^{(k)}$は必ずx_kの項を含むので0
よって$r=1$から和をとることにした



r を$0\to n$の順に和をとるのを
$n-r$とすることによって$n\to 0$の
順に和をとるように変えた

$$H(\mathrm{x},t)E^k(\mathrm{x},-t)=\sum_{\alpha=0}^{\infty}\left\{\sum_{r=1}^{n}(-1)^{n-r}e_{n-r}^{(k)}h_{\alpha-n+r}\right\}t^{\alpha}=\sum_{\boldsymbol{\alpha}=0}^{\infty}x_k^{\boldsymbol{\alpha}}t^{\boldsymbol{\alpha}}$$

両辺のt^{α}の係数を見比べて

$$\sum_{r=1}^{n}(-1)^{n-r}e_{n-r}^{(k)}h_{\alpha-n+r}=x_k^{\boldsymbol{\alpha}}\cdots(\,*\,)$$

となることがわかる

ある$\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\in \mathrm{Z}_{\geq 0}^n$に対して$n\times n$行列　$\mathbf{M},\mathbf{H}_{\alpha},\mathbf{A}_{\alpha}$を

$$(\mathbf{M})_{i,j}=(-1)^{n-j}e_{n-j}^{(i)}(\mathrm{x}) \qquad (\mathbf{H}_{\alpha})_{\mathrm{i,j}}=h_{\alpha_j-n+i}(\mathrm{x})$$

$$(\mathbf{A}_{\alpha})_{i,j}=x_i^{\alpha_j}$$

で定義するならば

$$(\mathbf{M}\mathbf{H}_{\alpha})_{i,j}=\sum_{r=1}^{n}(\mathbf{M})_{i,r}(\mathbf{H}_{\alpha})_{\mathrm{r,j}}=\sum_{r=1}^{n}(-1)^{n-r}e_{n-r}^{(i)}(\mathrm{x})h_{\alpha_j-n+r}(\mathrm{x})$$

(*)式より

$$=x_i^{\alpha_j}=(\mathbf{A}_{\alpha})_{i,j}$$

よって$\mathbf{M}\mathbf{H}_{\alpha}=\mathbf{A}_{\alpha}$が成立する

両辺の行列式をとって$\det(\mathbf{M}\mathbf{H}_{\alpha})=\det\mathbf{M}\det\mathbf{H}_{\alpha}=\det\mathbf{A}_{\alpha}=a_{\alpha}(\mathrm{x})$

両辺の行列式をとって

$$\det(\mathbf{MH}_\alpha) = \det\mathbf{M}\det\mathbf{H}_\alpha = \det\mathbf{A}_\alpha = \begin{vmatrix} x_1^{\alpha_1} & x_1^{\alpha_2} & \cdots & x_1^{\alpha_n} \\ x_2^{\alpha_1} & x_2^{\alpha_2} & \cdots & x_2^{\alpha_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n^{\alpha_1} & x_n^{\alpha_2} & \cdots & x_n^{\alpha_n} \end{vmatrix} = a_\alpha(\mathbf{x})$$

$h_{r<0} = 0$

$h_0 = 1$

特に$\alpha = \delta$と選ぶと, $\det\mathbf{H}_\alpha = \begin{vmatrix} h_{n-1-n+1} & h_{n-2-n+1} & \cdots & h_{-n+1} \\ h_{n-1-n+2} & h_{n-2-n+2} & \cdots & h_{-n+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{n-1} & h_{n-2} & \cdots & h_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ h_{n-1-n+2} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{n-1} & h_{n-2} & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 1$

ゆえに$\det\mathbf{M} = a_\delta(\mathbf{x})$　これを$\det\mathbf{M}\det\mathbf{H}_\alpha = a_\alpha(\mathbf{x})$　に代入して$\alpha = \lambda + \delta$ととれば

$$\det\mathbf{H}_{\lambda+\delta} = \frac{a_{\lambda+\delta}(\mathbf{x})}{a_\delta(\mathbf{x})} = s_\lambda(\mathbf{x})$$

一方 $\det\mathbf{H}_{\lambda+\delta} = \det\left(h_{\lambda_j+n-j-n+i}(\mathbf{x})\right) = \det\left(h_{\lambda_j-j+i}(\mathbf{x})\right)$

よって$s_\lambda(\mathbf{x}) = \det\left(h_{\lambda_i-i+j}(\mathbf{x})\right)_{1\le i,j\le\lambda_1'}$が示せた

• $s_\lambda(\mathbf{x}) = \det\left(e_{\lambda'_i - i + j}(\mathbf{x})\right)_{1\le i, j\le \lambda_1}$ の証明

$\mathrm{H} = \left(h_{i-j}\right)_{1\le i, j\le N}$ と $\mathrm{E} = \left((-1)^{i-j} e_{i-j}\right)_{1\le i, j\le N}$ という2つの行列を考える

これらの行列式は

$$\det \mathrm{H} = \begin{vmatrix} h_0 & 0 & \cdots & 0 \\ h_1 & h_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{N-1} & h_{N-2} & \cdots & h_0 \end{vmatrix} = h_0 \begin{vmatrix} h_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{N-2} & \cdots & h_0 \end{vmatrix} = \cdots = \left(h_0(\mathbf{x})\right)^n = 1$$

$$\det \mathrm{E} = \begin{vmatrix} e_0 & 0 & \cdots & 0 \\ -e_1 & e_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^{N-1} e_{N-1} & (-1)^{N-2} e_{N-2} & \cdots & e_0 \end{vmatrix} = e_0 \begin{vmatrix} e_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^{N-2} e_{N-2} & \cdots & e_0 \end{vmatrix} = \cdots = \left(e_0(\mathbf{x})\right)^n = 1$$

となる

$$
\mathrm{HE}=\begin{pmatrix} h_0 & 0 & \cdots & 0 \\ h_1 & h_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{N-1} & h_{N-2} & \cdots & h_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e_0 & 0 & \cdots & 0 \\ -e_1 & e_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^{N-1}e_{N-1} & (-1)^{N-2}e_{N-2} & \cdots & e_0 \end{pmatrix}
$$

$$
=\begin{pmatrix} h_0e_0 & 0 & \cdots & 0 \\ h_1e_0-h_0e_1 & h_0e_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{N-1}e_0-h_{N-2}e_1+\cdots+(-1)^{N-1}h_0e_{N-1} & h_{N-2}e_0-h_{N-3}e_1+\cdots+(-1)^{N-2}h_0e_{N-2} & \cdots & h_0e_0 \end{pmatrix}
$$

$$
=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \sum_{r=0}^{1}(-1)^r h_{1-r}e_r & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{r=0}^{N-1}(-1)^r h_{N-1-r}e_r & \sum_{r=0}^{N-2}(-1)^r h_{N-2-r}e_r & \cdots & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \quad \because \quad \sum_{r=0}^{l}(-1)^r h_{l-r}e_r=0
$$

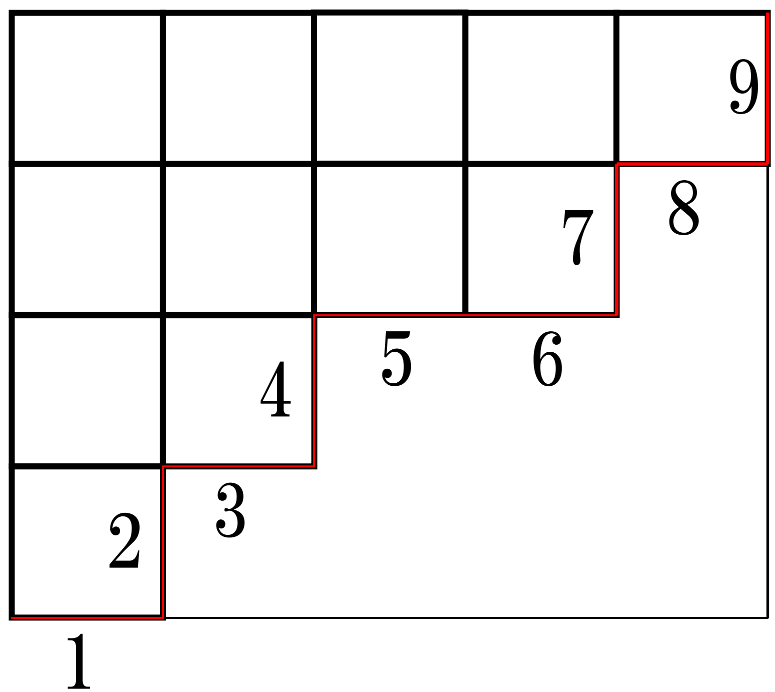
よって$\mathrm{H}^{-1}=\mathrm{E}$となる

ここでλを分割として$m \geq \lambda_1, n \geq \lambda'_1$とすると

$\{\lambda_i + n + 1 - i\}$と$\{n + j - \lambda'_j\}$は互いに$\{1, \cdots, m+n\}$に関する補集合となっている

$\because$

例 $m=5$　$n=4$　$\lambda=(5,4,2,1)$　$\lambda'=(4,3,2,2,1)$のとき



縦ステップ

$\lambda_1 + 4 + 1 - 1 = 5 + 5 - 1 = 9$

$\lambda_2 + 4 + 1 - 2 = 4 + 5 - 2 = 7$

$\lambda_3 + 4 + 1 - 3 = 2 + 5 - 3 = 4$

$\lambda_4 + 4 + 1 - 4 = 1 + 5 - 4 = 2$

横ステップ

$4 + 1 - \lambda'_1 = 4 + 1 - 4 = 1$

$4 + 2 - \lambda'_2 = 4 + 2 - 3 = 3$

$4 + 3 - \lambda'_3 = 4 + 3 - 2 = 5$

$4 + 4 - \lambda'_4 = 4 + 4 - 2 = 6$

$4 + 5 - \lambda'_5 = 4 + 5 - 1 = 8$

次に、Hの行$\lambda_i+n+1-i$,列$\mu_i+n+1-i$からなる小行列式を考える

前述より補集合は$n+j-\lambda'_j, n+j-\mu'_j$

ラプラスの展開定理よりHの小行列式はEの対応する余因子に等しいから

$$\det\left(h_{(\lambda_i+n+1-i)-(\mu_j+n+1-j)}\right)=(-1)^{\sum(\lambda_i+n+1-i)+\sum(\mu_j+n+1-j)}\times\det\left((-1)^{(n+j-\mu'_j)-(n+i-\lambda'_i)}e_{(n+j-\mu'_j)-(n+i-\lambda'_i)}\right)$$

$$\Leftrightarrow \det\left(h_{\lambda_i-\mu_j-i+j}\right)=\det\left(e_{\lambda'_i-i-\mu'_j+j}\right)$$

ここで$\mu=0$とすれば

$$\det\left(h_{\lambda_i-i+j}\right)=\det\left(e_{\lambda'_i-i+j}\right)$$

よって

$$\bullet s_\lambda(\mathbf{x})=\det\left(h_{\lambda_i-i+j}(\mathbf{x})\right)_{1\le i,j\le\lambda'_1}$$
$$=\det\left(e_{\lambda'_i-i+j}(\mathbf{x})\right)_{1\le i,j\le\lambda_1}$$

が成り立つ

2-5.半標準ヤング盤によるシューア関数の表示

- $s_\lambda(\mathbf{x}) = \sum_{\text{半標準盤}} \mathbf{x}^\alpha \qquad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots)$

α_kはk番目のステップで移動 したランダムウォーカ ーの数

例　　$\lambda = (2,1,0)$のとき

ランダム ウォーカーの数 3個　　ステップ数 3

$\lambda = (2,1,0)$を持つ全てのヤング盤 を考える

$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \cline{1-1}\end{array}$ $\alpha = (1,1,1)$ $\mathbf{x}^\alpha = x_1 x_2 x_3$

$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \cline{1-1}\end{array}$ $\alpha = (1,1,1)$ $\mathbf{x}^\alpha = x_1 x_2 x_3$

$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 1 \\ \hline 2 & \\ \cline{1-1}\end{array}$ $\alpha = (2,1,0)$ $\mathbf{x}^\alpha = x_1^2 x_2$

$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 2 & \\ \cline{1-1}\end{array}$ $\alpha = (1,2,0)$ $\mathbf{x}^\alpha = x_2^2 x_1$

$\begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 3 \\ \hline 3 & \\ \cline{1-1}\end{array}$ $\alpha = (0,1,2)$ $\mathbf{x}^\alpha = x_3^2 x_2$

$\begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 2 \\ \hline 3 & \\ \cline{1-1}\end{array}$ $\alpha = (0,2,1)$ $\mathbf{x}^\alpha = x_2^2 x_3$

$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 3 & \\ \cline{1-1}\end{array}$ $\alpha = (1,0,2)$ $\mathbf{x}^\alpha = x_3^2 x_1$

$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 1 \\ \hline 3 & \\ \cline{1-1}\end{array}$ $\alpha = (2,0,1)$ $\mathbf{x}^\alpha = x_1^2 x_3$

以上より

$$\bullet s_\lambda(\mathbf{x}) = \sum_{\text{半標準盤}} \mathbf{x}^\alpha = 2x_1x_2x_3 + x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + x_2^2x_1 + x_2^2x_3 + x_3^2x_1 + x_3^2x_2$$

まとめ

シューア関数の4つの表現について$s_\lambda(\mathbf{x}) = \dfrac{a_{\lambda+\delta}(\mathbf{x})}{a_\delta(\mathbf{x})}$**と**

$$s_\lambda(\mathbf{x}) = \det\left(h_{\lambda_i - i + j}(\mathbf{x})\right)_{1\le i,j\le \lambda'_1}$$

$$= \det\left(e_{\lambda'_i - i + j}(\mathbf{x})\right)_{1\le i,j\le \lambda_1}$$

の同等性を示した。

$s_\lambda(\mathbf{x}) = \sum_\mu K_{\lambda,\mu} m_\mu(\mathbf{x})$**と**$s_\lambda(\mathbf{x}) = \sum_{\text{半標準盤}} \mathbf{x}^\alpha$**と**$s_\lambda(\mathbf{x}) = \dfrac{a_{\lambda+\delta}(\mathbf{x})}{a_\delta(\mathbf{x})}$**の同等性は示していないが**

具体的な計算が一致することは確認できた。

$s_\lambda(\mathbf{x}) = 2x_1x_2x_3 + x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + x_2^2x_1 + x_2^2x_3 + x_3^2x_1 + x_3^2x_2$ **で** $\mathbf{x} = 1$

とすればそのシューア関数の値が

$\lambda = (2,1,0)$**半標準ヤング盤の総数になっていることがわかる。**

つまりシューア関数の特殊値 $s_\lambda(1)$ **が半標準ヤング盤の総数になっているのである**

参考文献

鈴木　淳史,「現代物理学への招待」 サイエンス社　2006.