

1 次元量子ウォークの多状態極限

佐藤充規, 香取眞理

中大理工

2008 年 3 月 23 日

近畿大学 (東大阪キャンパス, 大阪府東大阪市)

目次

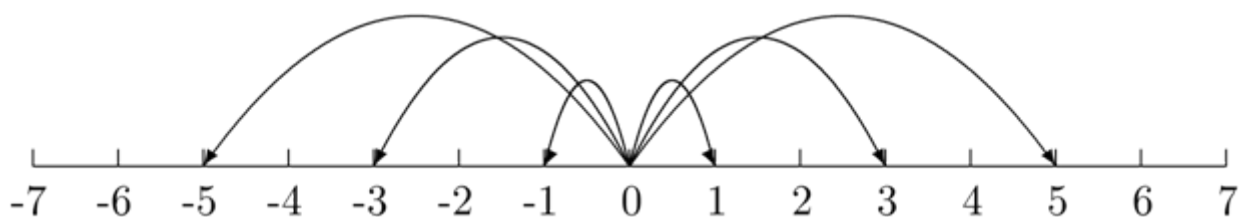
1. 多成分量子ウォーク模型
2. 重み関数の行列表示
3. 状態数極限の解析

1. 多成分量子ウォーク模型

$$j = 1/2, 1, 3/2, \dots$$

$$\text{ウォーカーの状態 } \Psi^{(j)}(x, t) = T(\psi_j^{(j)}(x, t), \dots, \psi_{-j}^{(j)}(x, t))$$

$t = 0$ で原点からスタート



時刻 $t + 1$

$$\psi_m^{(j)}(x, t + 1) = \sum_{m'=-j}^j R_{mm'}^{(j)} \psi_{m'}^{(j)}(x + 2m, t) \quad m = -j, -j + 1, \dots, j - 1, j$$

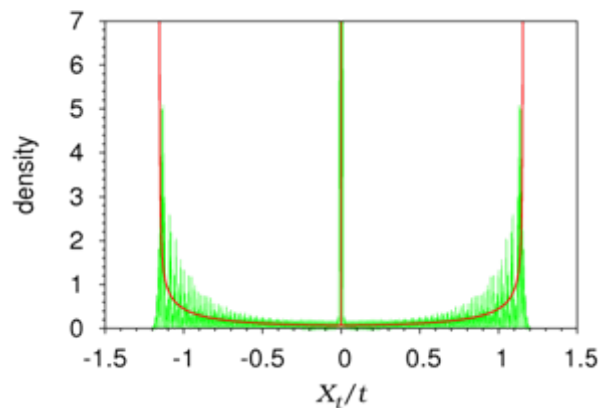
$R^{(j)}(\alpha, \beta, \gamma)$: 量子コイン

量子ウォークの擬速度 X_t/t の極限分布は次式で与えられる

$$\nu^{(j)}(v) = \sum_{m:0 < m \leq j} \frac{1}{2m} \mu\left(\frac{v}{2m}; \cos \frac{\beta}{2}\right) \mathcal{M}^{(j,m)}\left(\frac{v}{2m}\right) + \mathbf{1}_{\{(2j+1) \text{ is odd}\}} \Delta^{(j)} \delta(v)$$

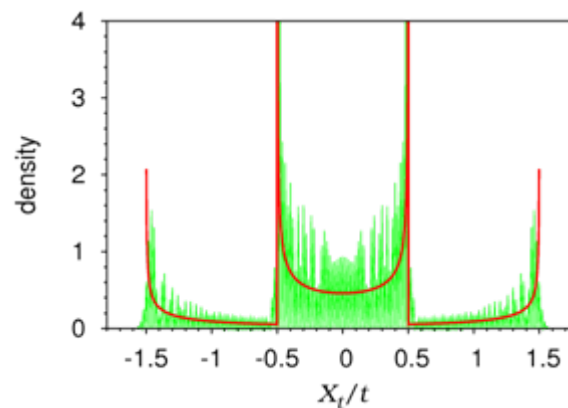
$$j = 1 \quad (\alpha, \beta, \gamma) = (0, \arccos(-1/3), \pi)$$

$${}^t\phi_0 = (1+i, 1-i, 1+i)/\sqrt{6}$$



$$j = 3/2 \quad (\alpha, \beta, \gamma) = (0, 2\pi/3, \pi)$$

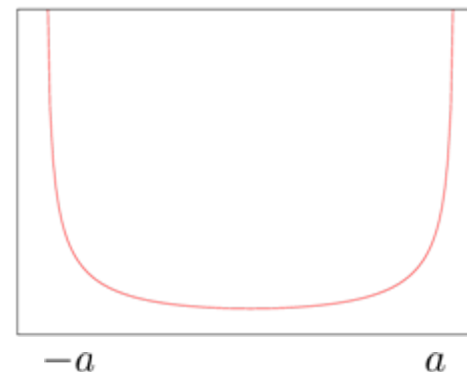
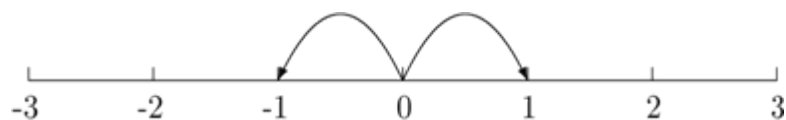
$${}^t\phi_0 = (1+3i, 0, 0, -3+i)/2\sqrt{5}$$



T. Miyazaki, M. Katori, N. Konno, Phys. Rev. A **76** 012332 (2007).

今野分布関数

$$\mu(x; a) = \frac{\sqrt{1-a^2}}{\pi(1-x^2)\sqrt{a^2-x^2}} \mathbf{1}_{\{|x| < |a|\}}$$



今野紀雄：量子ウォークの数理, 産業図書 (2008).

$\mathcal{M}^{(j,m)}(x)$ $2j$ -次多項式

初期量子ビット $\phi_0^{(j)}$

量子コインのパラメータ α, β, γ

模型の量子数 j, m

2. 重み関数について

2-1. 重みの行列表示

重みは $(2j+1) \times (2j+1)$ 行列 $\mathbf{M}^{(j,m)}(x)$ を用いて次のようにかける.

$$\mathcal{M}^{(j,m)}(x) = [\phi_0^{(j)}]^\dagger \mathbf{M}^{(j,m)}(x) \phi_0^{(j)}$$

この行列 $\mathbf{M}^{(j,m)}(x)$ は以下の性質をもつ.

$$\overline{\mathbf{M}}_{m_2 m_1}^{(j,m)} = \mathbf{M}_{m_1 m_2}^{(j,m)} \quad (\text{エルミート})$$

$$\mathbf{M}_{-m_2 -m_1}^{(j,m)}(x) = (-1)^{(m_1+m_2+2m)} \mathbf{M}_{m_1 m_2}^{(j,m)}(-x)$$

$$\mathbf{M}^{(j,m)}(x) = \left(\begin{array}{c} \text{orange triangle} \\ \text{light blue triangle} \end{array} \right)$$

$$\mathbf{M}^{(j,m)}(x) = \left(\begin{array}{c} \text{light blue triangle} \\ \text{blue triangle} \end{array} \right)$$

行列の成分を m_1, m_2 を指標として書くとき添え字の m_1 と m_2 は j から $-j$ まで大きい値から小さい値に 1 ずつ減る順番に並べて記すものにする.

指標 m_1, m_2 が

$$m_1 \leq m_2 \quad \text{and} \quad m_1 \geq -m_2,$$

$$\mathbf{M}^{(j,m)}(x) = \left(\begin{array}{c} \text{red triangle} \\ \text{blue triangle} \end{array} \right)$$

を満たす行列成分に対して, 次式が成り立つ.

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{m_1 m_2}^{(j,m)}(x) &= \frac{1}{2^{2j-1}} \sum_{\ell_1} \sum_{\ell_2} \Gamma(j, m_1, m, \ell_1) \Gamma(j, m_2, m, \ell_2) \\ &\times \sum_{k_1=0}^{A_{\ell_1, \ell_2}^{(j,m,m_1)}} \sum_{k_2=0}^{B_{\ell_1, \ell_2}^{(m,m_2)}} \binom{A_{\ell_1, \ell_2}^{(j,m,m_1)}}{k_1} \binom{B_{\ell_1, \ell_2}^{(m,m_2)}}{k_1} (-1)^{k_1} x^{k_1+k_2} \\ &\times f_{\tau}^{(m_2-m_1)}(x) e^{-i(m_2-m_1)\gamma} \end{aligned}$$

ここで和の上限, $A_{\ell_1, \ell_2}^{(j,m,m_1)}$ と $B_{\ell_1, \ell_2}^{(m,m_2)}$ は

$$A_{\ell_1, \ell_2}^{(j,m,m_1)} = 2j - (m - m_1) - (\ell_1 + \ell_2), \quad B_{\ell_1, \ell_2}^{(m,m_2)} = (m - m_2) + (\ell_1 + \ell_2)$$

で与えられる.

$\tau = \tan(\beta/2)$ とする.

$f_\tau^{(a)}(x)$ は実関数で偶奇性 $f_\tau^{(a)}(-x) = (-1)^{(a)} f_\tau^{(a)}(x)$ をもつ.

$$f_\tau^{(a)}(x) = \sum_{k_0=0}^{\lfloor \frac{a}{2} \rfloor} \sum_{k_1=0}^{k_0} \sum_{k_2=0}^{k_1} \binom{a}{2k_0} \binom{k_0}{k_1} \binom{k_1}{k_2} (-1)^{k_0+k_1} \tau^{a-2(k_0-k_2)} x^{a-2(k_0-k_1)}$$

f_τ の具体例

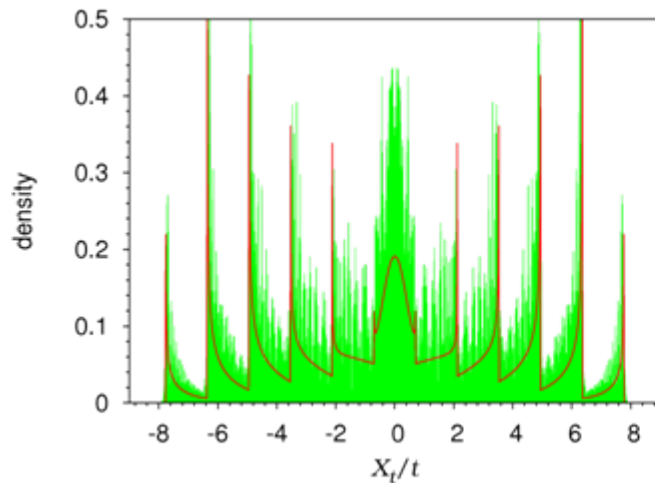
$$f_\tau^{(1)}(x) = \tau x \quad f_\tau^{(2)}(x) = (2\tau^2 + 1)x^2 - 1 \quad f_\tau^{(3)}(x) = (4\tau^3 + 3\tau)x^3 - 3\tau x$$

$$f_\tau^{(4)}(x) = (8\tau^4 + 8\tau^2 + 1)x^4 - (8\tau^2 + 2)x^2 + 1$$

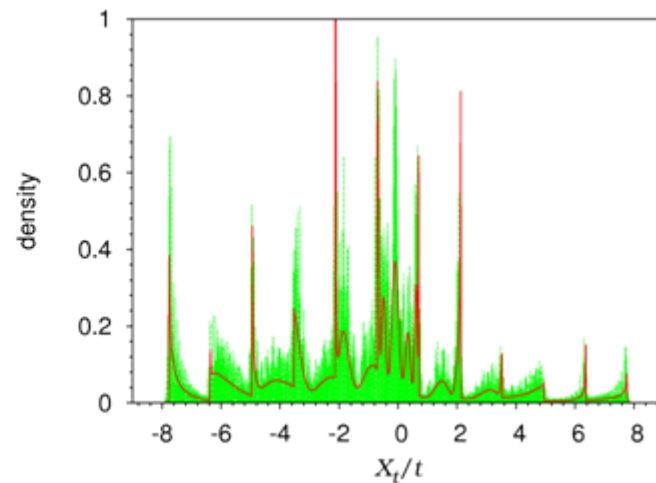
3. 多状態極限の解析

3-1. シミュレーションとの比較

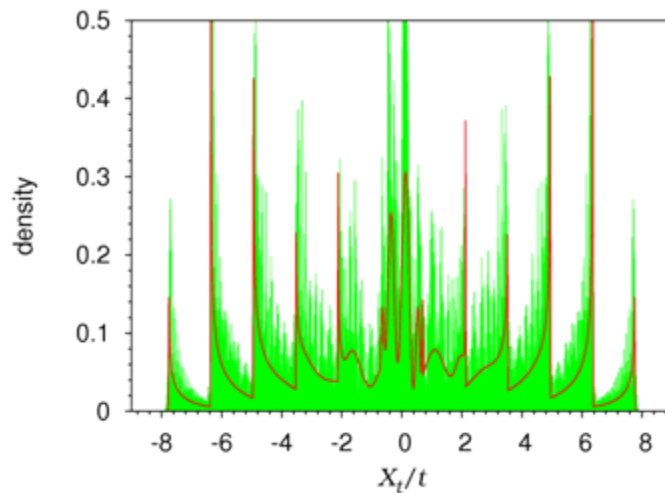
$$2j + 1 = 12$$



$$\phi = t(1+i, 0, \dots, 0, 1-i)/2$$



$$\phi = t(1+i, 0, 1+i, 1, i, i, 1+i, i, i, 1+i, i, 1+i)/4$$



$$\phi = t(1+i, 0, \dots, 0, -1-i)/2$$

$$\alpha = 0$$

$$\beta = \pi/2$$

$$\gamma = \pi$$

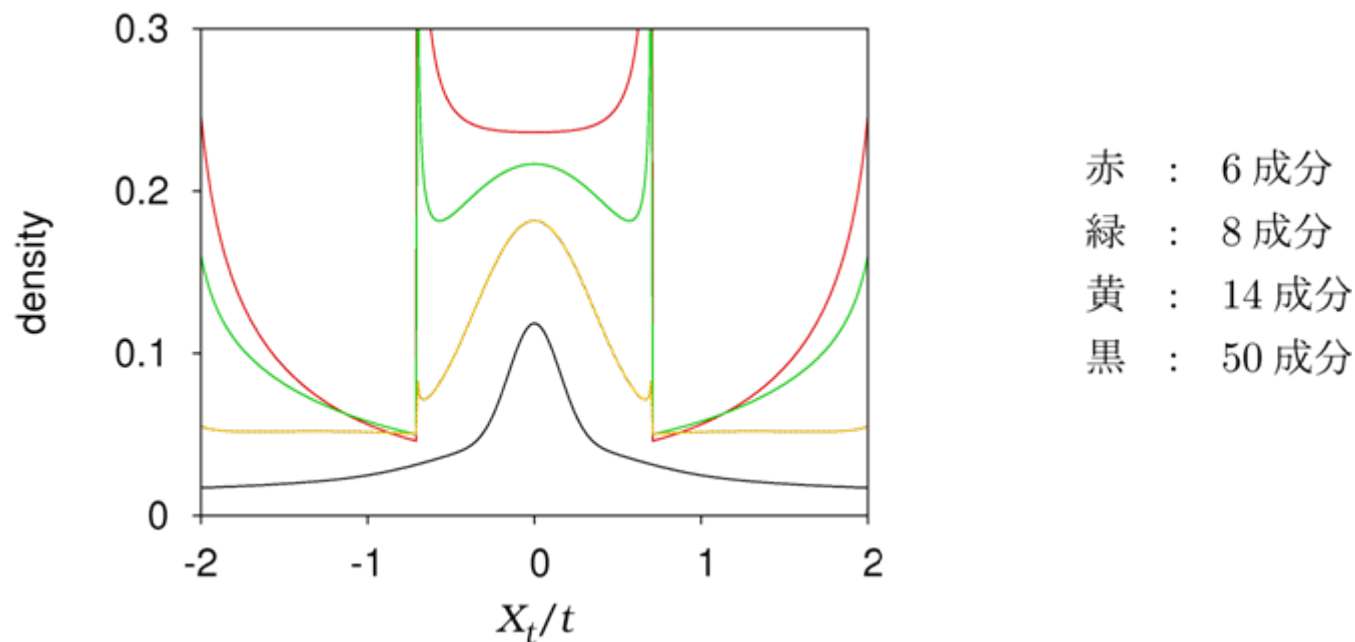
3-2. 原点近傍の分布

$2j + 1 = \text{奇数}$ デルタピーク ($x = 0$)

$2j + 1 = \text{偶数}$ なし

$q = \frac{1}{2}(1 + i)$ として初期量子ビットを $\phi_0 = {}^t(q, 0, \dots, 0, \bar{q})$ とする.
量子コインを指定するパラメータは $(\alpha, \beta, \gamma) = (0, \pi/2, \pi)$ とする.

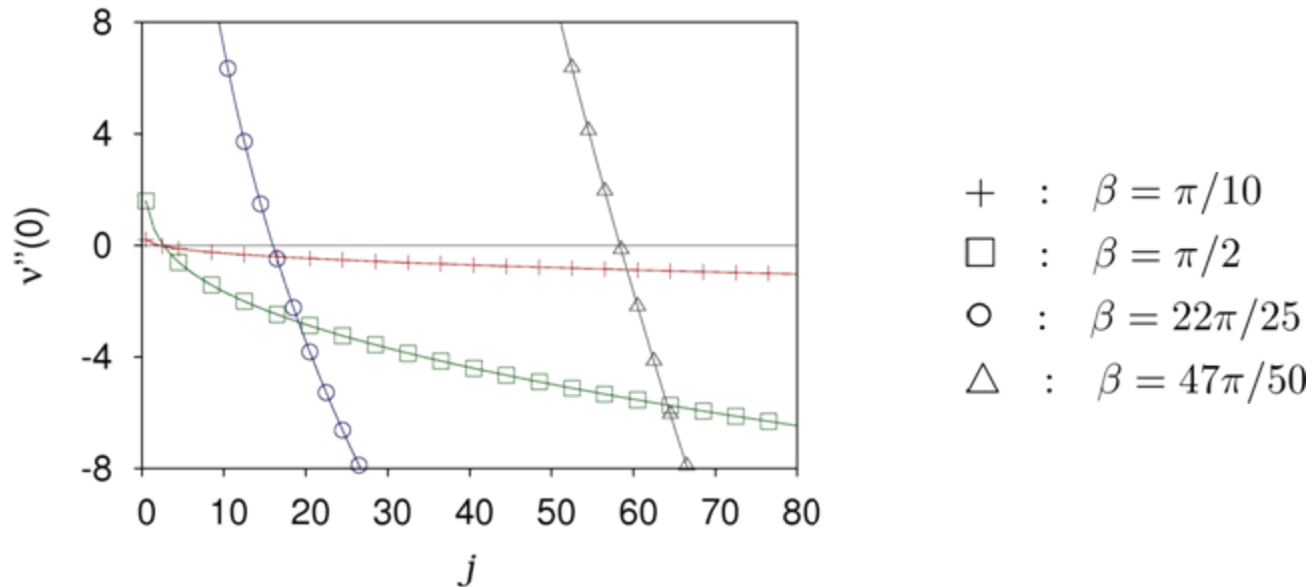
状態数 $2j+1$ 増加に対する原点近傍の分布の変化



β に対する結果

分布 $\nu^{(j)}$ の 2 次導関数の原点での値

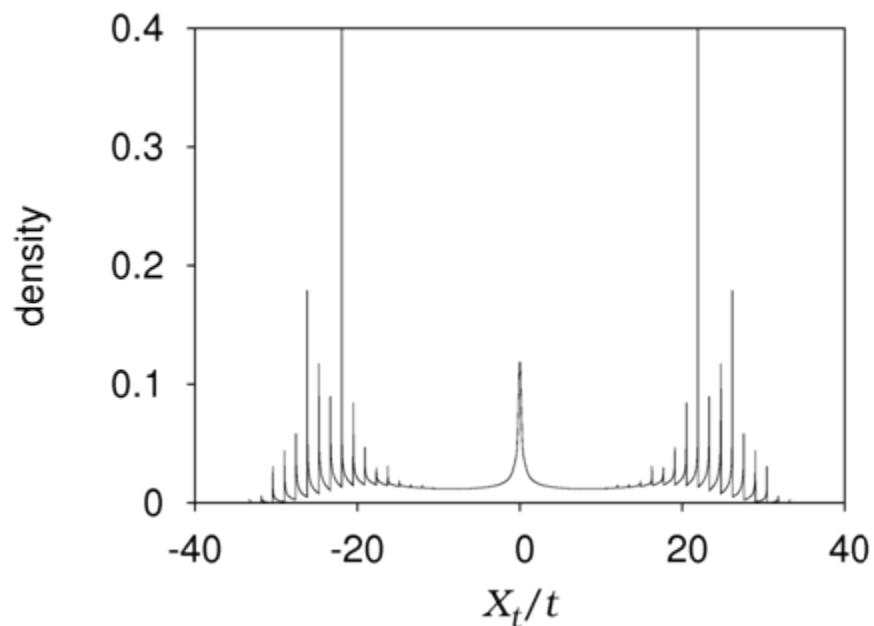
$$\left. \frac{d^2 \nu^{(j)}}{dy^2} \right|_{y=0} = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \frac{\beta}{2}}}{\pi |\cos \frac{\beta}{2}|} \sum_{0 < m \leq j} \left(\frac{1}{2m} \right)^3 \left[\left\{ 2 + \frac{1}{\cos^2 \frac{\beta}{2}} + 2(2m^2 - j) \right\} \left(\frac{1}{2} \right)^{(2j-1)} \frac{(2j)!}{(j+m)!(j-m)!} \right]$$



$j > j_c(\beta)$ ならば原点近傍の分布は凸

3-3. 分布の滑らかさ

今野分布 $\mu(v/2m; \cos(\beta/2))$ は区間 $v \in (-2m \cos(\beta/2), 2m \cos(\beta/2))$ で台を持ちその境界で発散する.



極限分布

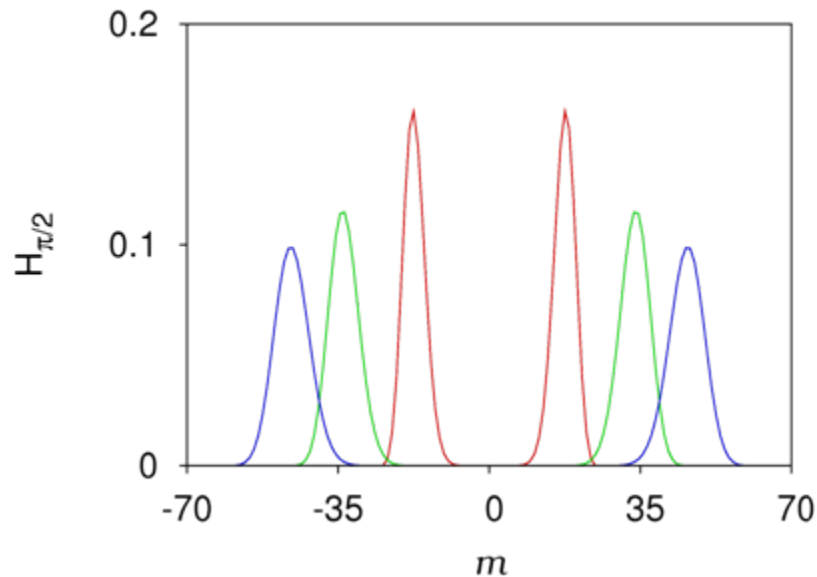
$$2j + 1 = 50$$

状態数が増えるにつれ、跳びを持つはずである場所がなめらかになっていく.

$v = 2m \cos(\beta/2)$ での重み $\mathcal{M}^{(j,m)}$ の値

$$\begin{aligned}
 H_{\beta}^{(j)}(m) &= \mathcal{M}^{(j,m)}(\cos \beta/2) \\
 &= \frac{(2j)!}{2^{2j-1}} \sum_{k_1=0}^{j+m} \sum_{k_2=0}^{j-m} \frac{(-1)^{k_1} (\cos(\beta/2))^{k_1+k_2}}{k_1!(j+m-k_1)!k_2!(j-m-k_2)!} \mathbf{1}_{\{k_1+k_2 \text{ is even}\}}
 \end{aligned}$$

ゼロならばその位置での極限分布はなめらか
 j の増大と共に高さが減り左右にシフトしていく.



赤 : 50 成分
 緑 : 96 成分
 青 : 130 成分

3-4. 分布の規格化

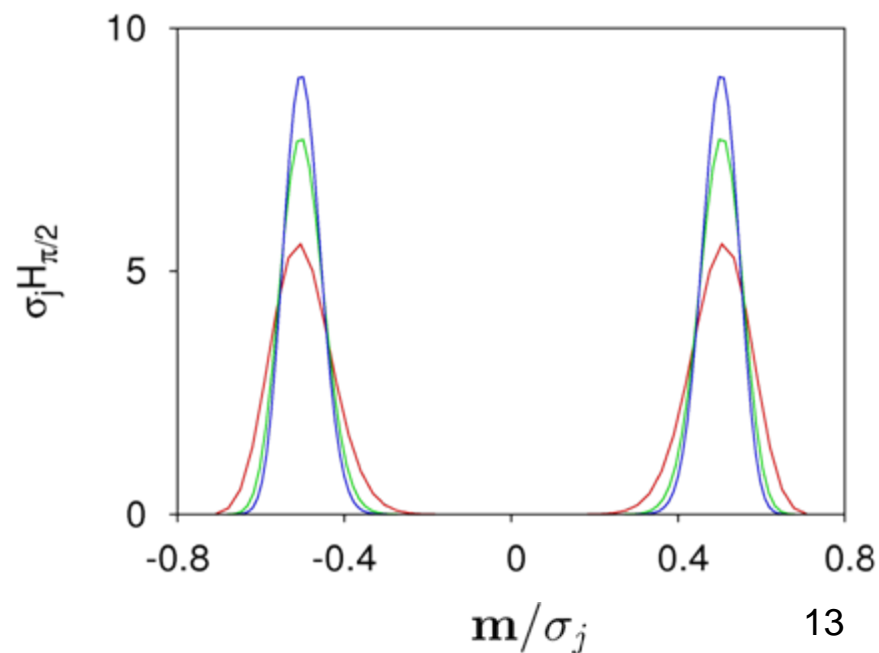
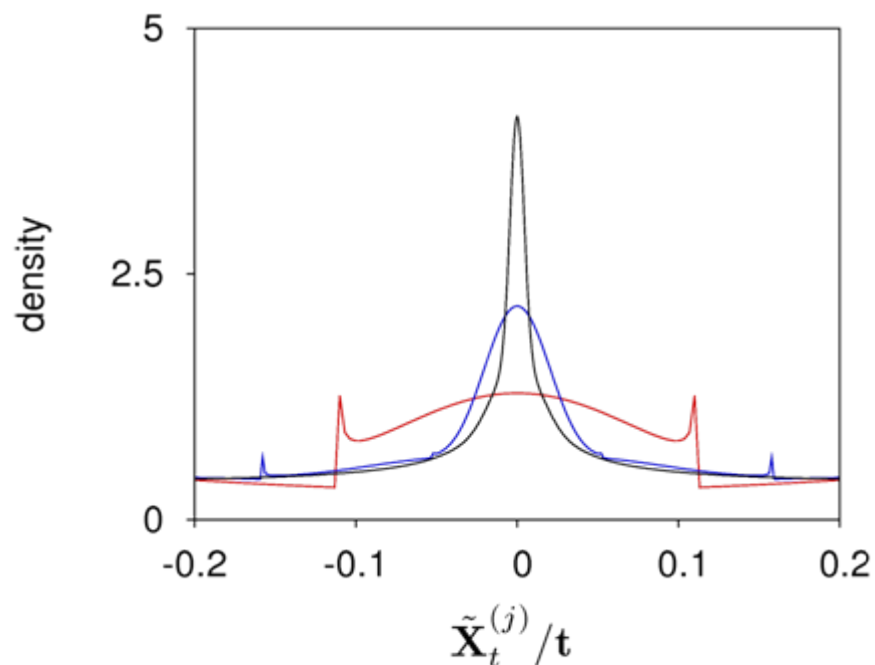
$$\tilde{X}_t^{(j)} = \frac{X_t^{(j)}}{2j \cos(\beta/2)}$$

分布関数の台は $(-1, 1)$

j の増加と共に原点での高さが増加

赤 : 10 成分
 青 : 20 成分
 黒 : 50 成分

赤 : 50 成分
 緑 : 96 成分
 青 : 130 成分



3-5. 重み $\mathcal{M}^{(j,m)}$ の漸近挙動

重み関数 $\mathcal{M}^{(j,m)}(x)$ は次式で与えられる.

$$\begin{aligned}\mathcal{M}^{(j,m)}(x) &= \left(\frac{1}{2}\right)^{2j} \frac{(2j)!}{(j-m)!(j+m)!} \\ &\quad \times \left\{ (1-x)^{j+m}(1+x)^{j-m} + (1+x)^{j+m}(1-x)^{j-m} \right\}\end{aligned}$$

$x = \tilde{x}/\sqrt{j}$ とする.

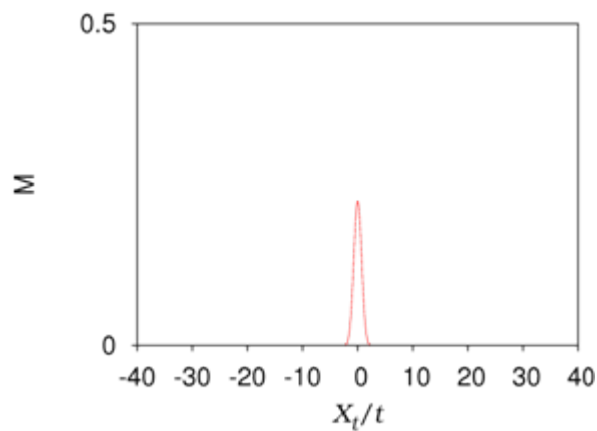
m を固定

$j \rightarrow \infty$ の極限をとる.

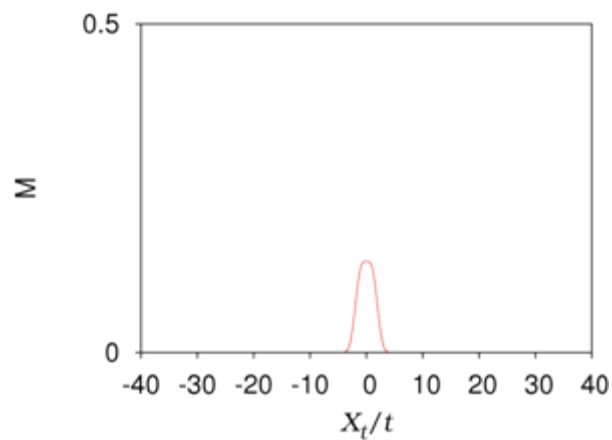
$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{j}}{2} \mathcal{M}^{(j,m)}\left(\frac{\tilde{x}}{\sqrt{j}}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\tilde{x}^2}$$

重み関数 $\mathcal{M}^{(j,m)}$ $2j + 1 = 50$

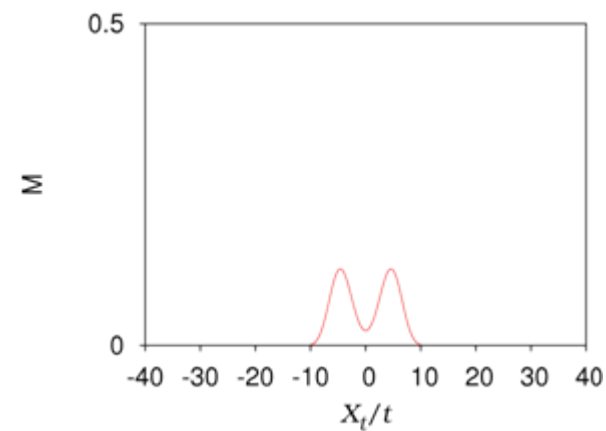
$m = 1/2$



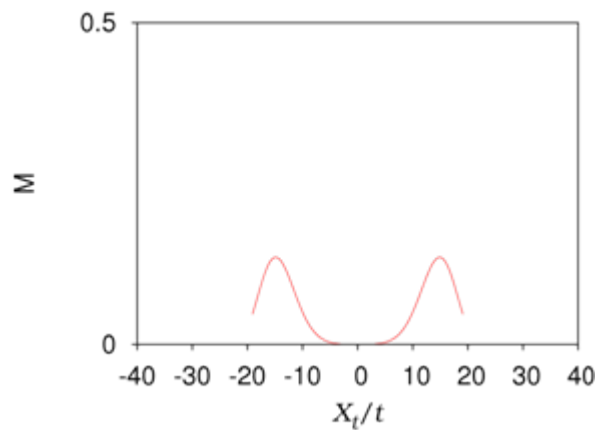
$m = 7/2$



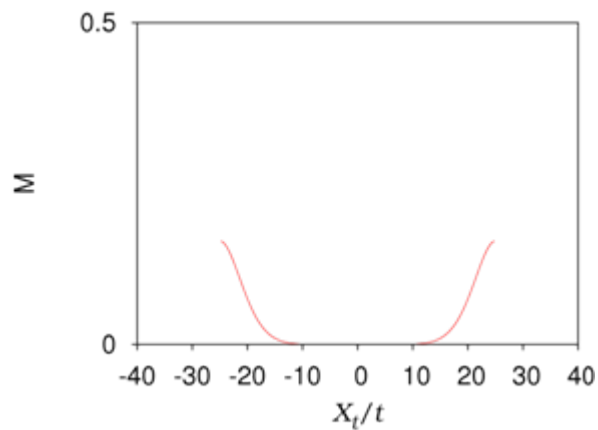
$m = 15/2$



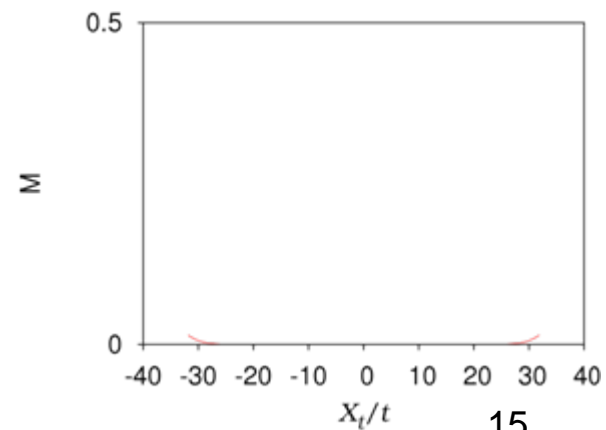
$m = 27/2$



$m = 35/2$



$m = 45/2$



4. まとめ

■ ある初期量子ビットを用いて $j \rightarrow \infty$ の分布の形

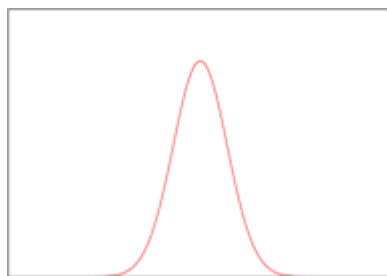
原点にピークを持つ

滑らかになる

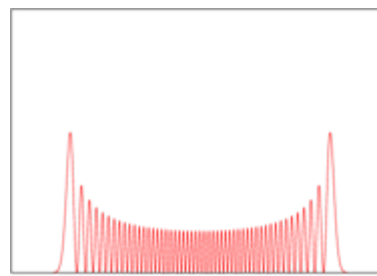
重みがガウス関数になる

■ 調和振動子

$n = 0$



$n = 50$



M. Sato, N. Kobayashi, M. Katori and N. Konno, Large Qudit Limit of One-dimensional Quantum Walks, e-print quant-ph/0802.1997.

APPENDIX

初期ビット $\phi_0^{(j)} = T(q_j, q_{j-1}, \dots, q_{-j+1}, q_{-j})$

対称な分布

$$q_k = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\theta}$$
$$q_{-k} = \pm i \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i(\theta - 2k\gamma)}$$
$$q_\ell = 0, (\ell \neq k)$$

k は $j, j-1, \dots, 1/2$ の中の一つ

対称な分布

$$q_k = \frac{1}{\sqrt{(2j+1)}} e^{i\pi/4}, q_{-k} = \bar{q}_k \quad (k = j, j-2, \dots, -j+1)$$
$$q_\ell = \frac{1}{\sqrt{(2j+1)}} e^{-i\pi/4}, q_{-\ell} = \bar{q}_\ell \quad (\ell = j-1, j-3, \dots, -j)$$

$$\beta \in [0, \pi], \gamma = 0$$

APPENDIX 具体的な行列表現

$j=1/2$ の場合 $\mathbf{M}^{(1/2,1/2)}(x) = \begin{pmatrix} (1-x) & \tau x e^{i\gamma} \\ \tau x e^{-i\gamma} & (1+x) \end{pmatrix}$

$j=1$ の場合 $\mathbf{M}^{(1,1)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1-x)^2 & \frac{\sqrt{2}}{2}(1-x)f_\tau^{(1)}(x)e^{i\gamma} & \frac{1}{2}f_\tau^{(2)}(x)e^{2i\gamma} \\ \frac{\sqrt{2}}{2}(1-x)f_\tau^{(1)}(x)e^{-i\gamma} & (1-x)(1+x) & \frac{\sqrt{2}}{2}(1+x)f_\tau^{(1)}(x)e^\gamma \\ \frac{1}{2}f_\tau^{(2)}(x)e^{-2i\gamma} & \frac{\sqrt{2}}{2}(1+x)f_\tau^{(1)}(x)e^{-i\gamma} & \frac{1}{2}(1+x)^2 \end{pmatrix}$

$j = 3/2$
 $m = 3/2$ の場合 $\mathbf{M}^{(3/2,3/2)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}(1-x)^3 & \frac{\sqrt{3}}{4}(1-x)^2 f_\tau^{(1)}(x)e^{i\gamma} & \frac{\sqrt{3}}{4}(1-x)f_\tau^{(2)}(x)e^{2i\gamma} & \frac{1}{4}f_\tau^{(3)}(x)e^{3i\gamma} \\ \frac{\sqrt{3}}{4}(1-x)^2 f_\tau^{(1)}(x)e^{-i\gamma} & \frac{3}{4}(1-x)^2(1+x) & \frac{3}{4}(1-x)(1+x)f_\tau^{(1)}(x)e^{i\gamma} & \frac{\sqrt{3}}{4}(1+x)f_\tau^{(2)}(x)e^{2i\gamma} \\ \frac{\sqrt{3}}{4}(1-x)f_\tau^{(2)}(x)e^{-2i\gamma} & \frac{3}{4}(1-x)(1+x)f_\tau^{(1)}(x)e^{-i\gamma} & \frac{3}{4}(1-x)(1+x)^2 & \frac{\sqrt{3}}{4}(1+x)^2 f_\tau^{(1)}(x)e^{i\gamma} \\ \frac{1}{4}f_\tau^{(3)}(x)e^{-3i\gamma} & \frac{\sqrt{3}}{4}(1+x)f_\tau^{(2)}(x)e^{-2i\gamma} & \frac{\sqrt{3}}{4}(1+x)^2 f_\tau^{(1)}(x)e^{-i\gamma} & \frac{1}{4}(1+x)^3 \end{pmatrix}$

$j = 3/2$
 $m = 1/2$ の場合

$$\mathbf{M}^{(3/2,1/2)} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4}(1-x)^2(1+x) & \frac{\sqrt{3}}{4}(1-x)(3x+1)f_\tau^{(1)}(x)e^{i\gamma} & \frac{\sqrt{3}}{4}(3x-1)f_\tau^{(2)}(x)e^{2i\gamma} & -\frac{3}{4}f_\tau^{(3)}(x)e^{3i\gamma} \\ \frac{\sqrt{3}}{4}(1-x)(3x+1)f_\tau^{(1)}(x)e^{-i\gamma} & \frac{1}{4}(1-x)(3x+1)^2 & \frac{1}{4}(3x+1)(3x-1)f_\tau^{(1)}(x)e^{i\gamma} & -\frac{\sqrt{3}}{4}(3x+1)f_\tau^{(2)}(x)e^{2i\gamma} \\ \frac{\sqrt{3}}{4}(3x-1)f_\tau^{(2)}(x)e^{-2i\gamma} & \frac{1}{4}(3x+1)(3x-1)f_\tau^{(1)}(x)e^{-i\gamma} & \frac{1}{4}(1+x)(3x-1)^2 & -\frac{\sqrt{3}}{4}(1+x)(3x-1)f_\tau^{(1)}(x)e^{i\gamma} \\ -\frac{3}{4}f_\tau^{(3)}(x)e^{-3i\gamma} & -\frac{\sqrt{3}}{4}(3x+1)f_\tau^{(2)}(x)e^{-2i\gamma} & -\frac{\sqrt{3}}{4}(1+x)(3x-1)f_\tau^{(1)}(x)e^{-i\gamma} & \frac{3}{4}(1+x)^2(1-x) \end{pmatrix}$$

APPENDIX 行列間漸化式

$m = j$ の重みを与える行列に次式が成り立つ.

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{m_1 m_2}^{(j,j)}(x) &= \frac{1}{2} c(j; m_1, m_2) (1-x) \mathbf{M}_{m_1-1/2, m_2-1/2}^{(j-1/2, j-1/2)}(x) \mathbf{1}_{\{m_1 \neq -j\}} \\ &\quad + \frac{1}{2^{2j-1}} f_\tau^{(2j)}(x) e^{-2ij\gamma} \mathbf{1}_{\{m_1 = -j, m_2 = j\}} \end{aligned} \quad (1)$$

または, $m = j$ と $m = j - 1$ の重みを与える行列間に

$$\mathbf{M}_{m_1 m_2}^{(j, j-1)}(x) = \frac{2(jx + m_1)(jx + m_2)}{j(1-x)(1+x)} \mathbf{M}_{m_1 m_2}^{(j,j)}(x) \quad (2)$$

が成り立つ.

$$\text{但し } c(j; m_1, m_2) = \frac{2j}{\sqrt{(j+m_1)(j+m_2)}} \quad \text{とし,}$$

$$\text{初項は } \mathbf{M}^{(1/2, 1/2)}(x) = \begin{pmatrix} (1-x) & \tau x e^{i\gamma} \\ \tau x e^{-i\gamma} & (1+x) \end{pmatrix} \quad \text{とする.}$$

APPENDIX

	$m = j$	$m = j - 1$	$m = j - 2$	$m = j - 3$
$j = 1/2$	$\mathbf{M}^{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}(x)$			
	(1) 式 ↓			
$j = 1$	$\mathbf{M}^{(1,1)}(x)$			
	(1) 式 ↓			
$j = 3/2$	$\mathbf{M}^{(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})}(x)$	$\xrightarrow{(2) \text{ 式}}$	$\mathbf{M}^{(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})}(x)$	
	(1) 式 ↓			
$j = 2$	$\mathbf{M}^{(2,2)}(x)$	$\xrightarrow{(2) \text{ 式}}$	$\mathbf{M}^{(2,1)}(x)$	
	(1) 式 ↓			
$j = 5/2$	$\mathbf{M}^{(\frac{5}{2}, \frac{5}{2})}(x)$	$\xrightarrow{(2) \text{ 式}}$	$\mathbf{M}^{(\frac{5}{2}, \frac{3}{2})}(x)$	$\xrightarrow{?}$
	(1) 式 ↓			
$j = 3$	$\mathbf{M}^{(3,3)}(x)$	$\xrightarrow{(2) \text{ 式}}$	$\mathbf{M}^{(3,2)}(x)$	$\xrightarrow{?}$
	⋮			
$j = 7/2$			$\xrightarrow{?}$	$\mathbf{M}^{(\frac{7}{2}, \frac{3}{2})}(x)$
			$\xrightarrow{?}$	$\mathbf{M}^{(\frac{7}{2}, \frac{1}{2})}(x)$