2次元量子ウォーク模型

渡部 恭平, 香取 眞理

中大理工

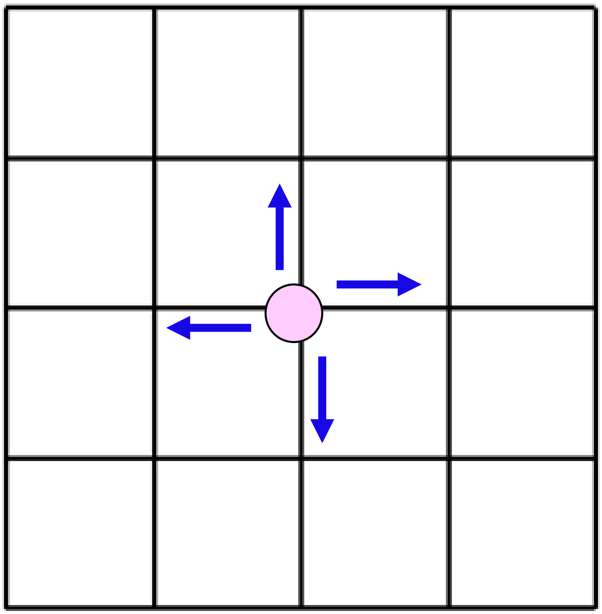
日本物理学会 2008 年春季大会

2008 年 3 月 23 日

近畿大学 (東大阪キャンパス, 大阪府東大阪市)

目次

§1 ２次元量子ウォーク模型の導入



■ 量子ウォーカーの初期量子ビット

$${}^{t}\phi_0 = (q_1, q_2, q_3, q_4)$$

$$q_1, q_2, q_3, q_4 \in \mathbf{C}, |q_1|^2 + |q_2|^2 + |q_3|^2 + |q_4|^2 = 1$$

■ 時間発展行列 V(ユニタリ行列)

$$V = S \times A$$

- シフト行列: S
- 量子コイン：$A = (A_{jk})_{jk=1}^{4} \in U(4)$

■ 量子ウォークの１ステップ

$$\Psi(x,y,t+1) = V\Psi(x,y,t)$$

$$= \begin{pmatrix} A_{11}\Psi_1(x+1,y,t) + A_{12}\Psi_2(x+1,y,t) + A_{13}\Psi_3(x+1,y,t) + A_{14}\Psi_4(x+1,y,t) \\ A_{21}\Psi_1(x-1,y,t) + A_{22}\Psi_2(x-1,y,t) + A_{23}\Psi_3(x-1,y,t) + A_{24}\Psi_4(x-1,y,t) \\ A_{31}\Psi_1(x,y+1,t) + A_{32}\Psi_2(x,y+1,t) + A_{33}\Psi_3(x,y+1,t) + A_{34}\Psi_4(x,y+1,t) \\ A_{41}\Psi_1(x,y-1,t) + A_{42}\Psi_2(x,y-1,t) + A_{43}\Psi_3(x,y-1,t) + A_{44}\Psi_4(x,y-1,t) \end{pmatrix}$$

■ フーリエ変換

$$\Psi(x,y,t)=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{dk_x}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{dk_y}{2\pi}e^{i(k_x x+k_y y)}\hat{\Psi}(k_x,k_y,t)$$

$$\hat{\Psi}(k_x,k_y,t)=\sum_{(x,y)\in Z^2}\Psi(x,y,t)e^{-i(k_x x+k_y y)}$$

■ 時刻 t で位置 (x,y) にいる量子ウォーカーの状態 $(t=0,1,2,\cdots)$

$$\begin{aligned}\Psi(x,y,t) &= \int_{-\pi}^{\pi}\frac{dk_x}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{dk_y}{2\pi}e^{i(k_x x+k_y y)}\big(V(k_x,k_y)\big)^t\phi_0\\ &= \int_{-\pi}^{\pi}\frac{dk_x}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{dk_y}{2\pi}e^{i(k_x x+k_y y)}\left\{\begin{pmatrix} e^{ik_x} & 0 & 0 & 0\\ 0 & e^{-ik_x} & 0 & 0\\ 0 & 0 & e^{ik_y} & 0\\ 0 & 0 & 0 & e^{-ik_y}\end{pmatrix}A\right\}^t\begin{pmatrix} q_1\\ q_2\\ q_3\\ q_4\end{pmatrix}\end{aligned}$$

しかし, ユニタリ行列の固有値の絶対値は $1(|\lambda| = 1)$ なので
波動関数 $\Psi(x, y, t)$ 及び確率密度 $P(x, y, t)$ は $t \to \infty$ の長時間極限をとっても収束しないが $\cdots$

$$\Downarrow$$

量子ウォークの <u>擬速度</u> $\frac{X_t}{t}, \frac{Y_t}{t}$ の任意の結合モーメントは $t \to \infty$ の長時間極限において収束する

$$\lim_{t\to\infty} \left\langle \left(\frac{X_t}{t}\right)^{\alpha} \left(\frac{Y_t}{t}\right)^{\beta} \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dv_x \int_{-\infty}^{\infty} dv_y v_x^{\alpha} v_y^{\beta} \underbrace{\nu(v_x, v_y)}_{\text{擬速度の極限分布}}$$

但し $\alpha, \beta = 0, 1, 2, \cdots$

$X_t, Y_t =$ 時刻 t における量子ウォーカーの位置の x 座標, y 座標

■ 今野紀雄: 量子ウォークの数理, 産業図書 (2008).

§2 一般化されたグローヴァーウォーク模型

量子コイン A → $$A = \begin{pmatrix} -p & q & \sqrt{pq} & \sqrt{pq} \\ q & -p & \sqrt{pq} & \sqrt{pq} \\ \sqrt{pq} & \sqrt{pq} & -q & p \\ \sqrt{pq} & \sqrt{pq} & p & -q \end{pmatrix}$$

N. Inui, Y. Konishi, and N. Konno,
Phys. Rev. A 69, 052323 (2004)

を用いる. 但し, $q = 1 - p$ であり $0 < p < 1$ である. この行列は $p = \frac{1}{2}$ の時,
グローヴァー行列を含む模型となっている. これより

時間発展行列 $V(k_x, k_y)$

→ $$V(k_x, k_y) = \begin{pmatrix} -pe^{ik_x} & qe^{ik_x} & \sqrt{pq}e^{ik_x} & \sqrt{pq}e^{ik_x} \\ qe^{-ik_x} & -pe^{-ik_x} & \sqrt{pq}e^{-ik_x} & \sqrt{pq}e^{-ik_x} \\ \sqrt{pq}e^{ik_y} & \sqrt{pq}e^{ik_y} & -qe^{ik_y} & pe^{ik_y} \\ \sqrt{pq}e^{-ik_y} & \sqrt{pq}e^{-ik_y} & pe^{-ik_y} & -qe^{-ik_y} \end{pmatrix}$$

→ Grimmett らにより提案された方法を用いて解析

G. Grimmett, S. Janson, and P. F. Scudo,
Phys. Rev. E 69, 026119 (2004)

§3 結果

3.1 弱収束の定理

長時間極限で擬速度の結合モーメント $\langle (\frac{X_t}{t})^\alpha (\frac{Y_t}{t})^\beta \rangle (\alpha, \beta = 0, 1, 2, \cdots)$ は収束して

$$\lim_{t\to\infty} \left\langle \left(\frac{X_t}{t}\right)^\alpha \left(\frac{Y_t}{t}\right)^\beta \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dv_x \int_{-\infty}^{\infty} dv_y v_x^\alpha v_y^\beta \nu(v_x, v_y)$$

で与えられ, 極限分布 $\nu(v_x, v_y)$ は

$$\nu(v_x, v_y) = \mu_p(v_x, v_y)\mathcal{M}(v_x, v_y) + \Delta\delta(v_x)\delta(v_y)$$

密度関数の基礎となる関数

初期量子ビット依存性をもった関数

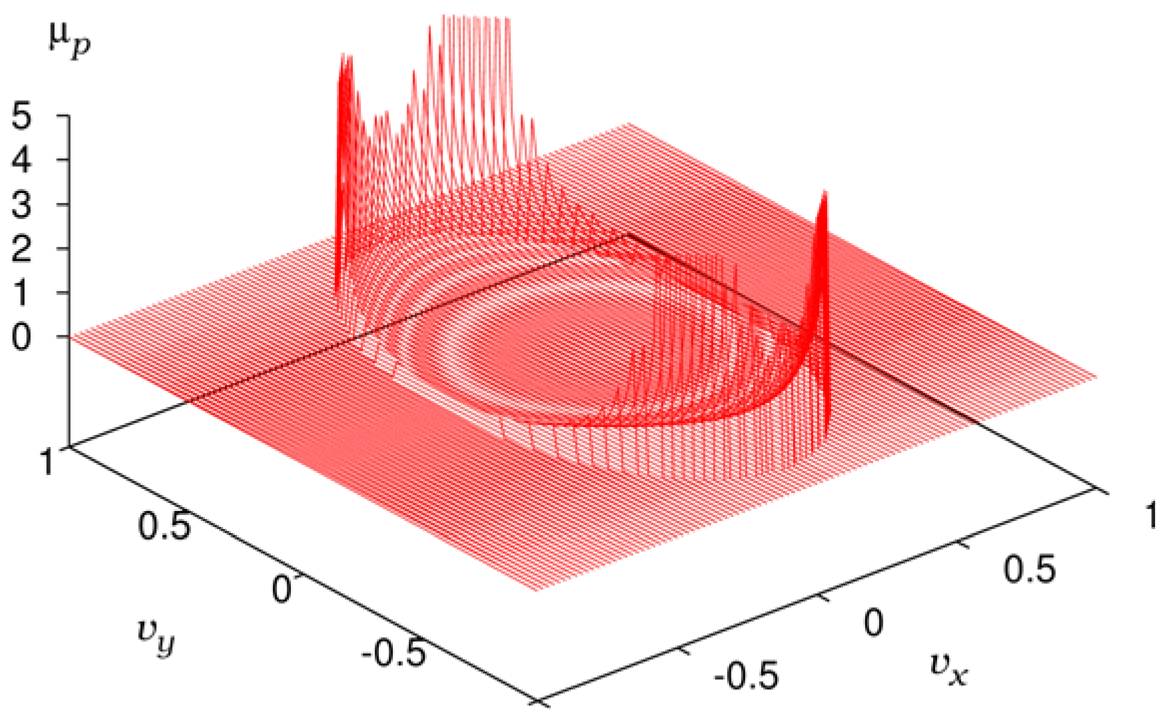
重み Δ のデルタ関数

■ K. Watabe, N. Kobayashi, M. Katori, and N. Konno, Limit ditributions of two-dimensional quantum walks, e-print quant-ph/0802.2749.

■ 密度関数の基礎となる関数

$$\mu_p(v_x, v_y) = \frac{2}{\pi^2(v_x+v_y+1)(v_x-v_y+1)(v_x+v_y-1)(v_x-v_y-1)}\mathbf{1}_{\left\{\frac{v_x^2}{p}+\frac{v_y^2}{q}<1\right\}}$$

- $p = \frac{1}{4}$ における $\mu_p(v_x, v_y)$



■ 重み関数 $\mathcal{M}(v_x, v_y)$

$$\underline{\mathcal{M}(v_x, v_y) = \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2 v_x + \mathcal{M}_3 v_y + \mathcal{M}_4 v_x^2 + \mathcal{M}_5 v_y^2 + \mathcal{M}_6 v_x v_y}$$

ただし,$\mathcal{M}_n (1 \leqq n \leqq 6)$ は以下で与えられる実対称行列 $\mathbf{M}_n$ を用いて

$$\underline{\mathcal{M}_n = \phi_0^\dagger \mathbf{M}_n \phi_0}$$

で与えられる.

$$\mathbf{M}_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M}_2 = -\frac{1}{2\sqrt{pq}}\begin{pmatrix} 2\sqrt{pq} & 0 & -q & -q \\ 0 & -2\sqrt{pq} & q & q \\ -q & q & 0 & 0 \\ -q & q & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{M}_3 = -\frac{1}{2\sqrt{pq}}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -p & p \\ 0 & 0 & -p & p \\ -p & -p & 2\sqrt{pq} & 0 \\ p & p & 0 & -2\sqrt{pq} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M}_4 = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & \frac{1+q}{p} & \frac{q}{\sqrt{pq}} & \frac{q}{\sqrt{pq}} \\ \frac{1+q}{p} & -1 & \frac{q}{\sqrt{pq}} & \frac{q}{\sqrt{pq}} \\ \frac{q}{\sqrt{pq}} & \frac{q}{\sqrt{pq}} & 1 & 1 \\ \frac{q}{\sqrt{pq}} & \frac{q}{\sqrt{pq}} & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{M}_5 = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{p}{\sqrt{pq}} & \frac{p}{\sqrt{pq}} \\ 1 & 1 & \frac{p}{\sqrt{pq}} & \frac{p}{\sqrt{pq}} \\ \frac{p}{\sqrt{pq}} & \frac{p}{\sqrt{pq}} & -1 & \frac{1+p}{q} \\ \frac{p}{\sqrt{pq}} & \frac{p}{\sqrt{pq}} & \frac{1+p}{q} & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M}_6 = \frac{1}{2\sqrt{pq}}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3.2 極限分布の対称性

重み関数

$$\mathcal{M}(v_x, v_y) = \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2 v_x + \mathcal{M}_3 v_y + \mathcal{M}_4 v_x^2 + \mathcal{M}_5 v_y^2 + \mathcal{M}_6 v_x v_y$$

より以下のことが分かる.

(1) $\mathcal{M}_3, \mathcal{M}_6 = 0 \to v_x$ 軸に対称な分布

(2) $\mathcal{M}_2, \mathcal{M}_6 = 0 \to v_y$ 軸に対称な分布

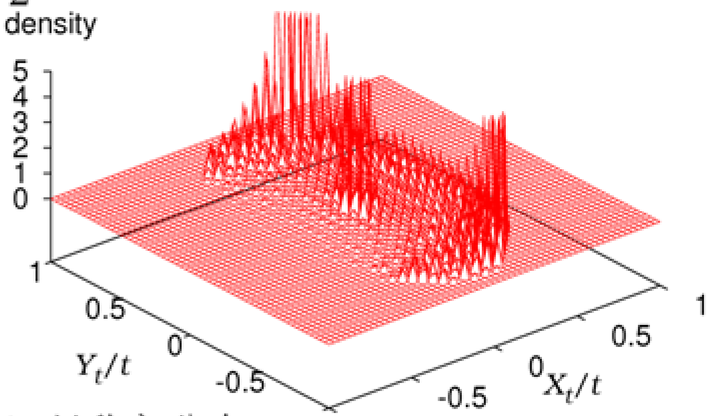
(3) $\mathcal{M}_2, \mathcal{M}_3, \mathcal{M}_6 = 0 \to v_x$ 軸, v_y 軸に対称な分布

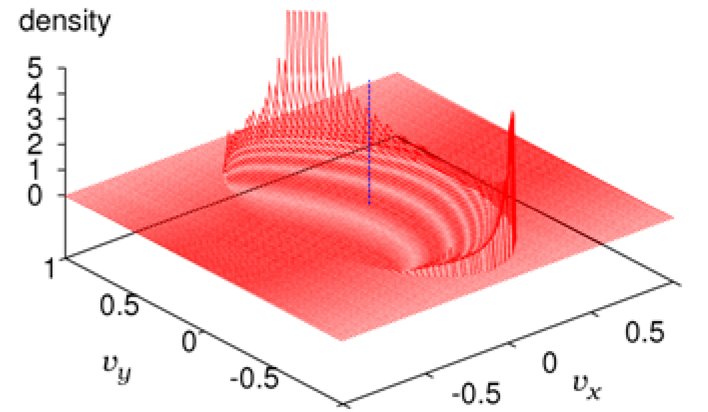
(4) $\mathcal{M}_2, \mathcal{M}_3 = 0 \to v_z$ 軸に対して２回回転対称な分布

3.3 計算機シミュレーションとの比較（p=$\frac{1}{4}$の場合）

$(a)v_x$軸に対称な分布

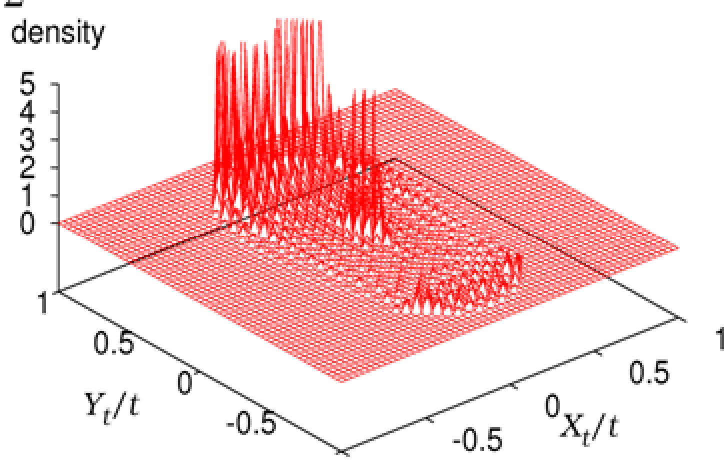
$${}^t\phi_0 = \frac{1}{2}(1,-1,1,1)$$

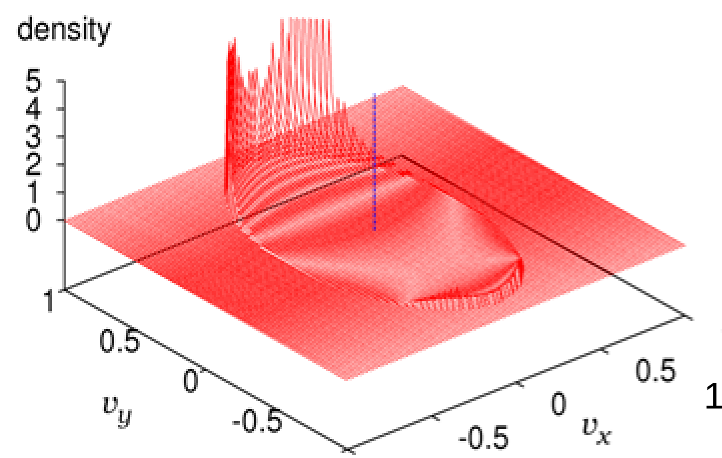




$(b)v_y$軸に対称な分布

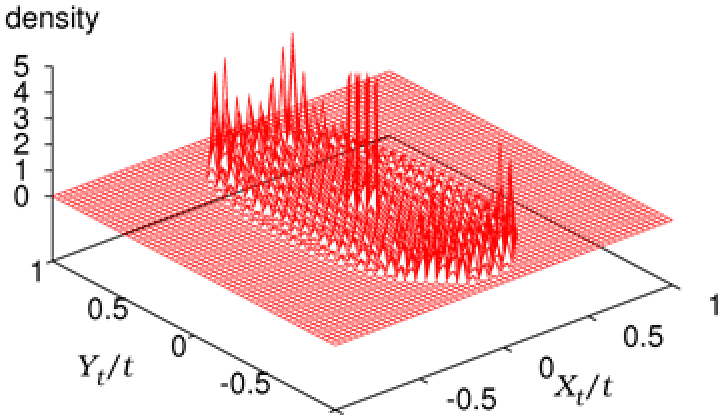
$${}^t\phi_0 = \frac{1}{2}(1,1,1,-1)$$

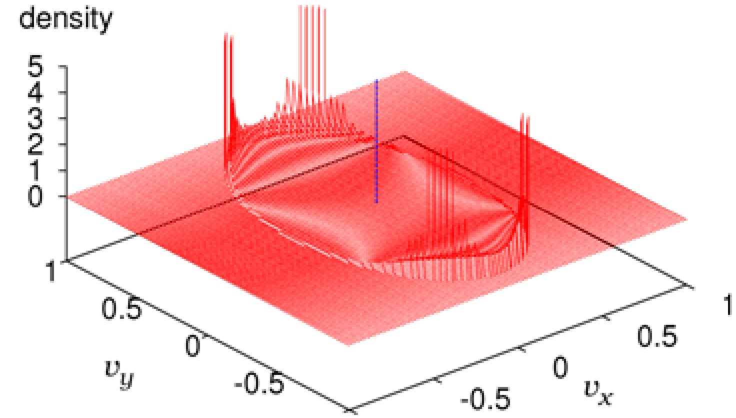




(c) v_x軸にも v_y軸にも対称な分布

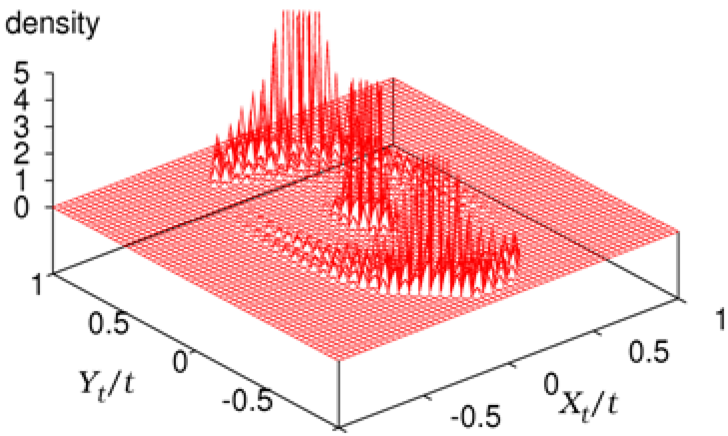
$$ {}^t\phi_0 = \frac{1}{2}(1,1,0,0) $$

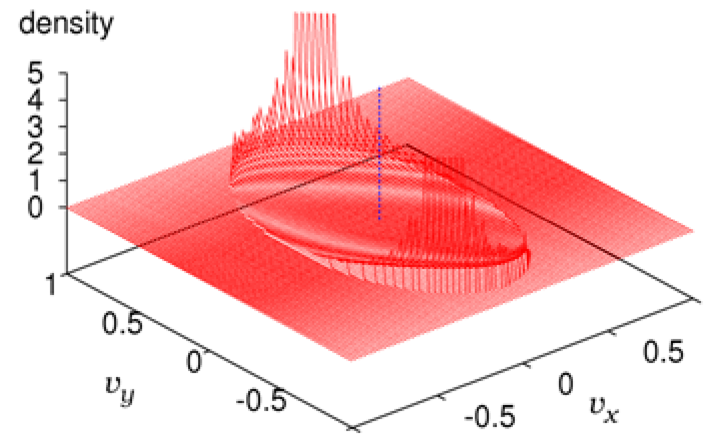




(d) v_z軸に 2 回回転対称な分布

$$ {}^t\phi_0 = \frac{1}{2}(1,-1,-1,1) $$





3.4 原点近傍での局在確率

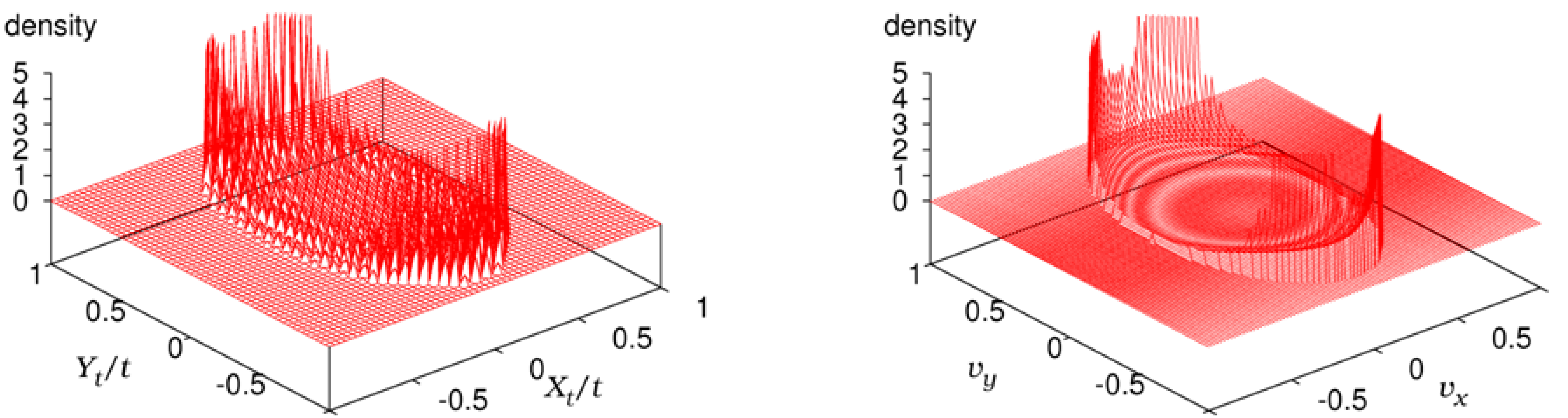
$$\Delta = 1 - \{\mathcal{M}_1 + \frac{2}{\pi}(-\sqrt{pq} + \arcsin\sqrt{p})\mathcal{M}_4 + \frac{2}{\pi}(-\sqrt{pq} + \arcsin\sqrt{q})\mathcal{M}_5\}$$

特に初期量子ビットを量子コインのパラメータに依存した

$${}^T\phi_0 = \left(\pm\sqrt{\frac{p}{2}}, \pm\sqrt{\frac{p}{2}}, \mp\sqrt{\frac{q}{2}}, \mp\sqrt{\frac{q}{2}}\right), \quad q = 1 - p$$

と選べば, $\mathcal{M}_1 = 1, \mathcal{M}_4 = \mathcal{M}_5 = 0$ なので $\Delta = 0$ である.

例:$p = \frac{1}{4}$のとき → ${}^t\phi_0 = \frac{1}{2\sqrt{2}}(1, 1, -\sqrt{3}, -\sqrt{3})$



§4 今後の展望

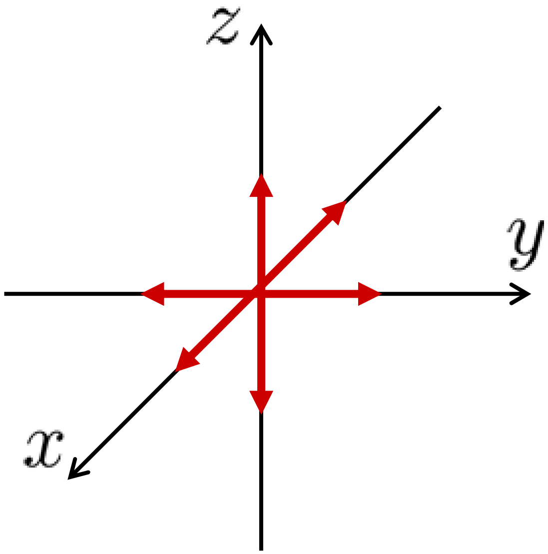
■ グローヴァーウォークを用いた D 次元立方体格子への拡張

D 次元立方体格子でのグローヴァーウォーク：$2D \times 2D$ の直交行列 $A^{(D)} = (A^{(D)}_{jk})$

$$A^{(D)}_{jk} = \begin{cases} 1/D - 1 & (j = k \text{ のとき}) \\ 1/D & (j \neq k \text{ のとき}) \end{cases}$$

$D = 3$ のとき

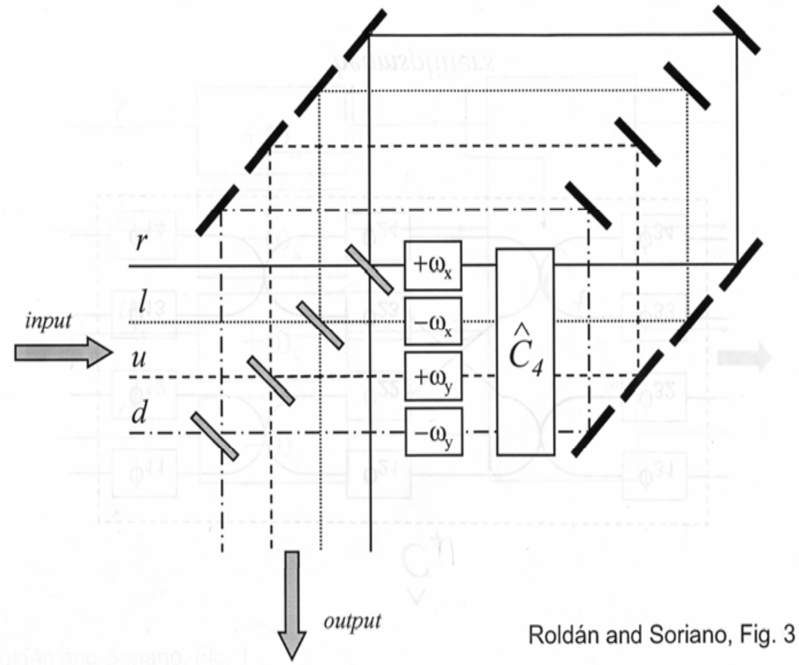
$$A^{(3)} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$



■ 実験について

- 光学装置を用いた方法

  Eugenio Roldán and J. C. Soriano,
  J. Mod. Opt. 52, 2649 (2005)



Roldán and Soriano, Fig. 3

- イオントラップされた原子を用いた方法

  S. Fujisawa, H. Osaki, I. M. Buluta, and S. Hasegawa,
  Phys. Rev. A 72, 032329 (2005)

APPENDIX A: 計算の詳細

■ 時間発展行列 $V(k_x, k_y)$ の固有値・固有ベクトルと対角化

固有値　$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -1, \quad \lambda_3 = e^{i\omega(k_x,k_y)} \quad \lambda_4 = e^{-i\omega(k_x,k_y)}$

ただし

$$\omega(k_x, k_y) = \arccos\{-(p\cos k_x + q\cos k_y)\}$$

固有ベクトル

$$\mathbf{v}_j(k_x, k_y) = N_j \begin{pmatrix} q(e^{ik_y}\lambda_j + 1)(e^{ik_x}\lambda_j + 1)(e^{-ik_y}\lambda_j + 1) \\ q(e^{ik_y}\lambda_j + 1)(e^{-ik_x}\lambda_j + 1)(e^{-ik_y}\lambda_j + 1) \\ \sqrt{pq}(e^{ik_y}\lambda_j + 1)(e^{-ik_x}\lambda_j + 1)(e^{ik_x}\lambda_j + 1) \\ \sqrt{pq}(e^{-ik_x}\lambda_j + 1)(e^{ik_x}\lambda_j + 1)(e^{-ik_y}\lambda_j + 1) \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2, 3, 4$$

$$V(k_x, k_y) = R(k_x, k_y) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix} R^\dagger(k_x, k_y)$$

ただし $R \equiv (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$

■ $\hat{\Psi}(k_x, k_y, t)$ の展開

$$\hat{\Psi}(k_x,k_y,t) = R(k_x,k_y)\begin{pmatrix} (\lambda_1)^t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda_2)^t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda_3)^t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda_4)^t \end{pmatrix} R^\dagger(k_x,k_y)\phi_0$$

$$= \sum_{j=1}^{4} (\lambda_j)^t \mathbf{v}_j C_j(k_x,k_y)$$

ただし　$C_j(k_x,k_y) \equiv \mathbf{v}_j^\dagger(k_x,k_y)\phi_0$

$$R^\dagger(k_x,k_y) = R^{-1}(k_x,k_y) \iff \mathbf{v}_j(k_x,k_y)\mathbf{v}'_j(k_x,k_y) = \delta_{jj'}$$

$$\hat{\Psi}^\dagger(k_x,k_y,t)\left(i\frac{\partial}{\partial k_y}\right)^\beta\left(i\frac{\partial}{\partial k_x}\right)^\alpha\hat{\Psi}(k_x,k_y,t) = \left\{(-1)^{\alpha+\beta}|C_3(k_x,k_y)|^2 + |C_4(k_x,k_y)|^2\right\}$$
$$\times \left(\frac{\partial\omega(k_x,k_y)}{\partial k_y}\right)^\beta\left(\frac{\partial\omega(k_x,k_y)}{\partial k_x}\right)^\alpha t^{\alpha+\beta} + O(t^{\alpha+\beta-1})$$

■ 擬速度の結合モーメント

$$\langle X_t^{\alpha} Y_t^{\beta} \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk_x}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk_y}{2\pi} \hat{\Psi}^{\dagger}(k_x, k_y, t) \left(i \frac{\partial}{\partial k_x} \right)^{\alpha} \left(i \frac{\partial}{\partial k_y} \right)^{\beta} \hat{\Psi}(k_x, k_y, t)$$

$\alpha, \beta = 0, 1, 2, \cdots$ に対して, 擬速度の結合モーメントは

$$\lim_{t \to \infty} \left\langle \left(\frac{X_t}{t} \right)^{\alpha} \left(\frac{Y_t}{t} \right)^{\beta} \right\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk_x}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk_y}{2\pi} \left\{ (-1)^{\alpha+\beta} |C_3(k_x, k_y)|^2 + |C_4(k_x, k_y)|^2 \right\} \left(\frac{\partial \omega(k_x, k_y)}{\partial k_y} \right)^{\beta} \left(\frac{\partial \omega(k_x, k_y)}{\partial k_x} \right)^{\alpha}$$

ただし

$$\frac{\partial \omega(k_x, k_y)}{\partial k_x} = -\frac{p \sin k_x}{\sqrt{1 - (p \cos k_x + q \cos k_y)^2}}, \quad \frac{\partial \omega(k_x, k_y)}{\partial k_y} = -\frac{q \sin k_y}{\sqrt{1 - (p \cos k_x + q \cos k_y)^2}}$$

積分変数を k_x, k_y から v_x, v_y へ変換

$$v_x = \frac{p\sin k_x}{\sqrt{1-(p\cos k_x + q\cos k_y)^2}}, \quad v_y = \frac{q\sin k_y}{\sqrt{1-(p\cos k_x + q\cos k_y)^2}}$$

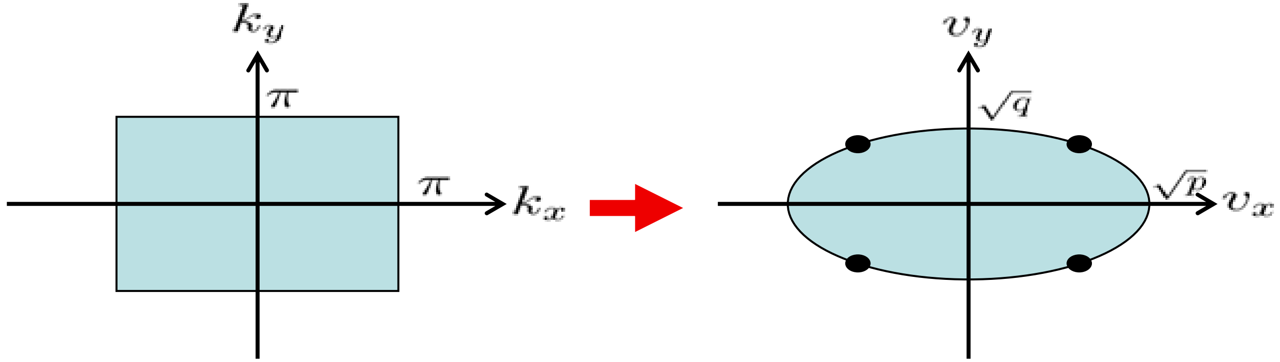
■ 逆写像 $(v_x, v_y) \mapsto (k_x, k_y)$ に関するヤコビアン

$$\begin{aligned} J &\equiv \begin{vmatrix} \partial v_x/\partial k_x & \partial v_x/\partial k_y \\ \partial v_y/\partial k_x & \partial v_y/\partial k_y \end{vmatrix} \\ &= \frac{\left|(v_x+v_y+1)(v_x-v_y+1)(v_x+v_y-1)(v_x-v_y-1)\right|}{4} \end{aligned}$$

■ 像　(i) 2 対 1 の写像

(ii) その像は楕円 $\frac{v_x^2}{p} + \frac{v_y^2}{q} = 1$ の内部と

楕円上の 4 点 $\{(p,q),(p-q),(-p,q),(-p,-q)\}$



$$\lim_{t\to\infty}\left\langle\left(\frac{X_t}{t}\right)^{\alpha}\left(\frac{Y_t}{t}\right)^{\beta}\right\rangle = 2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dv_x}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dv_y}{2\pi}v_x^{\alpha}v_y^{\beta}$$

$$\times\left\{|\hat{C}_3(v_x,v_y)|^2+(-1)^{\alpha+\beta}|\hat{C}_4(v_x,v_y)|^2\right\}\frac{1}{\mathbf{J}}\times\mathbf{1}_{\{v_x^2/p+v_y^2/q<1\}}$$

$$=2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dv_x}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dv_y}{2\pi}\frac{1}{\mathbf{J}}\mathcal{M}(v_x,v_y)v_x^{\alpha}v_y^{\beta}\times\mathbf{1}_{\{v_x^2/p+v_y^2/q<1\}}$$

$$=\underline{\int_{-\infty}^{\infty}dv_x\int_{-\infty}^{\infty}dv_y v_x^{\alpha}v_y^{\beta}\mu_p(v_x,v_y)\mathcal{M}(v_x,v_y)}$$

ただし,

$$\mu_p(v_x,v_y)=\frac{2}{\pi^2(v_x+v_y+1)(v_x-v_y+1)(v_x+v_y-1)(v_x-v_y-1)}\mathbf{1}_{\left\{\frac{v_x^2}{p}+\frac{v_y^2}{q}<1\right\}}$$