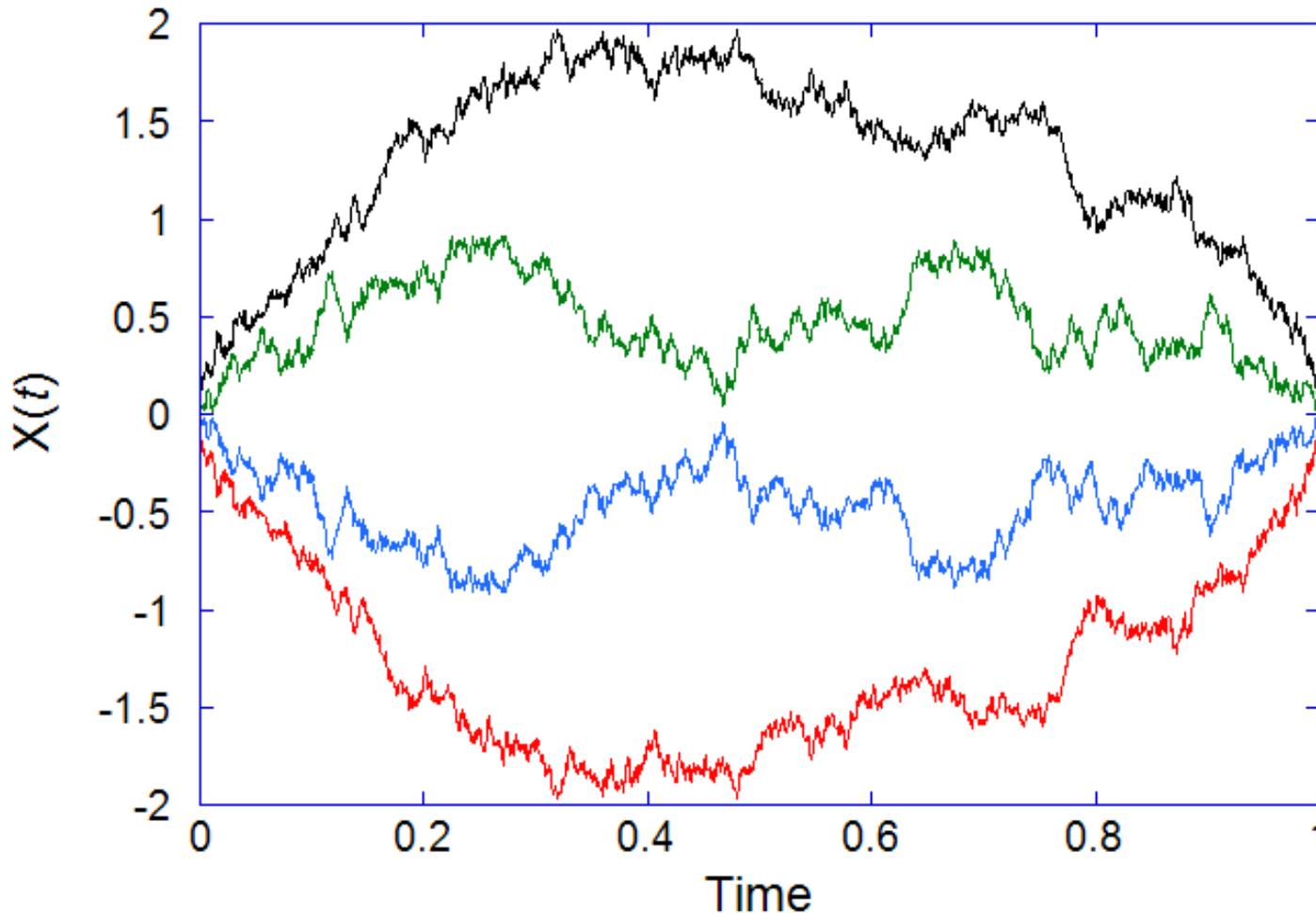


# $d$ 次元ベツセル橋の最大値問題

中大理工・物理

小林奈央樹、和泉南、香取眞理



# アウトライン

1. ベッセル過程とは？
2. ベッセル橋の最大値問題・・・理論
3. ベッセル橋の最大値問題・・・シミュレーション
4. 今後の課題

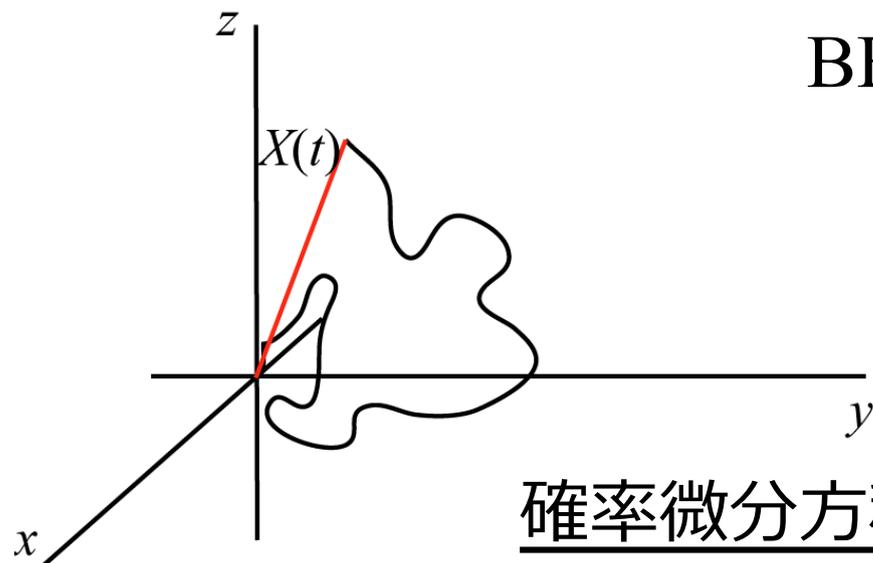
# ベッセル過程の定義

## 1. ベッセル過程とは？

$d$ 次元ベッセル過程  $BES_d$  :

$$X(t) \equiv \sqrt{B_1(x)^2 + B_2(x)^2 + \cdots + B_d(x)^2}$$

により生成される過程。



$BES_3$  : 3次元 BM の動径成分

確率微分方程式

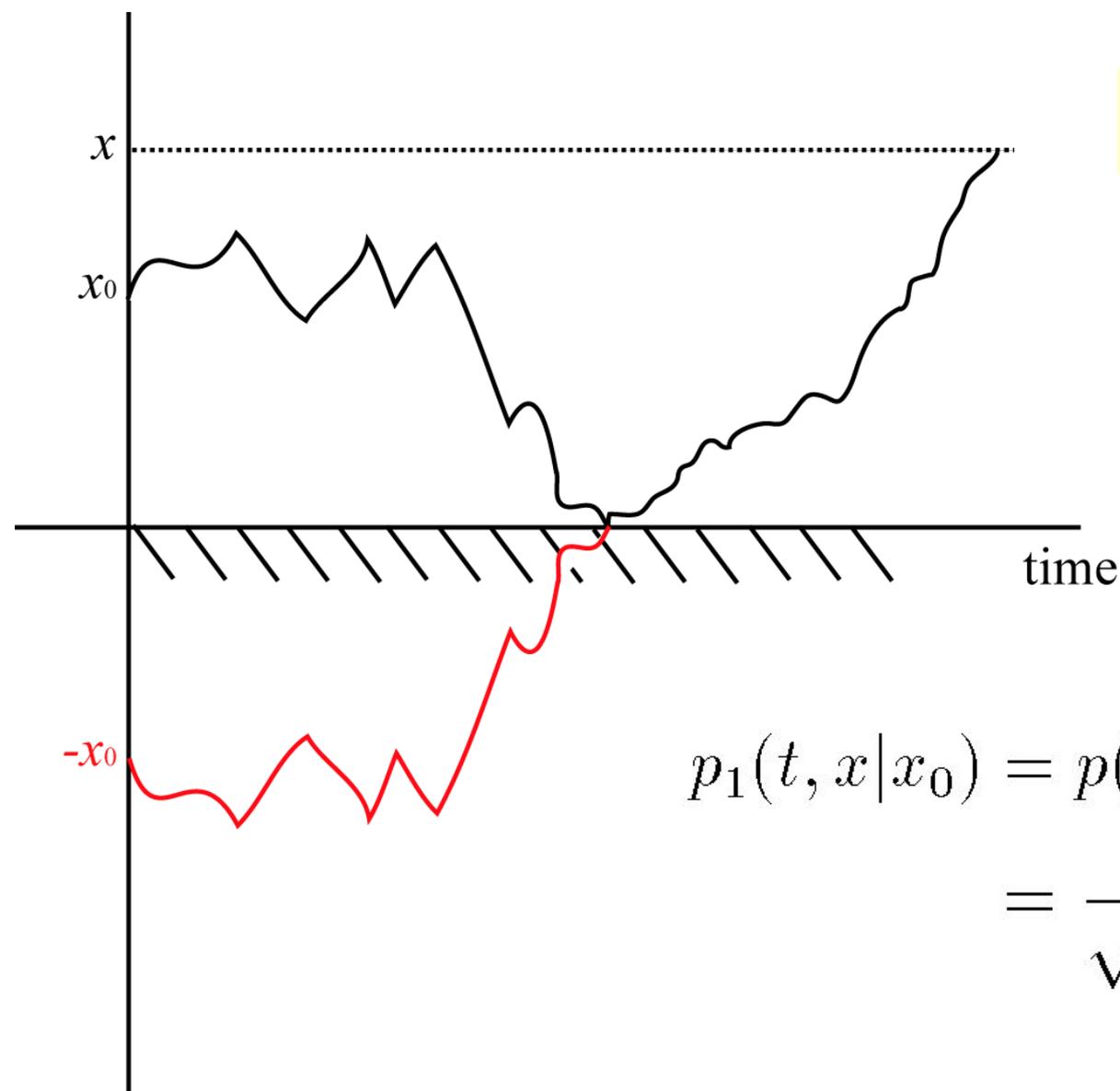
$$X(t) = dB(t) + \frac{d-1}{2} \frac{1}{X(t)} dt$$

ここでは  $d=3$  の場合を考える。

# 条件付ブラウン運動 I

## 1. ベッセル過程とは？

$x = 0$  に吸収壁がある1次元ブラウン運動

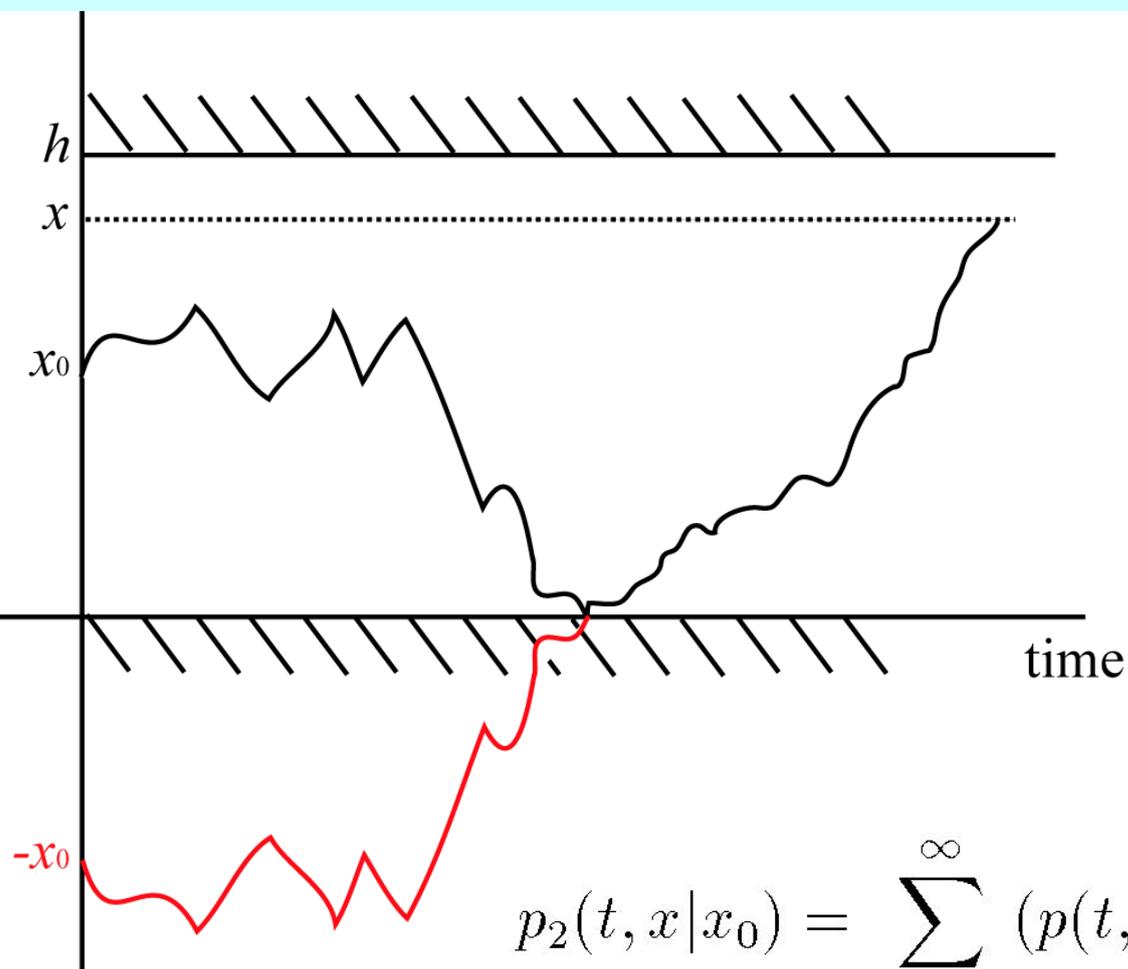


$$\begin{aligned} p_1(t, x | x_0) &= p(t, x | x_0) - p(t, x | -x_0) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \left( e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2t}} - e^{-\frac{(x+x_0)^2}{2t}} \right) \end{aligned}$$

# 条件付ブラウン運動 II

## 1. ベッセル過程とは？

$x = 0$  と  $h (>0)$  に吸収壁がある1次元ブラウン運動



鏡像法を繰り返し使う

$$\begin{aligned} p_2(t, x | x_0) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (p(t, x | x_0 + 2hn) - p(t, x | -x_0 + 2hn)) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (e^{-\frac{1}{2t}(x - (x_0 + 2hn))^2} - e^{-\frac{1}{2t}(x - (-x_0 + 2hn))^2}) \end{aligned}$$

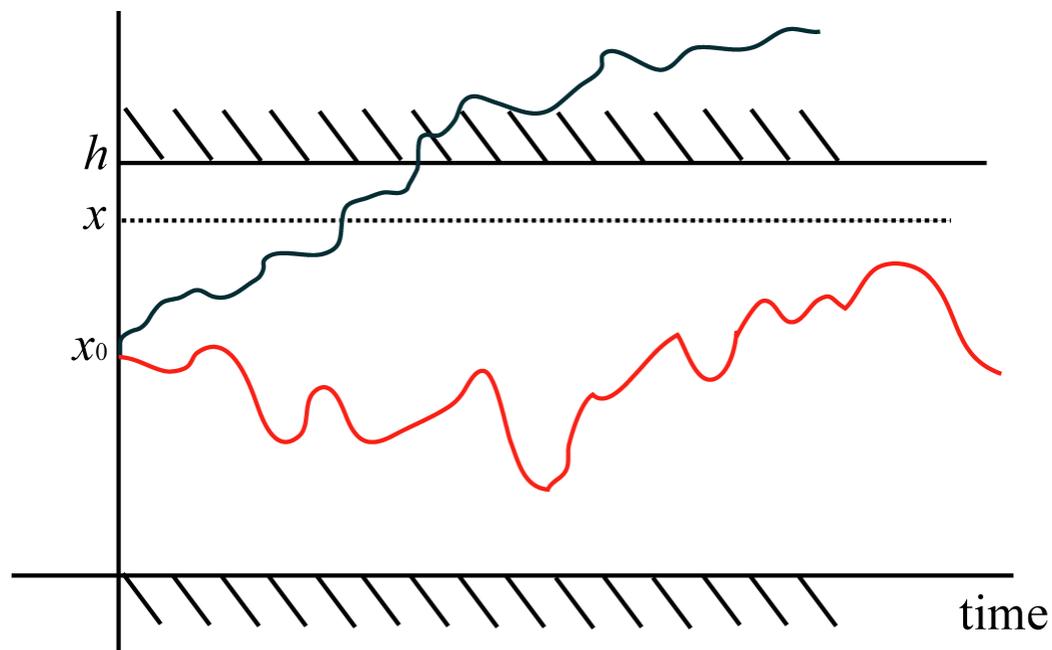
# 条件付ブラウン運動 III

## 1. ベッセル過程とは？

$x = 0$  に吸収壁がある (つまり正の値しか取らない) 1次元ブラウン運動  $X_{\text{absBM}}(t)$  の時間区間  $[0, 1]$  での最大値が  $h$  を超えない確率は？

$$\mathbf{P}(H_1 < h | X_{\text{absBM}}(0) = x_0, X_{\text{absBM}}(1) = x_1) = \frac{p_2(1, x_1 | x_0)}{p_1(1, x_1 | x_0)}$$

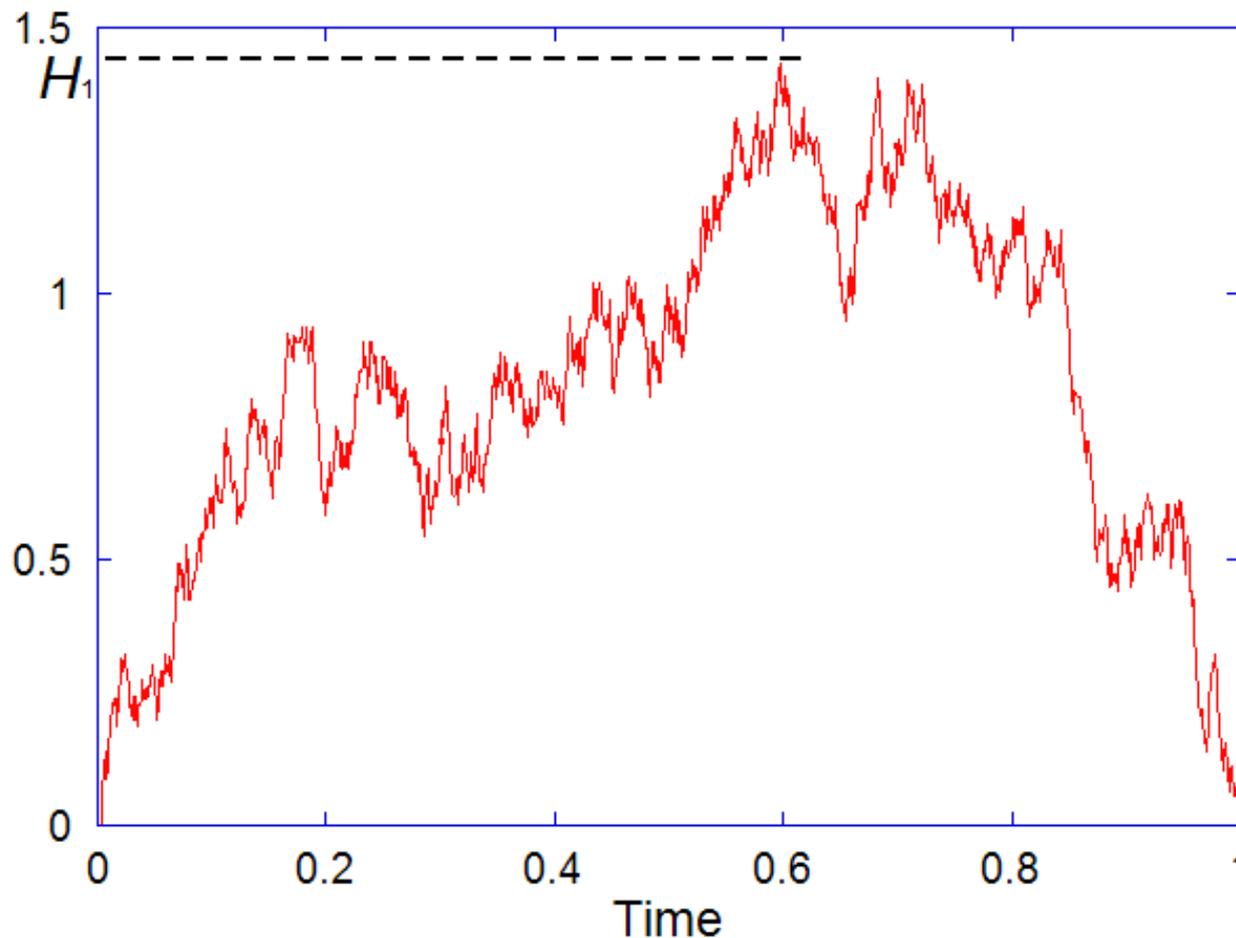
$$H_1 = \max_{0 \leq t \leq 1} X_{\text{absBM}}(t)$$



$$\langle \text{Prop.} \rangle \quad p_{\text{BES}_3}(t, y | x) = \frac{y}{x} p_{\text{absBM}}(t, y | x)$$

# ベッセル橋

## 1. ベッセル過程とは？



3次元ベッセル過程  $BES_3$  で  $x_0 \rightarrow 0, x_1 \rightarrow 0$  の極限をとる。



3次元ベッセル橋

条件付ブラウン運動の推移確率から

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(H_1 < h) &= \lim_{x_0 \rightarrow 0, x_1 \rightarrow 0} \frac{p_2(1, x_1 | x_0)}{p_1(1, x_1 | x_0)} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (1 - 4h^2 n^2) e^{-2h^2 n^2}\end{aligned}$$

確率密度

$$q_1(h) = \frac{d}{dh} \mathbf{P}(H_1 < h)$$

ベッセル橋の高さのモーメント

$$\mathbf{E}[(H_1)^s] = \int_0^{\infty} dh h^s q_1(h)$$

# ベッセル橋の $s$ 次モーメント

2. 理論

Biane - Pitman - Yor, Bull. Amer. Math. Soc. **38** (2001) 435

Katori - Izumi - Kobayashi, arXiv: math.PR/0711.1710 (2007)

to be published in J. Stat. Phys.

$$\mathbf{E}[(H_1)^s] = 2\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{s}{2}} \xi(s)$$

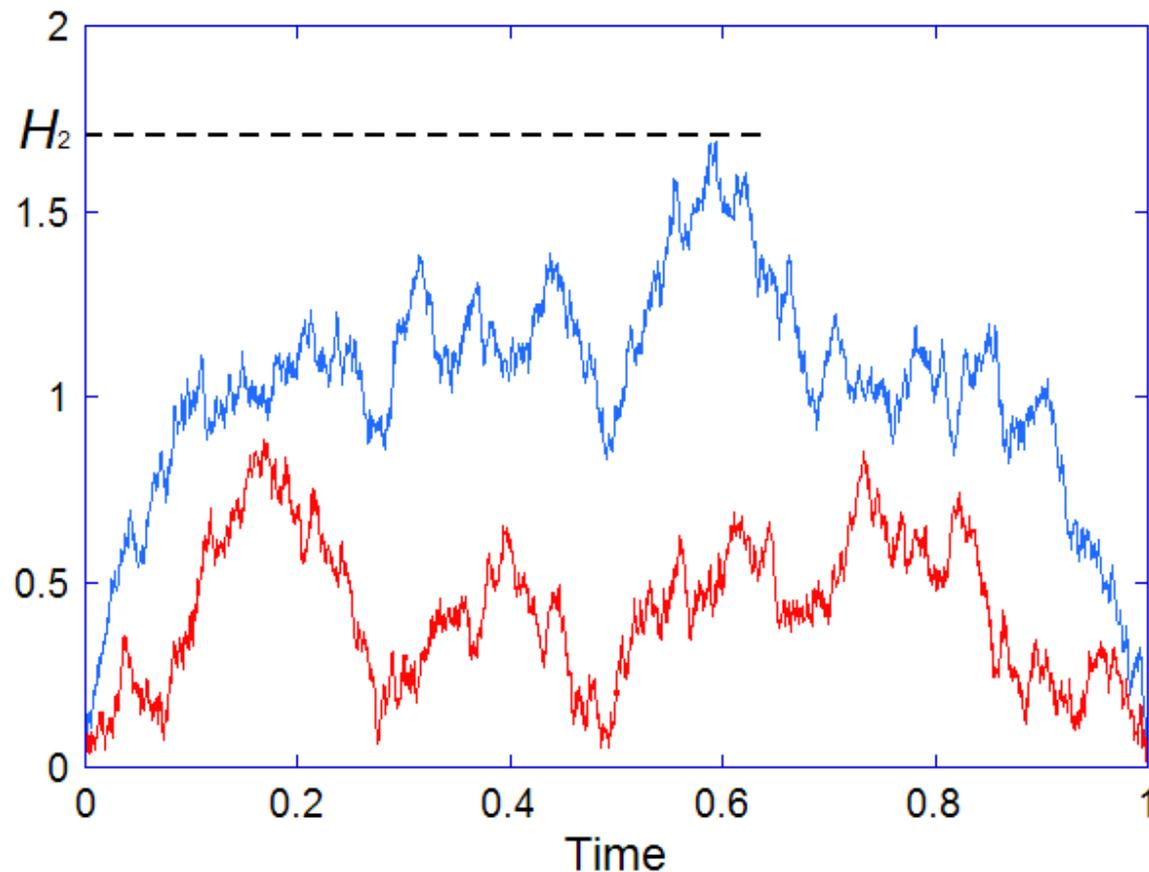
ただし

$$\xi(s) = \frac{1}{2} s(s-1) \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) \quad s \in \mathbf{C}$$

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \int_0^\infty du u^{\frac{s}{2}-1} e^{-u}, \quad \operatorname{Re} s > 0$$

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad \operatorname{Re} s > 0 \quad \text{Riemann zeta function}$$

# $N$ 本非衝突ベッセル橋 I



$N = 2$  noncolliding Bessel bridges

次のような条件を満たす  $N$  本のベッセル橋を考える。

$$0 < \tilde{X}_1(t) < \cdots < \tilde{X}_N(t) \quad \text{非衝突条件}$$

$$H_N = \max_{0 \leq t \leq 1} \tilde{X}_N(t) \quad \text{どのような統計性を持つか?}$$

# $N$ 本非衝突ベツセル橋 II

Katori - Izumi - Kobayashi, arXiv: math.PR/0711.1710 (2007)

to be published in J. Stat. Phys.

$$\mathbf{P}(H_1 < h) = \lim_{x_j \rightarrow 0, y_j \rightarrow 0, 1 \leq j \leq N} F_h(y_1, y_2, \dots, y_N | x_1, x_2, \dots, x_N)$$

$$F_h(y_1, y_2, \dots, y_N | x_1, x_2, \dots, x_N) = \frac{\det_{1 \leq j, k \leq N} p_2(1, y_j | x_k)}{\det_{1 \leq j, k \leq N} p_1(1, y_j | x_k)}$$

Karlin-McGregor, Pacific J. Math. **9**, (1959) 1141


$$\mathbf{E}[H_N^s] = \int_0^\infty h^s q_N(h), \quad q_N(h) = \frac{d}{dh} \mathbf{P}(H_N \leq h)$$

# $N = 2$ ベッセル橋の最大値: $s$ 次モーメント

$$\mathbf{E}[H_2^s] = \frac{2^{-s/2}}{24} s((s-1)(s^2 - 2s + 12)\tilde{Z}_{s/2}(0) - 4(s+4)(s+6)\tilde{Z}_{s/2}(1) + 64\tilde{Z}_{s/2}(2))$$

$$\tilde{Z}_a(b) = \Gamma(a + 2b) Z(2b, 2b; a + 2b)$$

$$Z(\alpha, \beta; \gamma) = \sum_{n_1, n_2 \in \mathbf{Z}^2 \setminus \{0,0\}} \frac{n_1^\alpha n_2^\beta}{(n_1^2 + n_2^2)^\gamma} \quad \text{double Dirichlet series}$$

Table 1: Numerical values of moments

$s$	0	1	2	3	4	5
$\mathbf{E}[H_1^s]$	1.0	1.253314	1.644934	2.259832	3.246969	4.873485
$\mathbf{E}[H_2^s]$	1.0	1.822625	3.395156	6.463823	12.576665	25.005999

一般の  $N$  の場合の統計性を解析的に求めることが可能か？



Katori-Izumi-Kobayashi, in preparation

# ブラウン橋の構成

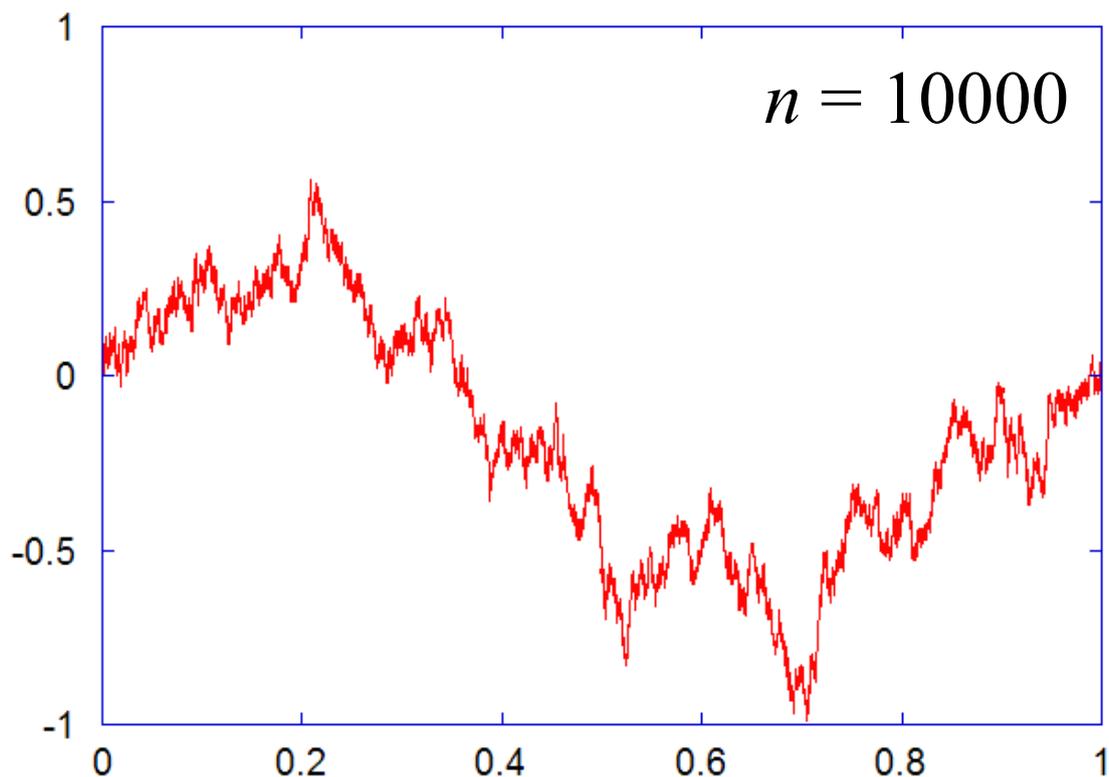
## 3. シミュレーション

ランダムウォークの連続極限としてブラウン運動を定義する。

$$B^{(n)}(0) = x, \quad B^{(n)}(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} S_t$$

### ブラウン橋

時刻  $t (=1)$  で原点に戻る  
ようなブラウン運動.



# BES<sub>3</sub>の構成

## 3. シミュレーション

独立なブラウン橋を 3 つ用意

$t = 0$  で 原点を出発し、 $t = 1$  で  
原点に戻る。

➡ 
$$X(t) \equiv \sqrt{B_1(x)^2 + B_2(x)^2 + B_3(x)^2}$$

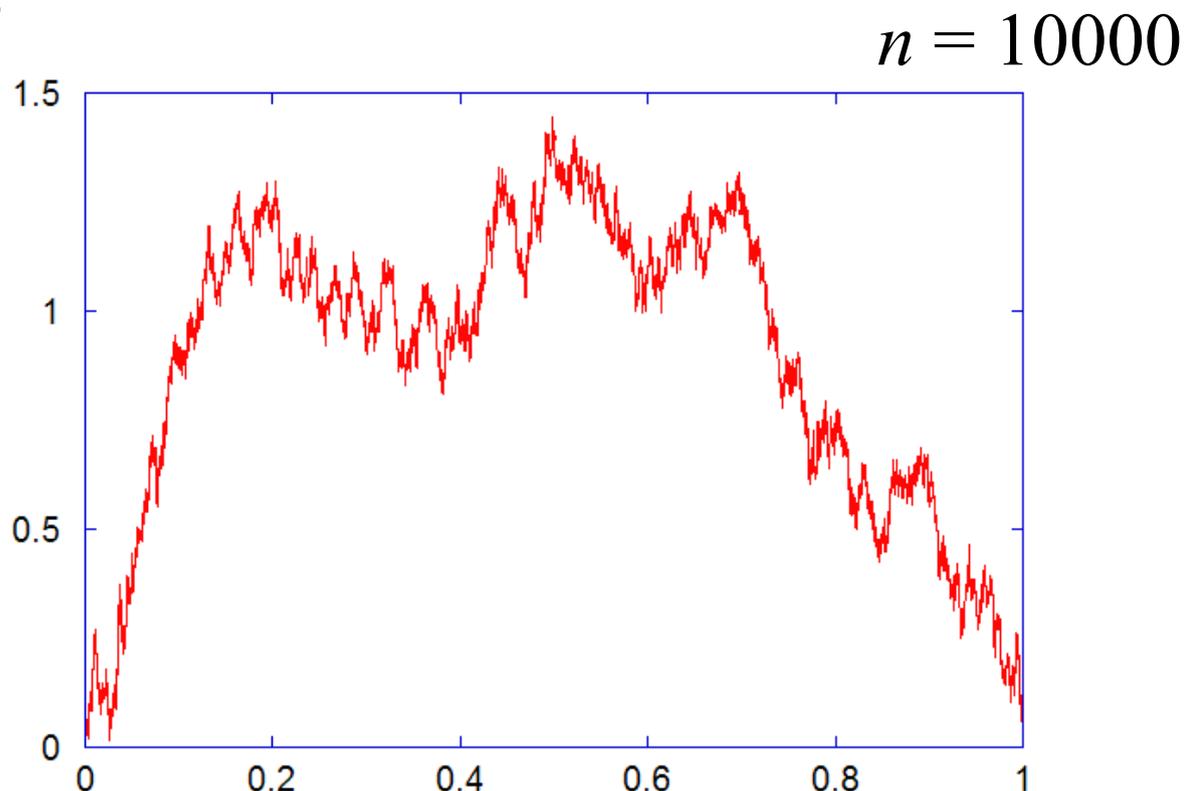
から BES<sub>3</sub> を構成。

最大高さの平均値を計算

↓  
 $s = 1$  のモーメントを  
計算

$$E[H_1] = 1.25 \pm 0.01$$

(理論値 (数値積分): 1.253314)



Vicious walker model M. E. Fisher, J. Statist. Phys. **34** (1984) 667.

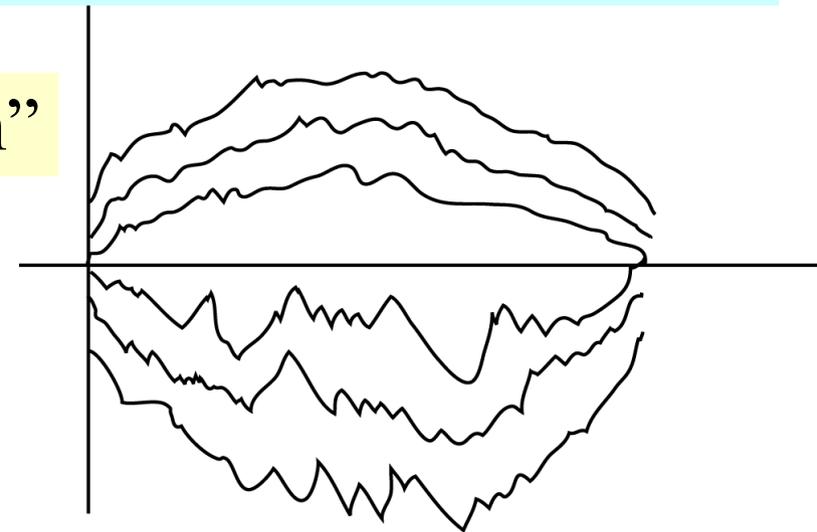
非衝突ランダムウォーク



非衝突ベッセル橋を構成

直接シミュレーションするのは難しい (たとえば  $N=2$  を考えるとブラウン粒子  
6個が同時に  $t=1$  で原点に戻ってこなければならぬ)

“watermelon”



先行研究として . . .

Bonichon – Mosbah, Theoretical Computer Science **307** (2003) 241

J. F. Dyson, J. Math. Phys. **3** (1962) 1191, 1199

あるエルミート行列の固有値過程と 1 次元非衝突ブラウン運動は同値

$$dY_i(t) = dB_i(t) + \frac{\beta}{2} \sum_{\substack{1 \leq j \leq N \\ j \neq i}} \frac{1}{Y_i(t) - Y_j(t)} dt$$

$\beta$ : 対称性に対応したパラメータ

GUE, GOE, GSE

chiral random matrices

Verbaarschot-Zahad, Phys. Rev. Lett. **70** (1993) 3852

class C, CI, D, DIII

Altland-Zirnbauer, Phys. Rev. B **55** (1997) 1142

これらの random matrix とブラウン運動との関係は？

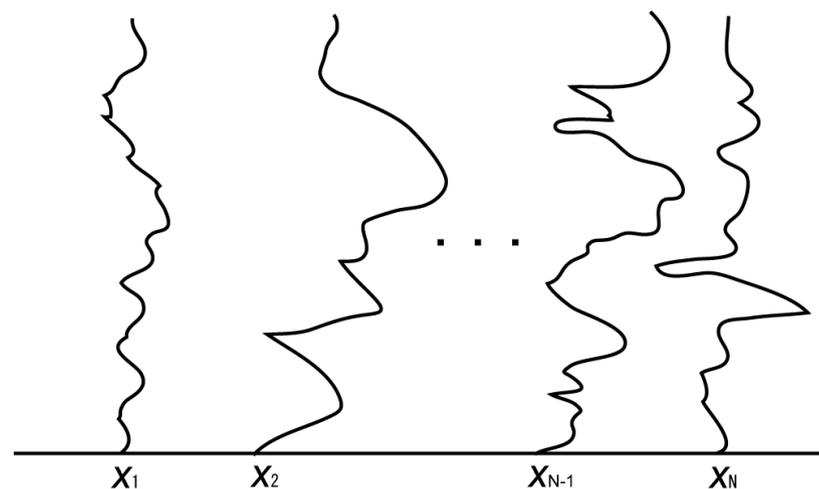
Katori-Tanemura, J. Math. Phys. **45** (2004) 3058

対応する Weyl chamber 内でのブラウン運動と非衝突過程との関係を考察.

$A_{N-1}$ 型 (GUE に対応)

$$W_N^A = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N; x_1 < x_2 < \dots < x_N \}$$

$W_N^A$  内での  $N$  次元ブラウン運動  $\longleftrightarrow$

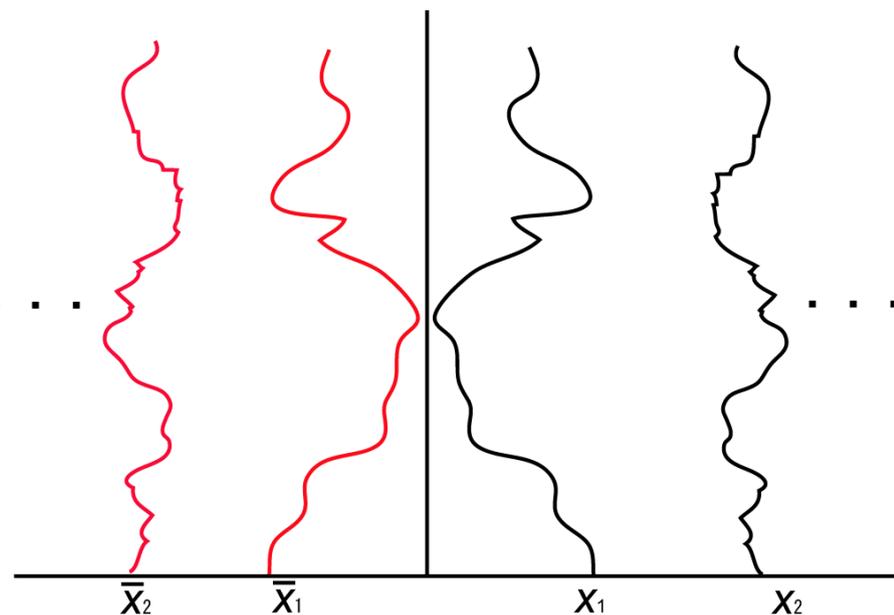


$N$  粒子 1 次元非衝突ブラウン運動

$C_N$ 型 (Altland-Zirnbauer の class C に対応)

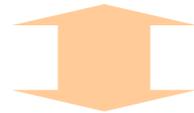
$$W_N^C = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N : 0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N\}$$

$W_N^C$  内での  $N$  次元ブラウン運動



原点に吸収壁を持つ  $N$  粒子  
非衝突 1 次元ブラウン運動

$N$  粒子 3 次元非衝突ベッセル過程



原点に吸収壁を持つ  $N$  粒子 1 次元非衝突ブラウン運動



Altland-Zirnbauer の class C 型ランダム行列の固有値過程

$$H = \begin{pmatrix} H_1 & A_2 \\ A_2^\dagger & -H_1^T \end{pmatrix} : H_1 \in \mathcal{H}(N), A_2 \in \mathcal{S}(N; \mathbb{C})$$

$\mathcal{H}(N)$  :  $N \times N$  エルミート行列全体

$\mathcal{S}(N; \mathbb{C})$  :  $N \times N$  複素対称行列全体

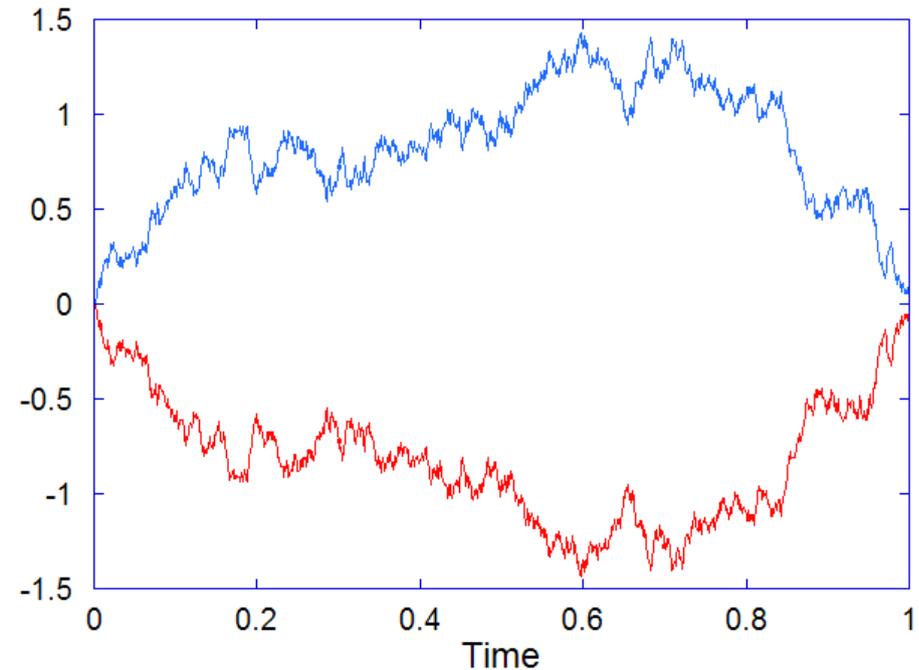
*cf.* Laguerre process の固有値による squared BES の数値計算

# 非衝突 BES<sub>3</sub> の構成 III

## 3. シミュレーション

$N=1$

$$H = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 + iB_3 \\ B_2 - iB_3 & B_4 \end{pmatrix}$$



$N=2$

$$H = \begin{pmatrix} B_1 & \frac{1}{\sqrt{2}}(B_2 + iB_3) & B_5 + iB_6 & \frac{1}{\sqrt{2}}(B_7 + iB_8) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(B_2 - iB_3) & B_4 & \frac{1}{\sqrt{2}}(B_7 + iB_8) & B_9 + iB_{10} \\ B_5 - iB_6 & \frac{1}{\sqrt{2}}(B_7 - iB_8) & -B_1 & -\frac{1}{\sqrt{2}}(B_2 - iB_3) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(B_7 - iB_8) & B_9 - iB_{10} & -\frac{1}{\sqrt{2}}(B_2 + iB_3) & -B_4 \end{pmatrix}$$

ここで  $B_i$  はそれぞれ独立なブラウン橋.

### (1) 最大高さ $H_2$ の 1, 2 次モーメント

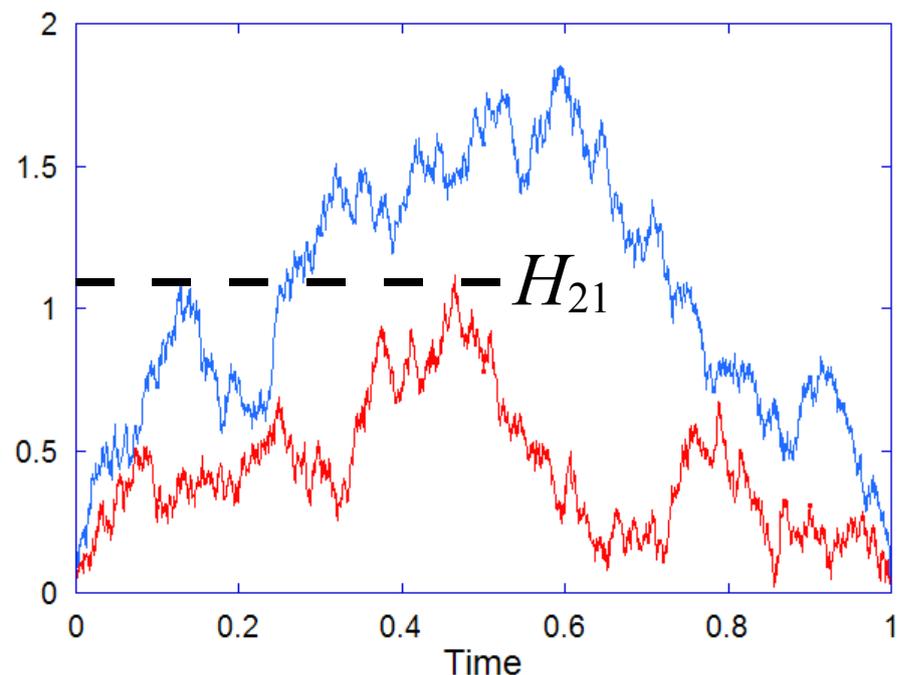
	N = 1 simulation	N = 1 theory	N = 2 simulation	N = 2 theory
s = 1	1.24	1.253314	1.81	1.822625
s = 2	1.61	1.644934	3.35	3.395156

$n = 1000$ , シミュレーション回数 1000 回の平均

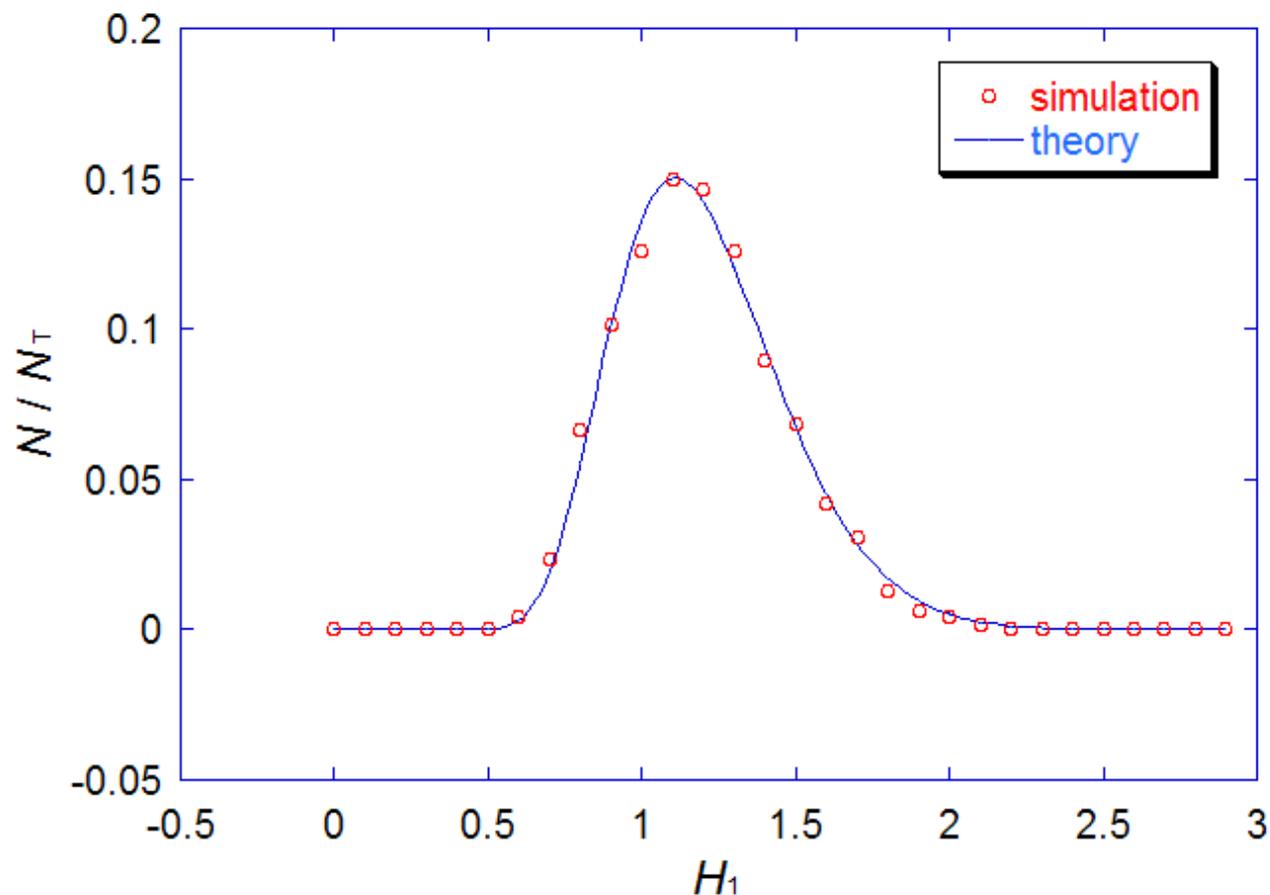
### (2) $H_{21}$ (右図) の 1, 2 次モーメント

$$\mathbf{E}[H_{21}] \doteq 0.99$$

$$\mathbf{E}[H_{21}^2] \doteq 1.01$$



(3)  $N = 1$  三次元ベッセル橋の最大値の揺らぎ



実線は  $q_1(h) = \frac{d}{dh} \mathbf{P}(H_1 < h) = 8 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2h^2 n^2} (4h^3 n^4 - 3hn^2)$

を各小区間で積分したものを表す。

- (1) 次元に対する依存性.
- (2) 他の対称性を持ったランダム行列の固有値過程の計算、非衝突過程との関係の考察.
- (3)  $H_{21}$  (二番目の経路) のモーメントの計算、またその一般論.

・  
・  
・



非衝突過程に内在する数学的構造の理解