Dyson 模型の複素ブラウン運動表現と行列式型相関関数

香取眞理（中央大学理工学部）

$\mathbb{I}$ を有限な添字集合とする．Dyson のブラウン運動 (BM) 模型 $\boldsymbol{X}(t) = (X_i(t))_{i\in\mathbb{I}}$ は, 径数 $\beta > 0$ としたときの，次の確率微分方程式系である；

$$dX_i(t) = dB_i(t) + \frac{\beta}{2} \sum_{j\in\mathbb{I}, j\neq i} \frac{dt}{X_i(t) - X_j(t)}, \quad i \in \mathbb{I}, \quad t \in [0, \infty). \tag{1}$$

ただし, $\{B_i(t)\}_{i\in\mathbb{I}}$ は独立な 1 次元標準 BM である．これは，すべての粒子間に粒子間距離に反比例する斥力が働く (係数が $\beta/2$)，$\mathbb{R}$ 上の相互作用粒子系を表す．特に $\beta = 2$ の場合，次の 3 つの系と等価である．(粒子数を $n = \sharp\mathbb{I} \in \mathbb{N}$ とする.) (i) $n \times n$ エルミート行列に値をとる BM の固有値の従う確率過程．(零行列からスタートした場合は，各時刻 $t > 0$ で，分散 t のガウス型ユニタリ集団 (GUE) の統計に従う.) (ii) 非衝突条件を課した 1 次元 n 粒子 BM 系．(iii) A_{n-1} 型ワイル領域 $\mathbb{W}_n^{\mathrm{A}} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : x_1 < x_2 < \cdots < x_n\}$ 内での吸収壁 BM の, 調和関数 $h(\boldsymbol{x}) = \prod_{1\le i<j\le n} (x_j - x_i) = \det_{1\le i,j\le n} [x_i^{j-1}]$ (差積，Vandermonde 行列式) による調和変換．この $\beta = 2$ の場合を, ここでは Dyson 模型と略称することにする．

$\mathfrak{M}$ を $\mathbb{R}$ 上の非負整数値ラドン測度の空間とする．$\{X_i(t)\}_{i\in\mathbb{I}}$ を (1) 式の解として，我々は Dyson 模型を $\mathfrak{M}$ に値をとる拡散過程 $\Xi(t) = \sum_{i\in\mathbb{I}} \delta_{X_i(t)} \in \mathfrak{M}$ と考える．初期配置が $\xi = \sum_{i\in\mathbb{I}} \delta_{x_i} \in \mathfrak{M}$ で与えられるとき，この拡散過程を $(\Xi(t), \mathbb{P}_\xi)$ と記し，この下での期待値を $\mathbb{E}_\xi$ で表す．また，$\mathfrak{M}_0 = \{\xi \in \mathfrak{M} : \xi(\{x\}) \le 1, \forall x \in \mathbb{R}\}$ (多重点なし) とする．

$\xi(\mathbb{R}) \in \mathbb{N}$ である $\xi \in \mathfrak{M}$ に対して，$u \in \mathbb{C}$ で径数付けされる整関数の族 $\{\Phi_\xi^u(z), z \in \mathbb{C} : u \in \mathbb{C}\}$ を導入する；
$\Phi_\xi^u(z) = \prod_{x\in\mathrm{supp}\ \xi\cap\{u\}^{\mathrm{c}}} \left(1 - \frac{z-u}{x-u}\right)^{\xi(\{x\})}$．ただし，$\mathrm{supp}\ \xi = \{x \in \mathbb{R} : \xi(\{x\}) > 0\}$．また，$\boldsymbol{v} = (v_i)_{i\in\mathbb{I}}, v_i \in \mathbb{R}$ に対して，$Z_i(t), t \ge 0, i \in \mathbb{I}$ を，$Z_i(0) = v_i, i \in \mathbb{I}$ である確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}_{\boldsymbol{v}})$ での独立な複素標準 BM とする．$\mathbf{P}_{\boldsymbol{v}}$ の下での期待値を $\mathbf{E}_{\boldsymbol{v}}$ で表す．実部と虚部を, それぞれ $V_i(t) = \mathrm{Re}Z_i(t), W_i(t) = \mathrm{Im}Z_i(t), i \in \mathbb{I}$ と書くと，これらは独立な 1 次元標準 BM である．

本講演では次の等式を証明する．$\xi = \sum_{i=1}^{\xi(\mathbb{R})} \delta_{u_i} \in \mathfrak{M}_0$, ただし $\xi(\mathbb{R}) \in \mathbb{N}$ とし，$0 < t < T < \infty$ とする．このとき，$\mathcal{F}(t)$-可測である任意の関数 F に対して，

$$\mathbb{E}_\xi \left[F\big(\Xi(\cdot)\big)\right] = \mathbf{E}_{\boldsymbol{u}} \left[F\left(\sum_{i=1}^{\xi(\mathbb{R})} \delta_{V_i(\cdot)}\right) \det_{1\le i,j\le\xi(\mathbb{R})} \left[\Phi_\xi^{u_i}(Z_j(T))\right]\right]. \tag{2}$$

我々はこの結果を，Dyson 模型に対する複素 BM 表現 (CBM 表現) と呼ぶことにする．

CBM 表現は次の 2 つの事実から導かれる．(a)　$\Phi_\xi^x(Z_i(\cdot))$, $i \in \mathbb{I}$ は独立な共形局所マルチンゲールである．(b)　任意の $\xi = \sum_{i=1}^{\xi(\mathbb{R})} \delta_{u_i}$, $\xi(\mathbb{R}) \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{u} = (u_1, \dots, u_{\xi(\mathbb{R})}) \in \mathbb{W}_{\xi(\mathbb{R})}^{\mathrm{A}}$, $\boldsymbol{z} = (z_1, \cdots, z_{\xi(\mathbb{R})}) \in \mathbb{C}^{\xi(\mathbb{R})}$ に対して，次の等号が成り立つ：$\det_{1\le i,j\le\xi(\mathbb{R})} \left[\Phi_\xi^{u_i}(z_j)\right] = \det_{1\le i,j\le\xi(\mathbb{R})} \left[\prod_{1\le k\le\xi(\mathbb{R}), k\neq i} \frac{u_k - z_j}{u_k - u_i}\right] = \frac{h(\boldsymbol{z})}{h(\boldsymbol{u})}$.

CBM 表現 (2) より，Dyson 模型が行列式過程であり，その行列式型の時間相関関数を決定する Eynard-Mehta タイプの相関核を導くことが出来る．従来のランダム行列理論の方法では，この導出には直交多項式を用いた計算が必要であったが，調和変換の複素拡張の結果として導くことが出来るのである．

本講演は，種村秀紀氏 (千葉大) との共同研究に基づく．

[1]　香取眞理，種村秀紀：非衝突過程・行列値過程・行列式過程,「数学」**61**(3), 225-247 (2009).

[2]　M. Katori and H. Tanemura : Complex Brownian motion representation of the Dyson model, arXiv: math.PR/1008.2821.