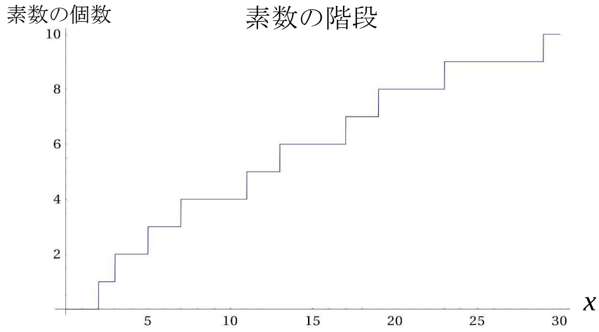
素数定理

香取研究室　安藤峻

素数が無限に存在することは古くから知られていた。では、素数の分布はどのようになっているのか。素数は大きくなるほどその存在が数直線上でまばらになるが、それ以外にはその現れ方に法則があるのだろうか。



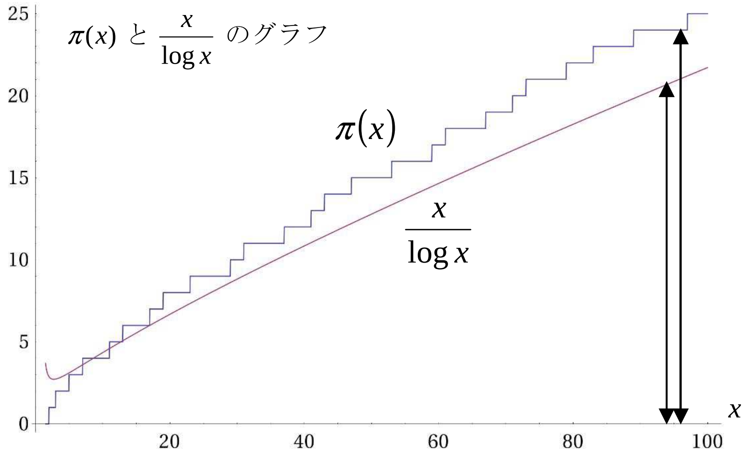
自然数を１から順番にみていき、素数に出会うたびに値が１増えるという、階段状の関数を考える。この関数を素数個数関数といい、π(x)と表す。π(x)の値は、x 以下の素数の個数に対応している。素数個数関数は、次の式で表される。

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$$

これを素数定理といい、この式は x が無限に大きくなるとき、右辺が左辺に漸近するということを示している。この式の発見は、それまでばらばらで何の意味もないと思われていた素数の分布に対し、実はある程度の規則性があったことを示したという点でとても重要であった。

x	π(x)	x/log(x)	誤差(%)
10^3	168	144.8	13.7
10^6	78498	72382.4	7.8
10^9	50847534	48254942.4	5.1
10^{12}	37607912018	36191206825.3	3.8
10^{15}	29844570422669	28952965460216.8	3.0

x を大きくしていったときのπ(x)と x/log(x)の値



x が大きくなればなるほど 2 つの矢印の長さの比が 1 に近づく

素数定理の導出にリーマンのζ（ゼータ関数）は大きくかかわっている。

素数と、ゼータ関数の非自明な零点とを結びつける以下の式が、ゼータ関数の性質から導かれる。

$$\sum_{p:\text{素数}} M(p) = \sum_{\gamma:\zeta\text{の非自明な零点}} W(\gamma)$$

この形の式を明示公式という。ここで、左辺は関数 M の変数 p があらゆる素数をとる場合の M の総和である。他方、右辺は関数 W の変数γがすべてのゼータ関数の非自明な零点での値をとる場合の総和である。つまり、ある関数 M の素数全体にわたる和が、別の関数 W のゼータ関数の非自明な零点全体にわたる和として表されるということである。

なお関数 M 及び W は特に決まった関数ではないが、M と W は互いに特殊な関係にあり、一方を決めると他方も自動的に決まる。このことを利用し、

$$\text{左辺} = \sum_{p:\text{素数}} M(p) = \pi(x)$$

となるように関数 M を定める。このとき、

$$\text{右辺} = \sum_{\gamma:\zeta\text{の非自明な零点}} W(\gamma) \cong \frac{x}{\log x}$$

となり、リーマンのゼータ関数の性質より素数定理が導かれた。

【参考文献】

小山信也（2010）『素数からゼータへ、そしてカオスへ』日本評論社.

ダービーシャー，ジョン（2004）『素数に憑かれた人たち―リーマン予想への挑戦』(松浦俊輔訳）日経 BP 社.