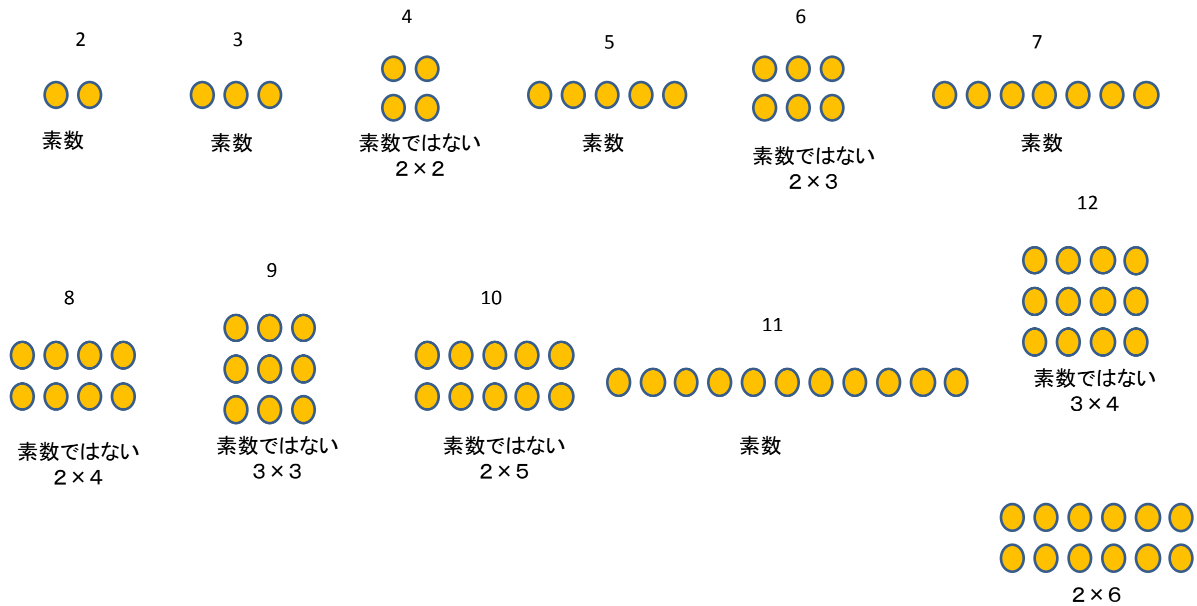
素数の不思議①

中央大学理工学部物理学科４年　香取研究室　古沢佑樹

素数とは？

•素数とは1と自分自身以外に約数がない１以外の正の整数のことである。
•私たちの身の回りの物質を分解していくと、それ以上分解できない最小の構成要素である素粒子になります。（物理学の世界）
これと似た事として、自然数を分解していくとそれ以上分解できない素数になります。（数学の世界）
•素数でないものは長（正）方形に並べることができる！（２以上の整数の積に分解できる）
しかし、素数は並べられない！！



素数の作り方

例1

まず好きな素数を1つ選ぶ（今回は2）
その素数（2）に＋1足す
２＋１＝3　←これは素数
次に2つの素数（2と3）を
かけて＋1足す
２×３＋１＝7　←これは素数
同様にして3つの素数（2と3と7）を
かけて＋1足す
２×３×７＋１＝43　←これは素数

これを繰り返していく・・・

例2

まず好きな素数を1つ選ぶ（今回は11）
その素数（11）に＋1足す
11＋１＝12　←これは素数2で割り切れる
次に2つの素数（11と2）を
かけて＋1足す
11×２＋１＝23　←これは素数
同様にして3つの素数（11と2と23）を
かけて＋1足す
11×２×23＋１＝507　←これは
素数3で割り切れる
これを繰り返していく・・・

⇒このように考えると、素数をかけた後に＋１足すと新たな素数が作れることが分かる。つまり、素数は無数に存在する！

素数に規則性はあるのか？

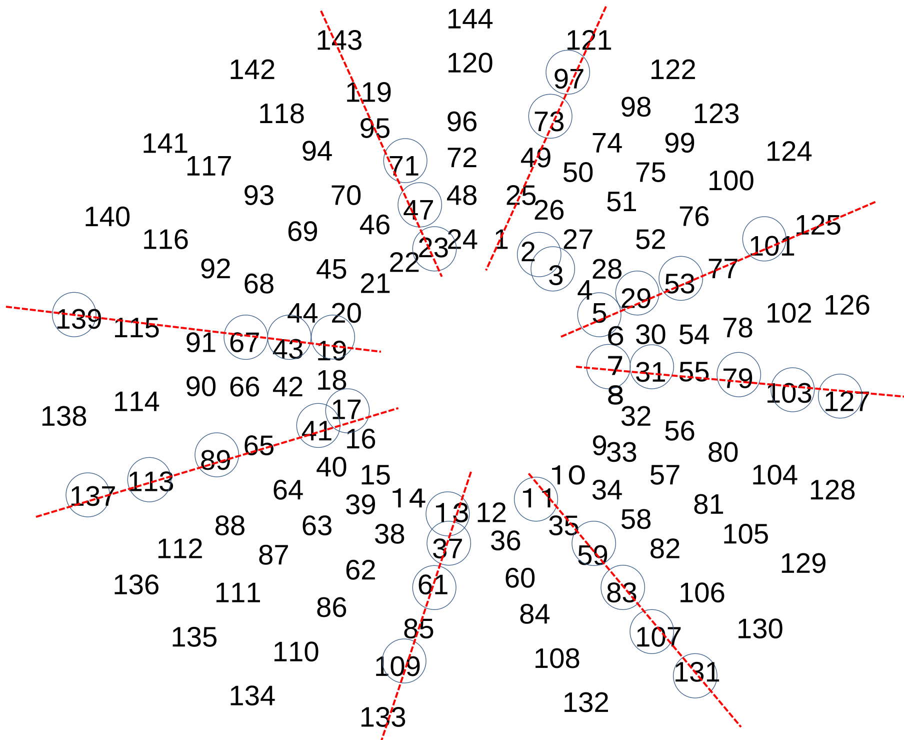
•この表を見る限り素数は規則性なくランダムに登場しているようである。ただし数字が大きくなるにつれて登場する頻度は少なくなっているようにも見える。
•しかし、プリヒタの素数円というものがある。整数を24ごとに一周として円を作ると、素数は8つの直線上にしか現れない*（2, 3は例外）*
•このプリヒタの素数円を見ると、素数の分布に何らかの規則性を考えずにはいられない。

2～1000までの素数表

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29
31	37	41	43	47	53	59	61	67	71
73	79	83	89	97	101	103	107	109	113
127	131	137	139	149	151	157	163	167	173
179	181	191	193	197	199	211	223	227	229
233	239	241	251	257	263	269	271	277	281
283	293	307	311	313	317	331	337	347	349
353	359	367	373	379	383	389	397	401	409
419	421	431	433	439	443	449	457	461	463
467	479	487	491	499	503	509	521	523	541
547	557	563	569	571	577	587	593	599	601
607	613	617	619	631	641	643	647	653	659
661	673	677	683	691	701	709	719	727	733
739	743	751	757	761	769	773	787	797	809
811	821	823	827	829	839	853	857	859	863
877	881	883	887	907	911	919	929	937	941
947	953	967	971	977	983	991	997		

素数の不思議②

プリヒタの素数円



注：これは2と3の倍数上に素数が乗らないことを言い換えただけである。
24ごとである必要はなく、6ごとなどでも似たような円になる。

素数に関する未解決問題

上記のように素数には謎が多く、いまだに解決されていない予想や問題がたくさんある。その一部を紹介する。

•双子素数の問題

双子素数とは（3と5）や（11と13）などのように、差が2である二つの素数の組のことである。（191と193）などもある。
これが無数にあるかどうかはいまだに解決されていない！
先程の素数表を見たときに数字が大きくなると素数の登場頻度が少なくなると言ったが、このような双子素数なるものも出てくるので、やはり素数の分布は不思議である！！
（※参考：双子素数の個数 π（x）は

$$\pi(x) \sim 2\left(1-\frac{1}{(3-1)^2}\right)\left(1-\frac{1}{(5-1)^2}\right)\left(1-\frac{1}{(7-1)^2}\right)\left(1-\frac{1}{(11-1)^2}\right)\times\cdots\cdots\times\frac{x}{(\log x)^2}$$ となる）

•完全数の問題

完全数とはその数自身を除く約数の和がその数自身と等しい自然数のことである。
例：6　6の約数は1、2、3、6であり、1＋2＋3＝6となる。
例：28　28の約数は1、2、4、7、14、28であり、1＋2＋4＋7＋14＝28となる。
偶数の完全数は無数にあるのか、奇数の完全数は存在するのかなどがいまだに未解決である！
偶数の完全数は $M_n \times 2^{n-1}$ の形で表わされる。ここで M_n はメルセンヌ数といい、2^n-1 で素数になるもののことである。つまり 2^n-1 が素数ならば $(2^n-1)\times 2^{n-1}$ は偶数の完全数になる。
現在メルセンヌ素数は47個見つかっている。
（n＝2、3、5、7、13、17、・・・、43112609）
11は入らない！！

例：n＝5のとき
メルセンヌ素数は$M_5=2^5-1=31$である。
完全数は$(2^5-1)\times 2^{5-1}=496$となる。
496の約数は1、2、4、8、16、31、62、124、248、496であり、
1＋2＋4＋8＋16＋31＋62＋124＋248＝496となる！

•ゴールドバッハの予想

数学者のゴールドバッハは「*4以上の全ての偶数は2個の素数の和で表わされる*」と予想した。例えば6＝3＋3や20＝7＋13、198＝97＋101などである。
小学生にも理解できるこの予想は、驚くべきことにいまだに証明されていない！
注：この予想は「6以上の全ての偶数は2個の奇素数の和で表わされる」と同値であり、またこれより弱い予想の「9以上の全ての奇数は3個の奇素数の和で表わされる」などもある。

＼	2	3	5	7	11	13	17	…
2	4							
3		6	8	10	14	16	20	
5			10	12	16	18	22	
7				14	18	20	24	
11					22	24	28	
13						26	30	
17							34	
…								

⇒素数に関しては本当に謎が多く、素数の分布やこれらの未解決問題など数多くの問題が残されている。
素数とは非常に興味深い数である！！

参考文献
1）小山信也：「素数からゼータへ、そしてカオスへ」，日本評論社（2010）
2）雑誌：「Newton 2010年 12月号」，ニュートンプレス（2010）
3）黒川信重：「数学の夢－素数からのひろがり」，岩波書店（1998）
4）芳沢正三：「素数入門」，講談社（2002）