

ゼータ関数の零点とランダム行列の関係

香取研究室 広瀬史明

近年のリーマン予想の研究では、非自明な零点が実部 $1/2$ 上だけに存在することを直接的に証明するのを目指すのではなく、零点とは何かを知ること重点がおかれている。そして、その実部 $1/2$ 上の零点の分布の様子が、香取研究室の研究テーマの一つであるランダム行列の固有値の分布にそっくりだということが現在わかっている。ランダム行列とは、1950年代末から1960年代初めに、原子物理学で誕生し、発達してきた概念なのだが、この物理学におけるランダム行列と、数学におけるゼータ関数が初めて出会った瞬間の有名な話がある。

アメリカの数学者ヒュー・モンゴメリは、実部 $1/2$ 上にある零点の振る舞いを研究していたのだが、研究を続けるうちに、実部 $1/2$ 上の零点は隣り合う零点同士が接近して分布することはなく、実部 $1/2$ 上を上へ進むほど零点同士は互いに反発するかのようにして分布していることがわかった。つまり、零点は実部 $1/2$ 上にまったくランダムに分布しているわけではないのだ。モンゴメリは当初、零点が近接する箇所が存在すると予想していたので、異なる結果が出たために研究が行き詰ってしまった。そんなとき、モンゴメリは、1971年に、アメリカのプリンストン高等研究所のティータイムで、物理学者のフリーマン・ダイソンと話をする機会を得た。ダイソンはモンゴメリに、「何を研究しているのか」とたずねた。モンゴメリは、ゼータ関数の零点の研究について述べたあと、零点の間隔の分布を表わす数式をダイソンに示した。するとダイソンは、「それはランダム行列の固有値の間隔の振る舞いと同一じゃないか！」といった。

この偶然の出会いのあと、1973年にモンゴメリは論文を発表し、「ゼータ関数の零点の間隔は、サイズの大きなランダム行列の固有値どうしの差の分布に似ているらしい」と予想した。これをきっかけに、アメリカの数学者アンドリュー・オドリツコはコンピューターを用いて、実部 $1/2$ を上に10の12乗ほどいったところの零点の間隔の分布を調べ、その結果をプロットしたグラフを得た。そしてその結果と、ランダム行列の固有値の間隔の分布を表わすグラフを比べると、完全に一致とまではいえないが、確かに両者のグラフは似ていた。次に、オドリツコは実部 $1/2$ を10の20乗ほど上がったところの零点の間隔の分布を計算し、それを先ほどと同じランダム行列から得られるグラフと比べてみた。こんどは驚くほど両者のグラフは一致していた。上のモンゴメリが論文で発表した予想を「モンゴメリ-オドリツコの法則」という。法則とあるが、実際には予想であり、いまだに証明されていない。しかし、この予想は、数学で考えられていたゼータ関数と、物理学との関係を結びつけたものであるから、リーマン予想解決に向けての画期的な進展といえる。

参考文献

- (1) 小山信也：「素数からゼータへ、そしてカオスへ」 日本評論社(2010)
- (2) マーカス・デュ・ソーイ：「素数の音楽」 新潮社(2005)
- (3) ジョン・ダービーシャー：「素数に憑かれた人たち リーマン予想への挑戦」 日経 BP 社(2004)