素数からリーマンのゼータ関数へ

香取研究室　高橋優太

オイラーの発見　オイラーは次の式を発見しました。

$$\text{(i)}\quad \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{17}+\frac{1}{19}+\frac{1}{23}+\frac{1}{29}+\cdots=\infty$$

素数の逆数の和が無限大になるということを見つけたのです。この式からも、素数が無限個あることがいえます。一方、ある種の自然数が無限個あっても、その逆数の和が無限大になるとは限りません。たとえば、

$$\text{(ii)}\quad 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6},\qquad \text{(iii)}\quad 1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{6^4}+\frac{1}{7^4}+\cdots=\frac{\pi^4}{90}$$

という驚くべき式も、オイラーは見つけています。ところで、自然数すべての逆数の和は無限大になります。

$$\text{(iv)}\quad 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\cdots=\infty$$

この式と(ii),(iii)式から、平方数や 4 乗の数は、自然数と比べてかなりの「メンバー」が不足していることがわかります。無限大には到底とどいていないからです。ところが、素数では無限大にとどいています。自然数の「メンバー」のうち素数であるものはそれなりに多いということです。オイラーの発見は、素数について、無限個あるということよりも詳しい事実を明らかにしました。

オイラーは(ｉ)式を計算する際に、自然数の逆数の和を丸ごと因数分解しました。天才的な離れ業です。

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots\right)\times\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots\right)\times\left(1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^3}+\cdots\right)\times\cdots$$

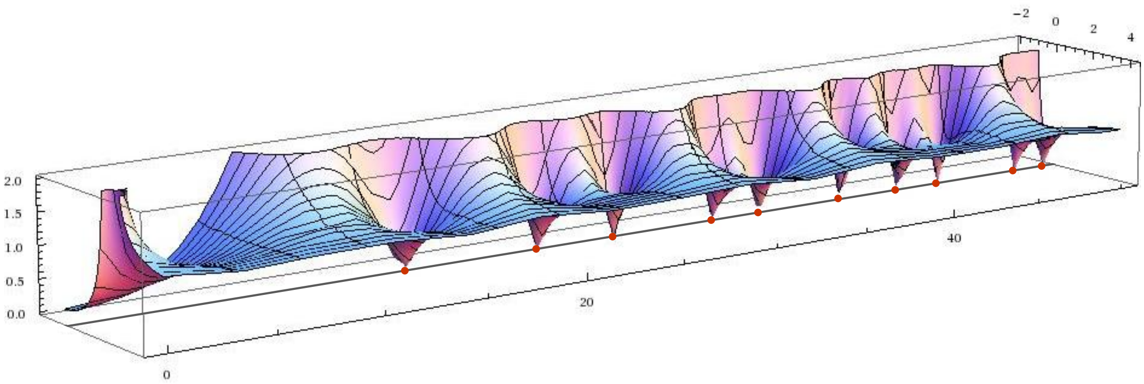
$$=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\times\frac{1}{1-\frac{1}{3}}\times\frac{1}{1-\frac{1}{5}}\times\frac{1}{1-\frac{1}{7}}\times\frac{1}{1-\frac{1}{11}}\times\frac{1}{1-\frac{1}{13}}\times\cdots$$

自然数が素数でつくられていることを表し、その素数すべてをまとめ上げたとても美しい式です。この式がゼータの始まりです。

リーマンのゼータ関数　オイラーの見つけた式を一般化して、べき乗の部分を s 乗に変えたものがリーマンのゼータ関数です。

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\prod_{p:\text{素数}}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}$$

リーマンはこのゼータ関数がすべての数 s で意味をもつことを証明しました。また、ゼータ関数が負の偶数（$s=-2,-4,-6,\cdots$）でゼロになることはオイラーによって知られていましたが（自明零点）、リーマンは虚数解（非自明零点）があることを見つけます。リーマンはいくつかその零点を計算してみました。すると不思議なことに、その計算した零点がすべてある直線上に並んだのです。そこでリーマンは、他の非自明零点もすべてその直線上にあるのではないかと予想しました。この予想をリーマン予想といいます。



この図は、リーマンのゼータ関数を Mathematica を用いて三次元のグラフにあらわしたものです（z 軸がゼータ関数の絶対値）。「高さ」がゼロになっている場所、すなわちリーマンのゼータ関数の零点が一直線上に並んでいるようすが観察できます（はじめの 10 個の零点が描かれています）。このリーマンのゼータ関数の零点は、素数解明の鍵となるものです。

参考文献　1)　小山信也,「素数からゼータへ，そしてカオスへ」日本評論社

2)　NHK スペシャル,「魔性の難問～リーマン予想・天才たちの闘い～」(2009 年 11 月 15 日　放送)

3)　黒川重信,「数学の夢　素数からのひろがり」岩波書店