



緩和時間

～ 臨界点近傍での挙動～

2009年1月21日

深澤朋広

黒澤弘樹



目次

- 1 . Introduction
- 2 . ASEPとTASEP
- 3 . TASEPのシミュレーションと相図
- 4 . 定常状態の定義と相の分類
- 5 . 緩和時間
- 6 . 臨界指数
- 7 . まとめ

1. Introduction

TASEPは一車線の道路状況に似ている。道路状況には**渋滞している状態**、**空いている状態**、**車の台数も多く、かつ流れている状態**という3つの状態がある。

TASEPのシミュレーションにおいては、それらの状態をそれぞれ**高密度相**、**低密度相**、**最大流量相**と対応し、これらの相は**流入率**、**流出率** によって決まる。

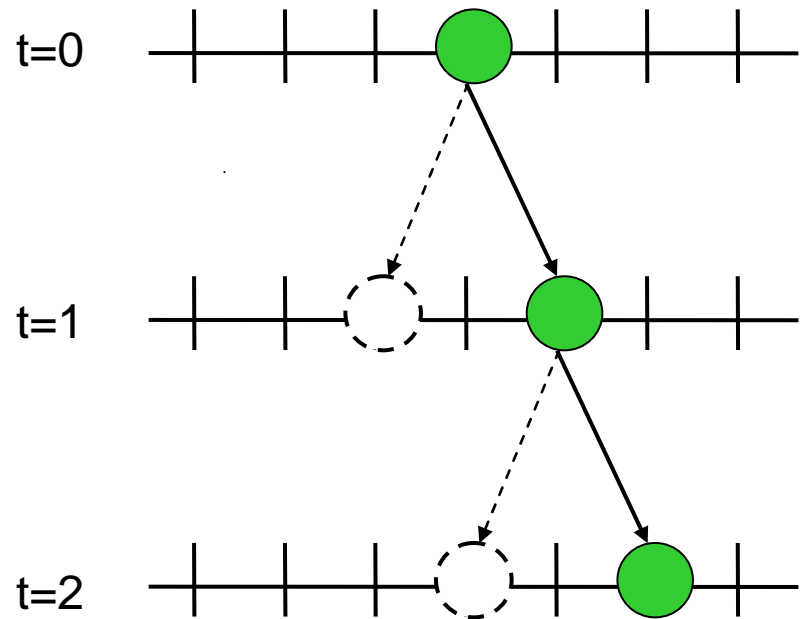
そこで、ある状態から異なる状態へ移行するまでの時間を、シミュレーションを用いて測定した。またその時間(緩和時間)は、高密度相と低密度相の境界に近づけると、どのように変化するのかを調べた。

2. ASEPとTASEP

1.1 ランダムウォーク

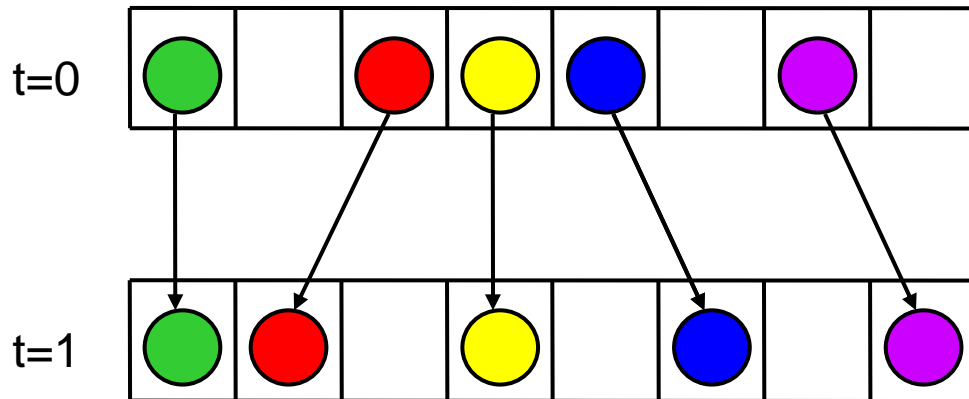
1次元で考えた場合、粒子が単位時間に一回、右か左のサイトに確率的に動くモデルを考えたものである。

右図は直線上のランダムウォークである。
左右へ移動する確率が等しいものを対称ランダムウォーク、異なるものを非対称ランダムウォークという。



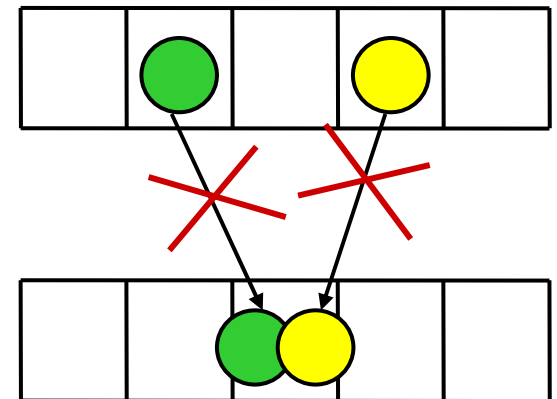
1.2 ASEPとは

1次元上に粒子がたくさんいる場合を考え、微小時間内に移動するモデルを考えたいものである。ただし、行き先のサイトに粒子がいる場合は、移動することができない。



ひとつのサイトに粒子が2個以上入ることはできない!!

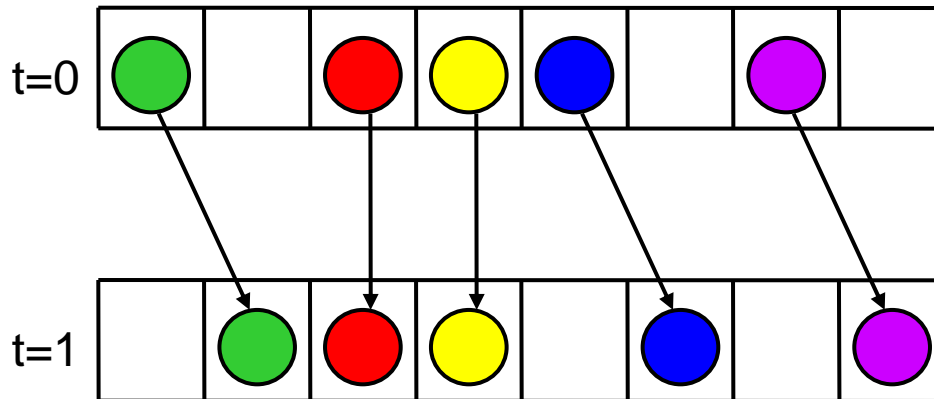
これを“**排除体積効果**”という



1.3 TASEPとは

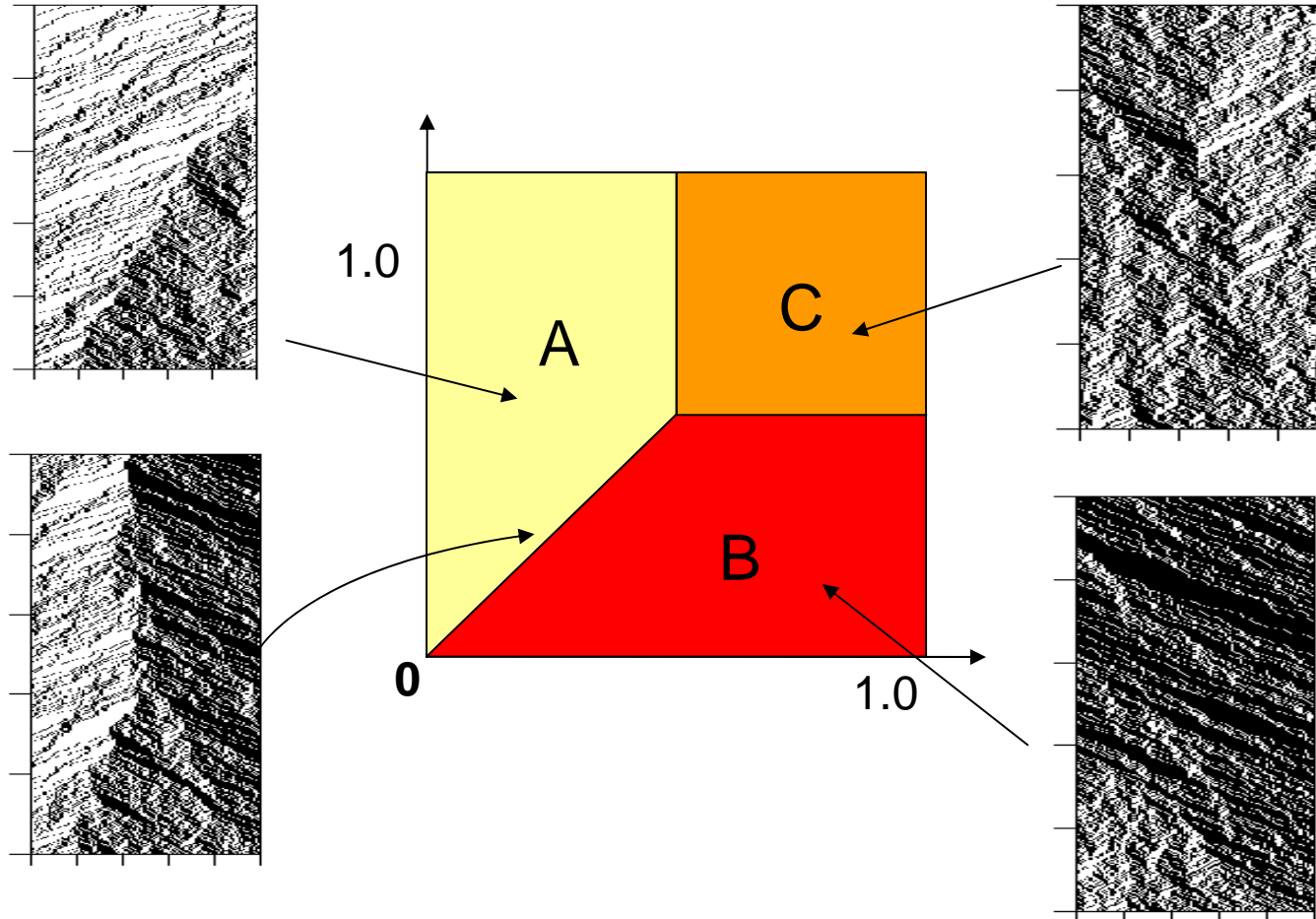
ASEPで一方向のみに動く場合を考える。

ここでは、右に粒子がない限り、必ず右に動くモデルを考えた。

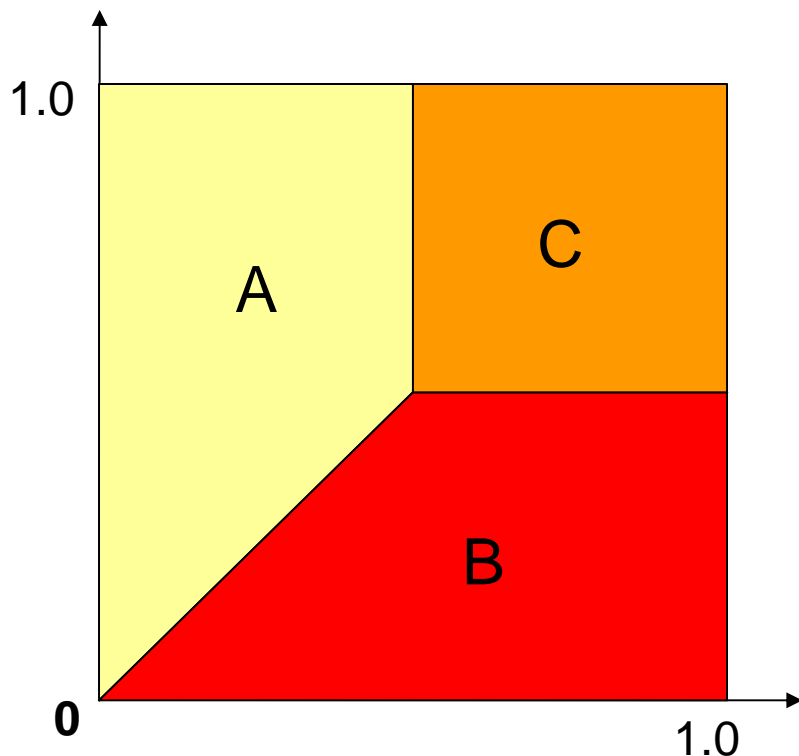


3. TASEPのシミュレーションと相図

TASEPのシミュレーションを行うと、下図のような相図が得られる。これらは流入率、流出率の値をさまざまに変えてみて得られる結果である。



このシミュレーションにより、 ϕ の値を変化させるとによって系の性質が変化することがわかった。



相Aは低密度相という。

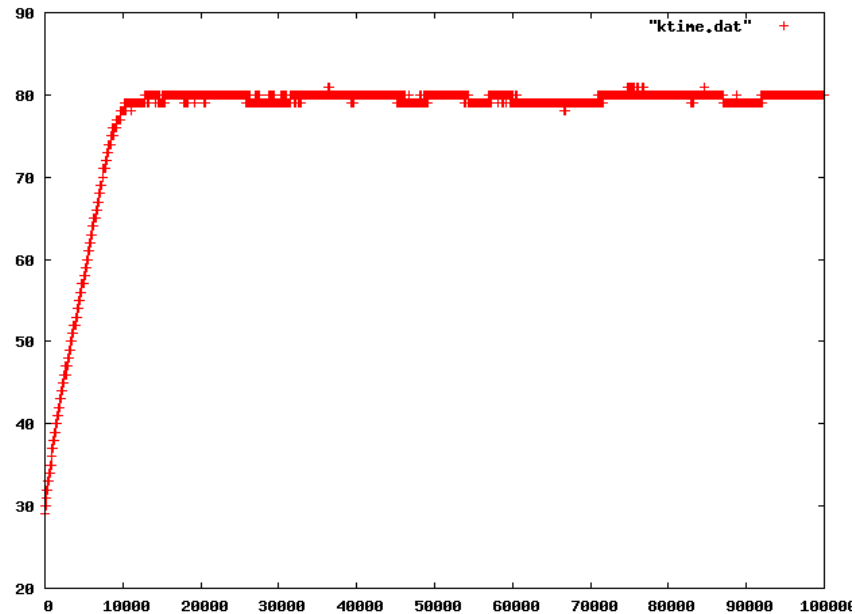
相Bは高密度相という。

相Cは最大流量相という。

4. 定常状態の定義

例 $L=100$ $\mu = 1.0$ $\lambda = 0.2$ 初期粒子数 = 30
の時の100サイト中の全粒子数と時間の関係

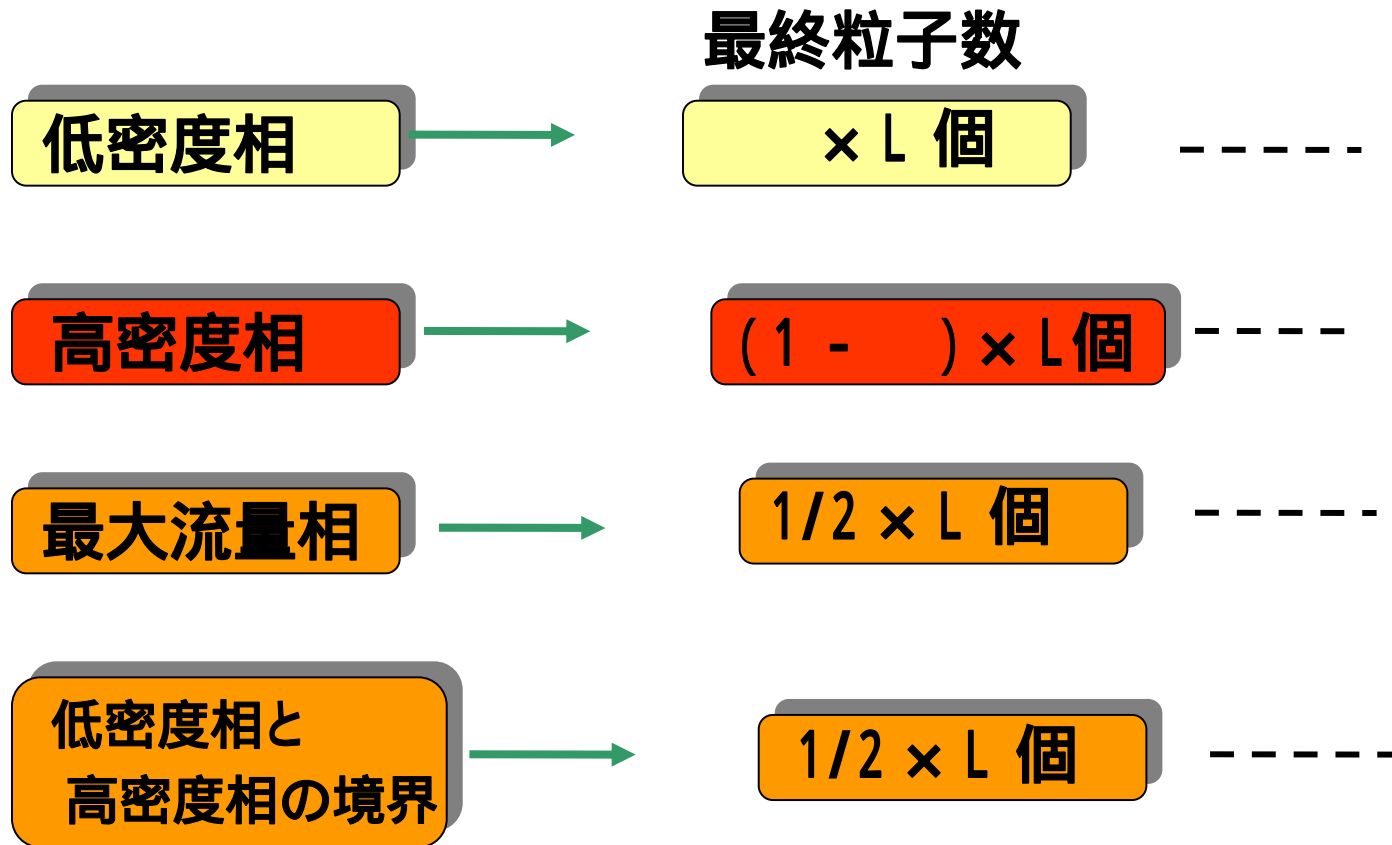
粒子数



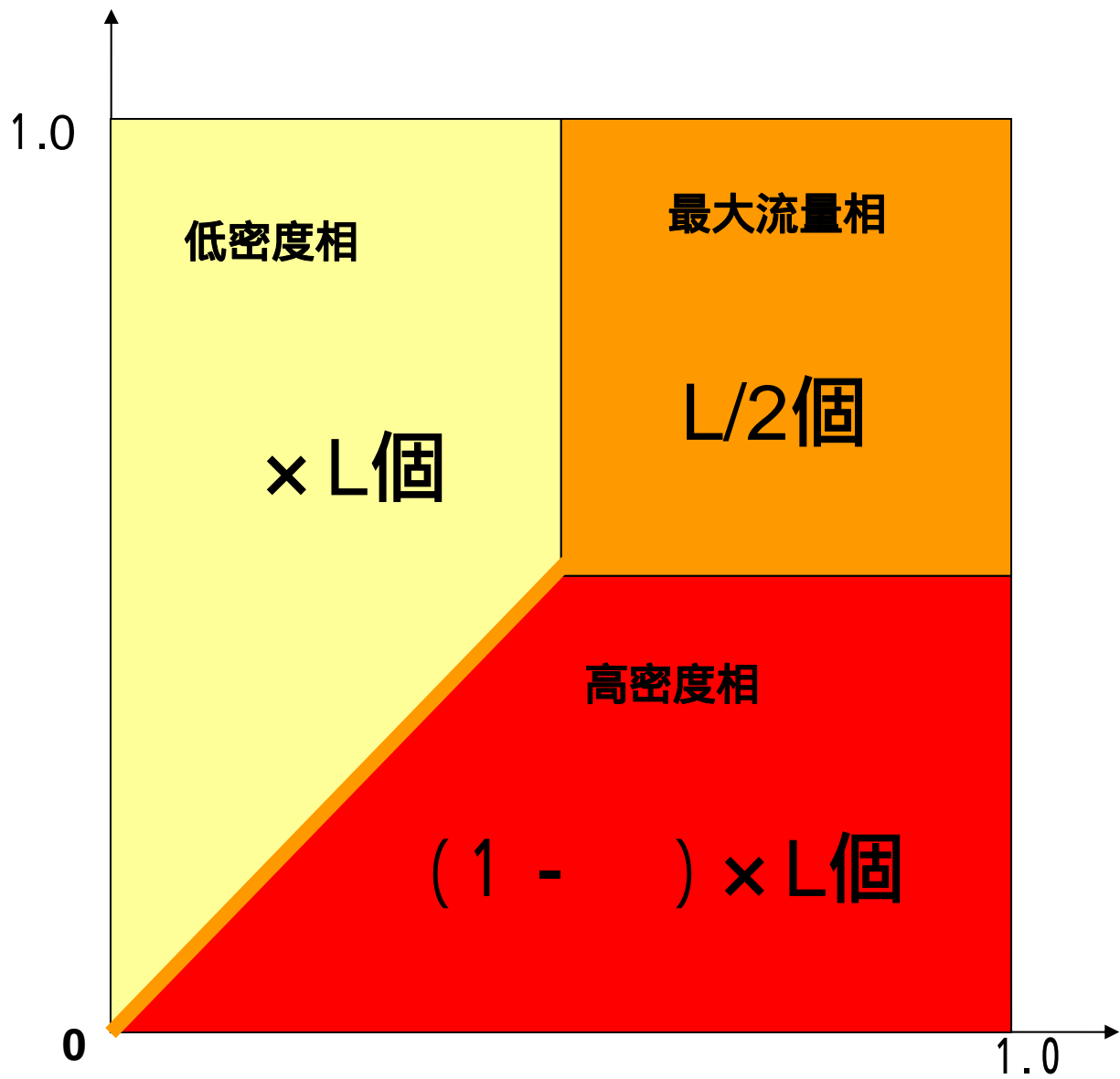
時間によらず粒子数が変化しなくなった状態を**定常状態**と定義する!!



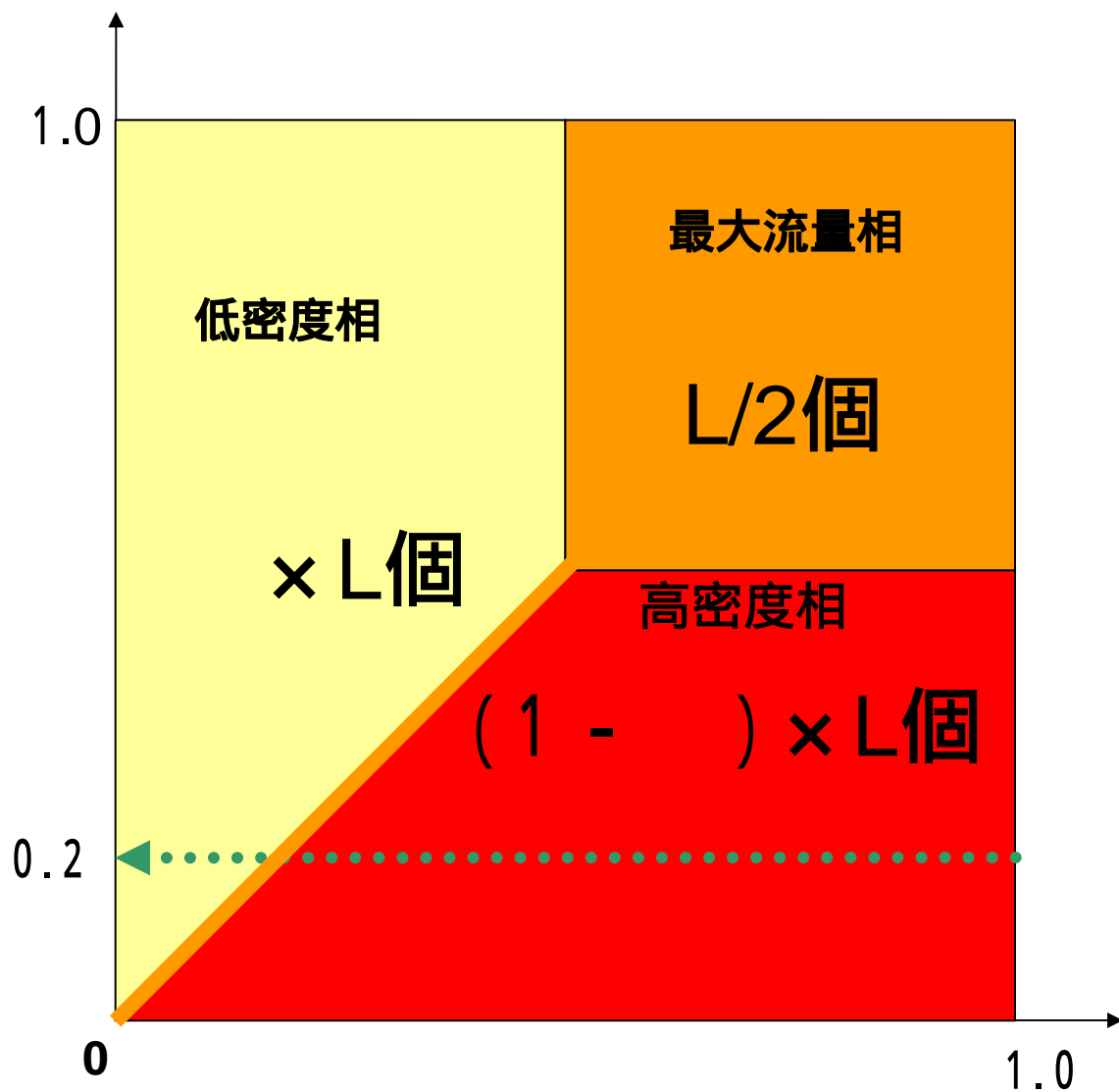
以下同様にして色々な、の組み合わせによる最終粒子数を調べると以下のことがわかった!!



*、に関しては低密度相と高密度相の境界線付近を除く

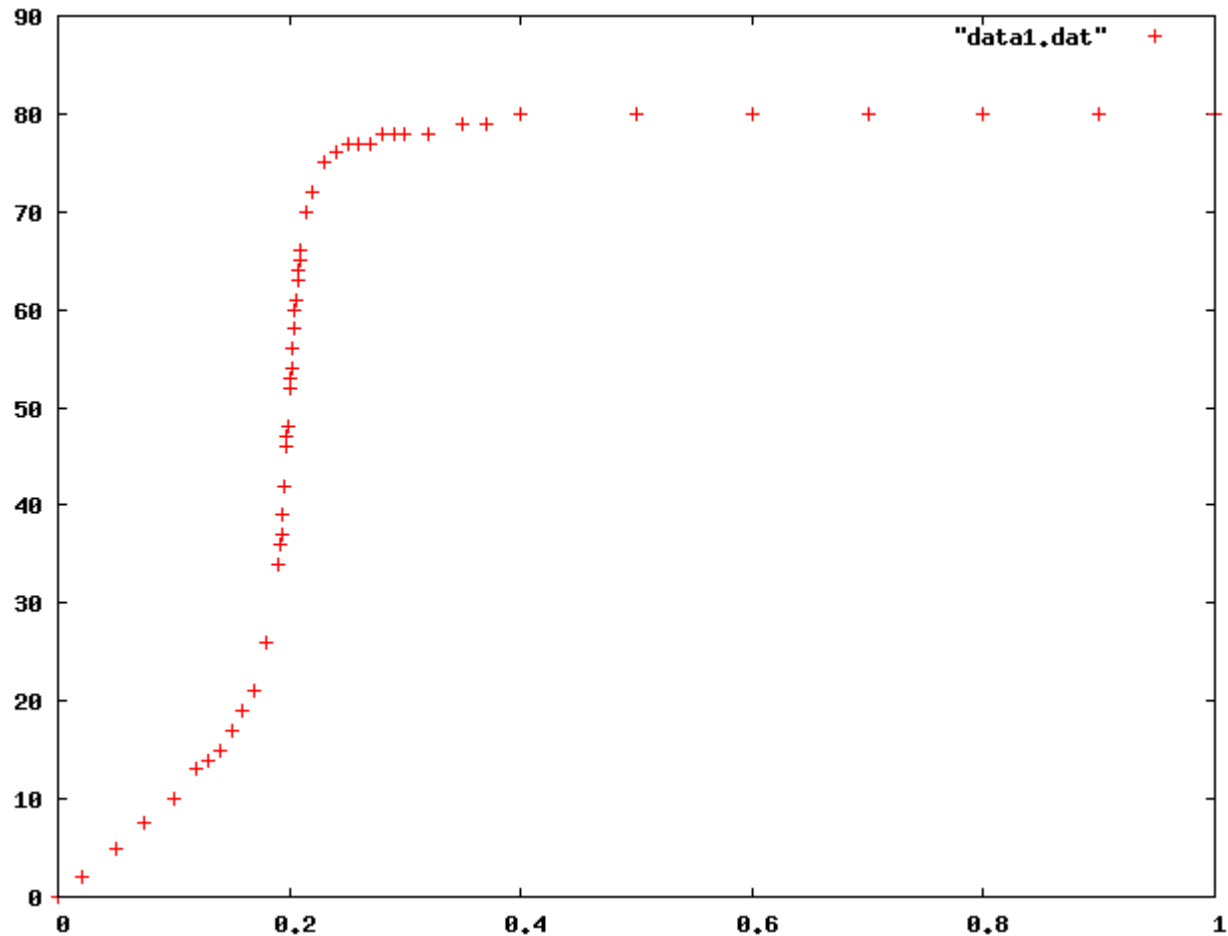


$L=100$, $\rho = 0.2$ で固定し、 $\phi = 1.0$ $\rho = 0$ へと変化させていき、各 $(\phi, 0.2)$ における最終粒子数を調べる。



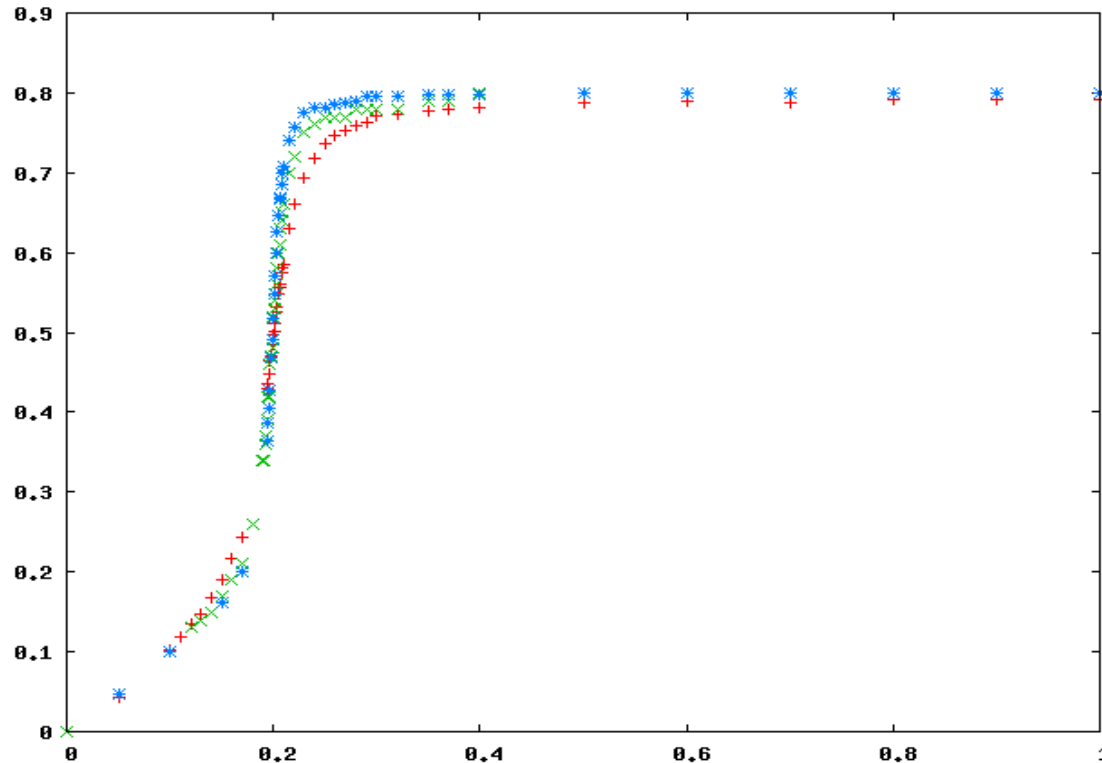
最終粒子数と の関係のグラフ

最終
粒子数



補足 L=50,L=100,L=150において $\alpha=0.2$ で固定、
 $\beta=1.0$ $\theta=0$ に変化させ、縦軸を密度にした。

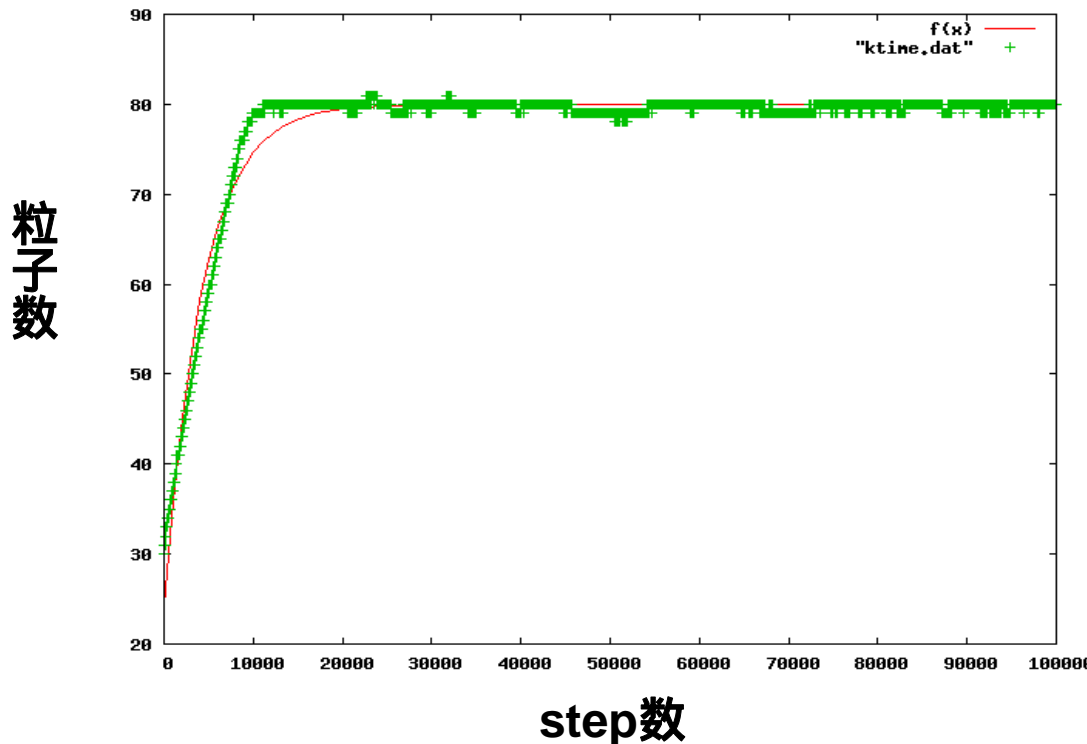
密度



5. 緩和時間とは

定常状態に至るまでの時間の目安である。

$L=100, \tau=1.0, \beta=0.2$



赤い曲線は緑の線が
 $n(t)=A-B\exp(-t/\tau)$

であると仮定し、最小二乗法によりfittingさせてA,B, τ の値を求めるとfitすることができる。

$t=0, t=$ での接線の交点が $t=$ である証明

(証明) $t=0, t=$ での接線の交点を求める

$$n(t) = a - c \cdot \exp(-t /) \quad \text{---}$$

両辺を t で微分する

$$\frac{d}{dt} n(t) = \frac{c}{ } \exp(-t /) \quad \text{---}$$

に $t=0$ を代入

$$\frac{d}{dt} n(0) = \frac{c}{ }$$

に $t=0$ を代入

$$n(0) = a - c$$

$$\therefore f(t) = \frac{c}{ } t + a - c \quad \text{---}$$

に $t=0$ を代入

$$n(0) = a - c$$

$$\therefore f(t) = \frac{c}{t} + a - c \quad \text{----}$$

に $t=$ を代入

$$\frac{d}{dt} n(\infty) = 0$$

に $t=$ を代入

$$n(\infty) = a$$

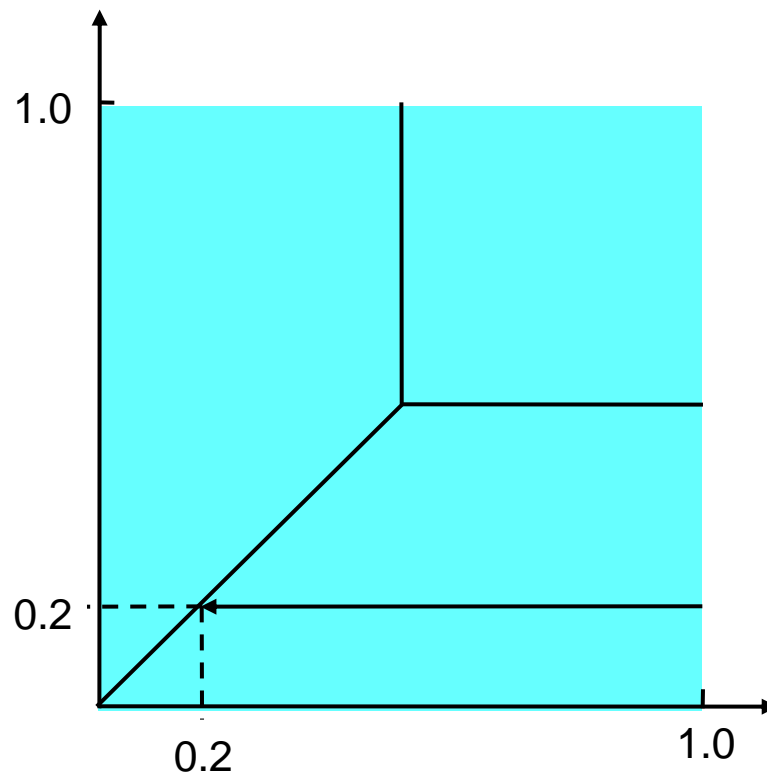
$$\therefore g(t) = a \quad \text{----}$$

, より

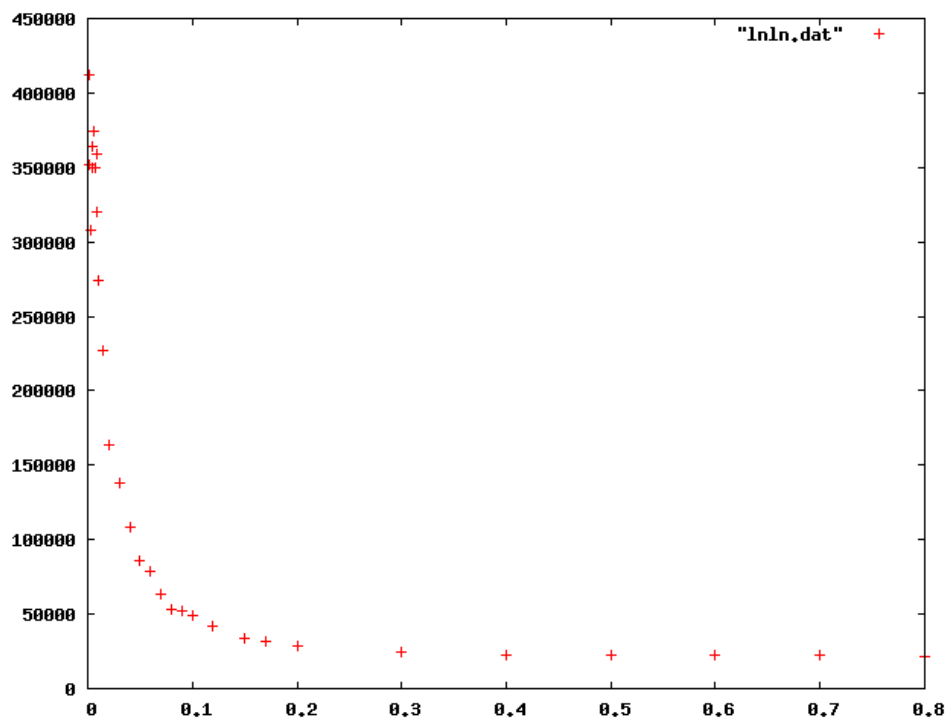
$t =$

6. 臨界指数

下図のように $\alpha = 0.2$ に固定し、各 (β, γ) について高密度、低密度の各境界に向かって緩和時間を測定する。

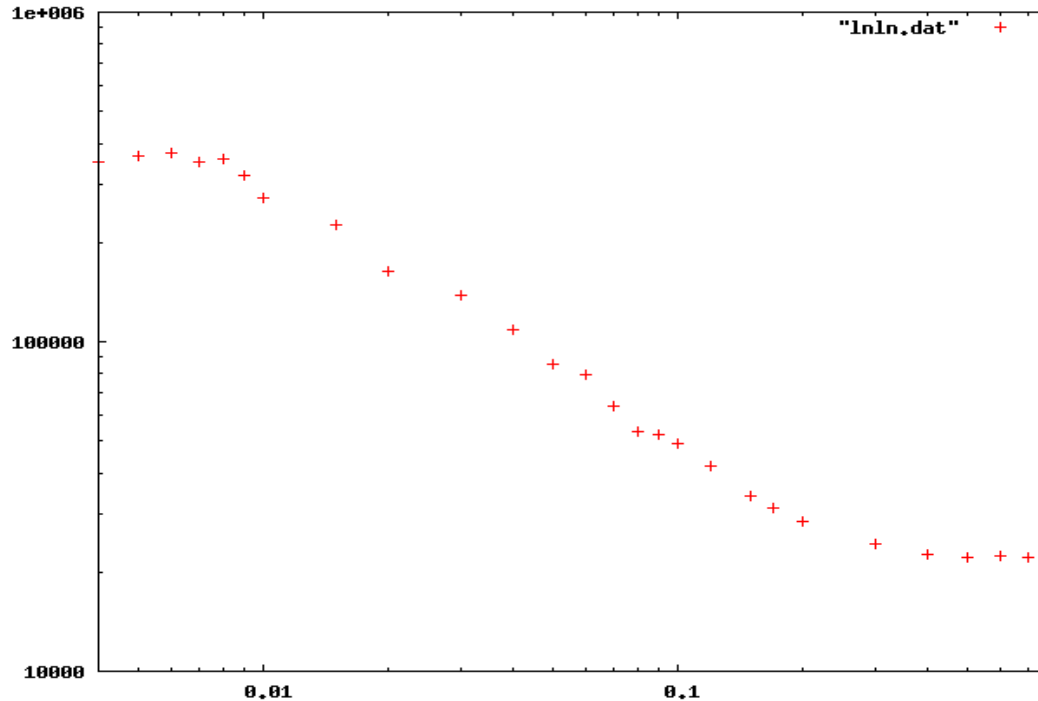


縦軸を $\ln|f(x)|$ 、横軸を x としたものをプロットすると



$x \rightarrow 0$ になるにつれ $\ln|f(x)|$ は急激に大きくなる

これを両対数グラフにとると



- $\tau = 0.2$ から 0.008 において傾き -0.766 の直線になる。

つまり、 $(\tau, \chi) = (0.2, 0.2)$ の境界線付近では

$$\chi = A(\tau)^{-0.766} \text{ なる。}$$

なぜならば...

両辺に対数をとると $\log \chi = -0.766 \log(\tau) + \log A$

この場合は

$$A = 8627$$

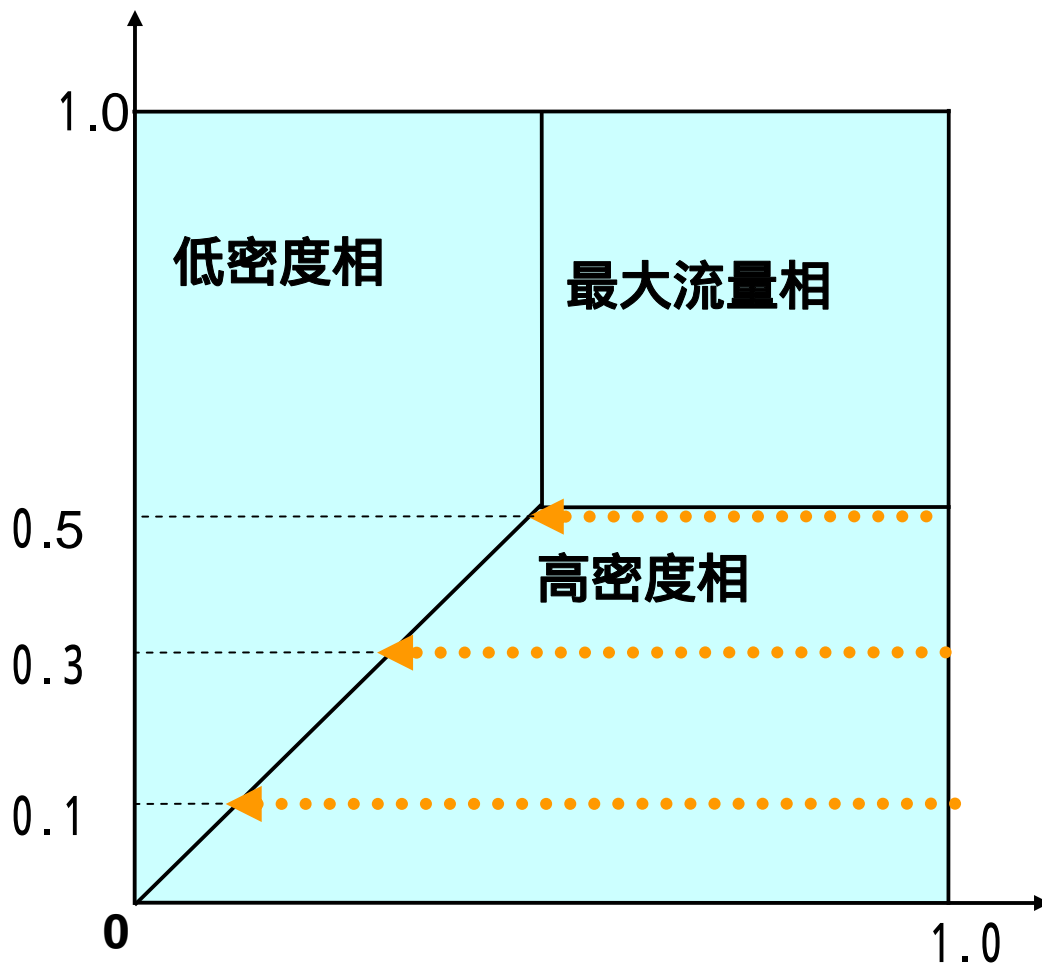
$$\tau = 0.766$$

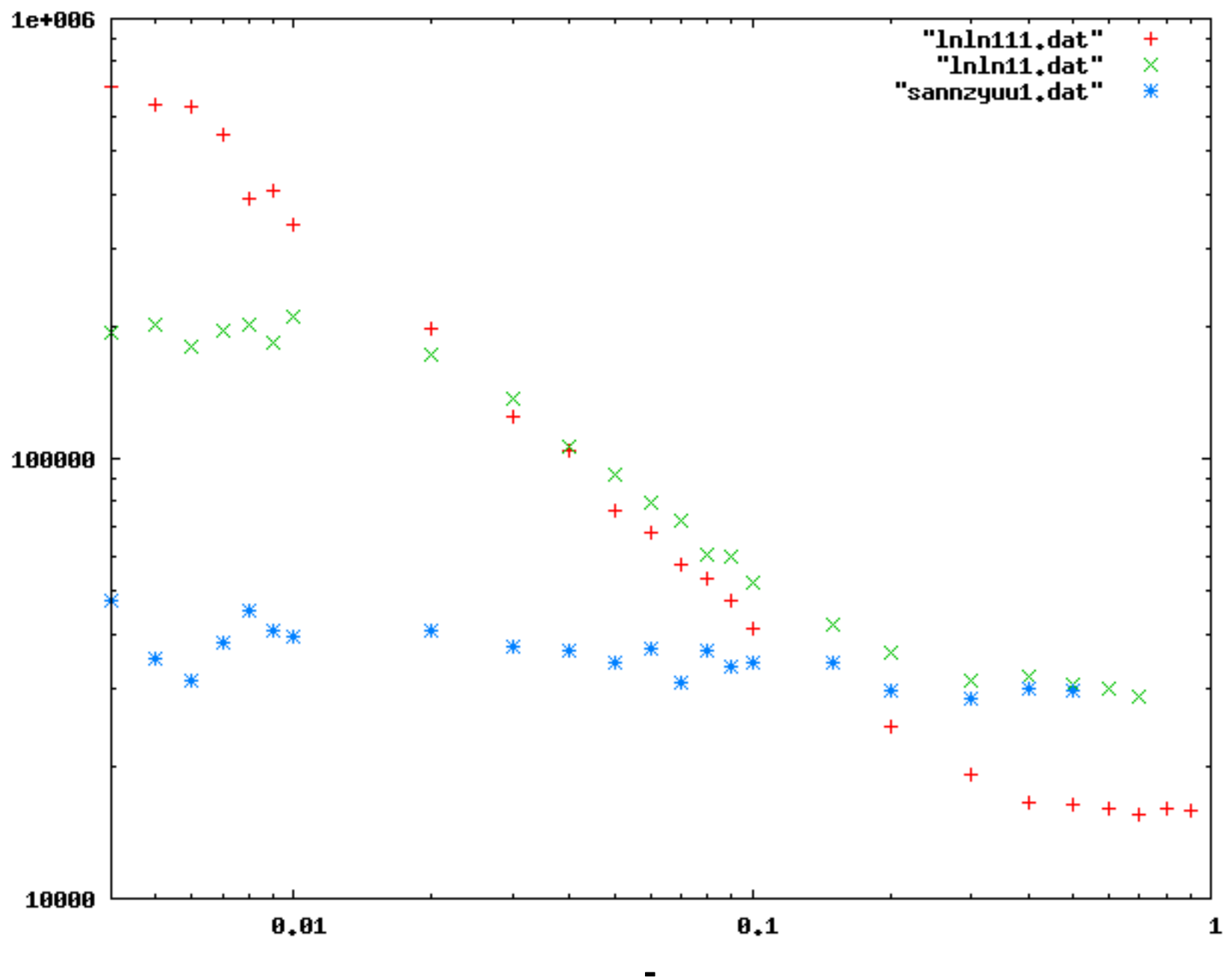
この指数 を**臨界指数**と呼ぶ。

臨界指数 は高密度相と低密度相の転移点(臨界点)近傍における緩和時間の値の増大の仕方の性質をあらわす。

同様にして下図のように $(\quad, \quad) = (0.2, 0.2)$

以外の転移点についても臨界指数 を調べる。





$(0.5, 0.5)$ の時 $= 0.089$

$(0.3, 0.3)$ の時 $= 0.719$

$(0.1, 0.1)$ の時 $= 0.980$

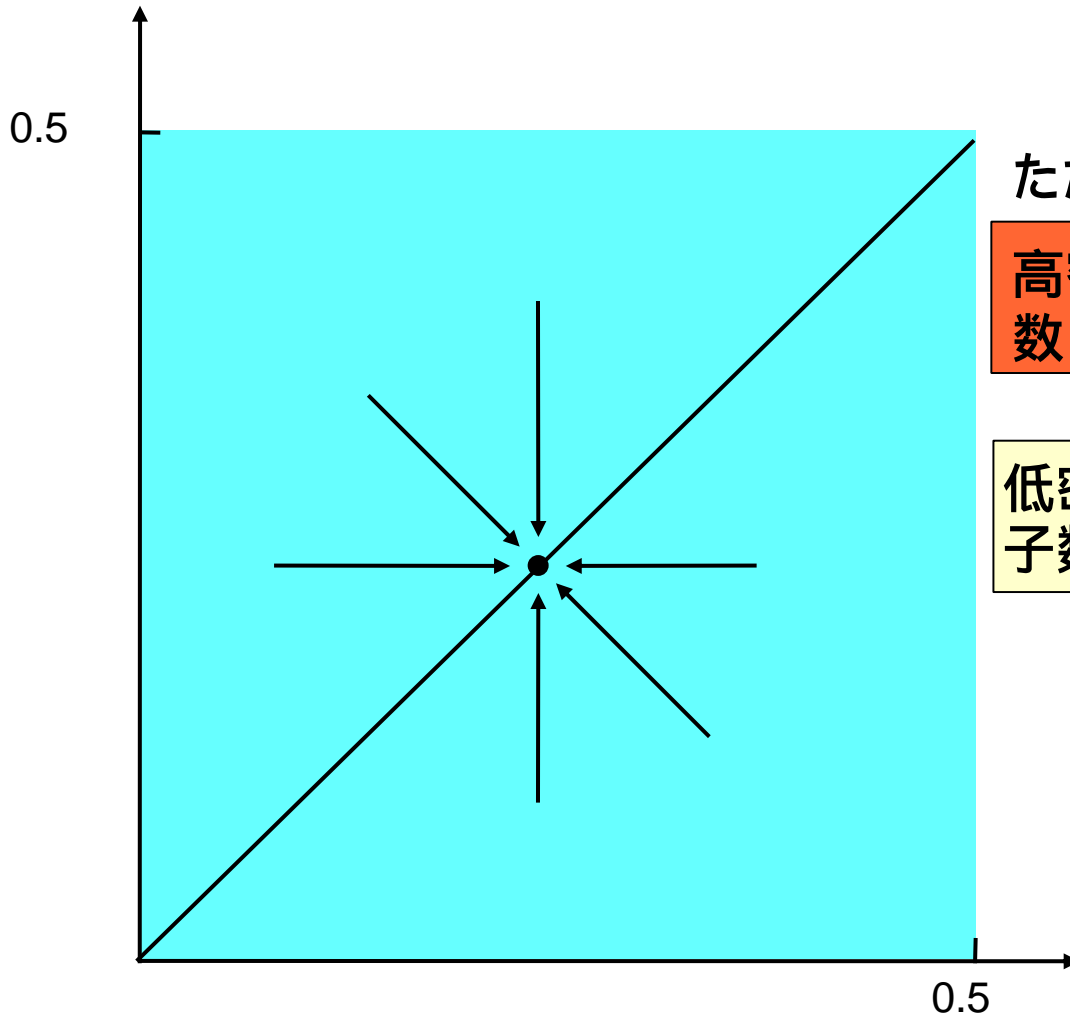
臨
界
指
数

大



、 が小さい臨界点ほど“**急激**”に緩和時間が増大する。

次に、臨界指数 が近づけ方に対して依存するのかを調べるために下図のように6方向から近づけてみる。



ただし、

高密度相から近づける時は初期粒子数は30個

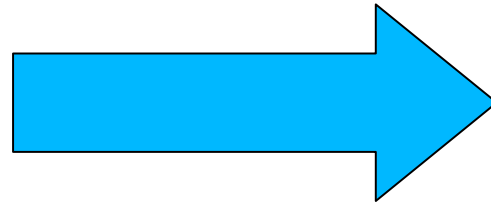
低密度相から近づける時は初期粒子数は70個

結果は(0.1, 0.1), (0.2, 0.2), (0.3, 0.3)においてはどの近づけ方をしてもそれぞれの臨界指数は、ほぼ一致した。

(0.1, 0.1)

0.98

(0.2, 0.2)

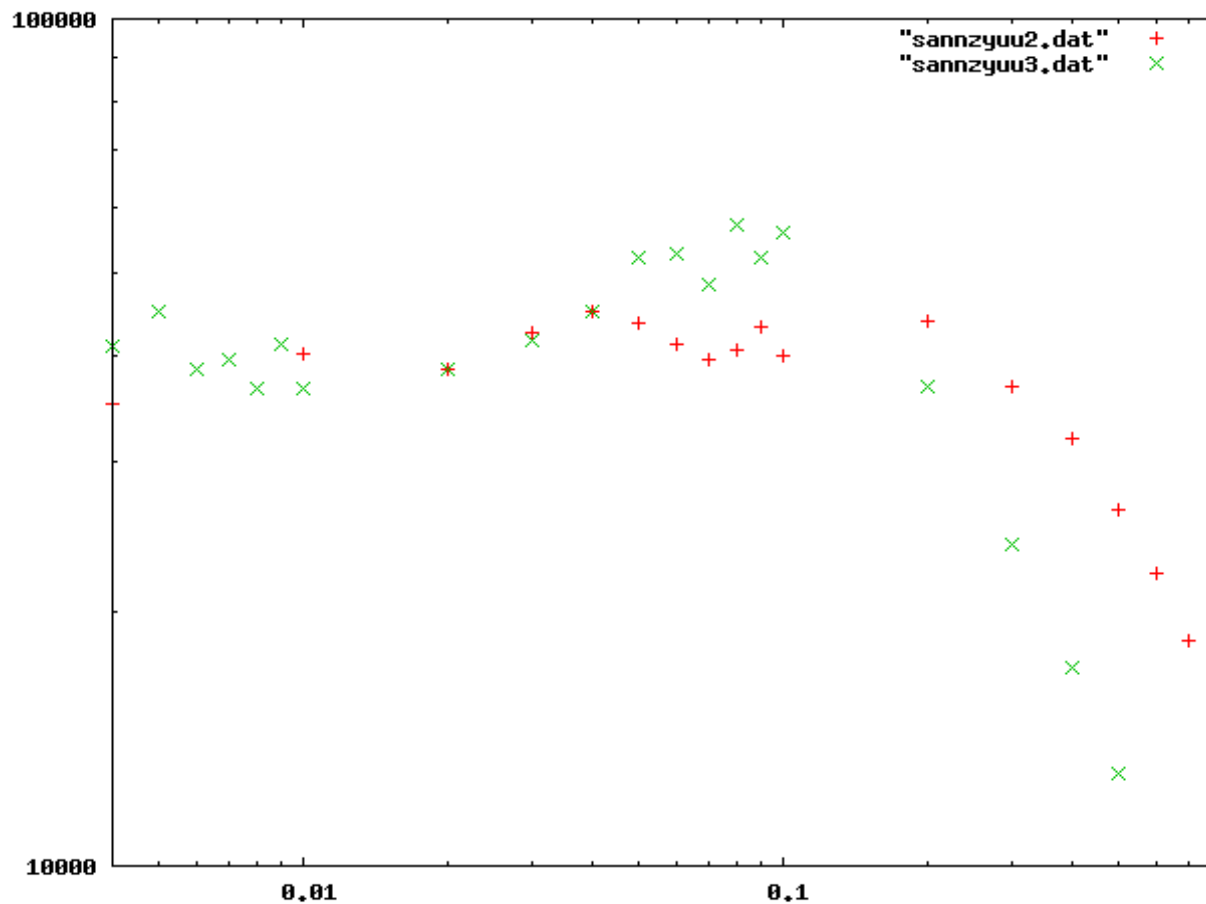


0.85

(0.3, 0.3)

0.73

しかし三重点(0.5, 0.5)においては以下のような結果がえられた。



7. まとめ

, の値によって定まる最終粒子数を定常状態とし、定常状態にいたるまでの時間の目安として緩和時間を導入した。

臨界点近傍では、緩和時間はベキ的に増大しその指数を臨界指数とした。

各転移点における臨界指数は近づけ方によらず(三重点を除く), の値が小さい転移点ほど臨界指数は大きくなった。